
Modelos cognitivos associados ao conceito de ângulo

José Manuel Matos
Faculdade de Ciências e Tecnologia

Quando foi pedido a James (pseudónimo de um aluno americano do 4º ano) que indicasse o que é um ângulo a um amigo que ainda não soubesse o que são ângulos, ele disse que “um ângulo parece um espinho de uma roseira”. Este exemplo é ilustrativo do tipo de processos que utilizamos frequentemente para compreender conceitos novos. O que levará James a estabelecer a comparação entre ângulos e espinhos de roseira? Os ângulos são entidades matemáticas as roseiras são plantas bem reais. O livro de texto de James não fala de roseiras nem de espinhos a propósito do conceito de ângulo, nem tal comparação foi efectuada pela professora de James. Que levará então James a usar esta imagem para explicar o que é um ângulo? Esta comparação efectuada por James, não parece ser, no entanto, um caso único. Aparecem processos semelhantes noutros alunos, e mesmo os adultos são capazes de entender o que James quer dizer, isto é, os adultos são capazes de imaginar de que forma um ângulo pode ser entendido como um espinho de roseira.

Este exemplo ilustra um dos processos cognitivos associados à imaginação que todos nós utilizamos para compreender conceitos novos. O estudo parcialmente relatado nesta comunicação procura documentar de que forma estes processos cognitivos estão relacionados com a aprendizagem dos conceitos matemáticos. Posto de outra forma, a questão central deste trabalho é a de procurar compreender o papel desempenhado pela imaginação no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

Modelos cognitivos idealizados

Em trabalhos anteriores que não abordaremos aqui (Matos, 1992a, 1992b) foram discutidas em detalhe diversas teorias alternativas representacionais da mente. Foi mostrado como a teoria dos modelos cognitivos idealizados de Lakoff (1987) fornece um quadro teórico que, com pequenas modificações, nos permite incorporar os aspectos imagéticos na aprendizagem da Matemática.

De forma breve a teoria dos modelos cognitivos de Lakoff requiere dois elementos: espaços mentais e modelos cognitivos. Qualquer situação é representada por um *espaço mental*. Exemplos: a nossa realidade imediata, tal como a entendemos; situações fictícias (pinturas, filmes, ...); situações passadas e futuras, tal como as entendemos; situações hipotéticas; domínios abstractos (economia, política, física), domínios matemáticos, etc. Os espaços mentais podem conter entidades mentais, podem ser estruturados por modelos cognitivos, podem ser relacionados com outros espaços, são extensíveis, isto é, entidades adicionais e outros modelos cognitivos podem ser adicionados a eles no decurso do processamento cognitivo e uma entidade num espaço mental pode estar relacionada com entidades noutra espaço (Lakoff, 1987).

O nosso conhecimento é organizado através de *modelos cognitivos idealizados*, cada um dos quais é um todo complexo estruturado, um gestalt, que utiliza quatro tipos de princípios estruturantes: uma estrutura proposicional (baseada numa definição), uma estrutura imagético-esquemática (baseada em imagens mentais), aplicações metafóricas (baseadas em analogias), aplicações metonímicas (baseadas em metonímias). Cada modelo cognitivo idealizado estrutura um espaço mental (Lakoff, 1987). Para esta teoria poder ser utilizada nos processos de aprendizagem da Matemática foi sugerido (Matos, 1992b) que deveria ser ainda incorporado um quinto princípio estruturante: os guiões baseados numa sequência esperada de acontecimentos.

Nesta comunicação serão caracterizados diversos modelos cognitivos associados ao conceito de ângulo presentes em quatro alunos do 4º e 5º anos de escolaridade de uma escola dos Estados Unidos. Estes quatro alunos foram seleccionados de entre os participantes num estudo mais global e, de entre os dados disponíveis para cada um deles, escolheram-se excertos que permitissem ilustrar alguma diversidade de modelos cognitivos associados a ângulos.

Exemplos de alunos

James

James é um pequeno rapaz que anda no 4º ano. Na sua opinião, um ângulo “é uma espécie de ponto”. *Pontos* são para James o que em linguagem geométrica standard chamamos *vértices*. Para além de um ângulo poder ser confundido com “um pico de uma roseira”, encontram-se ainda ângulos num círculo, como, por exemplo, num campo de basebol. James explica o que quer dizer com isto desenhando um campo de basebol que tem a forma de um quarto de círculo. Existem ainda ângulos na ponta de um lápis ou num transferidor. Nos sólidos, algumas vezes, os ângulos são identificados com os vértices. O cone, por exemplo, tem apenas um ângulo.

Os cantos parecem ser um tipo de ângulos. Os ângulos de James são estáticos e ele distingue ângulos de voltas: “as voltas não têm ângulos. São redondas e não têm pontos”, ou as voltas são “como uma roda de bicicleta, com uma forma de microfone de telefone”. E no entanto James serve-se do sistema de medição de amplitude dos ângulos para indicar voltas diferentes: “eu diria [a um amigo]: roda 90 graus, 45, 180”.

James revela ainda que os ângulos têm uma medida e que certas medidas são pontos de referência privilegiados (Matos, 1992b): os ângulos com 90, 80, 45, 180 e 360 graus são referidos.

Finalmente os ângulos produzidos por James têm sempre um contexto. Quando lhe é pedido para desenhar um ângulo ele desenha a figura da esquerda da figura 1 e quando lhe é pedido um segundo ângulo diferente do primeiro, ele desenha uma outra figura.

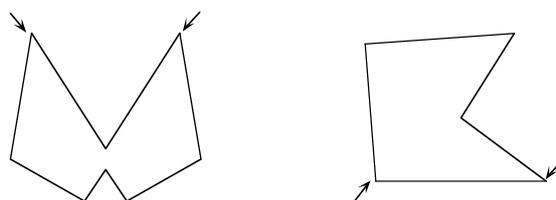


Figura 1. Ângulos desenhados por James.

Em nenhuma das tarefas que lhe foi proposta James desenhava um ângulo isolado. Mais tarde, apesar de identificar um ângulo num triângulo (na figura 2 está indicado o ângulo identificado pelo aluno), ele não é capaz de o dividir

ao meio porque: “parece que [o ângulo] já foi dividido. Parece que já foi dividido em metade de um papagaio”. James parece estar a imaginar o resto do papagaio (a tracejado na figura 2).

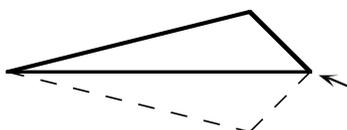


Figura 2. Um ângulo que já está dividido ao meio...

O modelo cognitivo exibido por James interliga-se com os seus modelos de outros objectos geométricos: “os triângulos têm pontos e os ângulos são pontos”. No entanto, os triângulos são diferentes de ângulos porque alguns ângulos “são maiores do que os ângulos dos triângulos”, por exemplo os ângulos do rectângulo são maiores do que os de um triângulo. O modelo cognitivo de triângulo parece ser o de um triângulo quase-equilátero.

Para James os ângulos aparecem pois como entidades que podem ser associadas a cantos. James diz que os ângulos estão presentes em diversos objectos com que ele contacta correntemente (lápiz, roseiras, campos de basebol). Os ângulos não se distinguem dos objectos que ele menciona. Trata-se essencialmente de um canto, um bico, uma ponta.

O seu modelo cognitivo de um ângulo parece pois ser caracterizado por uma interacção de diversos sub-modelos. Um primeiro sub-modelo é dominado pela propriedade de um objecto ser pontiagudo. Os ângulos são metaforicamente relacionados com objectos pontiagudos, assim como com outras experiências sensoriais relacionadas com objectos pontiagudos. Mas James parece ainda ter um segundo sub-modelo cognitivo de tipo imagético-esquemático aplicado a objectos que possuem um arco de circunferência. E é assim que James observa ângulos num transferidor ou num campo de basebol.

Jessie

Jessie é uma aluna do 5º ano que manifesta algumas dificuldades de aprendizagem. Durante a recolha de dados tornou-se claro que ela ainda tinha algumas dúvidas fundamentais sobre o conceito de ângulo. De tal forma que a dado momento ela sente necessidade de perguntar ao investigador se um triângulo, ou uma figura como a da figura 3, podem ser ângulos.

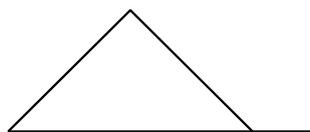


Figura 3. Uma possibilidade de ângulo para Jessie.

Apesar de, em diversas situações, Jessie ser capaz de desenhar ângulos convencionais, num outro contexto ela apresenta o desenho da figura 4 como um exemplo de ângulo.

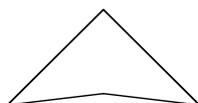


Figura 4. Um exemplo de ângulo para Jessie.

Em todas as perguntas que têm que ver com a identificação de ângulos, Jessie segue o critério de investigar se existem linhas ligadas. Por exemplo, quando lhe foi perguntado por que tinha identificado um ângulo na posição A (figura 5) ela afirmou “aqui estão linhas que se ligam, está a ligar aqui”.

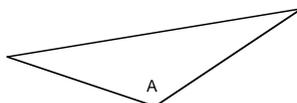


Figura 5. Um ângulo onde as linhas se ligam.

A complexidade desta característica de que os ângulos são constituídos por linhas que se ligam pode ser melhor apreciada no seguinte episódio. O investigador apresenta um ângulo numa folha de papel, afirma que já não tem mais papel e pergunta como poderiam os lados ser prolongados sem alterar o ângulo. Jessie responde que: “[As linhas] podiam continuar mas não se ligariam. (...) Porque uma vai nesta direcção e a outra vai noutra direcção”. Jessie parece querer dizer que se os lados forem prolongados eles não se ligarão, e, conseqüentemente, não formarão um ângulo. “Se eu juntasse estas [linhas] (...), elas rapidamente se ligarão”. Jessie acompanha esta última afirmação com um desenho de duas rectas que se intersectam, parecendo querer significar que se as rectas convergirem (“juntarem”) elas ligar-se-ão e formarão um ângulo. “Se continuarem a andar, poderão não se ligar”. Todo este episódio é desenvolvido em torno de uma ideia de movimento, de uma linha que se desenrola como um caminho. O critério para encontrar um ângulo é

associado ao acontecimento de as linhas se ligarem, ou seja é associado à acção interiorizada de ligar.

Esta acção interiorizada está representada frequentemente nos dados, já que o termo “ligação” [*connect*, no original] ou termos associados são utilizados 31 vezes. Jessie é capaz de estender o modelo mesmo para o caso tri-dimensional. O cone, por exemplo, tem um ângulo, mas a esfera não, porque não possui linhas que se ligam.

Em resumo, Jessie parece ter desenvolvido um modelo cognitivo de ângulo caracterizado por linhas não demasiado curvas que se ligam.

Bob

Bob é o que se pode designar por um aluno aplicado do 5º ano e o seu modelo cognitivo associado ao conceito de ângulo assume uma relativa complexidade. Quando lhe foi pedido para distinguir entre ângulos e triângulos Bob explicou que “os ângulos vão assim... [abre as palmas das mãos, polegares na vertical, conforme tenta indicar a figura 6]. Juntam-se num sítio”.

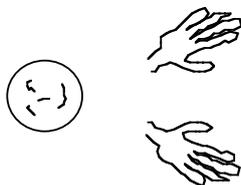


Figura 6. Bob coloca-se num vértice e forma um ângulo em que as mãos são os lados.

E Bob continua:

Mas os triângulos juntam-se em três sítios [faz um gesto de fechar as palmas das mãos, ver figura 7].



Figura 7. Um triângulo em que Bob se coloca num vértice e em que as mãos são os lados.

Bob manifesta um modelo em que incorpora (*in-corpora*, no sentido de

Johnson, 1987) figuras geométricas, isto é, ele assume-se como vértice sucessivamente do ângulo e do triângulo e observa as duas figuras a partir dessa posição.

Mas Bob manifesta também um outro modelo. Em diversas ocasiões ele discute como os ângulos estão associados a “uma linha que se abre para fora [acompanha com um movimento de rotação]”, ou os ângulos “começam” num ponto, que ele associa com o centro de uma rotação. Esta ideia de que um ângulo é uma rotação é manifestada por Bob em diversas ocasiões, especialmente quando é necessário discriminar casos mais complexos. Bob é razoavelmente consistente com este seu critério. Na maioria das tarefas que envolvem ângulos ele argumenta fazendo apelo a rotações. Afirma mesmo que não há diferença entre volta (“turn”) e ângulo. Tudo se passa como se ele possuísse um modelo proposicional que diz que um ângulo é uma rotação.

Em suma, Bob parece exibir um modelo cognitivo complexo. Existe por um lado um sub-modelo através do qual ele é capaz de se incorporar em figuras geométricas, e por outro um sub-modelo com características proposicionais no qual ele usa uma definição de ângulo como uma rotação.

Alice

Alice é uma aluna do 5º ano capaz de verbalizar os seus pensamentos com alguma facilidade. Talvez por isso é fácil observar como ela utiliza uma diversidade de modelos acompanhados por gestos para representar um ângulo. Um pequeno exemplo pode ser observado nesta sequência:

Um ângulo é um buraco ao lado de alguma coisa [e traça com as mãos o movimento circular indicado na figura 8].

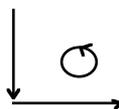


Figura 8. “Um ângulo é um buraco ao lado de alguma coisa”.

Num triângulo, por exemplo, eu diria que há um ângulo ali [traça os gestos da figura 9],

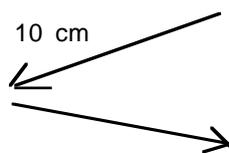


Figura 9. Desenho gestual de um ângulo pela Alice.

porque há um canto. Olha-se para o ponto onde termina [e aponta para o vértice do ângulo da figura 9]. Esta folha de papel, por exemplo, tem um ângulo ali [e aponta para o canto de uma folha de papel].

Todas estas figuras geométricas foram desenhadas gestualmente e ela vai apontando para as posições onde foram desenhadas. Tudo se passa como se estas figuras permanecessem virtualmente durante esta tarefa.

Noutra sequência, Alice verbalmente utiliza o critério de que um ângulo é o que começa num ponto e roda, ao mesmo tempo que indica gestualmente o movimento expresso na figura 10. Para a Alice os ângulos tanto podem começar como acabar no vértice.

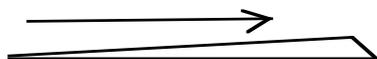


Figura 10. Um ângulo como um movimento.

Em resumo, Alice denota um modelo cognitivo complexo utilizando simultaneamente três sub-modelos de ângulo: um espaço vago delimitado por duas entidades retilíneas de características imagético-esquemáticas, um movimento de expansão ou de compressão com uma estrutura de guião. Por diversas vezes, e em simultâneo com estes sub-modelos, Alice utiliza ainda um sub-modelo proposicional de ângulo.

Alice é capaz de integrar estes três modelos. Numa sequência ela afirma que “um ângulo começa aqui [aponta para o canto da mesa] e vai todo à volta [faz um gesto que abrange a mesa através de um arco de círculo] onde acaba. Portanto [um ângulo] tem sempre um ponto onde começa”. Isto é, ela começa por interligar: a) uma área definida gestualmente, com b) um movimento abrangente (mas não circular), e termina c) destacando uma propriedade dos ângulos, a saber que os ângulos têm sempre um ponto onde começam.

Marie

Marie é uma aluna do 5º ano que manifesta uma grande segurança no seu conhecimento matemático. Quando lhe foi perguntado como explicaria ela o que são ângulos Marie produz uma longa dissertação durante a qual apresenta uma diversidade de exemplos de ângulos. Eis um pequeno extrato:

Temos os cantos de um quadrado e se conservarmos só as linhas temos quatro ângulos. Se, num triângulo apagarmos tudo excepto os cantos, temos três ângulos. Os ângulos podem estar sobre uma recta, ou estar tudo à roda. Todos os ângulos têm vértices e dois lados e pode-se rodar os dois lados quanto se quiser.

Marie exhibe consistentemente um modelo cognitivo proposicional de ângulo caracterizado pela definição matemática convencional. Marie é capaz de manter este modelo perante tarefas que requerem a utilização de definições e de conectivos lógicos como todos, alguns, nenhum, etc. Ela rejeita ainda qualquer associação de ângulo, como objecto matemático, com objectos da vida real, como cantos. Contrariamente a todos os outros alunos, Marie apenas utilizou gestos durante um breve momento de hesitação numa das tarefas. Em todos os outros momentos ela foi capaz de se exprimir apenas verbalmente.

Conclusões

Algumas conclusões podem ser retiradas dos exemplos anteriores. Por um lado, o conceito de ângulo assume uma grande diversidade para os alunos referidos anteriormente. Estes alunos recorrem aos mais diversos processos para fazerem sentido do conceito matemático que lhes é ensinado. São utilizados modelos imagético-esquemáticos para entender metaforicamente o conceito de ângulo. São utilizados diversos guiões como forma de compreender acções repetidas interiorizadas. Finalmente são utilizados consistentemente por alguns alunos modelos proposicionais. Um conceito matemático aparece associado nestes alunos a uma diversidade de representações mentais.

Embora num caso (Marie) tenham praticamente desaparecido modelos não-proposicionais, nos outros alunos com mais experiência sobre o tópico coexistem modelos proposicionais com modelos de outros tipos. As metáforas, por exemplo, não desaparecem. Estes alunos mostram também a capacidade de utilizar um ou outro modelo simultaneamente, assim como a capacidade de escolher o modelo que mais adequadamente (segundo o seu ponto de

vista) resolve uma situação.

Esta comunicação preocupou-se essencialmente com os processos de aprendizagem desenvolvidos pelos alunos. Podem, no entanto, desde já ser levantadas algumas interrogações sobre as consequências desta multiplicidade de representações mentais para o processo de ensino. Como se formam estes modelos? Como mudam? Por exemplo, como pode o professor gerir na sala de aula esta diversidade? Deve o professor, como interveniente activo no processo facilitador da aprendizagem, privilegiar a formação de alguns destes modelos? Todos os modelos cognitivos têm potencialidades educativas idênticas, ou existem alguns destes modelos que facilitam (ou inibem) aprendizagens futuras?

Referências

- Johnson, M. (1987). *The body in the mind. The bodily basis of meaning, imagination, and reason*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lakoff, G. (1987). *Women, fire, and dangerous things. What categories reveal about the mind*. Chicago: University of Chicago Press.
- Matos, J. M. (1992a). Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados. *Quadrante, 1*, 93-112.
- Matos, J. M. (1992b). Cognitive models in geometry. Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 93-112). Berlim: Springer.

José Manuel Matos, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2825 MONTE DA CAPARICA.