Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados[1]

José Manuel Matos
Universidade Nova de Lisboa

Desenvolvimentos recentes na compreensão dos processos pelos quais abstraímos categorias de entidades produzidos por cientistas cognitivos, antropologistas e linguistas podem ajudar a alargar a nossa visão da aprendizagem. No caso particular da geometria, esta compreensão parece contribuir para fornecer uma visão que pode ajudar a encarar alguns aspectos da aprendizagem da geometria de uma perspectiva unificada.

Esta comunicação apresentará uma visão geral da teoria de van Hiele, focando-se especificamente na teoria cognitiva implícita. Serão apresentados resultados de investigações que parecem colidir com a teoria de van Hiele serão analisados e serão propostas mudanças à teoria.

A teoria de van Hiele

Contexto

Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele desenvolveram a sua teoria na Holanda quando, em meados dos anos 50, escreveram as

[1] Este trabalho é baseado na tese de doutoramento do autor, em execução na Universidade da Geórgia e foi parcialmente apoiado por uma bolsa do Institute of International Education, Nova Iorque e por outra do Ministério da Educação de Portugal.

suas teses de doutoramento sob a direcção de Hans Freudenthal. Pierre procurava estudar o insight geométrico e Dina desenvolvia uma abordagem didáctica da geometria para alunos de 12 e 13 anos.

A sua investigação foi produzida no meio de mudanças tremendas no campo da Educação Matemática, numa altura em que a Matemática Moderna ainda não tinha começado, mas em que a comunidade internacional estava a discutir novos métodos, novas finalidades, e novos tópicos curriculares (Matos, 1985).

O seu trabalho reflecte esta dualidade de influências. Por um lado, desenvolveram o seu trabalho no contexto de um currículo que encarava a geometria como um instrumento para exercitar as capacidades lógicas da mente. Por outro lado, o seu ponto de vista pedagógico incorpora uma perspectiva muito contemporânea. Isto é visível na preocupação de Pierre pelo insight e na ênfase que Dina coloca na manipulação das figuras, no uso do geoplano e nos desenhos efectuados pelos alunos com régua e compasso.

As investigações dos van Hiele é baseada em três elementos. Existe, por um lado, uma forte base estructuralista no seu trabalho. As estruturas estão presentes em toda a sua visão do mundo e na sua visão da organização da cognição. Por outro lado, a influência da psicologia de gestalt fornece uma base para a análise da percepção e interpretação cognitiva destas estruturas. Finalmente os van Hiele estavam preocupados com a didáctica da Matemática, especialmente no desenvolvimento do insight na sala de aula.

Uma visão gestaltista da cognição

Os van Hiele estavam essencialmente preocupados com o ensino actual da Matemática e não proporcionaram uma descrição psicológica detalhada. No entanto algumas das suas propostas têm uma base psicológica que analisaremos nas secções seguintes. A cognição, para Pierre van Hiele desenvolve-se recursivamente através da construção de uma percepção global para a formação da estrutura mental, é uma diferenciação progressiva e com a sua reestruturação final numa nova estrutura mental. Para van Hiele, assim como a psicologia de gestalt não há objectos isolados nem conceitos por si, mas todas as entidades existem num contexto, a estrutura em termos de Pierre van Hiele.

Pierre van Hiele não proporciona uma definição de estruturas. Em vez de isso ele explica algumas das suas propriedades, descreve espécies de estruturas, e dá alguns exemplos. Seguindo a distinção de Popper entre três mundos, Pierre van Hiele propõe que há várias espécies de estruturas: a) as estruturas do mundo onde vivemos – Mundo 1; b) as estruturas na nossa mente – Mundo 2; e c) as estruturas no mundo do conhecimento humano comum – Mundo 3. Pierre van Hiele insiste que, em cognição é muito importante que a estrutura possa ser vista como uma totalidade porque a estrutura é mais do que a soma dos seus elementos. Há quatro propriedades das estruturas que Pierre van Hiele recolheu a psicologia de gestalt: 1) estruturas podem ser estendidas; 2) cada estrutura pode ser vista como uma parte de uma estrutura mais fina; 3) uma estrutura pode ser vista como uma parte de uma estrutura mais inclusiva; 4) uma estrutura dada pode ser isomorfa a outra estrutura.

A primeira e a quarta propriedades revelam-se directamente porque envolvem actividades inatas ao pensamento humano. As outras duas propriedades, de acordo com a tradição gestaltista, afirmam que cada estrutura tem outras estruturas implícitas ou são parte de estruturas mais largas. Pierre van Hiele afirma que estas duas últimas propriedades devem ser ensinadas.

Estruturas mentais existem no Mundo 2 e são construídas com base em estruturas do Mundo 1. Exemplos de estruturas mentais incluem:

– Estruturas de acção ("action structures") que são acções automáticas motoras que nós não podemos tornar explícitas, como o movimento dos dedos de um pianista tocando piano, ou um motorista de um carro que reage directamente a sinais rodoviários. Estas estruturas estão muito próximas dos padrões de estímulo-resposta e Pierre van Hiele questiona se elas podem ser consideradas de facto estruturas mentais.

– Estruturas visuais (*visual structures*) que são construídas na nossa mente e reagem directamente às estruturas do Mundo 1.

– Estrutura global de actuação (*global structure of acting*) que é a terminologia de Pierre van Hiele para a imitação.

A formação de estruturas mentais requer mudanças rápidas entre momentos receptivos e activos. Os momentos receptivos permitem "a absorção das estruturas espontâneas emanadas dos materiais" (van Hiele, 1986, p. 237). Durante os momentos activos o indivíduo concentra-se na análise e modificação das estruturas, aprendendo através de uma progressiva diferenciação e reestruturação de campos produzindo estruturas mentais novas e mais complexas. Níveis mais altos são atingidos se as regras que comandam as estruturas inferiores "foram explicitadas e estudadas" (p. 6) conduzindo ao desenvolvimento de estruturas mentais mais complexas. O desenvolvimento mental progride à medida em que as estruturas dos alunos se transformam gradualmente (trans-estruturação — *transtructuring*) ou se substitui uma estrutura por outra (re-estruturação — *restructuring*). A trans-estruturação ocorre, por exemplo, quando, na teoria de van Hiele, as estruturas visuais originais são gradualmente transformadas em estruturas abstractas. Circunstâncias nas quais a re-estruturação ocorre são, entre outras: a) uma re-estruturação do campo da observação conduz à integração de várias estruturas que foram desenvolvidas independentemente; b) a solução de um problema para o qual temos que tentar várias estruturas.

Pierre van Hiele afasta-se de outras abordagens estruturalistas da Educação Matemática existentes na sua época. Por exemplo, os educadores piagetianos (e também Dienes e Papy) tentaram usar nas aulas as "três estruturas mães dos matemáticos bourbakistas" (Piaget, 1970, p. 23): as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas. As estruturas de van Hiele são todas baseadas nas estruturas do Mundo I que podem ser imediatamente percepcionadas como um gestalt.

O insight é, para Pierre van Hiele, um mecanismo chave que permite aos estudantes visualizar diferentes campos ("estruturas" na sua terminologia) o qual lhes permite construir conceitos mais complexos. Ele usa a ideia gestaltista "o insight deve ser compreendido como o resultado da percepção de uma estrutura" (1986, p. 5), e propõe que ele é caracterizado pelas seguintes propriedades:

a) Insight requer uma adequação quer a uma nova situação ou a uma estrutura estabelecida. Essa adequação requer um mecanismo social para estabelecer critérios de objectividade, os quais discutirei mais tarde.

b) Insight também requer intenção, a qual significa que a pessoa actuará de acordo com a estrutura percepcionada e não aleatoriamente.

c) Insight não pode ser planeado (van Hiele, 1986, p. 24, p. 154).

O desenvolvimento do insight deve focar-se no desenvolvimento da capacidade de os estudantes verem estruturas como parte de estruturas mais finas, ou como parte de estruturas mais inclusivas.

A criação de estruturas mentais tem dois actos de pensamento (*acts of thought*) distintos (van Hiele, 1984b, p. 238). Primeiro há uma identificação indiferenciada da estrutura em observação. No princípio da Geometria, por exemplo,

a apresentação do material (de estudo) concreto evoca estruturas visuais indiferenciadas. As crianças familiarizam-se muito cedo com estas estruturas, muito antes de chegarem ao nível de educação secundária (p. 238).

Estas estruturas indiferenciadas não são verdadeiramente matemáticas, nem podem produzir um autêntico insight matemático. Depois desta primeira identificação há a análise do objecto que nos permite abstrair e eliminar um certo número de qualidades, o que conduz a novas formas de identificação e portanto a novas estruturas mentais.

Um segundo acto de pensamento proposto por van Hiele é a classificação de estruturas interrelacionadas. Quando temos vários princípios de classificação, os próprios princípios de classificação são uma nova estrutura indiferenciada. Agora o processo recomeça, recursivamente, resultando numa nova estrutura com princípios de classificação dos próprios princípios de classificação. van Hiele chama a este novo processo de pensamento um "nível de pensamento mais elevado" (p. 238), e afirma que "ele acontece sob a influência de um programa de ensino-aprendizagem" (van Hiele, 1986, p. 50).

Processo de aprendizagem

Como vimos atrás, van Hiele propõe que a aprendizagem é um processo recursivo que progride recursivamente através de níveis de pensamento descontínuos — "saltos na curva de aprendizagem" (van

Hiele & van Hiele-Geldof, 1958, p. 75), que pode ser melhorado por um procedimento didáctico adequado. Ele pressupõe que há diversos níveis de aprendizagem da Geometria e que a passagem de um nível para o próximo deve ocorrer através de uma sequência de fases de ensino. Os van Hiele caracterizam estes níveis da seguinte forma:

Nível 1 (Visualização) — As figuras são avaliadas pela sua aparência;

Nível 2 (Descritivo) — As figuras são portadoras das suas propriedades;

Nível 3 (Teórico) — As propriedades são ordenadas logicamente;

Nível 4 (Lógica Formal) — A Geometria é entendida como um sistema axiomático (van Hiele, 1986; van Hiele & van Hiele-Geldof, 1958).

Em alguns dos seus trabalhos os van Hiele propõem também a existência de um quinto nível (Natureza da Lógica Formal, no qual os sistemas axiomáticos são estudados), ou mesmo níveis mais altos (van Hiele, 1984b; van Hiele, 1986; van Hiele-Geldof, 1984). Pierre van Hiele avisa, no entanto, que estes níveis têm muito pouca importância no ensino da Geometria e desafia os investigadores a se concentrarem nos três primeiros níveis. Uma descrição das características destes níveis pode ser encontrada em Matos (1988).

Uma visão didáctica da cognição

Van Hiele propõe que "a transição de um nível para o seguinte não é um processo natural; ela acontece sob a influência de um programa de ensino-aprendizagem" (van Hiele, 1986, p. 50). Este programa de ensino-aprendizagem inclui uma sequência didáctica precisa de cinco fases de aprendizagem.

Durante a primeira fase (*Informação*) o professor manterá uma conversa com os estudantes de forma a os introduzir no domínio de trabalho. O professor, por exemplo, mostrará triângulos e informá-los-á que eles se chamam "triângulos".

Durante a segunda fase (*Orientação Guiada*) os estudantes serão guiadas por actividades estabelecidas por si próprias ou que são dadas pelo professor, com o objectivo de procurar redes de relações entre os objectos que estão a manipular. O objectivo é guiar os estudantes durante o processo de diferenciação das novas estruturas a partir das estruturas observadas na primeira fase.

A terceira fase (*Explicitação*) é baseada em discussões na turma durante as quais os estudantes dão a sua opinião acerca das regularidades que encontraram, consciencializam-se das relações e exprimem-nas por palavras suas. Por outras palavras, esta fase implica tornar as estruturas observadas na fase anterior explícita através do uso da linguagem. As discussões na turma permitirão que os estudantes aprendam a linguagem necessária para exprimir o que descobriram. O professor introduzirá toda a linguagem técnica. Os van Hiele condicionam a verdadeira compreensão a um completamento bem sucedido desta fase.

Na quarta fase (*Orientação Livre*) o professor dará aos estudantes trabalhos gerais e estes terão a oportunidade de conhecer o tópico de todas as direcções. Durante a quinta fase (*Integração*) o professor não apresentará nada de novo. Os estudantes construirão uma visão global de tudo o que foi aprendido antes.

Suponhamos, por exemplo, que o professor está a preparar um grupo de aulas destinadas a conduzir os seus alunos desde o nível 1 para o nível 2 no tópico "Losangos" (van Hiele, 1986, p. 54). O professor mostrará as seus estudantes diversos losangos e perguntará se outras figuras são ou não losangos. Isto constitui a primeira fase do nível 1. Nesta altura seria destituído de significado a discussão das razões lógicas pela quais uma figura é um losango porque no nível 1 as figuras são percepcionadas visualmente. Apesar de os estudantes poderem distinguir e denominar losangos, eles executam estas acções na base de um reconhecimento visual global. Durante a segunda fase outras actividades serão efectuadas sobre os losangos. Por exemplo, um losango será dobrado segundo os seus eixos de simetria, os ângulos e os lados serão medidos. Estas actividades serão seguidas na terceira fase, por uma discussão entre os alunos sobre o que descobriram. Na próxima fase o professor poderá colocar o problema de desenhar um losango dados alguns lados e vértices. Finalmente na última fase as propriedades serão resumidas e memorizadas.

Uma perspectiva linguística

Pierre van Hiele defende que o movimento para um nível mais elevado é acompanhado pela aprendizagem de uma nova linguagem. O seu argumento principal pode ser apreciado se notarmos que as propriedades do losango codificam relações entre as suas componentes. No exemplo da última secção os estudantes movem-se do conhecimento das propriedades de um losango (nível 2) para o conhecimento das relações lógicas entre as propriedades (nível 3). Ainda as discussões que os estudantes podem ter acerca das propriedades são muito diferentes de uma mudança de ideias acerca das relações entre as propriedades em si mesmo. Por exemplo, no primeiro caso, estudantes podem discutir se algum losango tem uma simetria de 90°. No segundo eles podem discutir se a igualdade dos lados do losango implica que alguns lados são paralelos.

Vamos observar mais detalhadamente como ocorre esta mudança linguística. No princípio da primeira fase os estudantes possuem vários itens significatórios (símbolos, na terminologia de van Hiele). No caso do nível 1 estes podem ser imagens de figuras, ou, no caso de outros níveis, podem ser propriedades, relações entre propriedades, ou sistemas axiomáticos. Se durante a primeira fase o professor enviasse uma mensagem que usasse aqueles itens significatórios como objectos de reflexão, a mensagem não seria facilmente descodificada pelos estudantes. No princípio da primeira fase o aluno está ainda a usar estes itens significatórios, principalmente como instrumentos de acção, e mal começou a usá-los como instrumentos de reflexão (von Glasersfeld, 1974).

Voltando ao exemplo anterior, os alunos no final do nível 1 são capazes de discutir se um losango possui a propriedade "as suas diagonais são perpendiculares". No contexto do nível 1 eles são capazes de usar os itens significatórios "componentes de losangos" como instrumentos de reflexão. Sabem o que é um "losango", o que são "diagonais" e qual o significado de afirmar que "as diagonais são perpendiculares". Sabem ainda como condensar as relações entre aqueles termos quando propõem propriedades das componentes dos losangos. No entanto, no nível 2, os itens significatórios tornam-se propriedades. O professor envia mensagens acerca das relações entre propriedades e não acerca das figuras e suas componentes. As propriedades tornam-se os instrumentos de acção e é apenas no fim da segunda fase do nível 2 que o aluno começará a compreender as propriedades como instrumentos de reflexão. Isto significa precisamente que os seus símbolos se tornam sinais, de acordo com a terminologia de van Hiele. No final da segunda fase os alunos começam a reflectir nos símbolos que tinham no início e eles tornar-se-ão sinais.

É durante a terceira fase de aprendizagem que o aluno tornará "explícitas" as estruturas que foram previamente conhecidas apenas de forma implícita (van Hiele, 1986, p. 97). Antes da terceira fase os símbolos são controlados implicitamente ([o aluno] "compreendeu a estrutura e sabe como trabalhar com ela", p. 79). Na terceira fase os alunos falam sobre novas coisa que descobriram durante a segunda fase, com vista a tornar os símbolos explícitos. Só então "se torna possível conversar com outras pessoas acerca disso" (p. 79). A analogia entre a linguagem passiva (a parte da linguagem que uma pessoa compreende) e a linguagem activa (a parte da linguagem que uma pessoa fala) é notória. A proposta de terceira fase é forçar a transformação da linguagem passiva adquirida durante as primeiras duas fases numa linguagem activa. É também durante esta fase que o professor introduz a terminologia técnica - palavras técnicas não juntarão novos símbolos; elas apenas permitirão um melhoramento de precisão (*shorcuts*) numa discussão.

Agora que os estudantes possuem os símbolos e sabem operar com eles num contexto de um dado nível, a quarta fase permitirá mais tarde explorações do tópico, e "deste modo sinais, percursores de [novos símbolos], são desenvolvidos" (van Hiele, 1986, p. 97). A Orientação Livre proporcionará aos estudantes com base para construção de novas relações entre os velhos símbolos, que constituem os símbolos iniciais do próximo nível.

É claro que cada nível tem os seus próprios símbolos linguísticos e o seu próprio sistema de relações que ligam estes símbolos. Símbolos e relações na teoria de van Hiele estão dependentes do contexto no qual são produzidos e a teoria propõe uma hierarquia de níveis contendo uma hierarquia de símbolos. Esta construção permite a van Hiele responder ao seu problema inicial de aparentes diferenças entre a linguagem do professor e dos estudantes. Ela também permite-lhe confirmar uma das suas principais afirmações: duas pessoas raciocinando em níveis diferentes não se podem compreender.

A outra consequência importante que deriva deste processo didáctico é a explicação implícita para a estabilidade dos conceitos. No modelo de van Hiele a mudança e a estabilidade dos conceitos são alcançados por interacções sociais entre alunos e professores que tomam lugar principalmente durante a Explicitação, a Orientação Livre e a Integração. Esta abordagem garante que os conceitos geométricos serão intersubjectivamente partilhados e serão, portanto, objectivas, no sentido de van Hiele — verdade compartilhada por um grupo social possuindo uma linguagem adequada.

Uma crítica da teoria

Nesta secção discutirei algumas limitações da teoria nas áreas do desenvolvimento cognitivo, dos objectivos da aprendizagem da geometria da importância das diferenças individuais e na autonomia dos estudantes no processo de aprendizagem.

A teoria de van Hiele não possui uma perspectiva psicológica autónoma, antes se apoia consideravelmente na teoria de Gestalt, deixando de fora muitas áreas. Uma delas é a imagética. Na última década tem havido uma reapreciação do papel desempenhado pelo pensamento imagético na aprendizagem da Matemática e no trabalho científico (Bishop, 1980; Clements, 1981; Fischbein, 1987). A ideia que "no nível 3 já não é possível usar estruturas visuais para clarificar ideias" (van Hiele, 1986, p. 141) nega o papel que as imagens mentais desempenham no pensamento de tipo superior. Outras áreas cruciais da aprendizagem da Geometria, como a visualização, a orientação espacial, a representação bi-dimensional de objectos tri-dimensionais estão também ausentes.

De facto a teoria assume implicitamente que o ensino e a aprendizagem da Geometria deve seguir um modelo que privilegia a dedução. A teoria não contempla áreas como medições, trigonometria ou geometria analítica que são importantes nas abordagens curriculares contemporâneas. Esta interpretação estreita das finalidades do ensino da Geometria tem influído na maior parte das investigações sobre a teoria. Numa revisão de investigação recente sobre a aprendizagem de Geometria (Hershkowitz, 1989), ressalta que a comunidade dos investigadores considera a investigação baseada na teoria de van Hiele como uma área distinta da visualização, da orientação espacial, dos conceitos de nível superior (como geometria das transformações, demonstrações), medida e resolução de problemas geométricos, por exemplo. A única excepção a esta tendência é a investigação recente que procurou uma extensão da teoria ao ambiente Logo (Olive, Lankenau, & Scally, 1986; Olson, Kieren, & Ludwig, 1987).

A teoria não produz explicações satisfatórias na área das diferenças individuais. Na teoria os alunos são sempre considerados como um grupo homogéneo e não existem estudantes individuais, com estilos cognitivos diferenciados e distintas preferências de aprendizagem. O objectivo da abordagem didáctica é socializar os alunos num conhecimento matemático acordado pelo "comité de peritos" (van Hiele, 1986, p. 217) — a comunidade dos matemáticos.

A teoria não aceita que os alunos possam desenvolver um conhecimento matemático autónomo. Uma das razões é que, com vimos, o nível 1 está baseado na percepção das "estruturas 'espontâneas' do material", que são objectivas, no sentido que muitas pessoas concordam com o seu conteúdo. Consequentemente todos os estudantes são supostos percepcionam estas estruturas de modo semelhante. Uma outra razão que dificulta a compreensão dos processos autónomos dos estudantes é o papel sugerido para o professor. Durante toda a discussão das fases de aprendizagem o professor é considerado como a fonte de conhecimento na sala de aula. O professor manterá conversas, ajudará os alunos a estabelecer relações entre os símbolos linguísticos e guia a fase de Explicitação fornecendo os termos técnicos, assumindo assim o papel de um enculturador dos alunos na cultura matemática aceite para a sala de aula. Através deste processo não se espera que os alunos contribuam com o seu próprio conhecimento ou experiências, nem se espera que eles produzam produções matemáticas alternativas. Esta pressuposição da objectividade da Matemática e do anulamento do papel do conhecimento dos estudantes na Matemática escolar torna extremamente difícil explicar porque alguns alunos perecem construir conceitos matemáticos não convencionais (Vinner & Hershkowitz, 1983; Wilson, 1986).

Apesar destas limitações, a teoria substituiu prévios paradigmas da aprendizagem da Geometria influenciados por Piaget, Bruner ou os behavioristas. Muitos educadores matemáticos parecem acreditar que a teoria pode ser emendada de forma a se conformar com perspectivas mais contemporâneas e têm vindo a usá-la em muitas áreas de investigação. Mais tarde observaremos algumas tentativas feitas para articular a teoria com perspectivas geométricas alternativas.

Contribuições da teoria das categorias para a teoria de van Hiele

Nesta secção apresentarei uma síntese dos problemas associados à teoria de van Hiele levantados por influência da teoria das categorias.

Explicando alguns efeitos de protótipo no contexto da teoria de van Hiele

Hershkowitz recentemente tentou acomodar alguns efeitos de protótipo na estrutura dos níveis de van Hiele (Hershkowitz, 1989). A sua descrição é influenciada pelo construto de imagens conceito proposto por Vinner e alguns colegas (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983; Vinner & Hershkowitz, 1983). De acordo com Hershkowitz (1989), para cada conceito os alunos formam um ou mais exemplos prototípicos compostos dos atributos críticos do conceito, em conjunto com atributos específicos não-críticos que têm características visuais fortes. Os alunos usam estes exemplos prototípicos nos primeiros dois níveis de van Hiele "como um modelo para a sua apreciação de outros exemplos" (p. 83), no que ela denomina "julgamento prototípico". Este tipo de julgamento é contrastado com o julgamento analítico, que é um julgamento correcto baseado nos atributos críticos do conceito. Durante os primeiros dois níveis de van Hiele os alunos fazem uso do protótipo em processos distintos. O *julgamento prototípico de Tipo 1* ocorre no nível 1 quando os alunos usam o protótipo como uma referência para executar comparações visualmente. No segundo nível, os alunos fazem uso dos atributos do protótipo em vez da sua imagem e tentam impô-los em cada caso. Este é chamado *julgamento prototípico de Tipo 2*. O nível 3 é, pelo contrário, baseado num julgamento analítico (de *Tipo 3*). Na investigação que realizou, Hershkowitz foi capaz de inferir ao mesmo tempo que os alunos se deslocavam através dos níveis, o julgamento de tipo 1 diminui, mas nunca desaparece completamente, enquanto o de tipo 2 desaparece completamente. Embora o modelo de Hershkowitz dê uma explicação adequada de muitos resultados encontrados, deixa de fora muitos outros. O seu modelo tem muita dificuldade em explicar efeitos de nível básico, ou modelos metafóricos, entre outros. Em particular, a sua definição de protótipos necessita de ser alargada. A sua proposta de que o "fenómeno prototípico e o julgamento prototípico parecem ser essencialmente um produto de processos visuais" (1989, p. 83) só parece explicar os protótipos visuais. Em geral, embora as propostas de Hershkowitz caracterizem alguns resultados da investigação nos primeiros níveis de van Hiele, eles devem ser alargados para incorporar outros.

Protótipos visuais e modelos metafóricos nos primeiros níveis de van Hiele

Investigadores utilizando o modelo de van Hiele têm encontrado provas de modelos imagético-esquemáticos e metafóricos nos primeiros dois níveis de van Hiele. Burger (1985), por exemplo, relata que um dos seus participantes explicou que alguns dos seus triângulos eram diferentes de outros porque "apontavam naquela direcção [para a direita, ou para baixo]" (p. 52). A ideia que os triângulos podem apontar para uma direcção é o que Johnson (1987) chamaria um modelo metafórico baseado no nosso esquema imagético-cinestésico de apontar. Este modelo é ainda social, porque todos nós somos capazes de compreender em que sentido um triângulo pode apontar. Exemplos semelhantes são apontados por Fuys, Geddes e Tischler (1985, p. 83).

Apesar de Hershkowitz ter detectado estes efeitos mesmo em alunos do nível 3, não é claro o papel desempenhado por estes modelos em níveis mais elevados. Existem argumentos que suportam a ideia que as imagens mentais desempenham um papel considerável no pensamento de nível mais elevado em geral, e no pensamento científico em particular (Clements, 1981).

O problema da classificação

A classificação de quadriláteros é uma área na qual a teoria de van Hiele faz previsões que questionam a noção comum do que os alunos são capazes de aprender. De acordo com a interpretação dominante da teoria, no final do primeiro nível os alunos são capazes de identificar rectângulos, quadrados, losangos e outras figuras. No final do segundo nível os alunos conseguem enumerar algumas propriedades de cada uma destas figuras. Somente no terceiro nível os alunos concordam com a classificação hierárquica dos quadriláteros, nomeadamente que um quadrado é um tipo especial de rectângulo, e que ambos são paralelogramos especiais. A razão desta mudança do segundo para o terceiro níveis é que, de acordo com van Hiele, no terceiro nível os alunos são capazes de compreender localmente as conexões lógicas entre propriedades, e são, consequentemente, capazes de aceitar as consequências lógicas de uma definição (van Hiele, 1984a).

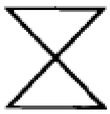
Apenas a investigação realizada por Villiers e Njisane (1987) procurou determinar a posição da inclusão de classes na hierarquia dos níveis. Eles identificaram oito categorias de pensamento geométrico: reconhecimento e representação de figuras, reconhecimento visual de propriedades, uso e compreensão de terminologia, descrição verbal de propriedades ou o seu reconhecimento a partir de uma descrição verbal, dedução com 1 passo, dedução mais longa, classificação hierárquica e, finalmente, leitura e interpretação de definições dadas. Concluíram, entre outras coisas, que os resultados nesta última categoria não estavam em correlação com os das restantes. Aparentemente esta categoria está mais relacionada com capacidades linguísticas do que geométricas. As outras sete categorias estão correlacionadas e formam uma hierarquia em que a primeira é a mais fácil e a sétima a mais difícil, o que parece mostrar que a sétima categoria (Classificação Hierárquica) está pelo menos no nível 3, sendo mais difícil do que as deduções envolvendo vários passos. A estrema dificuldade deste tópico tem sido relatada por outras investigações (Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys, et al., 1985; Mason, 1989; Usiskin, 1982).

Tem havido algumas tentativas para explicar a fonte de tais dificuldades. Fuys, Geddes e Tischler (1985) chamam-lhe "interferência de dificuldades anteriores" (p. 137), o que é pouco específico. Outros notaram que os manuais e as práticas de ensino podem ter a sua responsabilidade (Burger, 1985a). No entanto, a questão de saber o que há de específico na classificação dos quadriláteros que a torna mais difícil de entender do que a classificação de figuras em quadriláteros, triângulos, círculos, etc. mantém-se.

Kay (1986) propõe uma explicação mais pormenorizada. Ela mostrou como o uso de um processo de atribuição de nomes diferentes dos habituais facilitou a aprendizagem de inclusão de classes por alunos do 1º ano de escolaridade.

Os alunos do 1º ano de escolaridade são capazes de compreender relações de inclusão de classes, nomeadamente que cães e gatos são tipos de animais, ou que triângulos e quadrados são certos tipos de figuras geométricas. Portanto o resultado obtido por Kay não nos deveria surpreender. Ele apenas é surpreendente do ponto de vista da teoria de van Hiele, porque os seus alunos do 1º ano de escolaridade dificilmente estarão no nível 3 — a condição necessária e suficiente para que os alunos compreendam a classificação hierárquica de quadriláteros.

Note-se que a classificação de quadriláteros usada correntemente na matemática escolar é apenas uma das possíveis formas de os classificar. Não há uniformidade na classificação de quadriláteros, e nem sequer na de figura geométrica. Por exemplo, a figura abaixo é um quadrilátero nalguns países e nem sequer é uma figura geométrica noutros.



Os matemáticos conhecem este tipo de discordâncias e normalmente resolvem-nas através da negociação do significado dos termos expressa numa definição. Os casos em que essa negociação é mais difícil podem ser precisamente fontes da produção de novo conhecimento matemático (Lakatos, 1976).

As investigações sobre o processo de formação das representações mentais indicam que começamos por categorizar no chamado nível básico (Matos, 1992). As categorias neste nível partilham muitas das características do nível 1 de van Hiele, nomeadamente, os membros da categoria são percepcionados globalmente, têm uma forma global semelhante, e é possível possuir uma imagem mental associada à categoria. É o primeiro nível que possui um nome e que é compreendido pelas crianças, que mais tarde são capazes de diferenciar entre categorias subordinadas e supraordinadas destas (Lakoff, 1987; Rosch, Mervis, Gray, Johnson, & Boyes-Braem, 1976).

É possível usar este nível básico para interpretar o modo como categorizamos figuras geométricas. Tipicamente, na pré-primária ou no 1º ano de escolaridade, as crianças já sabem como agrupar e denominar diferentes formas de objectos, nomeadamente bolas, caixas, estrelas, moedas, ovos, entre outras. A escolarização normalmente significa que elas aprenderão os nomes de mais grupos de formas, como quadrados, triângulos, rectângulos, círculos e outros. Cada um destes grupos está associado a uma categoria de nível básico tendo uma imagem mental e um nome comuns. Existe uma categoria de nível básico para os quadrados, outra para os rectângulos, outra para as bolas, etc. Estas categorias de nível básico são muitas vezes chamadas de nível genérico-comum (*folk-generic*) porque reflectem os níveis mais comummente usados pela sociedade para comunicar. No final do nível 1 as crianças aprenderam a identificar e nomear estas diferentes categorias de nível básico.

Mais tarde estas categorias de nível básico podem ser agrupadas informalmente em duas categorias supraordinadas , as formas tri-dimensionais e as bi-dimensionais. A separação entre estas duas não é muito clara e é mesmo discutível se ela existe para muitas crianças, ou sequer se tem conotações dimensionais. De facto, muitas crianças experienciam apenas representações de sólidos geométricos no livro de texto, outras experienciam quadrados e triângulos como prismas achatados.

Em certa altura da sua escolarização é pedido aos alunos que alterem o estatuto da maioria das categorias dos quadriláteros, passando-os de categorias pertencendo ao nível básico, para categorias supraordinadas: os quadrados permanecem como uma categoria de nível básico, mas todos os outros quadriláteros passam agora a designar categorias supraordinadas que contêm simultaneamente as categorias antigas e muitas das outras. A investigação tem mostrado que esta reorganização cognitiva é muito difícil de realizar. Burger (1985b) relata o caso de um bom aluno do 9º ano que no último mês do seu curso de Geometria não admitia que os rectângulos fossem paralelogramos. Um paralelogramo era, para ele, "um quadrilátero com lados opostos paralelos e sem ângulos rectos" (p. 12). Este aluno sabia que esta era uma "má definição" porque não era a que estava no livro de texto, mas era a sua própria definição.

Guiões e a teoria de van Hiele

As investigações focadas nas dificuldades dos alunos em desenhar figuras (Hershkowitz, Bruckheimer, & Vinner, 1987; Hershkowitz & Vinner, 1984; Vinner & Hershkowitz, 1983) encontraram também efeitos de protótipo que podem ser atribuídos a guiões (*scripts*) — acções que os alunos esperam efectuar (Anderson, 1980). No entanto estas investigações não procuraram estabelecer ligações entre sequências típicas de acções e a teoria de van Hiele.

Redefinindo a teoria de van Hiele

Resumindo o que procurei demonstrar até esta altura:

1) Os modelos imagético-esquemáticos parecem desempenhar um papel importante nos primeiros dois níveis e a sua importância decresce depois do nível 3. Pode-se conjecturar que as imagens mentais desempenham um papel importante no pensamento geométrico, com detalhes são ainda pouco conhecidos.

2) Processos imagéticos, como os modelos metafóricos são usados por todos os participantes na matemática escolar: alunos, livros de texto, professores, matemáticos, etc.

3) Efeitos de nível básico começam a ser produzidos no primeiro nível e a sua influência continua bem para lá do nível 3.

4) Há indícios que guiões afectam a forma como os alunos executam construções geométricas, mas a sua relação com a teoria não foi clarificada.

A teoria tem muita dificuldade em lidar com estes modelos cognitivos. No entanto os sucessos que a teoria conseguiu na descrição da situação na sala de aula e no desenvolvimento curricular aconselham uma tentativa de "emenda" teórica no sentido kuhniano (Kuhn, 1970).

Há dois tipos de mudanças necessárias: mudanças na teoria cognitiva implícita e mudanças na caracterização dos níveis. Uma primeira mudança necessária consiste no abandono do pressuposto sobre as "estruturas espontâneas do material". Esta ideia coloca dificuldades tremendas na compreensão quer da Matemática sob um ponto de vista cultural e social, quer do processo de produção das ideias matemáticas pelos alunos. Uma segunda mudança, que é uma consequência natural da primeira é a aceitação de que o processo através do qual modelamos o nosso conhecimento matemático é construtivo. Uma terceira mudança é o abandono da ideia das descontinuidades na passagem de uns níveis para os outros que deve ser entendida de uma forma contínua. A quarta tem que ver com a caracterização dos níveis 3 e 4, exigindo que a compreensão das definições passe para o nível 4.

Referências

Anderson, J. R. (1980). *Cognitive psychology and its implications*. San Francisco: W. H. Freeman.

Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education—a review. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 257-269.

Burger, W. F. (1985a). Geometry. *Arithmetic Teacher, 32*(6), 52-56.

Burger, W. F. (1985b). *Thought levels in geometry. Interim Report of the study "Assessing Children's Development in Geometry"*. Oregon State University.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 31-48.

Clements, M. A. (. (1981). Visual imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 2(2), 2-9.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1985). *An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Brooklyn, New York: Brooklyn College, School of Education.

Hershkowitz, R. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., & Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In M. M. Lindquist, & A. P. Schulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12. 1987 Yearbook* (pp. 222-235). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1984). Children's concept in elementary geometry— A reflection of teacher's concepts? In B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy, & K. Collis (Eds.), *Proceedings of the Eighth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 63-69). Darlinghurst, Australia: Mathematical Association of New Sout Wales.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind. The bodily basis of meaning, imagination, and reason.* Chicago: University of Chicago Press.

Kay, C. S. (1986). *Is a square a rectangle? The development of first-grade students' understanding of quadrilaterals with implications for the Van Hiele Theory of the development of geometric thought.* Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia.

Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolutions.* Chicago: The University of Chicago Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* New York: Cambridge University Press.

Lakoff, G. (1987). *Women, fire, and dangerous things. What categories reveal about the mind.* Chicago: University of Chicago Press.

Mason, M. M. (1989). The Van Hiele model of geometric understanding and geometric misconceptions in gifted sixth through eighth graders. In C. A. Maher, G. A. Goldin, & R. B. Davis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychologhy of Mathematics Education. September 20-23, 1989. New Brunswick, New Jersey, U.S.A.* (pp. 165-171). New Brunswick, New Jersey: Center for Mathematics, Science, and Computer Education.

Matos, J. (1992). Cognitive models in geometry. In J. P. Ponte, D. Fernandes, J. F. Matos, & J. M. Matos (Eds.), *Mathematical problem solving and information technologies: Research in contexts of practice* (Berlim: Springer.

Matos, J. M. (1985). *Cronologia recente do ensino da Matemática [Recent chronology of mathematics teaching].* Lisbon: Associação de Professores de Matemática.

Matos, J. M. (1988). Um exemplo de didáctica da Geometria. *Educação e Matemática, 6*, 5-10.

Olive, J., Lankenau, C. A., & Scally, S. P. (1986). *Teaching and understanding geometric relationships through Logo.* Emory University, Division of Educational Studies.

Olson, A. T., Kieren, T. E., & Ludwig, S. (1987). Linking Logo, levels and language in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 359-370.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology.* New York: Columbia University Press.

Rosch, E., Mervis, C. B., Gray, W. D., Johnson, D. M., & Boyes-Braem, P. (1976). Basic objects in natural categories. *Cognitive Psychology, 8*, 382-439.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 288). University of Chicago.

van Hiele, P. M. (1984a). The child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Ed.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn, New York: City University of New York, Brooklyn College.

van Hiele, P. M. (1984b). Summary of Pierre van Hiele's dissertation entitled: The problem of insight in connection with school children's insight into the subject-matter of geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 237-241). Brooklyn, New York: City University of New York, Brooklyn College.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Orlando, Florida: Academic Press.

van Hiele, P. M., & van Hiele-Geldof, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry at secondary schools* (pp. 67-80). Groningen: J. B. Wolters.

van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest form of secondary school. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 1-206). Brooklyn, New York: City University of New York, Brooklyn College.

Villiers, M. D. d., & Njisane, R. M. (1987). The development of geometric thinking among black high school pupils in Kwazulu (Republic of South Africa). In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education PME-XI* (Vol. III, pp. 117-123). Montreal.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 15*(1), 20-25.

von Glasersfeld, E. (1974). Signs, communication and language. *Journal of Human Evolution, 3*, 465-474.

Wilson, P. S. (1986). The relationship between children's definitions of rectangles and their choices of examples. In G. Lappan, & R. Even (Eds.), *Proceedings of the Eighth Annual Meeting PME-NA, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 158-162). East Lansing, Michigan.