

## Um estudo sobre as capacidades geométricas (espaciais) de estudantes universitários

Maria Elfrida Ralha  
Universidade da Beira Interior

### Introdução

O que eu me proponho aqui relatar, por condicionalismos de falta de tempo, não é toda a investigação por mim levada a cabo durante três anos e meio. Durante esse tempo aprendi muito e muitas das coisas que compreendi nem sequer fazem parte das páginas finais que constituem a tese de doutoramento. Aqui e agora, proponho-me referir as linhas gerais de condução do problema que me interessava investigar até ao momento da elaboração dos questionários escritos. Quanto à outra parte da investigação — análise das respostas obtidas, comparações com teorias existentes sobre o assunto (Piaget, Krutetskii, van Hiele, estudo das diferenças etc.) — e conclusões assim como as sugestões ao nível do currículo universitário, ficam para uma próxima oportunidade. Para já os primeiros "longos" meses de investigação resumem-se da seguinte maneira.

## Origens

### Motivação inicial

- as dificuldades sentidas por mim própria (enquanto estudante) e
- as dificuldades percebidas nos meus estudantes (enquanto professora no ensino secundário mas principalmente enquanto docente na universidade) nos cursos de Geometria.

### Revelações obtidas a partir de conversas iniciais (informais):

- A Geometria é entendida pelos estudantes em geral e também por alguns professores como estando, de alguma forma, separada da Matemática.
- Os estudantes aprendem Geometria a partir de apontamentos (pessoais ou de colegas) e a partir das "sebentas" (tão características no ensino superior português) ou livros-texto sugeridos pelo docente.
- Os estudantes parecem ter mais dificuldades em lembrar noções aprendidas em cursos de Geometria do que as noções que lhes foram ensinadas noutros cursos de Matemática.
- As dificuldades sentidas em Geometria são frequentemente caracterizadas como **incapacidade** para abstracção ou **visualização**. -percebe-se que existe a ideia generalizada entre docentes e estudantes que esta capacidade é algo de inato numa pessoa e conseqüentemente não há muito a fazer por alguém que não possua esta capacidade.

### Geometria

- A Geometria é um tópico obrigatório em qualquer programa curricular das escolas do mundo inteiro.
- A Geometria é, regra geral, estudada como fazendo parte integrante da disciplina de Matemática.

Contudo, apesar deste consenso, não parece existir um acordo explícito sobre as razões (porquê ensinar-se Geometria?) nem sobre

os métodos (como ensinar-se Geometria?) e tão pouco se ensina(m) a(s) mesma(s) Geometria(s) em todos os países do mundo.

### O que é Geometria?

1. (dicionário vulgar) Geometria é o ramo da Matemática que trata das propriedades e das relações entre linhas, ângulos, superfícies e sólidos.
2. (Kislov num livro-texto de Geometria utilizado nalguns cursos de Geometria em Inglaterra e em Portugal) Geometria é a ciência que estuda as propriedades das figuras geométricas -típica definição circular.
3. (Egsgard num livro de Educação Matemática) Geometria é o estudo das relações espaciais.

Históricamente o Homem estudou (mostrou interesse por) Geometria desde a Pré-História:

**Paleolítico** - formas e pinturas; Geometria artística, estética.

**Egípcios** - áreas e volumes, Geometria Esférica (divisão do dia em 24 horas); Geometria Prática.

**Gregos** - Euclides; definições, axiomas e postulados (raciocínio lógico-dedutivo); Geometria= medida da Terra.

**Descartes** - sistema de coordenadas no plano; problemas geométricos transformam-se em problemas algébricos.

**Desargues** - matematização das ideias e técnicas dos artistas e arquitectos da Renascença; Geometria Perspectiva.

**Monge** - complemento da Geometria Cartesiana; Geometria Descritiva. **Leibnitz** - Geometria Diferencial e Integral... Topologia.

**Lobachevskii e Bolyai** - Geometria Hiperbólica; o postulado das paralelas (Gauss). O espaço físico deixa de ser especial.

**Riemann**

**Geometrias Finitas**

**Geometria dos Fractais**, etc., etc.

Os argumentos e as técnicas usadas em cada uma das Geometrias estão tão distanciados quanto nos é possível imaginar: artísticos, algébricos, puramente abstractos, de ordem prática, etc. mas, apesar

disso, os estudantes referem-se à Geometria como um todo e não a consideram dividida nos diversos ramos que se conhecem. Felix Klein tentou, há uns anos atrás, mostrar a uniformidade desta(s) geometria(s) no famoso programa de Erlangen que, na prática, não é conhecido/percebido a não ser pelos especialistas; isto é, não é provável que a uniformidade que os estudantes percebem na(s) geometria(s) seja a uniformidade reconhecida por especialistas do "nível" de Klein. Hadamard também tentou, há uns anos atrás, perceber como é que os seus amigos cientistas (por exemplo Einstein) chegavam aos resultados que obtinham através das suas investigações e concluiu então que a capacidade visual (espacial) e também a muscular tinham um papel decisivo nas descobertas dos seus amigos.

### **Capacidade Espacial**

Embora o termo Espacial tenha a ver com Espaço e a palavra Espaço esteja normalmente relacionada com Geometria a verdade é que os estudos na área das "Capacidades Espaciais" são muito mais recentes que os de Geometria. Investigações e resultados importantes no domínio das "Capacidades Espaciais" começaram sómente a aparecer a partir do início do século XX. Enquanto que os testes (verbais) de Binet-Simon foram "validados" durante a I Guerra Mundial com o recrutamento dos soldados (infantaria e cavalaria); os testes no domínio da(s) Capacidade(s) Espacial(is) foram "validados" também durante uma guerra, desta vez estava-se em plena II Grande Guerra Mundial e as exigências de recrutamento eram substancialmente diferentes das do primeiro caso por causa da aviação. Foram desta forma utilizados ou criados testes no domínio das Orientação, Memória e Capacidades Visuais<sup>1</sup>. Além disso verificou-se que os bons resultados nestes testes espaciais (visuais) estavam normalmente ligados com níveis de inteligência geral bons. Embora as autoridades educacionais não tivessem logo aceite estas conclusões, actualmente aceita-se que:

- A Capacidade Espacial existe.

<sup>1</sup>Thurstone foi dos autores que mais esteve ligado com estes estudos nesta fase

- A Capacidade Espacial divide-se em vários factores.
- A Capacidade Espacial é importante em diversas profissões e ciências, nomeadamente na Matemática.

Entenda-se, para já, Capacidade Espacial como sendo a capacidade para formular e manipular mentalmente imagens.

Outros trabalhos/estudos houve que me influenciaram ou condicionaram esta investigação -no sentido de ir esclarecendo ou fornecendo algumas pistas para o desenvolvimento do trabalho. Entre esses talvez faça sentido destacar os de diversas escolas de psicologia (diferencial, análise de factores, do desenvolvimento, etc.), os de Polya, os de Krutetskii, os de Freudenthal, os de van Hiele, os de A. Bishop ou os de Kilpatrick e Wirszup. Nessa altura o enunciado e o objectivo da investigação que agora relato estavam bem definidos:

**Enunciado:** Explorar e identificar as capacidades espaciais de estudantes universitários de cursos com uma forte componente Matemática.

**Objectivo:** Conhecer algumas dificuldades envolvidas na aprendizagem da Geometria. -Análise das capacidades dos estudantes. -Decifrar melhores métodos de ensino da Geometria.

### Os participantes

Os estudantes que livremente aceitaram estar envolvidos neste estudo frequentavam uma universidade Portuguesa (Universidade da Beira Interior) e uma universidade Inglesa (Universidade de Southampton). Tinham uma idade média de 20-21 anos e estavam divididos pelas seguintes licenciaturas: Economia (2); Engenharia (9); Arquitectura (1); Matemática (33)<sup>2</sup>. Houve ainda:

- um assistente universitário que, na altura em que o "trabalho de campo" foi levado a cabo, era regente do curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica;

<sup>2</sup>Este valor traduz efectivamente o meu maior interesse em analisar a actuação deste grupo de estudantes que, na sua maioria, pretendiam num futuro próximo dedicar-se ao ensino da Matemática (e de Geometria, conseqüentemente) nas nossas escolas.

- um desenhador projectista que frequentava, na altura em que este estudo se desenvolveu, um mestrado de Investigação Operacional;
- um professor (associado com agregação) especialista de Análise Complexa; que tomaram parte na investigação.

### **Metodologia usada na investigação**

Por razões relacionadas com a actividade profissional que exerço, o tipo de investigação utilizada neste trabalho não podia, segundo creio, ter sido outro que não o de tipo diagnóstico. No meu dia-a-dia profissional dentro de uma sala de aula sou constantemente confrontada com questões colocadas individualmente (ou por mais alunos) sobre dúvidas que se lhe(s) colocam e que assumem toda a importância para mim que tenho que saber identificar os problemas para de seguida tentar esclarecer o aluno ajudando-o, deste modo, a resolver um problema que afinal também é meu pois é consequência directa daquilo que eu ensinei e de como ensinei. Senti-me então particularmente inclinada por uma investigação do tipo diagnóstico ou clínico, a exemplo do que Piaget fazia. Na realidade um professor tem, penso, que tentar resolver as dúvidas que vão surgindo aos alunos e não é porque tais dúvidas são comuns a 80% ou 90% dos alunos da turma que elas passam a ser por mim consideradas mais importantes do que as dúvidas que um único aluno tem. Deste modo tentei com a metodologia escolhida dedicar mais tempo a aprender tal "técnica" e a aperfeiçoar a minha sensibilidade para o diagnóstico das questões levantadas pelos alunos que diariamente "convivem" comigo. Tentei sim que a amostra de estudantes fosse o mais diversificada possível, mas conclusões do tipo estatístico, tão usadas por exemplo nos Estados Unidos da América, não me pareceram, por várias razões, ser as que me forneciam o "insight" da situação que como professora eu pretendia adquirir- para poder eu própria ser, se possível, melhor ensinadora dos meus alunos- mais do que encontrar conclusões que se refutam de infalíveis e aplicáveis em todo o lado.

### **Categorias para análise das respostas; factores da Capacidade Espacial**

Partindo das quatro fases para resolução de problemas sugeridas por Polya — Compreensão, Planificação, Resolução, Verificação — e atendendo ao facto de que o que eu pretendia era uma **análise das respostas** dos participantes com vista a uma **classificação** dentro dos factores da Capacidade Espacial, estabeleci as divisões seguintes:

1. **Concentração Geométrica:** capacidade para analisar mentalmente um problema geométrico com vista à obtenção de uma pista; nesta fase considere ainda

- familiarizar-se com o problema,
- absorver o enunciado,
- compreender,
- convergir, e finalmente
- interpretar

2. **Estabelecimento do Plano:**

- Memória- Longo Termo, Recente e Imediata,
- Relações Espaciais = capacidade para reconhecer a identidade de um objecto visto de diferentes ângulos (Teoria Gestalt),
- Visualização = capacidade para se compreender o movimento das diversas componentes de uma configuração (Local),
- Orientação Espacial = capacidade para se construir uma representação mental tendo como referencial o próprio corpo.

3. **Meios de Expressão:**

- Gesto = movimento expressivo de uma parte do corpo (especialmente das mãos),
- Desenho = capacidade para transformar configurações tridimensionais em representações no plano,
- Verbalização = capacidade para utilizar a fala como meio de expressão dos pensamentos geométricos,
- Escrita = capacidade para utilizar a escrita como meio de expressão dos pensamentos geométricos.

### Elaboração dos testes

Decisão sobre o grau de **generalidade**: por um lado, sabe-se que a rica criatividade que caracteriza a actividade dos geómetras não é, normalmente acompanhada por, em particular, a vasta maioria dos estudantes a quem tentamos ensinar essas teorias; Logo a **organização** das questões a propor aos alunos teve de ser bastante geral.

Decisão sobre a **simplicidade**: por outro lado, o grupo de participantes com quem me dispunha trabalhar possuía diferentes bases de conhecimento(s) geométrico(s) (e de Matemática, em geral); Logo a **escolha** teve de ser por questões bastantes simples de forma a garantir o reconhecimento dos problemas por todos os participantes.

Contudo, estas generalidade e simplicidade não significam que se esteja a subentender facilidade. Tarefas simples assumo-as como possuindo uma estrutura básica e envolvendo noções que são, em condições normais, reconhecidas como sendo elementares em Geometria. Acreditando que: a Geometria diz respeito às propriedades das figuras no plano ou no espaço (Courant), e guiada pelo princípio da generalidade a escolha recaiu sobre:

- transformações geométricas, e
- relações entre figuras.

Os conceitos geométricos incluídos nas questões foram:

- plano,
- direcção,
- paralelogramo,
- ângulo,
- perímetro,
- área,
- espaço,
- sólido,
- cubo,
- volume.

---

As transformações geométricas foram<sup>3</sup>

- translações,
- simetrias,
- rotações

### Os testes

As questões/problemas colocados aos participantes entenderam-se como estando presentes em todas as geometrias (generalidade) e também são tipicamente utilizadas em geometria elementar (simplicidade). Além disso, as questões foram elaboradas de modo que os participantes fossem capazes de usar a **intuição geométrica**, isto é, aplicar o tipo de argumentos que os geómetras dos Antigos Egipto e Grécia usavam, sem precisarem de seguir passos analíticos. Foram ainda distribuídos pelos participantes um conjunto de pequenos cubos de madeira que se pressupunham ser importantes como material de ajuda para algumas das questões colocadas. As tarefas foram então desenvolvidas nas seguintes formas:

- escrita,
- conversas,
- desenho e
- por observação dos estudantes no ambiente universitário, nomeadamente quando assistiam a cursos de geometria.

### Bibliografia

Ralha, Maria Elfrida Ramos de Matos (1990). *A Study about the Spatial Abilities of University Students*. Tese de PhD da Faculty of Mathematical Studies da Universidade de Southampton.

---

<sup>3</sup>As tentativas para introduzir "inversões" provaram ser infrutíferas