Conjecturas e provas informais em Geometria com recurso a ferramentas computacionais[1]

Margarida Junqueira
Projecto MINERVA — Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNL

Introdução

Na lição plenária de encerramento do ICME7[2] Benoît Mandelbrot, pai da Geometria Fractal, levantava a questão de como convencer os alunos de que é importante provar. Baseava-se para tal no facto de algumas das descobertas por si efectuadas, proporcionadas pelas potencialidades do computador, quer no domínio da visualização, quer no domínio da repetição interminável de cálculos, não serem nada evidentes e terem acontecido pela sua capacidade de olhar para o monitor, observar, colocar questões e tentar obter respostas para elas; por outras palavras, pela sua capacidade de ver com a mente e não só com os olhos.

O sentido atribuído por Mandelbrot à palavra *provar* não tem necessariamente a ver com a acepção mais generalizada no seio da comunidade dos professores de Matemática: exposição formal e dedutiva de raciocínio lógico, sobre um resultado previamente conhecido e cuja validade não é posta em causa, mas tem sobretudo a ver com a ideia de fundamentar rigorosamente uma hipótese, induzida por observações experimentais, através de processos estabelecidos e aceites pela comunidade no seio da qual a hipótese e a argumentação desenvolvida têm significado (Balacheff, 1991a).

Mas, ao contrário de Mandelbrot, a larga maioria dos alunos do 3º Ciclo[3] não são, nem pretendem vir a ser, investigadores matemáticos. Que sentido faz, então, ensinar esses jovens a conjecturar e a argumentar rigorosamente?

Para o conferencista os tempos que correm exigem que se desenvolva em todos os alunos este tipo de capacidades e atitudes, ideia também sublinhada por Schwartz (1992, p. 170) quando refere a necessidade de educar as gerações que nos vão suceder para "interrogar naturalmente e espontaneamente, sobre tudo o que vêem no mundo à sua volta, "Com o que é que isto tem a ver?".

Analisar uma situação, ter uma ideia, experimentar, observar, descobrir porque é que não funcionou, reformular a ideia, voltar a experimentar até que a ideia se mostre adequada para a questão em jogo são atitudes que deveriam integrar, de forma sistemática, o ensino e a aprendizagem da Matemática.

O NCTM (1991, p. 5-8) nas *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*, com o fim de reflectir a importância da alfabetização matemática de todos os cidadãos, descreve cinco objectivos gerais para todos os alunos, entre os quais se salienta:

> Aprender a raciocinar matematicamente. Formular conjecturas, procurar justificações e construir uma argumentação em concordância são actividades fundamentais para fazer Matemática. Na realidade a explicitação de um bom raciocínio deveria ser melhor recompensada num aluno do que a capacidade para encontrar respostas correctas.

A importância da colocação e prova de conjecturas tem a ver com o desenvolvimento do poder matemático do aluno. Por outras palavras, tem a ver com o desenvolvimento das capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como da sua aptidão para utilizar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros (NCTM, 1991).

Os novos currículos de Matemática salientam, igualmente, a importância do desenvolvimento do raciocínio. O programa do 3º Ciclo (DGEBS, 1991a, p. 10) refere como objectivo geral:

> Capacidade/aptidão de desenvolver o raciocínio:
>
> - Tirar conclusões a partir de gráficos, figuras e esquemas, para resolver problemas ou para desenvolver conceitos.
> - Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
> - Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, factos conhecidos, propriedades e relações.
> - Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

A questão é retomada no programa de Matemática do Ensino Secundário (DGEBS, 1991b, p. 27):

> Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico:
> - Descobrir relações entre conceitos de Matemática.
> - Formular generalizações a partir de experiências.
> - Validar conjecturas.
> - Fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.

Faz, assim, sentido tentar compreender os processos de desenvolvimento destas capacidades, o que passa por, em particular, compreender os processos de raciocínio dos alunos levando em linha de conta a dinâmica proporcionada pelo contexto em que decorrem as aprendizagens.

A natureza da aprendizagem

Muitos dos actuais projectos de investigação em educação desenvolvem-se à luz do construtivismo e do interaccionismo social. Do primeiro deriva a *noção do aluno como aprendiz activo que constrói significados através do* processo de aprendizagem. Do segundo deriva a noção de que o contexto social da aula, formado por pares e professores, influencia o modo de construção dos significados.

A conceptualização da aprendizagem como um processo activo e construtivista conduz à ideia de que os alunos não são recipientes de informação passivos, mas, pelo contrário, constroem os seus conhecimentos através da interacção com o ambiente e através da reorganização das suas estruturas mentais (De Corte, 1992).

Habitualmente admite-se que o conhecimento é independente das situações em que é produzido e que pode ser transferido, dos professores para os alunos, em actividades de sala de aula independentes daquelas em que normalmente é utilizado. As investigações recentes sobre aprendizagens em contextos extra-escolares começam a minar esta suposição levando a admitir que o conhecimento é fundamentalmente situado, sendo em parte um produto da actividade, do contexto e da cultura no qual se desenvolve (Brown, Collins e Duguid, 1988).

Os conhecimentos prévios têm um papel importante à luz da perspectiva construtivista e situada da aprendizagem[4]. Como salienta De Corte:

> É com base naquilo que já sabem que os alunos processam activamente a informação com que deparam, construindo, dessa forma, novos conhecimentos e competências (1992, p. 97).

Perspectivas como estas implicam que a aprendizagem deve situar-se em contextos ricos em recursos e materiais de aprendizagem (Papert, 1980), que propiciem a familiarização progressiva do aluno (Teodoro, 1992), que ofereçam oportunidades para a interacção social e que sejam representativos do tipo de tarefas e problemas aos quais, no futuro, os alunos terão de aplicar os seus conhecimentos e capacidades (De Corte, 1992).

Os investigadores em Educação Matemática têm vindo a integrar nos seus trabalhos os resultados das investigações sobre a natureza da aprendizagem, o que levou a uma mudança na ênfase. Deixam de se preocupar apenas com os produtos das aprendizagens dos alunos e tentam sobretudo compreender os processos utilizados nessas aprendizagens, nomeadamente os modelos de conhecimento que estão subjacentes. Este facto é evidente na dinâmica que a investigação na área das concepções e da construção de conceitos por parte dos alunos e na influência do contexto sociocultural nessas construções tem vindo a ganhar. Os trabalhos de Sekiguchi (1991), Balacheff (1991a) e Matos (1992), entre muitos outros, constituem um exemplo.

A aprendizagem da Geometria

A Geometria é um dos temas que melhor evidencia a unidade do conhecimento matemático e as suas ligações com o mundo real. Do ponto de vista educativo é um campo pleno de potencialidades. O NCTM (1991, p. 133) salienta a importância deste ramo da Matemática:

> O estudo da Geometria ajuda os alunos a representar e a dar significado ao mundo. Os modelos geométricos fornecem uma perspectiva a partir da qual os alunos podem analisar e resolver problemas, e as interpretações geométricas podem ajudá-los a compreender mais facilmente uma representação abstracta simbólica.

Os novos programas de Matemática também se debruçam sobre este assunto. No programa do 3º Ciclo (DGEBS, 1991a, p. 47) pode ler-se:

> [São] preocupações constantes (...) a observação e análise de figuras, a ligação à vida real, o aproveitamento da intuição e o desenvolvimento progressivo do rigor, o uso

de raciocínios indutivos e dedutivos sem esquecer a importância da comunicação, da argumentação, a utilidade do esboço e da construção rigorosa.

No programa do Ensino Secundário (DGEBS, 1991b, p. 24) é dito que:

O peso relativo da geometria aumentou, por se considerar tema privilegiado para a consecução de muitos dos objectivos gerais propostos, como o desenvolvimento da capacidade de interpretar e intervir no meio envolvente, de estruturar o raciocínio lógico, de analisar e sintetizar, de comunicar pela imagem...

Decorre um grande debate internacional sobre o ensino e aprendizagem da Geometria. Questionam-se os conteúdos (transformações geométricas, axiomas, Geometria informal), questionam-se as finalidades (ginástica da mente, estruturação do espaço, visualização) e questionam-se as metodologias (indução, dedução, experimentação, Geometria com computadores) (Matos, 1991). Este interesse reflecte-se na investigação sobre o ensino e aprendizagem da Geometria, com uma grande bateria de estudos a serem desenvolvidos nesta área, como se pôde perceber pelos projectos de investigação apresentados no ICME7, WG11 — *The role of geometry in general education* (O papel da Geometria na educação geral) bem como pelas diversas referências que foram sendo feitas à aprendizagem deste ramo da Matemática em muitas e diferentes realizações do Congresso.

O modelo van Hiele

Uma parte do trabalho teórico de investigação e ensino conceptualiza as diferentes fases da aprendizagem da Geometria como um processo desenvolvimentista que parte da visão da Geometria como a ciência do espaço para a visão da Geometria como estrutura lógica dedutiva (Hershkowitz, 1989).

A teoria dos van Hiele, que tem servido de suporte para alguns projectos de investigação e de desenvolvimento curricular, pode considerar-se enquadrada nesta perspectiva.

Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele desenvolveram a sua teoria na Holanda quando, em meados dos anos 50, escreveram as suas teses de doutoramento sob a direcção de Hans Freudenthal. De acordo com estes autores, o aluno, apoiado por instrução apropriada, aprende Geometria progredindo através dos cinco níveis que se indicam em seguida na tabela 1.

Tabela 1. Níveis de Aprendizagem da Geometria.

Nível 0 (Visualização) — As figuras são entendidas de acordo com a sua aparência.
Nível 1 (Análise) — As figuras são o conjunto das suas propriedades.
Nível 2 (Ordenação) — As propriedades são ordenadas logicamente.
Nível 3 (Dedução) — A Geometria é entendida como um sistema axiomático.
Nível 4 (Rigor) — Os sistemas axiomáticos são estudados.

Nota. Adaptado de Fuys, Geddes e Tischler, 1988, p. 5.

Identificam-se as seguintes características principais sobre a natureza geral dos níveis de van Hiele (Fuys, Geddes e Tischler, 1988; Hershkowitz, 1989; Scally, 1986). (a) Os níveis existem numa sequência fixa. Assim, não é possível um aluno atingir o nível n+1 sem ter passado pelo nível n. (b) O que está implícito num nível torna-se explícito no nível seguinte. Assim, aquilo que num nível um aluno apenas era capaz de observar torna-se objecto de raciocínio no nível seguinte. (c) Cada nível tem a sua linguagem própria, conjunto de símbolos, e rede de relações. Assim, um aluno pode não entender um professor que raciocine num nível superior ao seu. (d) Os assuntos ensinados aos alunos acima do seu nível são sujeitos a uma redução de nível (apenas são memorizados e repetidos de forma rotineira). (e) A progressão de um nível para o seguinte está mais dependente das experiências de instrução do que da idade ou da maturação do aluno. (f) A passagem de um nível para outro é feita através de 5 fases (Informação, Orientação Guiada, Explicação, Orientação Livre, Integração).

Os resultados das investigações dos van Hiele, confirmados por outros autores como referem Fuys, Geddes e Tischler (1988), salientam a importância dos processos de aprendizagem no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Admite-se, assim, ser possível estabelecer uma correspondência entre a teoria de Vygotsky (1988) e aspectos do modelo van Hiele.

Por exemplo, os módulos instrucionais concebidos, à luz deste modelo, por Fuys, Geddes e Tischler (1988) tinham uma dupla orientação. Por um lado pretendiam avaliar o nível actual de pensamento geométrico dos alunos, mas por outro pretendiam fazê-los progredir através desse nível em direcção ao seguinte. Como é reconhecido por estes autores, os módulos estavam orientados para a "zona próxima do desenvolvimento" do aluno, isto é, para aquilo que o aluno ainda não consegue executar autonomamente mas é capaz de fazer devidamente apoiado (Vygotsky, 1988).

No quadro da teoria de Vygotsky, De Corte (1992, p. 99) propõe que "a instrução deveria ajudar a criança a dominar autonomamente os comportamentos que constituem [a sua zona próxima de desenvolvimento] num determinado momento, e estimular o desenvolvimento cognitivo através da criação de zonas próximas de desenvolvimento. Para além de um adulto ou um colega, um computador pode executar estas tarefas".

É nesta perspectiva que se propõe o estudo da influência dos ambientes gráficos computacionais na aprendizagem da Geometria.

A aprendizagem da Geometria em ambientes gráficos computacionais

Segundo Papert (1988) uma das mudanças mais marcantes das últimas décadas foi o facto dos objectos computacionais se terem tornado um fenómeno novo e muito presente na vida das crianças. A utilização educativa do computador transforma-se, assim, numa questão cultural.

A experiência de trabalho com alunos leva a admitir que estes reconhecem a necessidade de aprender a utilizar computadores pois consideram-nos uma ferramenta indispensável em quase todos os sectores de actividade humana. Mas reconhecem que o computador (num sentido lato do termo) pode ser uma ferramenta poderosa na construção do seu conhecimento?[5]

Os processos de resolução que ocorrem numa situação problemática dependem da interacção de três elementos principais: o aluno enquanto sujeito cognitivo, o problema matemático e o contexto. O facto do computador fazer parte do contexto pode conduzir a fortes mudanças nestas interacções (Laborde e Laborde, 1992). As potencialidades gráficas das modernas ferramentas computacionais sugerem que os computadores mudarão significativamente a aprendizagem da Geometria, uma vez que "a apresentação dinâmica que o computador permite dar à representação das formas desenvolve a imaginação e promove uma fonte de novas combinações, estruturas e generalizações" (Neves, 1988, pp. 45-46).

Desenhar é uma tarefa, fascinante para uns, difícil para outros, mas na maioria dos casos morosa se se pretende um nível de rigor que permita descobrir propriedades e relações entre propriedades das figuras geométricas. Repetir, com papel e lápis, várias vezes uma construção de modo a procurar as invariâncias e as regularidades da situação, pode conduzir à desmotivação. Novas abordagens, mais dinâmicas, se impõem. Utilizações sofisticadas dos computadores e do software trazem mudanças fundamentais na trilogia ensinar/aprender/fazer Geometria (Straesser, 1992).

Figura versus desenho

As figuras construídas em ambientes como o Cabri-géomètre, Geometric Supposer, Geometer's Sketchpad, adquirem um estatuto diferente do dos simples desenhos.

Por um lado, o computador coloca limitações que conduzem o aluno à utilização das propriedades geométricas das figuras e à descrição processual da figura em termos de construções elementares sucessivas e não apenas à sua percepção visual (Hershkowitz, 1989; Capponi, 1992). Por outro, uma vez construída a figura, esta pode ser repetida a partir de objectos de base diferentes (Geometric Supposer) ou deformada por arrastamento de alguns dos seus objectos de base (Cabri-géomètre, Geometer's Sketchpad). Esta manipulação de objectos específicos no monitor do computador faculta aos alunos a possibilidade de considerar a figura representativa de uma classe de objectos, ou de construções, que mantém invariantes as propriedades (Laborde e Laborde, 1992; Schwartz, 1992; Olive, 1992, Saraiva[6], 1992).

Se, por exemplo no Cabri-géomètre[7], o aluno construir um quadrado marcando quatro pontos no monitor e unindo-os por meio de segmentos de recta obtendo uma figura com a aparência visual do quadrado, facilmente percebe, arrastando um dos pontos de base, que a figura assim construída não mantém as propriedades que caracterizam um quadrado. Para construir um quadrado que se mantenha como tal através de manipulação dinâmica, o aluno será induzido a analisar e utilizar os atributos do quadrado, progredindo por esta via no pensamento geométrico.

Este tipo de software materializa, melhor do que o faz o papel e o lápis, as propriedades geométricas da figura desenhada, uma vez que a correcção da construção depende apenas das propriedades existentes e não de elementos distractores como por exemplo o tamanho ou a orientação do desenho (Laborde e Laborde, 1992).

As percepções visuais impedem, por vezes, a progressão do pensamento geométrico dos alunos, nomeadamente a passagem do nível de visualização (geometria do desenho) para o nível da prova (geometria da figura). Tem-se estudado intensivamente os obstáculos causados pelos aspectos perceptuais dos desenhos. Yerushalmy e Chazan (referido por Laborde e Laborde, 1992) identificaram as três categorias: (a) a particularidade de um desenho pode levar os alunos a incluir características irrelevantes no desenho; (b) os desenhos-tipo (*standard*) dificultam a interpretação de desenhos não tipificados; (c) a incapacidade dos alunos para verem um desenho de modos diferentes, atingindo de forma selectiva e sequencial as partes e o todo.

Alguns resultados de investigações evidenciam o facto da interacção com ambientes gráficos dinâmicos permitir ultrapassar estes obstáculos perceptuais.

Pode, no entanto, colocar-se a questão de os alunos, ao trabalharem nestes ambientes, conceberem os objectos teóricos e as suas relações baseados apenas na sua percepção individual. Por exemplo, Saraiva (1992, p. 249) faz notar que "os alunos (...) formularam generalizações e consideraram-nas automaticamente válidas com base nos poucos casos por eles experimentados". Evita-se o indutivismo acentuado pelas possibilidades visuais dos computadores se se ensinar os alunos a procurar contra-exemplos visuais, e a fazer inferências sobre as condições que originaram esses contra-exemplos. Esta é uma das ideias que está subjacente ao modo de arrastamento (*dragging-mode*) do Cabri, e que pode ser realizada por manipulação directa (Laborde e Laborde, 1992).

Estes autores fazem notar que o *feedback* proporcionado pelo modo de arrastamento do Cabri-géomètre é de dupla natureza: (a) evidencia a incorrecção da solução, e (b) informa sobre as relações entre os vários elementos da figura. Os processos de resolução são, assim, alterados em função do *feedback*. Tais alterações produzem-se não apenas como consequência da informação devolvida, mas também através de uma *visualização activa*, por outras palavras, uma visualização baseada num processo interactivo entre raciocínio indutivo e dedutivo (Laborde e Laborde, p. 184):

> É ao analisar as alterações do desenho provocadas pelo arrastamento, e não apenas ao vê-las, que o utilizador pode descobrir algumas relações geométricas entre os elementos da figura. Esta forma de resolver um problema está fortemente relacionada com o facto do utilizador não trabalhar no desenho mas realmente na figura; deste ponto de vista a figura é considerada como um conjunto de relações entre variáveis e o modo de arrastamento um meio poderoso de *exteriorizar* essas relações (Laborde e Laborde, p. 185-186; itálico dos autores).

Conjecturas e provas em ambientes gráficos computacionais

Para Lakatos (1984, p. 5), "a Matemática não formal, quase-empírica, não se desenvolveu num crescendo contínuo do número de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas através da melhoria incessante das conjecturas graças à especulação e à crítica, graças à lógica das provas e refutações".

Na linha de pensamento deste autor são hoje aceites concepções de conjectura e prova despidas do formalismo tradicional. De acordo com Schwartz (1989, p. 51) "uma conjectura matemática é uma proposição sobre uma relação, até então insuspeitada, que se pensa que se vislumbrou, entre dois ou mais objectos matemáticos". Uma conjectura pode resultar, por exemplo, da generalização de uma determinada regularidade verificada por meio de observações realizadas em casos particulares. A sua validade pode ser mostrada através de provas informais, no sentido que Lakatos atribuía a esta expressão, isto é, através de "explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível, mais convincente, ao mesmo tempo que a tornam mais detalhada e exacta pela pressão exercida pelos contra-exemplos" (Davis e Hersh, 1981, p. 347).

Assim sendo, os ambientes computacionais para criação e exploração geométrica são ferramentas poderosas para levar os alunos a formular e a provar conjecturas de modo semelhante ao utilizado pelos especialistas, seguindo, para isso, o percurso dos aprendizes[8].

De um modo geral os alunos não são peritos em colocar e resolver problemas, podendo mesmo não ter os conhecimentos geométricos necessários para elaborar argumentos dedutivos nem a capacidade de procurar respostas gerais. Um pré-requisito importante para que os alunos sejam capazes de colocar problemas, é que sejam capazes de verificar em casos específicos ideias geométricas que parecem ser verdadeiras (Chazan, 1992).

Em ambientes computacionais como os que têm vindo a ser referidos é fácil para o utilizador investigar se uma propriedade que descobriu ser verdadeira num caso particular continua a sê-lo noutros casos, após o que poderá inferir a respectiva generalização.

A inferência de generalizações resultantes da testagem de casos particulares pode conduzir os alunos à descoberta dos casos em que essa generalização se verifica. "Se houver outros casos para os quais a propriedade descoberta é verdadeira, então torna-se um problema aparentemente importante caracterizar a natureza da colecção de casos para os quais se obtém essa propriedade" (Schwartz, 1992, p. 174), levando os alunos a compreenderem a necessidade da prova em Matemática. É, assim, plausível admitir que estes ambientes podem provocar modificações nos processos de exploração das situações envolvendo interacções do raciocínio indutivo e dedutivo, na linha proposta por Laborde e Laborde (1992).

Salienta-se, no entanto, que a responsabilidade pelas alterações não pode ser atribuída à ferramenta computacional, só por si. Pelo contrário, é todo o contexto social e cultural da sua utilização, nomeadamente as actividades propostas e a actuação do professor, que podem levar os alunos a colocar e a resolver problemas de novos modos. Nas conclusões do seu estudo Saraiva (1992, p. 250) refere que "o ambiente da aula criado pelo programa Logo.Geometria, pelo professor e pelas actividades propostas permitiu que bastantes alunos acabassem por sentir a necessidade e a utilidade das demonstrações".

O problema: uma primeira formulação

As considerações anteriores conduzem à inventariação de algumas questões que têm interessado os investigadores em Educação Matemática e sobre as quais se pretende fazer incidir o estudo. Sob a grande questão: "Quais os processos e dificuldades dos alunos na construção de raciocínios rigorosos? Qual a influência dos ambientes gráficos computacionais com capacidades dinâmicas na colocação e validação de conjecturas?", podem ser formuladas as subquestões descritas a seguir.

Os novos programas de Matemática do Ensino Secundário propõem, no 10º ano de escolaridade, uma abordagem hipotético-dedutiva da Geometria (DGEBS, 1991b, p. 53). À luz do modelo van Hiele, tal abordagem só poderá ser acompanhada pelos alunos, sem que seja reduzida a uma mera memorização de conceitos e de relações, se estes chegarem ao 10º ano de escolaridade no Nível 3 (Dedução) de pensamento geométrico, ou, no mínimo, tiverem percorrido anteriormente todas as fases de progressão no Nível 2 (Ordenação) (Fuys, Geddes e Tischler, 1988).

Resultados de algumas investigações realizadas noutros países (Fuys, Geddes e Tischler, 1988; Scally, 1986) mostram que, no 9º ano de escolaridade, os alunos aprendem Geometria baseando-se quase só na visualização de figuras e na identificação de algumas das suas propriedades (Níveis 0 e 1, de acordo com os van Hiele), e manifestando dificuldades no estabelecimento de relações entre essas propriedades. A experiência pessoal de trabalho com alunos e professores leva a admitir a hipótese de uma situação idêntica acontecer no actual sistema português de aprendizagem da Geometria, conduzindo, por isso, ao interesse do respectivo estudo.

Por outro lado, a análise da literatura aponta no sentido de os computadores, actuando como amplificadores intelectuais e facilitadores da investigação, poderem auxiliar os alunos na colocação e na exploração de problemas, fazendo-o de modo semelhante ao utilizado pelos especialistas (Yerushalmy, Chazan e Gordon, 1990). Parece, assim, ser admissível formular a hipótese de que a construção e manipulação dinâmica de figuras no monitor do computador habilita os alunos para intuírem relações entre propriedades das figuras, formularem conjecturas e produzirem provas informais, promovendo a progressão através do Nível 2 (Ordenação) de aprendizagem da Geometria.

No entanto, e como já foi analisado, a progressão na aprendizagem dependente largamente dos processos de instrução. Esta questão torna-se particularmente relevante no domínio da utilização das ferramentas computacionais com capacidades dinâmicas, devido ao seu desenvolvimento ainda muito recente. Como referem Yerushalmy, Chazan e Gordon (1990) torna-se necessário encontrar/construir problemas, para os alunos investigarem, que explorem as potencialidades da ferramenta computacional, e que dêem as pistas necessárias sem revelar demasiado, de modo a despertarem o interesse dos alunos pouco habituados a colocar e a resolver problemas.

Assim, é plausível admitir que a hipótese anteriormente formulada é fortemente condicionada pelas actividades que são propostas aos alunos, constituindo uma questão relevante compreender a natureza desses condicionamentos.

De acordo com Matos (1992) o modelo van Hiele fornece um quadro poderoso para a análise de dados de investigação no domínio da aprendizagem da Geometria. Necessita, contudo, de algumas reformulações, em particular ao nível do modelo cognitivo implícito, o qual não tem em consideração a influência do contexto social nas construções cognitivas dos alunos. Este autor defende a necessidade de planear programas de investigação que "complementem as análises das produções individuais dos alunos com a observação de contextos nos quais essas produções se desenvolvem, nomeadamente a interacção social que ocorre na sala de aula" (p. 110). A produção desta análise no seio de um contexto onde se introduzem ferramentas computacionais de manipulação dinâmica é, pois, a proposta que se apresenta.

Em conclusão, com este estudo pretende-se, por um lado, construir uma sequência didáctica e os respectivos materiais de apoio para a aprendizagem da Geometria do plano no 9º ano de escolaridade. Essa sequência perspectivará a utilização dos ambientes computacionais de manipulação dinâmica no sentido da progressão através dos níveis de pensamento geométrico, de acordo com o modelo van Hiele. Deseja-se, por outro lado, que a observação da implementação dessa sequência na sala de aula permita compreender a influência, nessa progressão, das ferramentas computacionais, em particular através da análise dos processos utilizados pelos alunos:

• na elaboração de construções rigorosas (no sentido de manterem invariantes as propriedades características das figuras);

• na investigação de propriedades das figuras e na formulação de conjecturas (nomeadamente de generalizações);

• contra-exemplos.

Por último acredita-se que as conclusões que forem produzidas poderão constituir marcos de referência importantes quer para o desenvolvimento de materiais didácticos, quer para a formação de professores, quer ainda para o levantamento de novas questões a investigar neste domínio.

Notas

[1]Nesta comunicação faz-se uma primeira apresentação do projecto de tese a realizar no âmbito do Curso de Mestrado realizado pela Secção de Ciências de Educação da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, anos lectivos 1991/93 sob a orientação da Professora Doutora Teresa Ambrósio e do Dr. José Manuel Matos.

[2]7th International Congress of Mathematical Education. Québec, Canada: Universidade de Laval, 17-23 Agosto 1992.

[3]O estudo que se pretende desenvolver terá como participantes alunos do 9º ano de escolaridade.

[4]A experiência tem mostrado o falhanço dos alunos na descoberta de conceitos através de actividades exploratórias. Admite-se a hipótese, entre outras, de tal resultar dos alunos não possuírem os conhecimentos prévios necessários à realização de explorações que conduzam a essas descobertas.

[5]No ano lectivo de 1991/92 apoiei o trabalho de uma professora da Escola Secundária do Laranjeiro Nº 1, que utilizou o computador para o ensino e aprendizagem da unidade didáctica "Geometria no plano", numa turma do 9º ano de escolaridade. Nos relatórios de auto-avaliação produzidos pelos alunos, mais de metade referia que lhes seria muito útil para a vida futura o facto de terem aprendido a trabalhar com um computador. Muitos outros professores referem, igualmente, a facilidade com que se motiva alunos para trabalharem com o computador, por estes consideram que isso lhes vai ser útil no futuro.

[6]Este autor utilizou no seu estudo o programa computacional Logo.Geometria em que a "manipulação de objectos" pode ser conseguida através dos construtores "acaso", os quais geram objectos aleatórios, permitindo, assim, observar a permanência (ou não) de determinadas propriedades.

[7]Este é o programa que se está a pensar utilizar, uma vez que o trabalho que se tem desenvolvido mostra a sua adequação à investigação que se pretende implementar e, por outro lado, estão reunidas condições logísticas que propiciam a sua utilização.

[8]Diversos resultados de investigação, que se debruçam sobre a influência do contexto sociocultural na aprendizagem, têm salientado a importância de confrontar os alunos com

as actividades que os especialistas em cada área efectivamente realizam. Brown, Collins e Duguid (1988) propõem a aprendizagem através de métodos de *prática cognitiva* (*cognitive apprenticeship*) os quais "tentam enculturar os alunos em práticas autênticas através de actividade autêntica e interacção social, de um modo semelhante ao que é evidenciado — e com claro êxito — na aprendizagem de uma profissão" (p. 19).

Referências

Balacheff, N. (1991a). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. Em Bishop et al. (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Balacheff, N. (1991b). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a construtivist approach to mathematics learning. Em E. Glasersfeld (Ed.), *Radical construtivism in mathematics education* (pp. 89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Brown, J., Collins, A. e Duguid, P. (1988). *Situated cognition and culture of learning*. Palo Alto, Ca: Institute for Research on Learning.

Capponi, B. (1992). *Modifications of menus in Cabri-géomètre and the construction of specific knowledge in classroom*. Comunicação apresentada no 7th International Congress on Mathematical Education, Québec, Canada.

Chazan, D. (1992). *Verifying a prerequisite for conjecturing*. Comunicação apresentada no 7th International Congress on Mathematical Education, Québec, Canada.

Davis, P. e Hersh, R., (1981). *The mathematical experience*. Londres: Penguin Books.

De Corte, E. (1992). Aprender na escola com as novas tecnologias da informação. Em V. Teodoro e J. Freitas (Orgs.), *Educação e computadores* (pp. 99-117). Lisboa: GEP.

DGEBS (1991a). *Programa Matemática — Plano de organização do ensino-aprendizagem, Ensino Básico 3º Ciclo* (II). Lisboa: INCM, EP.

DGEBS (1991b). *Matemática — Métodos Quantitativos — Organização curricular e programas, Ensino Secundário*. Lisboa: INCM, EP.

Fuys, D., Geddes, D. e Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education — Monograph* (3). Reston, Virgínia: NCTM.

Hershkowitz, R. (1989). Psychological aspects of learning geometry. Em J. Kilpatrick e P. Nesher (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Laborde, C. e Laborde, J.-M. (1992). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 177-192). Berlim: Springer.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations — Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris: Hermann.

Matos, J. M. (1991). Uma reflexão sobre duas actividades geométricas. *Noesis*, *21*, 31-32.

Matos, J. M. (1992). Cognitive models in geometry learning. Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 93-112). Berlim: Springer.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Neves, M. (1988) *O computador na recuperação em geometria de alunos do 9º ano*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Projecto Minerva, Dep. Educação da FCL.

Olive, J. (1992). *Example explorations with the Geometer's Sketchpad*. Comunicação apresentada no 7th International Congress on Mathematical Education, Québec, Canada.

Papert, S. (1980). *Mindstorms, children, computers and powerful ideas*. Nova Iorque: Basic Books.

Papert, S. (1988). The conservation of Piaget: The computer as grist to the constructivist mill. Em G. Forman e P. B. Pufall (Eds.), *Constructivism in the computer age* (pp. 3-13). Hillsdale, Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.

Saraiva, M. (1992). *O Computador na aprendizagem da geometria — Uma experiência com alunos do 10ª ano de escolaridade*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Projecto Minerva, Dep. Educação da FCL.

Scally, S. (1986). A clinical investigation of the impact of Logo learning environments on students' van Hiele levels of geometric understanding. Em *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 123-128). Londres: University of London, Institute of Education.

Schwartz, J. (1992). Can we solve the problem solving problem without posing the problem posing problem? Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 167-176). Berlim: Springer.

Schwartz, J. et al. (1989). Symposyum: Visions for the use of computers in classroom instruction. *Harvard Educational Review*, *59*(1), 51-61.

Sekiguchi, Y. (1991). *An investigation on proofs and refutations in mathematics classroom*. Tese de Doutoramento não publicada. The University of Georgia, Athens, Georgia.

Straesser, R. (1992). *Students' geometrical constructions in a computer environment — Some results and comments on research methodology*. Comunicação apresentada no 7th International Congress on Mathematical Education. Québec, Canada.

Teodoro, V. (1992). *Learning with computer-based exploratory environments in science and mathematics*. Comunicação apresentada na NATO-ASI: Psychological & educational foundations of teaching-based learning environments, Creta, Grécia.

Vygotsky, L. (1988). *A formação social da mente*. S. Paulo: Edições Martins Fontes.

Yerushalmy, M., Chazan, D. e Gordon, M. (1990). *Mathematical problem posing: Implications for facilitating student inquiry in classrooms*. Harvard, EUA: Education Development Center, Harvard Graduate School of Education.

Referências de Software

Cabri-géomètre: Laboratoire des Structures Discrètes, IMAG-Grenoble, France.

Geometric Supposer: Sunburst Communications, Inc. IL, EUA.

Logo.Geometria: Gabinete de Estudos e Planeamento — ME, Portugal

The Geometric's Sketchpad: Key Curriculum Press, Berkeley, EUA.

Margarida Junqueira, Projecto MINERVA, *Faculdade de Ciências e Tecnologia, Quinta da Torre, 2825 MONTE DA CAPARICA.*