Práticas discursivas de professores de Matemática na condução de discussões coletivas

Discursive practices of mathematics teachers in conducting mathematical discussions

Cátia Rodrigues
Escola Secundária Viriato e CI&DEI
Portugal
catiamat@gmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Portugal
jpponte@ie.ulisboa.pt

Luís Menezes
Escola Superior de Educação, CI&DEI, Politécnico de Viseu
Portugal
menezes@esev.ipv.pt

Resumo. As discussões coletivas são uma ferramenta ao alcance do professor para promover a comunicação na aula de Matemática, na medida em que os alunos são chamados a apresentar as suas estratégias de resolução e a compará-las com as dos colegas, a justificar e argumentar sobre os raciocínios mobilizados nessas resoluções de uma tarefa proposta pelo professor. Quando o discurso da aula se centra em ideias algébricas, a simbolização e a generalização são potenciadas, já que os alunos são incentivados ao uso de uma linguagem cada vez mais formal e à ampliação dos seus raciocínios para além dos casos considerados. Com este estudo, qualitativo e interpretativo, procura-se compreender como três professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico gerem e promovem o discurso na aula durante a discussão coletiva de tarefas matemáticas visando o ensino da Álgebra. Os resultados mostram que os professores, apoiados em ações de ensino de elicitar, apoiar, informar e desafiar, encaminham o discurso por um processo cíclico de solicitação e discussão de muitas ideias e de filtragem, procurando levar os alunos a relacionar, generalizar e justificar ideias algébricas.
Palavras-chave: discurso; discussão coletiva; prática letiva; álgebra.

Abstract. Mathematical discussions are a tool within the reach of the teacher to promote communication in the mathematics class, as students are asked to present their resolution strategies, to

compare them with those of their peers, to justify and argue about the mobilized reasoning in these solutions of a task proposed by the teacher. When class discourse focuses on algebraic ideas, symbolization and generalization are enhanced, as students are encouraged to use increasingly formal language and broaden their thinking beyond the considered cases. This qualitative and interpretative study seeks to understand how three teachers of mathematics in the 3rd cycle of basic education manage and promote discourse during a collective discussion with mathematical tasks with a view to teaching Algebra. The results show that teachers, supported by the teaching actions of eliciting, supporting, informing, and challenging, direct the discourse through a cyclical process of requesting and discussing many ideas and of filtering, seeking to lead students to relate, generalize and justify algebraic ideas.
Keywords: discourse; mathematical discussion; teaching practice; algebra.

Recebido em janeiro de 2020
Aceite para publicação em maio de 2020

Introdução

A aprendizagem dos alunos está fortemente relacionada com a atividade que estes realizam, particularmente com a natureza das tarefas que resolvem, e, sobretudo, com as possibilidades de apresentação, justificação e argumentação das suas ideias, ou seja, da sua participação no discurso da aula (Bahr & Bahr, 2017; Cengiz et al., 2011; Cobb et al., 1997; Ponte et al., 2017; Stein et al., 2008). As discussões coletivas são, reconhecidamente, uma vertente da comunicação matemática que contribui para a aprendizagem, na medida em que nelas a comunicação é usada como um dispositivo do pensamento e novo significado é gerado – discurso dialógico (Truxaw & DeFranco, 2007). É nesse processo de interação, no qual professor e alunos se envolvem com vista a atingir um certo fim que emerge a negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986; Menezes et al., 2014). Para que essa negociação seja efetiva, é importante que o professor proporcione momentos em que os alunos tenham de apresentar, justificar, clarificar e confrontar ideias (Bishop & Goffree, 1986), relacionando os seus conhecimentos prévios, fundamentais à construção de novo conhecimento, com os que estão em discussão. Para tal, é importante que a aula de Matemática seja um espaço de aprendizagem rico onde os alunos se habituem a fazer e responder a questões e pedir e dar justificações, explicações e exemplos, respeitando todos os contributos partilhados (Bahr & Bahr, 2017; Bishop & Goffree, 1986; Sherin, 2002).

Quando as discussões coletivas têm como ponto de partida a apresentação de estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos para tarefas algébricas, o discurso pode levá-los a fazerem generalizações de ideias matemáticas que envolvem a ampliação dos seus raciocínios ou a comunicação para além dos casos considerados, identificando padrões, relações e estruturas (Carraher et al., 2008; Kaput, 1999). Neste processo de generalização, o professor incentiva os alunos a simbolizar e a avançar para um uso de uma linguagem progressivamente mais formal.

Na promoção deste tipo de discurso são determinantes as ações de ensino (Cengiz et al., 2011; Ponte et al., 2013; Rota & Leikin, 2002) que o professor realiza no sentido de encaminhar os alunos para a apresentação, justificação, reflexão, clarificação e argumentação sobre as ideias a partilhar, com vista à construção coletiva de novo conhecimento. A linguagem usada no processo de interação é fundamental para favorecer a construção de um conhecimento socialmente partilhado (Martinho, 2007; Menezes et al., 2014; Sherin, 2002).

O professor desempenha um papel importante na maneira como estrutura e regula o discurso, em particular nos momentos de discussão coletiva, através das perguntas que coloca e das oportunidades que cria para envolver os alunos no discurso da aula. No entanto, são pouco conhecidos os modos como o professor pode conduzir estes momentos de trabalho e como pode lidar com as situações imprevistas que neles ocorrem. Neste estudo, procura-se, assim, compreender como três professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico (7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade) gerem e promovem o discurso na aula durante a discussão coletiva de tarefas matemáticas visando o ensino da Álgebra.

Práticas de discurso matemático

Nas salas de aula em que é adotado um ensino exploratório, os alunos aprendem em resultado da atividade que realizam com tarefas propostas pelo professor, mas, principalmente, pela interação que estabelecem com o professor e com os colegas, com vista à comunicação das suas ideias (Ponte, 2005). O discurso gerado é a tradução de uma forma de pensar, de falar, de concordar, de discordar e de representar ideias matemáticas (NCTM, 1994). Ou seja, é mais do que a linguagem (Moschkovich & Zahner, 2018), é o que Sierpinska (1998) apresenta como linguagem em ação. O discurso reflete o que significa saber e fazer Matemática, isto é, a expressão do que os alunos aprendem e como aprendem. Daí a importância dada ao uso de representações no discurso gerado em sala de aula, não o restringindo à linguagem oral e escrita (Moschkovich & Zahner, 2018). Nessa interação, importa olhar para a forma como as ideias são comunicadas, assim como para o conteúdo matemático dessas ideias (NCTM, 1994; Sherin, 2002). Desta inter-relação entre os conteúdos e os processos matemáticos envolvidos nos contributos dos alunos e das normas sociais e sociomatemáticas em que eles participam emerge a negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986; Menezes et al., 2014).

As discussões matemáticas são um elemento potenciador do discurso na sala de aula, ao fomentar o questionamento entre os alunos, a explicação, a partilha de ideias, a justificação, a argumentação, a demonstração e a sistematização do conhecimento emergente deste processo (Bray, 2011; Bussi, 1998; Hufferd-Ackles et al., 2004). Assim, é fundamental compreender como o professor e os alunos se envolvem numa discussão, isto é, como interagem – processo de discurso – e que ideias matemáticas estão presentes nos seus comentários, questões e respostas – conteúdo do discurso (Sherin, 2002). Focando o processo do discurso, Sherin (2002) defende que uma discussão pode envolver vários ciclos do padrão discursivo (Figura 1): solicitação e discussão de muitas ideias – filtragem – solicitação e discussão de muitas ideias. O professor começa por convidar os alunos a apresentarem a sua resolução; de seguida, foca a sua atenção em aspetos específicos, como a clarificação ou justificação de um raciocínio, que dão origem a uma nova solicitação e discussão de ideias, através do pedido de mais contributos ou do estabelecimento de conexões entre o que foi apresentado e outros que considera importante analisar. Esta atuação do professor mostra que o discurso sofre um processo de estreitamento das ideias em discussão seguido de ampliação, devido ao seu caráter cíclico, ou seja, no fim de cada partilha, o professor direciona a atenção do aluno para um aspeto específico, solicitando novos contributos relacionados com o foco que introduziu no discurso.

Figura 1. Representação do processo do discurso (Sherin, 2002)

Esta forma de encaminhar o discurso evidencia que o professor, numa fase inicial, está mais interessado na apresentação de ideias para abrir a discussão, do que com o conteúdo das ideias partilhadas – conteúdo matemático não filtrado – para, posteriormente, direcionar o pensamento dos alunos para a reflexão de determinadas ideias que lhe permitem atingir o objetivo delineado para a aula – conteúdo matemático filtrado (Figura 2).

Na promoção deste tipo de discurso, o questionamento que o professor dirige aos alunos é fundamental e assume caraterísticas diferentes ao longo da sua condução. Inicialmente, as perguntas que o professor formula estão relacionadas com aspetos da resolução apresentada e só posteriormente inclui desafios para levar os alunos a estabelecer conexões entre resoluções e desenvolvimento de generalizações (McCrone, 2005). Assim, o professor pode recorrer a quatro tipos de questões – de verificação ou confirmação; de focalização; de reflexão ou de inquirição (Menezes et al., 2013; Ponte & Serrazina, 2000); e de provocação (Brodie, 2010) – para fomentar o discurso durante a dinamização da discussão.

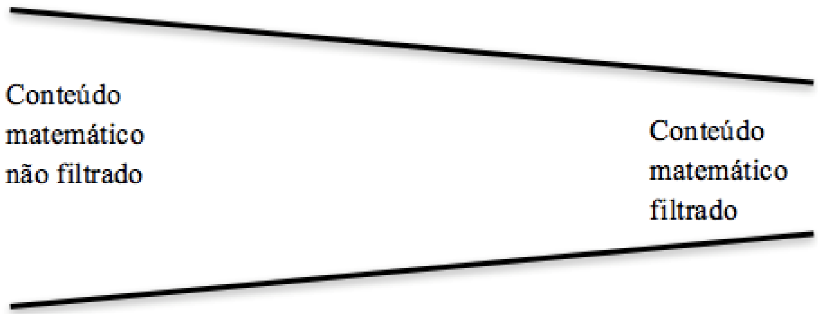


Figura 2. Representação do espaço de conteúdo matemático (Sherin, 2002)

As questões de focalização desempenham um papel importante ao centrarem a atenção do aluno numa ideia específica ou num erro (Menezes et al., 2013). Este tipo de questões revela os seus objetivos, no momento de trabalho autónomo do aluno, ao ajudá-lo a avançar na sua resolução. Durante a discussão coletiva, essas questões são também fundamentais ao concentrar a atenção dos alunos em algum aspeto específico, permitindo que estes se continuem a envolver na discussão. As questões de reflexão são usadas pelo professor quando pretende levar os alunos a desenvolverem uma compreensão mais aprofundada das ideias em jogo, através da explicação ou justificação de um certo raciocínio. As questões de provocação ajudam os alunos a pensar e a avaliar as ideias uns dos outros, já que estão associadas, fundamentalmente, ao convite para apresentação de diversas resoluções. O uso destes tipos de questões pelo professor denota que este perspetiva a comunicação como uma interação social, na qual os diversos participantes interagem, partilham ideias e constroem o conhecimento em conjunto, em oposição a uma visão tradicional da comunicação encarada como transmissão de informação, ideias e conhecimento, com o objetivo de persuadir o outro num ambiente de silêncio (Menezes et al., 2013). É desta procura por um entendimento partilhado para um certo conceito ou representação que emerge a negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986; Menezes et al., 2013). As questões de verificação têm como objetivo testar conhecimentos, mais do que encorajar o pensamento dos alunos, e são, geralmente, de resposta curta e imediata, servindo, fundamentalmente, para regular a forma como os alunos aprendem. Essas questões podem, também, assumir a modalidade de completar uma resposta iniciada pelo professor, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio através da atribuição de significado a uma ideia incompleta (Menezes et al., 2013).

Os diferentes tipos de questões têm um lugar fundamental na aula de Matemática enquanto ferramenta importante da comunicação, já que constituem convites à intervenção dos alunos, permitindo ao professor verificar e desenvolver o seu conhecimento (Menezes et al., 2013). Contudo, depois de formular uma questão, é necessário que o professor dê tempo aos alunos para pensarem antes de solicitarem uma resposta (Menezes et al., 2013; Rawding & Wills, 2012), para que os alunos possam efetivamente contribuir para as discussões.

Durante a dinamização da discussão, o professor recorre a um conjunto de ações de ensino que o ajudam a promover o discurso (Cengiz et al., 2011; Ponte et al., 2013; Rota & Leikin, 2002). Essas ações cumprem objetivos distintos de acordo com o discurso que está a decorrer. Por exemplo, o professor recorre às ações de convidar para envolver os alunos na discussão; às ações de apoiar/guiar, através de perguntas ou de outras intervenções, para estimular a participação dos alunos na resolução da tarefa; às ações de informar/sugerir para introduzir informação, apresentar argumentos, ou validar as respostas dos alunos; e às ações de desafiar para ajudar os alunos a produzir novas representações, interpretar ideias, formular conjeturas ou avaliar argumentos (Ponte et al., 2013).

O discurso da sala de aula é um elemento fulcral na aprendizagem da Matemática, pois só quando os alunos procuram comunicar as suas ideias aos outros, obter esclarecimentos sobre as ideias apresentadas, responder e formular perguntas é que desenvolvem uma compreensão aprofundada das ideias em jogo. As discussões enfatizam o discurso entre alunos e entre alunos e professor, com vista ao desenvolvimento da compreensão matemática. Para além da compreensão conceptual, as discussões matemáticas podem também contribuir para o esclarecimento de procedimentos (Moschkovich & Zahner, 2018). Na promoção do discurso, o tipo de questionamento que o professor dirige aos alunos é fundamental, como é destacado no estudo de Menezes et al. (2013). A exigente tarefa de gerir e fomentar o discurso na sala de aula de Matemática é também salientada no estudo de Sherin (2002), assim como as tensões que o professor enfrenta na tentativa de manter o equilíbrio entre o conteúdo do discurso e a forma de o promover.

Metodologia

Este estudo, de natureza qualitativa e interpretativa, na modalidade de estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994; Ponte, 2006), procura compreender como professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico gerem e promovem o discurso da aula durante a discussão coletiva de tarefas matemáticas visando o ensino da Álgebra. Este trabalho faz parte de um estudo mais alargado que tem como objetivo compreender como três professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico, num contexto de trabalho colaborativo, desenvolvem o seu conhecimento didático e a sua prática letiva na preparação e dinamização de discussões matemáticas coletivas no ensino da Álgebra (Rodrigues et al., 2018). Esse estudo decorre no contexto do projeto *Práticas de Discussão Matemática no Ensino da Álgebra* (PPDMEA), em que se assume esse trabalho colaborativo como uma estratégia de desenvolvimento profissional de professores capaz de potenciar mudanças na prática de ensino. Com esse propósito, a investigadora (primeira autora deste texto) dinamizou esse projeto em dez sessões de trabalho conjunto (SC), com duração de três horas cada uma, com o propósito de criar dinâmicas de colaboração entre os participantes na promoção de discussões coletivas.

Os participantes do estudo são os professores Ana, Afonso e Jorge (nomes fictícios) a lecionar os 7.º (Ana e Afonso) e 8.º anos de escolaridade (Jorge e Afonso), todos com uma larga experiência de ensino (entre 20 e 30 anos de serviço docente), mas com percursos profissionais distintos. Jorge é formador sobre o uso de tecnologias na sala de aula. Ana e Jorge costumam frequentar encontros de professores de Matemática e participar em projetos de investigação como este, ao contrário de Afonso. Aceitaram o desafio para se envolver no PPDMEA porque reconhecem potencialidades nos temas da Álgebra e das discussões. Com a sua participação no projeto, procuram respostas para o que consideram ser o formalismo da linguagem algébrica, aspeto inibidor da aprendizagem dos alunos, em especial a simbolização e a generalização. São professores que estão habituados a trabalhar em conjunto para preparar materiais didáticos para a sala de aula e para refletir sobre as suas experiências letivas. Daí reconhecerem no trabalho colaborativo uma mais valia para o desempenho da sua prática letiva.

A recolha de dados foi apoiada em observação participante de aulas (designadas por Aula_tema_data), entrevistas semiestruturadas no início e fim do estudo (designadas por EI_data ou EF_data, respetivamente) e análise documental das produções dos alunos. Sempre que não é possível identificar, nas transcrições das aulas, o aluno que está a intervir na discussão, este é identificado por "Aluno". A análise de dados resultou da análise de conteúdo através da definição de categorias de codificação, segundo um processo recursivo apoiado na revisão de literatura, que originou as categorias apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1. Dimensão, temas e categorias de análise

Dimensão	**Temas**	**Categorias**
Discurso	*Processo do discurso*	Solicitação e discussão de muitas ideias; filtragem; solicitação e discussão de muitas ideias
	Conteúdo do discurso	Conteúdo matemático não filtrado; conteúdo matemático filtrado
	Ações de ensino	Ações de elicitar; ações de apoiar; ações de informar; ações de desafiar

As tarefas *Palitos*, *Eleição do delegado de turma* e *Inscrição no ginásio* (Anexo) foram selecionadas para evidenciar a prática de discurso dos professores por serem representativas do conjunto de dados e contemplarem os tópicos Sequências e regularidades, Equações e Funções, dos temas dos 7.º e 8.º anos de escolaridade. As tarefas são brevemente descritas a seguir (Tabela 2).

Tabela 2. Breve caracterização das tarefas usadas na discussão

Tema	Tarefas
Sequências e regularidades	**Palitos** Esta tarefa apresenta uma sequência pictórica de vários retângulos construídos com palitos. Os alunos são convidados a determinarem termos próximos e distantes da sequência de figuras apresentada; a verificarem se um determinado elemento é ou não termo da sequência dada; a escreverem uma expressão para o termo geral da sequência apresentada; e a analisarem e explicarem uma expressão dada para o termo geral da sequência.
Equações	**Eleição do delegado de turma** Esta tarefa pretende que os alunos resolvam problemas envolvendo equações com denominadores, depois de interpretarem um conjunto de informações relativas ao número de votos de três candidatos.
Funções	**Inscrição no ginásio** A tarefa surge num contexto próximo dos alunos, onde são convidados a preencher uma tabela que relaciona o número de meses de frequência de dois ginásios com o valor total gasto; a elaborar um gráfico que relacione essa informação; a conjeturar sobre o ginásio mais vantajoso; e a traduzir por uma expressão a relação entre as duas variáveis.

Apresentação e discussão de resultados

A prática de discurso é apresentada e analisada para cada professor (Ana, Jorge e Afonso), de forma integrada com as ações de ensino que este usa para promover o discurso, de forma a se compreender melhor como fomentam o discurso durante a dinamização de uma discussão.

Professora Ana

Na tarefa *Palitos*, a professora dá início à discussão convidando um grupo de alunos a explicar como verificaram se um determinado número é termo de uma sequência:

Constança:	Nós já sabíamos que a lei de formação era $3n + 1$ e então fizemos a operação inversa, fizemos $76 - 1$ a dividir por 3. (...)
Professora:	Então e quem não tem a lei de formação como é que resolveria? Não resolve? (...) Já agora vejam as outras resoluções. (...)
Aluno:	Então e como é que eles descobriram que era logo o 25?
Professora:	Tens que perguntar ao grupo que fez isto.
Aluno:	Fizemos por tentativas. (Aula_Sequências_nov 2013)

A professora, apoiada em ações de elicitar, começa por solicitar a um grupo de alunos para apresentar a sua resolução, com vista a ter ideias para fomentar o discurso – solicitação e discussão de muitas ideias – mas logo de seguida, desafia os alunos, através de uma pergunta, a pensarem numa ideia específica ("Então e quem não tem a lei de formação como é que resolveria? Não resolve?") – filtragem. A professora opta por interromper a exposição da aluna, porque encontra no seu discurso uma ideia importante para ser aprofundada e desconstruída, na medida em que os alunos podem responder ao solicitado sem ter necessidade de generalizar a relação em jogo. A intervenção da aluna poderia induzir os colegas na ideia de que seria necessário começar por escrever o termo geral para verificar se um determinado número pertence à sequência. Apoiada em ações de desafiar, encaminha o discurso para a clarificação dos raciocínios que estão a ser apresentados e para a análise de outras resoluções que não recorrem à escrita do termo geral. Essa opção leva a que os alunos formulem questões que, embora lhe sejam dirigidas, a professora os incentiva a colocarem aos colegas. Valoriza o questionamento entre os alunos, na medida em que mostra como os alunos se envolvem no discurso da aula, procurando clarificar as suas ideias e desenvolvendo uma melhor compreensão sobre os raciocínios em jogo: "Querem perceber, ou querem perceber melhor (...) porque à partida ou está a perceber uma diferente ou pareceu-me que não percebi" (EF_jun 2014).

Dando continuidade ao discurso iniciado com a intervenção do grupo de alunos anterior, a professora introduz mais um grupo no discurso da aula, com a finalidade de alertar a turma para a importância do rigor da linguagem usada na comunicação das suas ideias aos outros:

Professora: Esta é a resolução aqui deste grupo da frente e eu fiquei muito confusa. (...) Então, 15 é igual a 46? 20 é igual a 61? E 25 é igual a 76? Não, eu sei. Deixa só dizer, é só para vos dizer que isto ficou assim escrito, não puseram mais nada. (...) Então os meninos deste grupo têm agora oportunidade para se defenderem.

Viviane: A figura 15 era igual a 46 palitos, em 20 havia 61 e em 25 havia 76. (...)

Professora: Experimentaste com 15, estás a perceber? Mas foi isto que o vosso grupo me entregou (...) não estão a conseguir explicar nada do que estão a pensar, está bem? (impercetível) Com este aspeto claro que eu não quero (...) bastava ter dito a figura 15 tem não sei quantos palitos e se quisesse mostrar fazia esta conta. (Aula_Sequências_nov 2013)

Apoiada em ações de informar, a professora mostra aos alunos a importância de analisarem resoluções incorretas, com vista a melhorar a sua comunicação escrita. Encaminha o discurso para a análise de uma ideia específica (erro cometido) – filtragem – promovendo a avaliação dos raciocínios em jogo. Recorre a ações de desafiar para incentivar a aluna a justificar a sua resolução, já que reconhece potencial no raciocínio seguido, embora comunicado de forma matematicamente inválida. Perante a dificuldade da aluna em se exprimir, a professora opta por oferecer um raciocínio para a resolução exposta, de modo a esclarecer a turma da incorreção da estratégia apresentada. Tem o cuidado de sublinhar como devem comunicar o raciocínio exposto de forma correta. Ao decidir introduzir este grupo na discussão, a professora explora duas ideias importantes com os alunos: rigor da escrita matemática e apresentação de outra resolução para a verificação da pertença de um termo a uma sequência, embora menos potente do ponto de vista do uso da linguagem algébrica.

Focando o conteúdo das ideias matemáticas, fica claro na prática da professora que o seu objetivo inicial estava relacionado com a apresentação de ideias que estimulassem o início da discussão – conteúdo matemático não filtrado. De seguida, através da filtragem das ideias partilhadas, a professora avança para a análise de raciocínios específicos, como a desconstrução de uma ideia e a forma matematicamente válida de a comunicar – conteúdo matemático filtrado.

A professora continua a promover o discurso entre os alunos, levando-os agora a interpretar uma expressão dada para o termo geral da sequência, oferecendo um raciocínio para os alunos analisarem:

Professora:	Vocês estão a tentar explicar uma expressão matemática sem olhar para a figura. Será que não conseguimos pensar na figura e ver o que é que aquelas coisas têm a ver com os palitos (...) que lá estão? (...) Agora ninguém me pode tentar dizer que a Aurora pensou 4 vezes n menos abrir parêntesis n menos 1 fechar parêntesis, pois não? (...)
Eva:	Eu acho que é o número de palitos da figura. (...) E depois n menos 1 é quando se acrescenta aquilo no meio.
Professora:	O n menos 1 é quando se acrescenta aquilo no meio? (...)
Clara:	Nós quando juntamos os quadrados temos que tirar 1 do meio se não ficam lá dois. (...)
Aluna:	É o número da figura e o n menos 1 é o número de palitos que se tira do meio. (...)
Professora:	O quê, o quê? (...)
Aluna:	Ela multiplicou o número de lados de um quadrado.
Professora:	Pelo número da figura. E depois?
Aluna:	Tirou os palitos que servem para unir os dois. (...)
Professora:	O número de palitos que tiramos é sempre o quê? O número da figura menos um. Na figura 3 tira-se 2. Na figura 2 eu tiro 1. (...) Na primeira não tiro. Não sobreponho nada. (Aula_Sequências_nov 2013)

A professora apoia-se em ações de desafiar, para levar os alunos a interpretar e justificar uma expressão dada para o termo geral da sequência. Procura promover, deste modo, um raciocínio potente e que merece ser discutido, já que envolve a análise do padrão que configura a imagem e não a simples identificação do padrão repetitivo. A professora tem um objetivo claro em relação ao raciocínio que pretende que os alunos analisem – conteúdo matemático filtrado. Ao oferecer um raciocínio para os alunos analisarem – solicitação e discussão de muitas ideias – pretende que estes contemplem na sua justificação a relação entre ordem e termo da figura. Esclarece, apoiada em ações de informar, que uma justificação baseada somente na leitura em linguagem natural da expressão dada em linguagem matemática não é uma justificação válida. Opta por fazer este tipo de alerta por ter sido uma justificação apresentada por alguns alunos, assumindo ser indispensável clarificar que esse tipo de justificação não é matematicamente válida. O raciocínio que a professora oferece mostra-se bastante pertinente, na medida em que desencadeia por parte dos alunos a proposta de alguns argumentos. Perante esses contributos, recorre a ações de apoiar para repetir o argumento apresentado pelos alunos, mas sob a forma de interrogação – filtragem. Com essa ação, mostra aos alunos que estão a avançar por um bom caminho, contudo, é preciso completar ou clarificar esse argumento. O seu objetivo é alcançado e as justificações começam a emergir, levando-a a recorrer a ações de apoiar para completar os contributos dos alunos e ajudar a avançar com as suas explicações. Apoia-se, ainda, nessas ações para verificar a validade de uma certa conclusão, concretizando com alguns casos particulares.

Professor Jorge

Este professor, através de ações de elicitar, também recorre à introdução de uma resolução diferente das demais que surgem na turma, na tarefa *Eleição do delegado de turma*, e menos poderosa do ponto de vista do uso da linguagem algébrica (Figura 3) para levar os alunos a analisar o segundo passo da resolução:

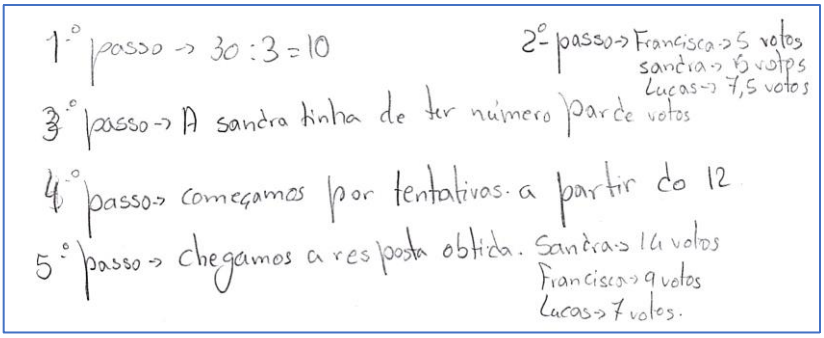

1.º passo -> 30 : 3 = 10
2.º passo -> Francisca -> 5 votos
sandra -> 15 votos
Lucas -> 7,5 votos
3.º passo -> A sandra tinha de ter número par de votos
4.º passo -> começamos por tentativas a partir do 12
5.º passo -> chegamos a resposta obtida. Sandra -> 14 votos
Francisca -> 9 votos
Lucas -> 7 votos.

Figura 3. Resolução baseada na produção de um texto matemático

Professor: Eu acho que há ali uma coisa que não está muito bem naquele segundo passo. Por que é que aquele segundo passo está mal?
Mafalda: Então porque não há meios votos. (...)
Professor: A conclusão está correta, mas esse segundo passo não está muito correto. (...)
Aluno: Não podemos ter 7 votos e meio.
Professor: Exatamente. (Aula_Equações_jan 2014)

O professor, apoiado em ações de informar e de desafiar, incentiva os alunos a analisarem o segundo passo da resposta, sinalizando um raciocínio errado e incitando a procura de uma justificação para o erro. Com essa ação pretende ter ideias para dar início à discussão – solicitação e discussão de muitas ideias. Os alunos correspondem ao solicitado e apresentam algumas justificações, contudo o professor não se dá por satisfeito e continua a salientar a existência de um erro no segundo passo da resolução, com o propósito de levar os alunos a apresentarem outras justificações. A insistência do professor leva os alunos à introdução de mais argumentos para a justificação solicitada:

Aluno:	5 mais 15 mais 7 e meio dá 27 e meio e não vai dar 30. (...)
Professor:	A conclusão do grupo é importante. (...) Porque perceberam que a Sandra tinha que ter sempre um número par de votos, porquê? Porque o Lucas ia ter metade da Sandra. Agora, por que é que aquele segundo passo está mal? (Aula_Equações_jan 2014)

O professor, apoiado em ações de informar e de apoiar, valoriza as justificações introduzidas e filtra os contributos mais importantes ("perceberam que a Sandra tinha que ter sempre um número par de votos, porquê? Porque o Lucas ia ter metade da Sandra"), mas recorre às ações de desafiar para incentivar os alunos a pensar novamente no segundo passo da resolução, por ainda não terem oferecido todas as justificações válidas para a sua incorreção em termos do rigor da escrita. Contudo, direciona mais o discurso – filtragem – levando os alunos a pensar sobre os votos específicos da Francisca e da Sandra:

Professor:	Qual era a relação entre os votos da Sandra e da Francisca?
Mafalda:	5 votos de diferença.
Professor:	Então e quantos estão ali no quadro?
Aluno:	10.
Professor:	Deixa ficar o 7 e meio, não há problema nenhum. Assim, já está mais de acordo, apesar de que não são 30 votos. Pronto, mas o que o grupo pensou foi o seguinte: bem, pelo menos eu já sei que a Sandra nunca pode ter um número ímpar de votos, portanto e já restringiu nos 30 votos (...) e depois fizeram por tentativas, não foi? (Aula_Equações_jan 2014)

Com essa opção, o professor conduz os alunos à conclusão pretendida e à apresentação de várias justificações para o raciocínio subjacente ao segundo passo. O encaminhamento que introduz no discurso da aula alerta os alunos para a importância de a escrita ser matematicamente rigorosa e exprimir claramente os seus raciocínios. Este aspeto da comunicação também foi valorizado pela professora Ana na condução do discurso na tarefa *Palitos*.

Para o professor Jorge, o envolvimento dos alunos no discurso da aula cumpre bem o objetivo de lhes mostrar os aspetos que precisam de ser clarificados ou corrigidos numa resolução:

> Permitem, pelo menos, junto dos alunos perceber por que é que erraram, ou por que é que este caminho é o melhor, ou por que é que este é o pior. E isso é possível ser feito com a discussão e se houver confronto de ideias e de resoluções. (EF_jun 2014)

O discurso que o professor promove na sua aula evidencia que, numa primeira fase, estava mais preocupado em ter muitas ideias para serem discutidas – solicitação e discussão de muitas ideias – do que com o conteúdo das ideias – conteúdo matemático não filtrado. Seguidamente, como pretende alertar os alunos para o rigor da escrita matemática – conteúdo matemático filtrado – foca a atenção dos alunos num determinado passo da resolução ("Por que é que aquele segundo passo está mal?") e, mais tarde, oferece um raciocínio para os alunos analisarem ("Qual era a relação entre os votos da Sandra e da Francisca?") – filtragem – que conduz à solicitação e discussão de mais ideias.

Dando continuidade ao discurso da aula, o professor introduz mais um grupo na discussão, com o propósito de alertar os alunos para resoluções mais potentes do ponto de vista do uso da linguagem algébrica:

> Professor: Vou pedir rapidamente a este grupo (...) para perceberem que a abordagem mesmo sendo feita com equações, nem sempre pode ser igual em todos os grupos. (...) Qual foi a diferença entre a resolução daquele grupo para este grupo?
>
> Filipa: Nós aqui pusemos o x na Francisca e eles puseram na Sandra.
>
> Professor: Obviamente que se a minha incógnita, o meu x é posto numa pessoa diferente, todos os outros também alteram. Ou seja, enquanto aqui o x vai representar os votos da Sandra, ali foi os da Francisca. Claro que os da Sandra tem mais, vai ser. Vai ser que expressão? Já não é x menos 5 mas sim x mais 5. E o Lucas vai ter metade de qual? Vai ser metade daquele valor. (...) Então e será que havia possibilidades de fazer uma equação daquelas sem denominadores? (Aula_Equações_jan 2014)

O professor pretendia levar os alunos a analisar e compreender resoluções distintas, contudo interrompe a explicação da aluna e introduz as justificações e comparações que teria sido possível ser a aluna a fazer. Este é um aspeto do discurso difícil de saber gerir em sala de aula e o professor reconhece a sua dificuldade: "Quando dá conta já estou a ultrapassar o aluno, eu isso reconheço que é um defeito que, às vezes, pelo menos eu tenho, não nego" (EF_jun 2014). A vontade que tinha em levar os alunos a pensarem numa resolução que trazia novidades às já apresentadas – escrita de uma equação não envolvendo o uso de denominadores – compromete o discurso da aula, porque, mesmo sem ser a sua intenção, o professor deixou-se envolver na partilha de ideias introduzindo ideias importantes que poderiam ter sido os alunos a apresentar. O professor justifica esta ocorrência pelas expectativas que os professores têm para a aula e, em particular, para a discussão: "Porque uma pessoa tem uma expectativa quando vai para uma aula" (EI_set 2013). Ter objetivos claros sobre o que se pretende atingir com a discussão é importante, mas não se pode sobrepor à intervenção dos alunos. Neste caso, o professor pretendia fazer surgir no discurso da aula a análise de três equações diferentes para traduzir a mesma informação em linguagem verbal, porque considera importante que "as pessoas percebam que há maneiras diferentes de pensar e verem no confronto que chegam ao mesmo resultado pensando por maneiras diferentes" (EF_jun 2014).

A sua provocação é acolhida pelos alunos e a estratégia que queria fazer emergir aparece:

Tomás:	O do Lucas é x.
Professor:	Vamos pôr aí o x a dizer. Se o do Lucas for o x. Só quero que me ponhas aí a equação. Se o Lucas for o x.
Tomás:	A Sandra fica $2x$. (...) E a Francisca fica com $2x$ menos 5.
Professor:	A Sandra fica com o dobro. Certo. E a Francisca fica com menos 5 que a Sandra.
Tomás:	$2x$ menos 5.
Professor:	Reparem que não tem denominadores. Portanto, reparem: apesar de ser com equações tenho resoluções diferentes. Às vezes até consigo escolher o que é mais fácil. Enquanto aqui vocês têm que trabalhar com denominadores, ali ficou sem denominadores. (Aula_Equações_jan 2014)

O professor acompanha a exposição e negociação de ideias do aluno, através de ações de apoiar, e incentiva-o a exprimir, antes de escrever a equação, uma relação matemática que traduza o número de votos de cada um dos intervenientes da tarefa. Essa opção favorece uma melhor compreensão dos monómios envolvidos na equação pelos restantes alunos da turma e que não pensaram nessa estratégia. O professor conclui a intervenção do aluno reforçando a pertinência de se escreverem equações diferentes para a mesma informação apresentada em linguagem natural e a vantagem de se mobilizarem conceitos matemáticos ligeiramente diferentes com níveis de dificuldade também distintos, através de ações de informar.

Estes segmentos mostram que o discurso promovido pelo professor evolui da solicitação e discussão de muitas ideias para a análise de uma resolução mais potente que não trabalha com casos particulares (equação) – filtragem das ideias partilhadas – que desencadeia uma nova solicitação e discussão de mais ideias, através do convite à escrita de uma equação sem denominadores. Este encaminhamento que imprime no discurso mostra a progressão do conteúdo das ideias matemáticas partilhadas, da tentativa e erro para o uso da linguagem algébrica.

Professor Afonso

A prática de condução do discurso deste professor mostra que aproveita a discussão da tarefa *Inscrição no ginásio* para incitar os alunos a encontrarem justificações mais poderosas do ponto de vista algébrico e que relacionem as variáveis em estudo. Neste episódio, para além do professor e dos alunos, participa também a investigadora, porque o professor mostrou desejo nessa intervenção e se revelou importante seguir e ampliar uma ideia que não estava a ser aproveitada pelo professor:

Investigadora:	A Anita disse que fez, para descobrir quanto pagaria ao fim de 4 meses adicionou mais 40 euros ao valor pago até aos 3 meses. Será que nós poderíamos preencher aquilo de uma outra forma? Vamos imaginar que nós não sabíamos quanto tínhamos pago ao fim dos 3 meses. Como é que nós descobríamos aquele valor?
Aluno:	210 menos 50.
Investigadora:	Porquê, 210 menos 50?
Aluno:	Porque é o 210 menos a inscrição.
Investigadora:	E depois o que farias ao que te dava, que era 160?
Aluno:	Dividia-se pelos 4 meses.
Professor:	Pelos 4 meses, muito bem.
Investigadora:	Mas tu ainda não sabias que eram 4 meses.
Filipe:	Então 4 vezes 4, 16.
Investigadora:	O que é que nós conhecemos?
Aluno:	Dividimos por 40. (...)
Investigadora:	Que era o valor de...
Aluno:	Mensalidade. (...)
Professor:	Isso é que ia dar os 4, não é? (Aula Funções_12 mar 2014)

O questionamento realizado pelo professor leva os alunos a justificar raciocínios e argumentar, relacionando as três variáveis (número de meses, valor da inscrição e valor da mensalidade). Ações de desafiar são determinantes ao promoverem esta reflexão sobre as variáveis em jogo. Ações de apoiar são, também, fundamentais no desenvolvimento do discurso, já que transmitem confiança aos alunos para avançarem com as suas justificações e argumentações, na medida em que os seus contributos são validados e lhes é mostrada a sua razoabilidade. Neste momento da discussão, o discurso é encaminhado para uma nova solicitação e discussão de ideias, decorrentes da filtragem introduzida, com a apresentação de uma estratégia para análise. Com esta introdução, há uma intenção clara de promover uma maior compreensão da relação em estudo, procurando relacionar as diferentes variáveis e envolver os alunos, de modo informal, na resolução de equações do 1.º grau recorrendo somente às operações aritméticas inversas, a partir do estabelecimento informal da expressão da função afim subjacente à situação dada – conteúdo matemático filtrado.

O professor encaminha também o discurso para a generalização da expressão da função afim:

Filipe:	Então na pergunta 4 dissemos assim: n que é o número de meses vezes 45 que é o Em Forma. (...) E o 100 Calorias foi 40 vezes o número de meses, então foi n vezes 40 mais 50. (...)
Jaime:	Ó stôr, a primeira é a mesma coisa que ter y igual a kx e a segunda é a mesma coisa que ter y igual a kx mais b. (...)
Professor:	kx e quanto é que é o k?
Jaime:	É 45.

Professor: 45. $45x$, é exatamente o mesmo. E esta?
Jaime: Ali é y igual a kx mais b. (...) Que é 40 mais 50. $40x$. (Aula Funções_12 mar 2014)

Através de ações de apoiar em conjugação com ações de desafiar, o professor aproveita a generalização da expressão da função linear e da função afim feita pelo aluno Jaime, para encaminhar o discurso para a interpretação dos diferentes parâmetros que figuram na expressão da função afim, de acordo com as condições do enunciado da tarefa:

Investigadora: Então o que representa o 45?
Jaime: 45 representa o que a gente vai pagando ao longo dos meses.
Professor: Ao longo de cada mês.
Jaime: Sim, ao longo de cada mês.
Investigadora: E na segunda expressão o 40?
Jaime: O 40 é a mensalidade.
Investigadora: E os 50?
Jaime: É da inscrição.
Investigadora: E porque é que a anterior não tem?
Jaime: Porque a inscrição é gratuita. (Aula Funções_12 mar 2014)

A partir da introdução da resolução da questão 4 – solicitação e discussão de muitas ideias – o discurso é estreitado para a atribuição de significado, no contexto da situação apresentada, aos conceitos de declive e ordenada na origem – filtragem. Neste momento, o professor tem como objetivo promover a compreensão destes conceitos matemáticos – conteúdo matemático filtrado. O encaminhamento dado ao discurso favorece, ainda, a apresentação de justificações que caraterizam a função linear. Apoiado em ações de desafiar, o professor amplia o discurso ao estabelecimento de relações entre as representações gráfica e algébrica:

Investigadora: Há bocadinho alguém disse que tinha aqui uma função de proporcionalidade direta e qual das retas lhe corresponde?
Aluno: Função linear.
Professor: Sim. Qual das retas é que lhe corresponde [à função linear]? À preta ou à vermelha?
Vários: À preta.
Professor: Então na preta podes pôr y igual a...
Aluno: kx. (...)
Professor: Quanto é que é o k?
Aluno: Ah! 45.
Professor: 45. $45x$. E a vermelha?
Aluno: $y = 40x + 50$. (...)
Investigadora: Esta reta passa onde?
Aluno: No zero. (...)
Investigadora: Na origem. E a vermelha? Passa em que valor?
Aluna: No 50.
Professor: Por que é que começa no 50?
Aluno: Porque é o valor da inscrição.
Professor: Ou seja, eu quando ainda nem fiz exercício pago logo. (Aula Funções_12 mar 2014)

O professor procura levar os alunos, durante a sua participação no discurso da aula, a estabelecerem relações entre a representação gráfica e a expressão algébrica das funções afim e linear, procurando interpretar e justificar as particularidades de cada tipo de função (a representação gráfica da função linear é uma reta que passa pela origem do referencial, enquanto, no caso da função afim explorada neste tarefa, é uma reta que não passa pela origem do referencial), de acordo com as condições oferecidas por cada um dos ginásios. Foca o discurso na análise de ideias específicas, já que pretende que os alunos interpretem e relacionem os conceitos de declive e ordenada na origem com os contextos apresentados, negociando o significado de função afim e de função linear nas suas representações algébrica e gráfica – conteúdo matemático filtrado.

Discussão e conclusão

A prática discursiva dos professores do estudo é analisada em três aspetos: processo do discurso, conteúdo do discurso e ações de ensino. Quanto ao primeiro aspeto, a prática dos três professores mostra que o discurso que promovem quando envolvem os alunos em discussões coletivas segue um processo cíclico de estreitamento de ideias seguido de ampliação, tal como indicado por Sherin (2002), isto é, os professores começam por solicitar a um grupo de alunos a apresentação da sua resolução – solicitação e discussão de muitas ideias – porque reconhecem potencial na resolução desenvolvida por esse grupo de alunos e porque essa resolução permite explorar, relacionar ou desconstruir conceitos matemáticos. Seguidamente, focam a atenção dos alunos em alguma característica particular – filtragem das ideias partilhadas – que desencadeia uma nova solicitação e discussão de mais ideias, pedindo justificações ou clarificações para os raciocínios apresentados.

Ana foca o discurso na justificação da aluna que está a apresentar a sua resolução porque considera fundamental analisar com os alunos o facto de não ser necessário escrever o termo geral para verificar a pertença de um termo à sequência. Mostra ter ideias claras quanto ao que pretende ver discutido, oferecendo raciocínios para análise, porque identifica dificuldade nos alunos em avançarem com justificações, um processo potente do ponto de vista dos raciocínios mobilizados – análise do padrão que configura a imagem. A prática desta professora revela, ainda, a importância que dá ao questionamento entre alunos, incentivando-os a interpelarem os colegas em vez da professora, quando pretendem obter esclarecimentos sobre a estratégia que está a ser apresentada. A pertinência deste questionamento entre os alunos é também apontada por Bahr e Bahr (2017) e por Pirie e Schwarzenberg (1988).

Jorge dá início ao discurso solicitando a análise de um passo errado na resolução selecionada para apresentação, com a finalidade de levar os alunos a compreenderem a importância do rigor da linguagem matemática, como também já tinha sido apontado no estudo de Rodrigues et al. (2018). Com essa ação, encaminha o discurso dos alunos para a apresentação de diversas justificações para esse erro. A partir daí, o discurso amplia-se à apreciação de outras resoluções mais potentes do ponto de vista da utilização de linguagem algébrica. À semelhança do que acontece na aula de Jorge, a análise de erros também é usada no estudo de Ponte e Quaresma (2016), como ponto de partida para a discussão e para fazer emergir diversas justificações. Jorge valoriza a discussão de erros para a aprendizagem dos alunos, tal como Rosena no estudo de Bray (2011). Afonso, pelo seu lado, encaminha o discurso para o estabelecimento de conexões entre as representações gráfica e algébrica, levando os alunos a atribuir significado aos parâmetros usados em cada uma das expressões. A prática destes professores evidencia que as discussões que dinamizam são direcionadas para a compreensão conceptual, como também acontece numa discussão conduzida no estudo de Moschkovich e Zahner (2018).

Focando o conteúdo das ideias partilhadas, a prática discursiva destes três professores mostra que têm ideias claras sobre o que pretendem que seja analisado, selecionando um dado grupo para apresentação da sua resolução. Com essa estratégia de ensino, levam os alunos a analisarem raciocínios que precisam de ser justificados, clarificados ou melhorados, promovendo, assim, a argumentação dos alunos, caraterísticas marcantes da discussão como também é apontado por Bray (2011), Bussi (1998) e Hufferd-Ackles et al. (2004). Este afunilamento que os professores imprimem aos raciocínios dos alunos é para alcançar o propósito que definem para a discussão e para o estabelecimento de conclusões importantes.

A prática de Ana evidencia, ainda, o quanto é importante saber o que valorizar na condução do discurso, deixando para trás algumas ideias para seguir aquelas que podem ser mais significativas para a aprendizagem dos alunos. São estes aspetos que evidenciam a exigente tarefa que é gerir o discurso durante uma discussão coletiva tendo em conta a sua imprevisibilidade. A prática de Jorge também revela o desafio que é acompanhar as exposições dos alunos, sem condicionar as suas explicações e justificações. Este professor, quase sem se dar conta, toma a palavra de uma aluna e apresenta as justificações por ela, como também já tinha sido destacado no estudo de Rodrigues et al. (2018). Este episódio mostra que é necessário dar tempo aos alunos para pensarem e responderem, como também é apontado por Menezes et al. (2013) e por Rawding e Wills (2012), o que, por vezes, é comprometido quando o professor se sente pressionado pelo tempo para atingir objetivos programáticos.

Quanto às ações de ensino usadas na promoção do discurso, os professores apoiam-se em ações de elicitar, convidando os alunos a apresentar a sua resolução, e em ações de desafiar para os levar a clarificar e justificar raciocínios, a interpretar uma expressão dada para o termo geral de uma sequência, a relacionar representações e a apresentar diversas justificações para uma mesma ideia. Recorrem às ações de informar para indicar aos alunos a importância de analisar resoluções incorretas, de acrescentar contributos que clarificam as ideias em discussão e de comunicar raciocínios de forma matematicamente válida. Usam ações de apoiar para focar raciocínios a analisar, repetir contributos e indicar a razoabilidade dos argumentos apresentados.

Em suma, os professores do estudo gerem o discurso por um processo cíclico de afunilamento das ideias dos alunos, seguido de ampliação, como ilustra a figura 4.

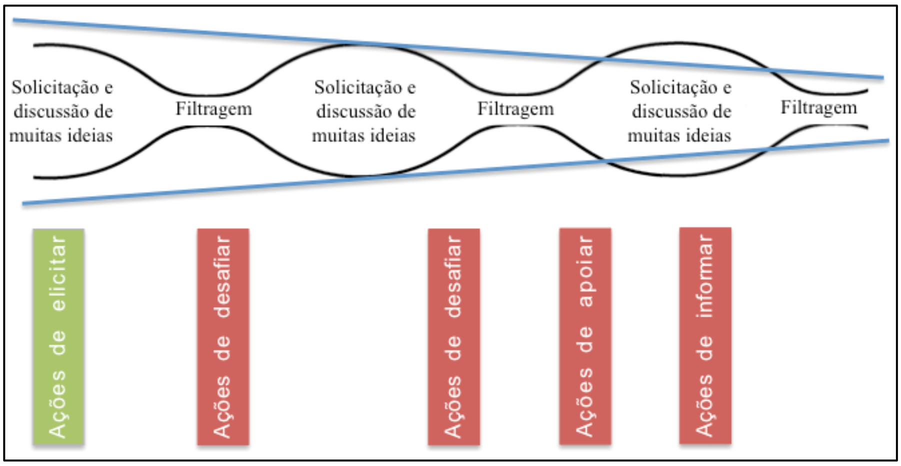


Figura 4. Prática dos professores na promoção do discurso

Os professores começam por solicitar aos alunos a apresentação da sua resolução e, a partir daí, direcionam a atenção da turma para a análise de uma particularidade do raciocínio, o que conduz a uma nova ampliação do discurso com uma nova solicitação e discussão de ideias, através do pedido de justificação ou clarificação para o raciocínio. Nessa promoção do discurso, apoiam-se na articulação de quatro tipos de ações de ensino. Com ações de elicitar, dão início ao discurso com o convite para apresentação de uma resolução; com ações de apoiar e de informar encaminham o discurso para onde pretendem; e com ações de desafiar ampliam o discurso para análise de um novo raciocínio.

Referências

Bahr, D. L., & Bahr, K. (2017). Engaging all students in mathematical discussions. *Teaching Children Mathematics, 23*(6), 350-359.

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bray, W. S. (2011). A collective case study of the influence of teachers' beliefs and knowledge on error-handling practices during class discussion of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(1), 2-38.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* New York, NY: Springer.

Bussi, M. G. (1998). Joint activity in mathematics classrooms: A Vygotskian analysis. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 13-49). Cambridge: Cambridge University Press.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 355–374.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 258-279.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(2), 81-116.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). London: Lawrence Erlbaum.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na sala de aula de matemática: um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico* (Tese de doutoramento). Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa. Recuperado de http://hdl.handle.net/10451/1523

McCrone, S. S. (2005). The development of mathematical discussions: An investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(2), 111-133.

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Tomás Ferreira, R. A. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sisyphus Journal of Education, 1*(3), 44-75.

Menezes, L., Tomás Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 135-161). Lisboa: Instituto de Educação.

Moschkovich, J., & Zahner, W. (2018). Using the academic literacy in mathematics framework to uncover multiple aspects of activity during peer mathematical discussions. *ZDM Mathematics Education*, *50*(6), 999-1011.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM.

Pirie, S. E., & Schwarzenberger, L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 459-470.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, XXII*(2), 55-81.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 51-66.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teacher's professional practice. *Didacticae, 1*, 45-59.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Rawding, M. R., & Wills, T. (2012). Discourse: Simple moves that work. *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(1), 46-51.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2018). Práticas de discussão em sala de aula de Matemática: Os casos de dois professores. *Bolema*, *32*(61), 398-418.

Rota, S., & Leikin, R. (2002). Development of mathematics teachers' proficiency in discussion orchestration. In A. D. Cokburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of 26th PME International Conference* (Vol. 4, pp. 137-145). Norwich: University of East Anglia.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Construtivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 205-233.

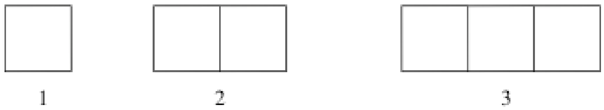
Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

Truxaw, M. P., & DeFranco, T. C. (2007). Mathematics in the making: Mapping verbal discourse in Pólya's "let us teach guessing" lesson. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 96–114.

Anexo

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos, que continua da mesma forma que a imagem sugere:



1. Quantos palitos terá a 5.ª figura? E a 15.ª?

2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.

3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.

4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T, desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$\boldsymbol{T = 4 \times n - (n - 1)}$$

Explica como poderá ter pensado.

Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

Tarefa: Eleição do delegado de turma

A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

- ✓ Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
- ✓ Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra;
- ✓ A Sandra recebeu mais cinco votos que a Francisca;
- ✓ O Lucas recebeu metade dos votos que recebeu a Sandra.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Tarefa: Inscrição no ginásio

O Santiago pretende inscrever-se num dos dois ginásios **100 calorias** ou **Em forma** que existem na sua cidade. Os preços praticados são os seguintes:

100 Calorias
Inscrição: 50 €
Mensalidade: 40 €

Em Forma
Inscrição: Gratuita
Mensalidade: 45 €

1. Completa a tabela, tendo em conta o número de meses e os dois tipos de preços referentes a cada ginásio.

	meses	**1**	**3**		**8**		**11**	**12**
Total (em euros)	***100 calorias***			210				
	Em forma					450		

2. Representa, no mesmo referencial, os gráficos correspondentes à evolução do preço a pagar em cada um dos ginásios, nos primeiros 6 meses.

3. Durante quanto tempo será vantajosa a inscrição no ginásio Em forma? Justifica.

4. Escreve uma expressão analítica que te dê o preço a pagar em cada um dos ginásios, de acordo com o tempo de frequência.