

---

## **Construção e exploração de modelos matemáticos em situações do mundo real envolvendo Trigonometria**

Susana Carreira<sup>1</sup>  
Faculdade de Ciências e Tecnologia

### **O problema do estudo**

O estudo teve como objectivo abordar o seguinte problema:

Em que medida o processo de aprendizagem dos alunos em Trigonometria é influenciado pela introdução de propostas de trabalho que dão ênfase à exploração de situações problemáticas do mundo real e à utilização da folha de cálculo electrónica como instrumento de modelação?

No âmbito da problemática geral enunciada, foram identificadas três questões a investigar. Foram as seguintes as questões do estudo:

1. Como se caracterizam os processos cognitivos desenvolvidos pelos alunos perante situações problemáticas do mundo real, que envolvem a construção e exploração de modelos matemáticos onde intervêm conceitos e métodos de Trigonometria?
2. De que forma a aprendizagem de tópicos de Trigonometria pode ser influenciada pela sua contextualização em situações extra-matemáticas?
3. Que papel pode ter a folha de cálculo electrónica em actividades de modelação?

### **O processo de modelação: Diferentes perspectivas**

Segundo Edwards e Hamson (1990), qualquer modelo pode ser encarado como uma forma simplificada de representar determinados aspectos de um

sistema real. Em particular, um modelo matemático é aquele em que se utilizam conceitos matemáticos, como por exemplo, funções e equações, para representar uma situação real. Na construção de um modelo matemático, é crucial a passagem do mundo real para o mundo abstracto dos conceitos e estruturas matemáticas que, por assim dizer, constituem a matéria prima para a sua construção.

Por seu turno, Niss (1989) define um modelo matemático por meio do terno ordenado  $(A, M, f)$ , onde  $A$  consiste no segmento do mundo real a ser explorado,  $M$  é um conjunto de objectos, conceitos e relações matemáticas e  $f$  constitui uma correspondência que permite fazer a transferência entre certos elementos de  $A$  e elementos de  $M$ .

Edwards e Hamson (1990) colocam a essência da modelação matemática na transposição de um problema real para um universo matemático. A definição de modelação matemática, segundo estes autores, é a de uma actividade que se processa segundo um ciclo — o ciclo de modelação. O esquema da figura 1 ilustra a forma como esse ciclo é desenvolvido.

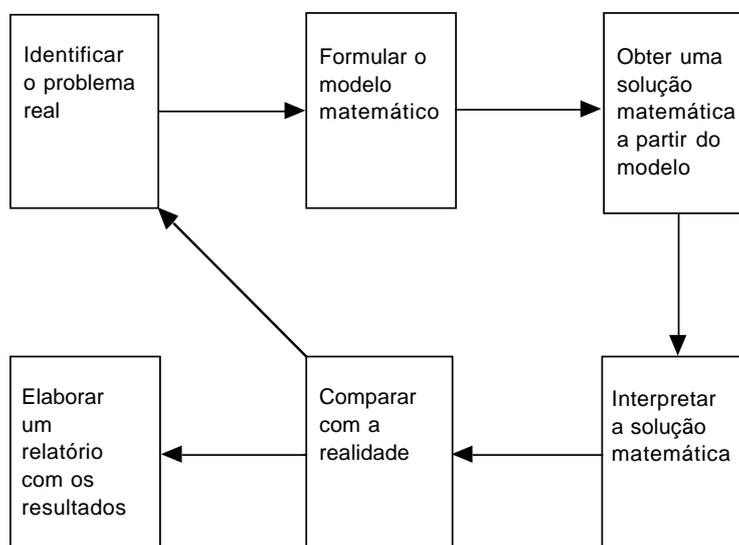


Figura 1. O ciclo da modelação matemática (Edwards e Hamson, 1990, p. 44).

Uma outra formulação é sugerida por Kerr e Maki (1979), que conferem uma particular atenção ao cenário pedagógico em que se desenvolvem os processos de construção e utilização de modelos. Para estes autores, há que especificar alguns passos intermédios no processo de modelação, que se destinam a tornar os modelos matemáticos apropriados para a sala de aula, em

---

particular quando se tem em vista criar oportunidades para que os alunos utilizem determinadas ferramentas matemáticas. Além disso, o processo de modelação é visto como um conjunto de etapas evolutivas, que apenas idealmente se sucedem numa determinada ordem. Neste sentido, ele não deve ser assumido como um percurso rígido; bem ao contrário, uma ou mais etapas podem ser combinadas ou mesmo omitidas em actividades a desenvolver na sala de aula.

Para Kerr e Maki, a 1ª etapa do processo consiste na identificação de um *problema do mundo real* ou de uma área de estudo. Na 2ª etapa, o problema é muitas vezes modificado e simplificado de molde a poder ser descrito em termos razoavelmente precisos e sucintos. Esta descrição do problema, geralmente na forma de um enunciado escrito, constitui o chamado *modelo real*. Trata-se de um modelo em virtude de ser uma simplificação, isto é, nem todos os aspectos da situação real são incorporados na descrição. Quando o objectivo da modelação matemática é produzir um ambiente para a aplicação da Matemática na sala de aula, é acrescentada a etapa seguinte, que pode ser decisiva do ponto de vista pedagógico. Assim, na 3ª etapa, o modelo real é ainda mais simplificado e apresentado num contexto que seja interessante e compreensível para os alunos, tornando viável a aplicação de certos aspectos matemáticos visados. Esta etapa conduz ao chamado *modelo para a sala de aula* e tem legitimidade sempre que um modelo matemático está a ser construído com fins didácticos. A 4ª etapa é dedicada à conversão de aspectos e conceitos do mundo real para símbolos e expressões matemáticas. Trata-se, portanto, da obtenção do *modelo matemático*. Na 5ª etapa são usadas ferramentas e técnicas matemáticas para se chegar a conclusões com base no modelo encontrado. Por fim, na 6ª etapa, estas conclusões são testadas através da sua confrontação com o mundo real e é discutida a validade do modelo. Se forem detectadas insuficiências do modelo em fornecer informações úteis acerca da realidade, o processo deve ser retomado no intuito de melhorar o resultado final. Na figura 2 é esquematizado o ciclo da modelação tendo em conta as adaptações resultantes da sua inserção educacional.

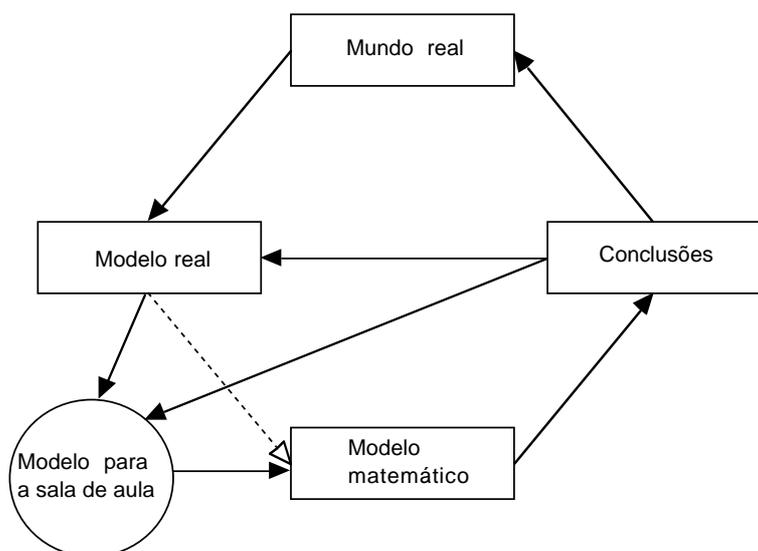


Figura 2. O ciclo da modelação adaptado ao contexto educacional (Kerr e Maki, 1979, p. 3).

Neste trabalho, o processo de modelação foi encarado como uma vertente de trabalho das aulas de Matemática e, em particular, no ensino/aprendizagem da Trigonometria. Por conseguinte, as aferições didácticas apontadas por Kerr e Maki foram vistas como adequadas e oportunas. Não apenas foram propostas actividades em que se pretendia a construção de um modelo matemático, como surgiram outras, em que estava em causa a utilização, análise e exploração de um modelo dado. Em qualquer dos casos, as propostas de trabalho apresentadas, incluíram os chamados *modelos reais* de uma determinada situação e as subsequentes simplificações conducentes à criação de *modelos para a sala de aula*.

Os modelos matemáticos a que se refere este trabalho surgiram em actividades cujo contexto curricular é o de tópicos de Trigonometria e envolveram: (a) o estudo de relações funcionais entre variáveis; (b) a identificação de fórmulas (ou leis) trigonométricas; (c) a construção de tabelas numéricas e gráficos; (d) a resolução de equações e inequações; (e) a construção de esquemas geométricos envolvendo relações entre os elementos de um triângulo; (f) o círculo trigonométrico como representação privilegiada para a manipulação de noções trigonométricas; (g) a utilização de grandezas vectoriais e (h) a criação de esquemas (esboços) ilustrativos de elementos da realidade a estudar.

## Propostas de organização pedagógica

Existem diversas possibilidades de integrar actividades de aplicação e modelação matemática no currículo. Blum e Niss (1991) propõem várias alternativas que diferem essencialmente quanto ao grau de articulação entre os aspectos matemáticos e extra-matemáticos do currículo:

*A alternativa da separação.* Neste caso, as actividades que incluem aplicações da Matemática e modelação são realizadas em cursos separados, especialmente destinados ao seu tratamento. Nestas condições, os cursos de Matemática pura podem continuar a não ser afectados pelo trabalho com aplicações e modelação.

*A alternativa da compartimentação.* Nesta situação, o currículo de Matemática é dividido em duas partes. Na primeira parte, é ensinada Matemática pura e na segunda são abordados exemplos de aplicação onde se utilizam os aspectos matemáticos estabelecidos anteriormente.

*A alternativa da criação de “ilhas”.* Nesta modalidade, o programa de Matemática é organizado em várias unidades e cada uma destas divide-se nos dois compartimentos referidos na alternativa anterior. A abordagem dos tópicos de Matemática é, então, sucessivamente entrecortada por “ilhas” de actividades de aplicação baseadas em conhecimentos adquiridos no período precedente.

*A alternativa da combinação.* No decurso do ensino da Matemática são frequentemente invocados aspectos de aplicação e modelação matemática como forma de auxiliar a introdução de conceitos matemáticos. O mesmo é feito no sentido inverso, isto é, novos conceitos, métodos e resultados matemáticos são activados para a realização de actividades de aplicação e modelação, sempre que possível. Nesta alternativa, o conteúdo matemático envolvido em actividades de modelação e aplicação é, de um modo geral, tratado previamente.

*A alternativa do currículo integrado.* O que se passa, neste caso, é que os problemas propostos, quer sejam estritamente matemáticos ou aplicados, aparecem antes dos conteúdos matemáticos que neles estão envolvidos. Portanto, os conceitos são identificados e desenvolvidos subsequentemente. A restrição que se impõe nesta abordagem é a de que os problemas escolhidos permitam conduzir aos aspectos matemáticos relevantes e consignados no currículo.

*A alternativa interdisciplinar integrada.* Esta alternativa é bastante parecida com a anterior, procurando uma total integração entre actividades matemá-

ticas e extra-matemáticas, mas com a grande diferença de que a Matemática não constitui uma disciplina separada. O espaço curricular é interdisciplinar e o ensino das várias matérias é completamente integrado.

Nesta investigação, foi experimentado um tratamento da Trigonometria que se aproxima, do ponto de vista da sua organização curricular, da alternativa da combinação, já que muitas das actividades de aplicação e modelação desenvolvidas pelos alunos foram antecedidas por um trabalho prévio de apresentação de conceitos gerais de Trigonometria. No entanto, as actividades apresentadas promoveram uma nova interpretação e utilização desses conceitos e, em alguns casos, permitiram o aparecimento de novas noções de Trigonometria não abordadas anteriormente.

Um outro aspecto relevante neste trabalho foi o da utilização do computador, designadamente através do uso da folha de cálculo electrónica, na exploração e construção de modelos matemáticos. Segundo Millwood e Stevens (1990), a modelação apoiada pelo computador consiste na actividade de usar o computador para exprimir o modelo, com o objectivo subsequente de explorar esse modelo e retirar daí possíveis consequências para a resolução de problemas. Para Ogborn (1991), os procedimentos básicos envolvidos na utilização de programas de modelação quantitativa são: a identificação das variáveis que descrevem o sistema, a especificação da sua forma de variação e a definição das regras de evolução do sistema, que consistem normalmente nos procedimentos de cálculo dos próximos valores de uma variável. Por outras palavras, é necessário identificar as variáveis relevantes de um sistema e especificar as relações funcionais que existem entre estas.

### **A metodologia do estudo**

O propósito de examinar os processos cognitivos desenvolvidos pelos alunos, quando confrontados com situações problemáticas do mundo real, bem como a natureza da aprendizagem sob a influência de determinadas condições pedagógicas e a forma como a utilização do computador se reflecte nas estratégias e procedimentos dos alunos, levou às duas primeiras decisões em termos metodológicos. Por um lado, impôs-se a criação de um cenário pedagógico em que se manifestassem as formas de pensamento, as decisões, as dificuldades, as opções e os esquemas conceptuais dos alunos na resolução de situações problemáticas do mundo real. Por outro lado, foi julgada primordial a observação sistemática das resoluções produzidas pelos alunos nas aulas

---

destinadas à realização das actividades de aplicação e modelação.

A primeira das decisões indicadas, traduziu-se na concepção e implementação de um projecto de intervenção pedagógica que abrangeu duas turmas do 10º ano, no estudo da Trigonometria (Carreira, 1992a, 1992b). Uma fracção significativa do tempo de intervenção (cerca de 50%) foi utilizada na realização de actividades de modelação e aplicação com o recurso à folha de cálculo. Nestas aulas, os alunos trabalharam nas actividades propostas em grupos de três ou quatro elementos, partilhando um computador, o que favoreceu a exteriorização das suas ideias, o confronto de opiniões, a discussão de estratégias e resultados e, de uma maneira geral, a explicitação dos seus raciocínios.

A segunda opção metodológica — privilegiar a observação do trabalho realizado pelos alunos — levou à selecção de um grupo de alunos de cada turma, que foi sistematicamente observado ao longo de todas as actividades. O acompanhamento continuado de dois grupos de alunos teve como consequência uma redução da perspectiva geral de funcionamento de toda a turma nas aulas implementadas. No entanto, criou condições para uma descrição mais rica dos processos cognitivos dos sujeitos, permitindo acompanhar em detalhe a evolução dos seus raciocínios, esquemas conceptuais e resultados, o que foi considerado importante para a compreensão e interpretação dos mesmos face aos objectivos da investigação.

A obtenção de um conjunto de dados suficientemente vasto para permitir a emergência de conclusões fundamentadas acerca das questões do estudo, foi outra das preocupações presentes na definição da metodologia de investigação. Num estudo que visa a clarificação e a compreensão dos efeitos gerados pela introdução de um conjunto de factores — em especial, as actividades de construção e exploração de modelos matemáticos e a utilização da folha de cálculo como instrumento de modelação — importa prever um número razoável de oportunidades de observação e de encarar a necessidade de diversificar as experiências dos alunos a observar. Por estas razões, e tendo em conta a limitação do tempo lectivo disponível, foi decidido desenvolver com os alunos dos grupos observados novas actividades de modelação e aplicação na modalidade de trabalho extra-lectivo. Mais uma vez, estas sessões extra-lectivas foram observadas pela investigadora, além de terem permitido a obtenção do respectivo registo audio, o qual, depois de transcrito, complementou as notas resultantes da observação efectuada. Nestas sessões, os alunos trabalharam em subgrupos mais pequenos (compostos apenas por dois elementos) e foram com frequência questionados pela investigadora, com vista

a justificarem e explicitarem as suas ideias e actuações.

Outras fontes de dados foram consideradas, no sentido de promover a triangulação dos resultados emergentes. Assim, foi proposta aos alunos a elaboração de relatórios escritos no final de cada actividade. Estes relatórios foram produzidos em grupo, em regime de trabalho extra-aula, e constituíram documentos cuja análise complementou as observações efectuadas pela investigadora. Foi também realizado um teste de avaliação escrita no final da experiência, cuja concepção envolveu a participação das professoras das turmas. O teste constituiu, por um lado, um dos elementos de avaliação dos alunos na disciplina, e por outro, uma fonte de dados do ponto de vista da investigação. O formato do teste possibilitou novas observações dos alunos seleccionados e uma análise do desempenho global de cada turma em *questões relacionadas com uma situação do mundo real* e em *questões puramente matemáticas*. Por último, foi usado um questionário destinado a auscultar as opiniões dos alunos de ambas as turmas acerca da experiência vivida e do seu processo de aprendizagem em Trigonometria. Em síntese, o delineamento metodológico da investigação envolveu a combinação de diversos níveis de análise e a utilização de múltiplas formas de recolha de dados que procuraram ser conjugados numa perspectiva holística e indutiva.

## Conclusões

### Os processos cognitivos desenvolvidos pelos alunos

A análise dos processos desenvolvidos pelos alunos em cada uma das actividades de aplicação e modelação permitiu identificar alguns dos seus traços característicos. Relativamente a cada um deles, far-se-á uma breve discussão.

**A compreensão das situações extra-matemáticas.** De acordo com Lesh (1981), os problemas de Matemática aplicados colocam em jogo ideias e conhecimentos acerca do mundo real, cuja função é a de complementarem as noções, ideias e processos matemáticos reconhecidamente válidos para a sua resolução.

As observações realizadas neste estudo forneceram dados que permitem corroborar esse ponto de vista. Com efeito, na maioria das actividades introduzidas (dentro e fora da sala de aula), as primeiras acções levadas a cabo

---

pelos alunos consistiram na procura de referentes para a clarificação do contexto real. Em geral, os alunos começaram por dialogar entre si, com vista ao enquadramento e explicitação das suas ideias sobre os objectos, fenómenos e situações descritos na introdução das actividades. Frequentemente, estas discussões incluíram o confronto de perspectivas tendentes a aferir o sentido a dar a diversos pormenores do cenário extra-matemático. Por outro lado, poderá dizer-se que os alunos foram criando imagens mentais da situação apresentada. Estas imagens mentais forneceram pistas para o tratamento intuitivo de algumas questões envolvidas e foram materializadas em esboços esquemáticos que ilustraram aspectos essenciais do modelo real.

**A atribuição de significado aos aspectos matemáticos.** Um dos processos que dominou praticamente todas as actividades foi a identificação de variáveis e o estabelecimento de relações entre estas. As observações produzidas mostraram que os alunos foram capazes de reconhecer variáveis e parâmetros nos problemas tratados, de perceber intuitivamente a forma como estes interagem e, por fim, de exprimir matematicamente tais relações. Em geral, as relações encontradas conduziram à construção de “fórmulas” que traduziram dependências funcionais entre as variáveis. Verificou-se ainda que os alunos souberam distinguir as variáveis independentes e dependentes, além de terem conseguido lidar com um elevado número de variáveis, em determinados casos. Por outro lado, a atribuição de significados reais aos resultados matemáticos produzidos, suscitou a sua frequente avaliação, por parte dos alunos. Estes foram levados a comparar resultados com as suas previsões e conhecimentos acerca da situação real e a detectar incoerências que levaram à reformulação dos modelos matemáticos criados.

**A activação de conhecimentos relevantes.** Tal como De Lange (1987) os define, os processos de matematização horizontal (a transferência de aspectos da realidade para linguagem matemática) foram muito pertinentes nas resoluções dos alunos. Por isso mesmo, foi naturalmente desencadeada a utilização de tópicos de Trigonometria: identificação de triângulos, razões trigonométricas de ângulos agudos, teorema de Pitágoras, círculo trigonométrico, ângulos generalizados, funções circulares, equações trigonométricas, representações gráficas de funções, determinação e conversão das amplitudes de ângulos, representação de vectores, projecções ortogonais e operações com vectores, etc.

Um outro aspecto a ter em conta é o modo como os alunos sentiram as actividades como oportunidades de aplicação dos seus conhecimentos de

Trigonometria. Isto ficou patente em algumas das respostas dadas ao questionário, acerca do interesse das actividades. Houve, por exemplo, quem se referisse à utilidade da Trigonometria na resolução de problemas reais.

**A integração de novos conceitos de Trigonometria.** As actividades propostas permitiram, não só a aplicação de conhecimentos de Trigonometria previamente adquiridos, como deram ocasião à introdução de novos conceitos. Entre estes, destacam-se os conceitos de ciclo, frequência, amplitude e período, introduzidos como parâmetros na expressão algébrica de funções circulares. A utilização da folha de cálculo permitiu, ainda, o acesso às funções trigonométricas inversas: *arc sen*, *arc cos* e *arc tg*. Também foram abordadas as operações com funções trigonométricas, em particular, a adição de funções sinusoidais, e as transformações geométricas do gráfico da função seno correspondentes à adição e multiplicação de coeficientes.

**A elaboração de estratégias próprias.** Em várias das actividades desenvolvidas, os alunos exibiram estratégias originais para chegarem a resultados e conclusões. Destacam-se aqui os processos de sobreposição e comparação de gráficos que os alunos executaram na folha de cálculo. Em particular, num dos grupos observados, os alunos conseguiram obter um *efeito zoom* nos seus gráficos, para tornar mais salientes as semelhanças e as diferenças entre as várias funções analisadas. A estratégia adoptada — diminuir a amplitude do domínio — representa um salto qualitativo em termos da interpretação e manipulação de gráficos.

Há ainda a referir as estratégias criadas para a obtenção de soluções de várias equações e inequações. Em diversos momentos, os alunos conseguiram usar a folha de cálculo como um recurso para resolver condições trigonométricas. Usaram, para o efeito, as tabelas e as representações gráficas e, por vezes, caminharam por aproximações sucessivas para as soluções desejadas.

**A construção e manipulação de representações múltiplas.** A folha de cálculo foi um estímulo vigoroso para a construção e manipulação de representações das situações problemáticas tratadas. Poderá afirmar-se que este tipo de processos impregnou todas as resoluções dos alunos. Não só foram inúmeras as representações numéricas, algébricas e gráficas criadas na folha de cálculo, como se registaram várias interacções entre representações matemáticas e extra-matemáticas das situações propostas. Os confrontos entre os modelos matemáticos e os modelos reais foram uma das linhas de força do trabalho dos alunos.

---

Por outro lado, os alunos executaram múltiplas traduções entre vários sistemas de representação, conseguindo com isso uma eficaz monitorização dos seus procedimentos. O cruzamento das informações colhidas em diferentes representações, permitiu-lhes, em muitos casos, controlar a qualidade dos seus raciocínios e a validade das suas conjecturas, e obter *feedback* acerca dos seus modelos matemáticos. Aliás, deve ser realçado que os alunos foram pior sucedidos nas ocasiões em que não lançaram mão de várias representações.

### **A aprendizagem de conceitos e métodos de Trigonometria**

Um dos objectivos deste estudo consistiu em averiguar as influências exercidas sobre a aprendizagem pela introdução de situações problemáticas do mundo real. Examinados sob este ponto de vista, os resultados encontrados conduzem às conclusões que a seguir se apresentam.

**As situações reais fomentaram um conjunto de aprendizagens.** Assumindo a polivalência do termo aprendizagem que é sugerida por Abrantes (1989), existem dados que confirmam o desenvolvimento de um “conjunto de aprendizagens” por parte dos alunos. Assim, poderá dizer-se que os alunos: (a) aprenderam a utilizar a Matemática para abordar e compreender situações do mundo real, seleccionando os aspectos da realidade a representar matematicamente e procurando os conceitos e ferramentas matemáticas adequadas ao seu tratamento; (b) descobriram relações entre situações reais conhecidas e determinados modelos matemáticos e, inversamente, exploraram fenómenos reais menos comuns através da manipulação de modelos matemáticos que lhes foram fornecidos; (c) construíram novos conceitos de Trigonometria na resolução de algumas das actividades e descobriram novas dimensões e sentidos nos conceitos que já possuíam e que reintegraram na resolução de problemas concretos; (d) foram levados a desenvolver estratégias e métodos adequados para a resolução dos problemas propostos. Entre estes destacam-se: a discussão e análise da situação, a elaboração de esquemas, a identificação de dados relevantes, a tradução de aspectos reais para aspectos matemáticos, a representação de relações funcionais através de gráficos e tabelas, a procura de soluções a partir dos vários sistemas de representação disponíveis e a monitorização desses resultados mediante transferências entre o modelo matemático, o modelo computacional e o modelo real; (e) aprenderam a tirar partido do computador para “fazer Matemática” e resolver problemas; (f) cultivaram a troca de ideias e o confronto de pontos de vista, desenvolvendo a capacidade

de argumentação e de exposição dos seus raciocínios.

**A valorização do ambiente pedagógico.** As respostas dos alunos ao inquérito realizado mostraram que a introdução das actividades de aplicação e modelação colheu, de um modo geral, o seu agrado. Estes, consideraram-nas um aspecto inovador na sua experiência em Matemática, reconheceram-nas como importantes para a sua aprendizagem e acharam interessantes os temas abordados. Os alunos declararam ainda que as actividades tinham gerado uma maior motivação e criado oportunidades para a aplicação dos seus conhecimentos, despertando novas formas de raciocínio.

Muitos foram os alunos que se pronunciaram favoravelmente acerca da utilização do computador e que manifestaram a sua preferência pelas aulas que envolveram o seu uso. Também os relatórios, foram entendidos pelos alunos como úteis para a clarificação e estruturação de ideias, sistematização de resultados e aprofundamento dos temas tratados.

**A aprendizagem de técnicas específicas.** Tendo em conta os resultados do teste de avaliação realizado, designadamente, nas questões estritamente matemáticas, poderá concluir-se que o domínio, por parte dos alunos, de técnicas algébricas e de cálculo do âmbito da Trigonometria, ficou aquém do que seria desejável. De facto, os alunos evidenciaram várias deficiências na resolução de equações e inequações trigonométricas, mediante os processos formais, com o uso de papel e lápis. Em contrapartida, mostraram bastante eficiência na resolução deste tipo de questões quando trabalharam com a folha de cálculo e usaram processos próprios (nomeadamente a procura das soluções por aproximações sucessivas, envolvendo tabelas e gráficos). Parece poder-se concluir que os alunos reagiram de formas bastante distintas a questões isomorfas, quando integradas num contexto real e quando apresentadas em termos exclusivamente matemáticos. Isto leva a colocar a hipótese de que não houve uma suficiente harmonização dos métodos analíticos e dos processos apoiados pelo computador.

### **A Folha de Cálculo como instrumento de modelação**

Relativamente a esta questão do estudo, os resultados apontam para a ideia geral de que a folha de cálculo foi determinante na forma de abordar e explorar as situações reais, ao impelir a construção de modelos computacionais dessas situações.

Antes de mais, a folha de cálculo promoveu a organização dos dados por

---

parte dos alunos, acentuou a necessidade de identificação de variáveis relevantes e a procura de relações funcionais entre grandezas. Um aspecto a salientar acerca desta ferramenta é o facto de permitir uma organização das relações de dependência entre variáveis que possibilita a sua dissecação em modelos matemáticos bastante simples. Isto prende-se com a viabilidade de usar sucessivas composições de funções, por meio da introdução de fórmulas que combinam várias células.

Uma outra faceta que surgiu com o uso da folha de cálculo foi a construção de diferentes representações matemáticas da realidade, capazes de interagirem. Apesar de tudo, existem limitações a referir relativamente a este aspecto. De facto, o tipo de actuação que é naturalmente induzido pelo uso da folha de cálculo consiste na seguinte sequência de sistemas de representação: Fórmula—>Tabela—>Gráfico. Deste modo, ficam algo desactivados os processos de tradução inversa que, segundo Janvier (1987), devem ser explorados com os alunos.

Finalmente, foi visível no trabalho dos alunos a integração de três dimensões nos seus processos de modelação. Este espaço tridimensional de actuação teve como eixos de referência: o Modelo Real, o Modelo Matemático e o Modelo Computacional. Assim, os processos cognitivos dos alunos foram, em maior ou menor grau, influenciados pelas: (a) informações disponíveis no universo real onde se enquadrava a situação a explorar; (b) informações disponíveis no universo matemático idealizado para a representação da situação real; (c) informações disponíveis nos *outputs* produzidos pela folha de cálculo, mediante o processamento de determinados modelos matemáticos.

Mais do que uma sobreposição destes três tipos de informação, observou-se uma poderosa interacção entre os vários universos nos processos de pensamento dos alunos.

## Notas

<sup>1</sup>Bolseira do INIC.

## Referências

- Abrantes, P. (1989). Matemática, realidade e trabalho de projecto na escola secundária. *Educação e Matemática*, 12, 3-6.
- Blum, W. e Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects — State, trends and issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 36-68.

- Carreira, S. (1992a). Aplicações e modelação nos currículos de Matemática: Contornos do debate actual. *Quadrante*, 1, 73-91.
- Carreira, S. (1992b). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. Tese de Mestrado não publicada, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa, Lisboa.
- De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utreque: OW & OC.
- Edwards, D. e Hamson, M. (1990). *Guide to mathematical modelling*. Flórida: CRC Press.
- Janvier, C. (1987). Representation and understanding. The notion of function as an example. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-71). Nova Jersey, Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Kerr, D. e Maki, D. (1979). Mathematical models to provide applications in the classroom. Em S. Sharon e R. Reys (Eds.), *Applications in school mathematics* (pp. 1-7). Reston, Virgínia: NCTM.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 235-264.
- Millwood, R. e Stevens, M. (1990). What is the modelling curriculum? *Computers and Education*, 15(1-3), 249-254.
- Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. Em W. Blum e M. Niss (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*. Chichester: Ellis Horwood.
- Ogborn, J. (1991). Modelação com o computador: Possibilidades e perspectivas. Em V. D. Teodoro e J. C. Freitas (Eds.), *Educação e computadores* (pp. 197-218). Lisboa: Ministério da Educação — GEP.

---

*Susana Carreira, Departamento de Matemática da Faculdade Ciências e Tecnologia, Quinta da Torre, 2825 MONTE DA CAPARICA.*