
Artigo seleccionado

Duas teorias da “teoria” em Educação Matemática: Utilizando Kuhn e Lakatos para examinar quatro questões fundamentais¹

Robert E. Orton

Uma investigação significativa é sempre guiada por uma teoria. A teoria pode ser um cálculo refinado, altamente predictivo, como na Física, ou pode ser uma tosca colecção de suposições, como acontece, na maior parte das vezes, em educação. Quando um educador matemático estuda os efeitos dum ambiente de aprendizagem restritivo e negligente em crianças de diferentes níveis de ansiedade, tem presumivelmente uma teoria que relaciona o rendimento com a ansiedade e com a estrutura do ambiente de aprendizagem. Ou quando um psicólogo cognitivista examina tarefas de classificação e seriação na aprendizagem dos primeiros conceitos de número, o psicólogo tem muito provavelmente um pressentimento de como estas tarefas estão relacionadas. Ou, quando um candidato a doutoramento planeia uma experiência na qual são ensinadas às crianças várias heurísticas diferentes de resolução de problemas, ele presumivelmente tem uma teoria que prediz qual destas opções será a mais efectiva.

Uma boa teoria especifica como devem ser interpretadas as evidências dessa teoria. Os problemas surgem, contudo, quando diferentes teorias interpretam o que parece ser a mesma evidência de modos diferentes. Suponhamos, por exemplo, que um investigador encontra “resultados significativos” quando compara um programa instrucional que diagnostica e remedeia os erros dos estudantes, com um programa que só re-ensina procedimentos correctos. Proponentes de uma teoria podem interpretar estes resultados mostrando que o diagnóstico ajudou os alunos a reconstruir ou a fazer o *debug*² das suas estruturas cognitivas. Outro investigador pode rejeitar esta interpretação. A “melhoria” observada foi um mero efeito lateral do facto da instrução ter ajudado os estudantes a esquecer os seus procedimentos defeituosos. A não

aprendizagem não é uma questão de reconstrução de uma estrutura cognitiva; “a ‘não aprendizagem’ ... é uma questão de extinção”. “Isto significa que os professores deveriam ignorar os procedimentos incorrectos e começar a ensinar, logo que possível, as regras para os procedimentos correctos” (Gagné, 1983a, p. 12).

Quando diferentes teorias interpretam o que aparenta ser a mesma evidência de modos diferentes, torna-se difícil fazer uma *escolha racional* entre elas. Consideremos um segundo cenário: um investigador conduz várias experiências de ensino nas quais as crianças descobrem como resolver problemas de subtracção usando material estruturado. Depois de algumas semanas de trabalho, foi ensinado a estas crianças o algoritmo simbólico. Estas crianças mostram “maior compreensão” do algoritmo, quando comparadas com outras crianças que não usaram materiais manipulativos. Este resultado é interpretado para apoiar a teoria de que “as crianças desenvolvem o pensamento construtivo muito antes do pensamento analítico”. Por outras palavras, “embora as crianças possam não ser capazes de emitir juízos lógicos, estão bem capacitadas a construir conceitos matemáticos” (Dienes, 1960, p. 30). Proponentes de uma teoria diferente podem interpretar estes resultados de modo diferente. É claro que se *pode* ensinar às crianças “a tarefa adicional de transformar numerais em sequências de varas ou montes de blocos”. No entanto, manipular blocos é mais abstracto do que manipular símbolos. Não há vantagem em transformar “uma tarefa computacional concreta numa abstracta, de modo a que possa ser correctamente ‘entendida’” (Gagné, 1983a, p. 12).

O problema da escolha racional entre duas teorias foi colocado, de pelo menos duas maneiras, por filósofos da ciência. T. Kuhn (1962) argumenta que é frequente que a escolha racional não seja simplesmente possível. Proponentes de diferentes teorias “interpretam o mundo de modos diferentes”. Os critérios que podem ser usados para julgar uma teoria são eles próprios parte de um paradigma viciado. Um terreno neutral não existe. Uma segunda solução, proposta por I. Lakatos (1970), sustenta a possibilidade da escolha racional entre duas teorias. Embora as diferentes teorias possam representar paradigmas diferentes, ainda existem critérios que nos permitem julgar um programa como “progressista³” ou “degenerativo”.

Na discussão seguinte, as ideias de Kuhn e de Lakatos serão usadas para estudar quatro assuntos fundamentais em educação matemática. Estes assuntos estão relacionados com conceitos de valores, unidades de análise, teoria da mente e natureza das entidades matemáticas. Proponentes de teorias correntes em educação matemática (psicologia do processamento de informação, cons-

trutivismo) tendem a formular hipóteses sobre estes quatro assuntos. Isto será referido abaixo.

O objectivo deste artigo não é determinar quais destas hipóteses são correctas. Pretende-se saber em que termos, kuhniano ou lakatosiano, as diferenças entre estas hipóteses são melhor entendidas.

A discussão está dividida em três partes. A Parte I explicará os quatro assuntos fundamentais. Estes assuntos serão introduzidos usando uma “experiência em pensamento⁴”, um problema hipotético de investigação. A Parte II exporá a “teoria” que será usada para analisar os quatro assuntos fundamentais. Aqui, as noções de “paradigma” e “programa progressista de investigação” serão esclarecidas do modo mais preciso possível. Na Parte III, a teoria exposta na Parte II será usada para examinar as questões indicadas na Parte I.

I. As quatro questões fundamentais

A seguinte situação hipotética vai ajudar a introduzir as quatro questões fundamentais.

Transferência de aprendizagem: uma experiência hipotética

Susie, uma aluna de Álgebra I, acabou de completar uma unidade de factorização do trinómio. Através de uma série de perguntas determinou-se que Susie também sabe o seguinte: se o produto de dois termos é igual a zero, pelo menos um deles tem de ser zero. (Contudo ela não se expressa nesta linguagem). Suponhamos agora que lhe é posto o seguinte problema: Encontra os valores de x que tornam x^2+3x+2 igual a 0. Será que ela conseguiria resolver este problema?

Se Susie vai conseguir ou não resolver este problema depende, em parte, de conseguir “transferir” os seus conhecimentos sobre factorização para esta nova situação. Um proponente de uma teoria conservadora de transferência pode argumentar que ela provavelmente *não* conseguiria resolver o problema. Os conceitos de “factorização de um trinómio” e da “resolução de uma equação quadrática” são suficientemente diferentes. Há vários pré-requisitos que têm de ser dominados antes de uma criança poder encontrar a relação. O conhecimento acerca de uma competência (*skill*) (factorização de trinómios) é transferido para uma nova situação (resolução de equações do 2º grau) só na medida em que os componentes da antiga estão incluídos na nova. A Susie pode factorizar o primeiro membro de $x^2+3x+2=0$ e, de seguida, ficar bloqueada. Não há nenhum “componente” na competência de factorização que lhe

indique o que deve fazer a seguir.

Um proponente da teoria liberal da transferência, por outro lado, argumentaria que a Susie poderia ser capaz de resolver a equação quadrática. Admitindo que os seus professores foram cuidadosos, então Susie teria adquirido algo mais do que as competências para factorizar trinómios. Ela teria também aprendido os conceitos e os princípios que dão “significado” a estas competências. Por outras palavras, ela teria aprendido (ou construído) uma “estrutura cognitiva” que transferirá para muitas situações diferentes de resolução de problemas. Se a Susie adquiriu esta estrutura cognitiva, pode-se esperar que factorize o primeiro membro de $x^2+3x+2=0$, iguale $(x+2)$ a zero e $(x+3)$ a zero e assim resolva a equação do 2º grau.

Qual das teorias da transferência está correcta? Parece que esta questão pode ser resolvida através de uma “experiência”. Procurem-se dois grupos de alunos do primeiro ano de Álgebra com capacidades e preparação matemáticas semelhantes. A um grupo ensinem-se os pré-requisitos para a factorização do trinómio, como foram identificados (digamos) por uma hierarquia de aprendizagem. A outro grupo ensinem-se os princípios estruturais que estão por trás da factorização. Depois de algumas semanas de trabalho, administre-se um pós-teste e comparem-se os resultados.

Consideremos, agora, o aspecto que os pós-teste decisivos poderão apresentar. Poderão eles provar que os alunos são capazes de transferir os seus conhecimentos para uma nova situação (por exemplo, resolver equações quadráticas por factorização?). Se o pós-teste exigir apenas competência ao nível de cálculo, então poderemos esperar que o grupo ensinado através de uma hierarquia de aprendizagem tenha melhores resultados que o grupo ensinado através dos princípios estruturais. Ao grupo da hierarquia de aprendizagem foram ensinadas todas as componentes necessárias para “chegar à resposta certa”. Por outro lado, se o pós-teste exigir que os alunos apliquem os seus conhecimentos a novas situações, o grupo cuja experiência de ensino se centrou em princípios estruturais terá, provavelmente, melhores resultados que o outro. O grupo dos princípios estruturais teria sido treinado na procura de semelhanças entre velhas e novas situações.

O problema com a elaboração do pós-teste é um sintoma de pelo menos três outros problemas. O mais óbvio é o seguinte:

1) Adeptos da teoria conservadora da transferência pretendem que a criança domine procedimentos para executar correctamente certas tarefas. A Matemática é uma “ferramenta” que permite às crianças resolver correctamente estes problemas. Adeptos da teoria liberal, por outro lado, pretendem que a criança

alcance o significado subjacente às suas competências matemáticas. A Matemática é uma disciplina estruturada que possui uma certa beleza interior. Por outras palavras, adeptos de diferentes teorias da transferência podem associar diferentes *valores* à instrução matemática.

Duas outras diferenças estão relacionadas com as teorias de transferência.

2) Um teórico das componentes idênticas tenta dividir uma competência complexa em partes fundamentais mais pequenas. A transferência só tem sucesso se as duas competências tiverem estas pequenas partes em comum. Um adepto do ponto de vista da transferência de princípios estruturais, por outro lado, ensina uma criança a procurar padrões e semelhanças entre diferentes situações. Estes padrões são com certeza muito mais “amplos” do que as “componentes idênticas” da outra teoria. Por outras palavras, os investigadores que estudam as duas teorias possivelmente utilizarão diferentes *metodologias*.

3) O teórico das componentes idênticas tenta ensinar uma competência complexa especificando uma sequência instrucional que a criança deve seguir. A mente é vista como uma entidade passiva que é sujeita a um ambiente activo (a sequência instrucional). O adepto do ponto de vista dos princípios estruturais, por outro lado, vê a criança a procurar e construir as suas próprias ligações entre um bocado de conhecimento e outro. A mente é mais activa. Por outras palavras, os teóricos têm diferentes perspectivas de como *funciona a mente*.

Os proponentes de uma e outra teoria podem também tender para diferentes pontos de vista sobre a natureza das entidades matemáticas.

4) Aqueles que tentam dissecar uma competência usando uma hierarquia de aprendizagem insistem na manipulação de símbolos, por parte da criança, para chegar à “resposta correcta”. Uma resposta correcta é o resultado de um comportamento de manipulação de símbolos. Adeptos da perspectiva da transferência de princípios estruturais, por outro lado, formulam a hipótese da existência de entidades cognitivas que dão significado aos símbolos. Uma resposta correcta resulta do facto de a criança ter construído certas estruturas cognitivas que lhe permitem manipular os símbolos correctamente. Por outras palavras, os proponentes das duas perspectivas estão aptos a defender diferentes teorias sobre a *natureza das entidades matemáticas*.

Nas próximas quatro subsecções examinar-se-ão com mais detalhe estas diferenças relativamente a valores, metodologia, teoria da mente, e teoria das entidades matemáticas.

Diferentes valores associados à instrução matemática

Um adepto da teoria conservadora da transferência tende a focalizar a sua atenção no produto da instrução matemática. Pretende ter a certeza que uma dada competência, tal como a adição de números inteiros com dois algarismos, é perfeitamente aprendida. Este adepto poderá salientar que a adição de números inteiros com dois algarismos é uma das muitas competências matemáticas que têm grande valor para a sociedade. As crianças devem ser capazes de dominar estas competências para enfrentarem as exigências do dia-a-dia. Uma abordagem metódica e cuidadosa à transferência parece assegurar o domínio destas competências.

Embora um adepto da teoria liberal da transferência não seja “anti-utilitário”, estará provavelmente interessado em algo mais do que as vantagens económicas e sociais da Matemática. Dienes fala do poder das matemáticas para desenvolver uma “pessoa integrada”. Uma tal pessoa...

terá uma visão mais ampla da maior parte das questões, por oposição a uma visão pessoal ou sectorial (...) tentará unir as coisas em vez de as separar (...) procurará conexões em vez de diferenças (...) ter-se-à adaptado bem ao seu ambiente, estabelecendo uma identidade fundamental de interesses com os seus parceiros (...) (1960, pp. 12-13).

Diferentes métodos para estudar a aprendizagem da Matemática

Os adeptos da teoria conservadora da transferência usam uma unidade de análise relativamente “pequena” na sua pesquisa. A unidade básica de Thorndike (1922) era uma “conexão” estímulo resposta, enquanto Gagné, na sua primeira fase (1963, 1970), argumentava que a unidade básica era uma simples competência. A ideia comum aqui é de que o conhecimento de um princípio complexo pode ser reduzido a simples factos ou conceitos. Adeptos da teoria liberal da transferência, por outro lado, tendem a usar nas suas explicações unidades de análise muito mais “amplas”. As estruturas de Piaget são um sistema de operações mentais interiorizadas. As estruturas de Dienes incluem tanto as “relações entre conceitos associados com números” como as “aplicações [destas relações] aos problemas que surgem na vida real...” (Dienes, 1960, pp. 19-20). Os dois teóricos tendem a tratar as estruturas como “todos”.

Serão as estruturas cognitivas redutíveis a factos ou conceitos simples, ou serão melhor estudadas como sistemas ou “todos”? Esta questão é idêntica à questão da biologia: o corpo humano é uma soma de átomos e moléculas, ou

é parte dum sistema maior de pessoas, cidades, estados, etc.? A resposta a cada uma destas questões depende do *propósito* do estudo, que, por sua vez, influencia o *método de investigação*. Um biólogo celular e um teórico das componentes idênticas pretendem compreender as partes mais pequenas às quais podem ser reduzidos um dado corpo ou uma competência. Um sociólogo e um adepto do ensino de princípios estruturais querem perceber os sistemas maiores nos quais se enquadram os componentes mais pequenos. Em consequência disto, os diferentes teóricos usam diferentes métodos.

No entanto, há pelo menos uma diferença importante entre as questões biológica e psicológica. O biólogo celular e o sociólogo admitem que as suas pesquisas têm diferentes propósitos. Cada um deles está a tentar responder a um diferente conjunto de questões. Contudo, o teórico das componentes idênticas e o adepto da teoria dos princípios estruturais estão *ambos* a tentar compreender a aprendizagem da matemática. Não é claro, se a aprendizagem da matemática é melhor compreendida usando um método de pesquisa reducionista ou um método holístico.

Diferentes teorias da mente

Adeptos da teoria conservadora da transferência argumentam que só partes individuais e idênticas de uma competência se transferem para uma tarefa diferente. A criança tem necessidade que lhe sejam apresentadas as várias partes de uma competência complexa. Como consequência, os adeptos desta teoria tentam determinar as partes de cada competência complexa e ensiná-las individualmente. As relações entre as competências simples e complexas são determinadas *antes* de serem apresentadas à criança. Por outras palavras, o trabalho de procura de relações entre a competência complexa e as suas partes simples é feito pelo professor e não pelo aluno. A criança é vista como um recipiente passivo de informações e relações.

Os adeptos da teoria liberal da transferência, por outro lado, sublinham que a mente procurará activamente pontos comuns e regularidades nas diferentes situações. Os pontos comuns e as regularidades não são impostas à criança pelo exterior. São construídas na mente da criança. Esta construção assume que a mente tem em si alguns princípios organizativos pré-existentes que dão início ao processo construtivo. Chomsky resolve este problema atribuindo à criança a existência de estruturas primitivas e inatas. Piaget, por outro lado, argumenta que as estruturas primitivas se desenvolvem por um processo análogo ao crescimento biológico.

Diferentes perspectivas sobre a natureza das entidades matemáticas

Adeptos de uma teoria conservadora da transferência tendem a acreditar que uma competência complexa pode ser descrita como uma série de “laços” relacionados, ou ligações entre estímulos (problemas) e respostas. Embora um laço esteja provavelmente na “mente da criança”, o teórico da transferência conservadora não está interessado em construções mentais. O seu objectivo é o estímulo observado e a resposta, podendo cada um dos quais ser descrito como comportamento de manipulação de símbolos. Quando um teórico da transferência conservadora diz que uma criança aprendeu a multiplicar números inteiros, *quer dizer* o seguinte: se se der à criança um problema de multiplicação, ela manipulará os símbolos para chegar a uma dada resposta. Por outras palavras: “falar acerca da formação de ligações” é apenas outro modo de falar acerca da manipulação de símbolos.

Adeptos da teoria liberal da transferência, por outro lado, acreditam que a realização de uma actividade complexa resulta de ter as estruturas cognitivas certas no lugar certo. Os símbolos matemáticos são usados para representar relações dentro e entre estas estruturas. O ponto importante é este: embora a prova da existência das estruturas seja dada pelo comportamento de manipulação de símbolos, as estruturas não são *equivalentes* aos símbolos. Enquanto os símbolos são “externos” as estruturas são provavelmente “internas”. O comportamento da manipulação de símbolos é só a *manifestação* de estruturas internas.

Serão as entidades matemáticas apenas quimeras resultantes da manipulação de símbolos? Ou terão estas entidades, alguma contrapartida “dentro” da mente humana? Quine argumentou que este problema é uma variante do clássico “problema dos universais” (Quine). O problema dos universais pode ser ilustrado considerando a relação entre um numeral e um número.

O numeral “3” está de algum modo relacionado com todas aquelas colecções no mundo que contêm três elementos. “3” é o nome da propriedade que estas colecções têm em comum. Mas onde reside esta propriedade? É parte do mundo, no mesmo sentido em que os elementos dos conjuntos de três membros são parte do mundo? Ou é a propriedade uma ilusão que surge do facto das pessoas usarem o símbolo “3” como nome de certas colecções por razões sociais ou de sobrevivência? Ou é uma propriedade de um conceito que os utilizadores do símbolo “3” construíram nas suas mentes?

Platão foi um dos primeiros pensadores que considerou esta questão sistematicamente. Ele argumentou que cada termo universal, tal como o

numeral “3” se refere a uma entidade própria que existe à parte de todas as colecções que contêm três elementos. Esta entidade própria *não* é apreendida pelos sentidos. É intuída pelo intelecto. Contudo esta entidade *não* é “construída” pela mente. Existe num mundo à parte, num mundo imutável de “Formas” que podem ser visualizadas pelo “Olho da Razão”.

A posição de Platão pode parecer fantasiosa, mas interessa muitas vezes aos matemáticos. Quando dois matemáticos estão a falar, é quase como se cada um deles pudesse “ver” a abstracção de que o outro está a falar. Isto sustenta a ideia de que as entidades matemáticas existem nalguma base ou domínio independente da mente humana.

A posição de Platão (que será chamada “realismo”) não deixou de ter os seus opositores. Durante a Idade Média, alguns pensadores avançaram com um ponto de vista diametralmente oposto ao de Platão. Enquanto o realismo povoa o mundo com muitas coisas que não são aparentes aos sentidos (ex. Formas platónicas), a posição medieval elimina do mundo muitas coisas que *parecem* aparentes aos sentidos. Por exemplo, a propriedade comum partilhada por todos os conjuntos com três elementos é só uma ilusão, de acordo com os seguidores desta posição. “3” é só um *nome* que os humanos usam quando falam acerca de certas colecções. De acordo com isto esta posição é muitas vezes designada por “nominalismo”.

Os nominalistas argumentam que os símbolos matemáticos são úteis para fazer previsões acerca de, digamos, a trajectória dum míssil ou a deslocação de uma superfície frontal. Contudo, embora os símbolos tenham valor utilitário, não têm outro “significado” que não seja aquele derivado do contexto no qual estão a ser usados. A Matemática é só um jogo de símbolos. Aprender Matemática é aprender como manipular símbolos, do mesmo modo que aprender a andar de bicicleta é aprender a usar os pedais e o guiador. Os teóricos da teoria conservadora da transferência podem tender para esta posição nominalista.

Tanto o nominalismo como o realismo parecem ser posições extremas. Sem grande surpresa, alguns pensadores tentaram encontrar um compromisso entre estas duas posições. Argumentaram que a propriedade comum partilhada por exemplos de um termo universal, embora sendo mais do que uma palavra, é menos do que uma Forma que existe independentemente. É uma *ideia* ou conceito que é construída pela mente do utilizador do termo. Por exemplo, conjuntos de três elementos são entendidos como semelhantes, porque os utilizadores do termo “3” construíram conceitos similares nas suas mentes. Os adeptos da teoria liberal da transferência provavelmente inclinar-se-ão para

este ponto de vista, que é muitas vezes designado por *conceptualismo*.

À primeira vista, a posição conceptualista parece ser a mais plausível. Os problemas surgem, contudo, quando se tenta *explicar* o facto de os utilizadores de um termo tal como “triângulo” construírem conceitos semelhantes. Será altamente improvável que os conceitos sejam semelhantes por acaso. Mas se se argumenta que existe algo no mundo para reconhecer a semelhança, está-se a voltar a uma variante da solução de Platão. Nomeadamente, os utilizadores do termo “triângulo” construíram conceitos semelhantes, porque se aperceberam de uma Forma platónica comum.

Resumo

Foram explicados quatro assuntos pertinentes para a “teoria” em educação matemática.

Estes assuntos provêm, em parte, da noção de “transferência de aprendizagem”. Primeiro, adeptos das diferentes teorias da transferência tendem a atribuir diferentes valores à educação matemática. Enquanto os teóricos da teoria conservadora podem enfatizar o valor utilitário da matemática, um teórico da teoria liberal da transferência pode argumentar que a matemática pode também “desenvolver a personalidade”. Segundo, adeptos de cada uma das teorias tendem a tomar diferentes decisões de ordem metodológica com respeito à “unidade de análise” básica. Enquanto os teóricos conservadores tendem a reduzir competências complexas a factos simples, os teóricos liberais pressupõem estruturas amplas que são inatas ou que se desenvolvem biologicamente. O terceiro assunto relaciona-se com a teoria da mente. Enquanto os teóricos conservadores vêem a mente como um espaço vazio, um recipiente passivo de informação, os teóricos liberais vêem-na como um criador activo de estruturas cognitivas. Uma quarta diferença diz respeito à natureza das entidades matemáticas. Enquanto o teórico conservador tende a ver a matemática como um “jogo formal de símbolos”, o liberal acreditará mais que os símbolos matemáticos se referem a entidades conceptuais.

A secção seguinte explicará a “teoria” que vai ser usada para estudar as diferenças de posição em cada um destes quatro assuntos.

II. A teoria: Kuhn e Lakatos

Os filósofos da ciência têm frequentemente considerado o problema de diferentes teorias explicarem alegadamente o mesmo fenómeno. Talvez seja

de esperar que os filósofos não estejam de acordo quanto ao modo como esta questão das teorias discordantes é melhor explicada. T. Kuhn (1962) e I. Lakatos (1970), por exemplo, oferecem explicações muito diferentes do “choque de teorias”.

Thomas Kuhn: paradigmas em competição

Kuhn descreve uma comunidade de cientistas como trabalhando dentro de um conjunto partilhado de crenças que determinam a maneira pela qual eles percebem o mundo. Os físicos, por exemplo, são “confrontados com séries de soluções problemáticas exemplares (as quais) lhes ensinam a ver diferentes situações físicas como idênticas” (Kuhn, 1970, p. 273). Kuhn descreve os físicos vendo o mundo como um “gestalt” ou “paradigma” newtoniano ou einsteiniano. Os cientistas de um paradigma não podem discutir as ideias de outro paradigma de uma maneira imparcial e racional. No ponto de vista de Kuhn os paradigmas são *incomensuráveis* (Kuhn, 1962, p. 103).

Um exemplo da história da Física é usado muitas vezes para ilustrar paradigmas incomensuráveis. Antes do início do século, os físicos viam o mundo através dum ponto de vista newtoniano. A massa de um objecto e a sua energia eram dois conceitos distintos. Depois do trabalho de Einstein, os físicos começaram a ver massa, velocidade e energia como todos relacionados. Kuhn argumenta que os pontos de vista de Newton e de Einstein são incomensuráveis. “Embora uma teoria desactualizada possa sempre ser vista como um caso particular da sua sucessora actual, ela tem de ser transformada para esse fim” (Kuhn, 1962, p. 103). O mundo newtoniano tem de ser “transformado” para encaixar no mundo einsteiniano. Como resultado desta transformação, conceitos fundamentais como “massa” e “energia” mudam o seu significado.

Proponentes do modelo de Kuhn têm dificuldade em considerar um paradigma como “melhor” que outro. Eles podem explicar o sucesso do paradigma de Einstein relativamente ao de Newton, apontando razões históricas, acontecimentos políticos ou a personalidade de cada investigador. Os cientistas mudam os paradigmas por razões muitas vezes não “racionais”. Como diz Kuhn, a escolha entre paradigmas em competição

prova ser uma escolha entre modos incompatíveis da vida em comunidade. Porque tem esta característica, a escolha não é nem pode ser determinada meramente pelos procedimentos de avaliação característicos da (...) ciência, porque estes dependem em parte de um dado paradigma, e esse paradigma está em questão. Quando os

paradigmas entram, como devem, num debate acerca da escolha de paradigmas, o seu papel é necessariamente circular. Cada grupo usa o seu próprio paradigma para argumentar em defesa desse paradigma (1962, p. 94).

A posição de Kuhn sobre a mudança científica é polémica. Alguns filósofos sustentam que, quando uma teoria se torna mais aceitável do que outra, há boas razões (racional) para ser preferida. Por exemplo, a nova teoria pode estar mais perto da verdade (Popper, 1935, 1963), ou pode ser capaz de explicar tudo o que a outra teoria explica e mais ainda (Lakatos, 1970). Diferentes teorias podem ter em consideração o mesmo fenómeno, mas isto não significa que as teorias provenham de paradigmas incomensuráveis. Isto apenas significa que os proponentes de uma teoria ainda não demonstraram a superioridade das suas explicações.

A questão de saber se a mudança científica é ou não “racional” pode ser ilustrada através de uma analogia da antropologia. Suponhamos que se está a tentar determinar se uma tribo do Terceiro Mundo está ou não a fazer progressos. Alguns diriam que, de modo a fazer este julgamento, um indivíduo teria, em primeiro lugar, que se tornar *membro* da tribo. Isto resulta do facto de não ser possível entender a cultura estando do “lado de fora”. Outros antropologistas veriam esta conclusão como excessivamente caridosa. É possível encontrar uma perspectiva neutral a partir da qual o progresso duma cultura possa ser avaliado. Prosseguindo com a analogia, alguns diriam que um paradigma é como uma tribo e só pode ser avaliado usando os seus próprios padrões. Outros afirmariam que é possível encontrar um terreno neutro a partir do qual a racionalidade da mudança científica possa ser determinada. Lakatos situa-se neste último grupo.

Imre Lakatos: programas de pesquisa

Lakatos (1970) argumenta que, embora os programas de pesquisa possam ser baseados em hipóteses incomensuráveis, estas hipóteses podem ter diferentes “frutos” no mundo da ciência. Por outras palavras, os programas de pesquisa podem ser comparados com base no seu *progresso*. Assim, muito depende desta noção de “progresso”. No modelo de Lakatos, uma teoria é mais progressista do que outra se se verificarem três critérios: primeiro, a nova teoria faz algumas conjecturas que a anterior não fazia; segundo, algumas destas conjecturas devem ter sido confirmadas; terceiro, a nova teoria deve ser capaz de explicar todos os factos que a anterior conseguia explicar (Lakatos, 1970).

As teorias de Newton e Einstein podem ser usadas para ilustrar estes três critérios. A teoria de Einstein prediz que a luz se curvará num campo gravitacional, o que a teoria de Newton não faz. Esta conjectura foi, em parte, confirmada pelas fotografias, realizadas por Eddington, da luz das estrelas inclinando-se como resultado da força gravitacional do Sol no eclipse de 1917. Finalmente, como a teoria de Newton pode ser encarada como um caso especial da teoria de Einstein, esta última pode explicar todos os casos que a primeira explicava. Assim, utilizando os três critérios de Lakatos, a teoria de Einstein é mais progressista que a de Newton.

Juntamente com estes três critérios, que definem a noção de “progresso”, Lakatos fornece uma útil análise de programas de pesquisa científica. Um programa de pesquisa tem duas partes: hipóteses fundamentais ou de “núcleo duro” (*hard core*), que nunca são postas em causa, e hipóteses auxiliares ou de “cinto de protecção” (*protective belt*), que podem ser modificadas de modo a aceitarem contra-exemplos. Exemplos de hipóteses de núcleo duro são “acção à distância” na teoria de Newton e “o desenvolvimento ocorre em estádios” na teoria de Piaget. O cinto de protecção, na teoria de Newton, consistia numa série de modelos de sistemas planetários que estão cada vez mais de acordo com as suas leis básicas de movimento (Lakatos, 1970, p. 135). No programa de Piaget, o cinto de protecção incluiria cláusulas em que se referia que as crianças podem por vezes regredir no seu desenvolvimento ou ultrapassar mais do que um estádio.

As hipóteses do núcleo duro que estão por trás de um programa de pesquisa, não são muitas vezes testáveis. Contudo, é possível (pelo menos em princípio) determinar se um programa cumpre os três critérios de “progresso”. Isto permite-nos avaliar a racionalidade da mudança científica.

Kuhn e Lakatos oferecem diferentes perspectivas sobre a natureza do desacordo acerca dos assuntos fundamentais. A próxima secção tentará determinar qual dos pontos de vista, Kuhn ou Lakatos, é o “mais apropriado” para perceber as diferenças, explicadas na Parte I.

III. Uma visão mais aprofundada das quatro questões

Investigadores em educação matemática podem adoptar diferentes pontos de vista nas questões de valores, unidades de análise, teoria da mente e natureza das entidades matemáticas. Serão as posições sobre estes assuntos incomensuráveis, ou será possível argumentar que uma posição é mais “progressista”

que outra? Esta questão será considerada para cada um dos assuntos expostos na Parte I.

Diferentes valores associados à instrução matemática

Os investigadores em educação matemática que se inclinam para um valor utilitarista estão aptos a estudar coisas diferentes daqueles que se inclinam para um valor de “desenvolvimento da personalidade”. Para os primeiros, o assunto chave reside no facto de uma criança aprender ou não certas competências matemáticas socialmente úteis. Estas competências podem provavelmente ser avaliadas por um teste objectivo e podem ser estudadas durante um período de tempo relativamente curto. O desenvolvimento do carácter, por outro lado, é difícil de descrever sem especificar *como* esse desenvolvimento ocorre. Um estudo em desenvolvimento do carácter é baseado numa cadeia inferencial muito mais complexa. Um estudo nesta área pode precisar de vários anos, ou mais, para ser completado.

Comparar estas hipóteses de valores, com base no seu sucesso é enganador. Se o “sucesso” é medido por “adesão popular”, então talvez a hipótese utilitária tenha prevalecido. Mesmo Dienes admite: “com franqueza, a maior parte de nós vem em favor de argumentos económicos quando tenta justificar a aprendizagem da Matemática” (Dienes, 1960, p. 8). Infelizmente, o valor utilitário pode também ser um bónus para os decisores educacionais. Uma vez que a ênfase neste valor conduz à ideia de que a matemática pode ser avaliada por testes objectivos, os que tomam decisões podem demonstrar ser responsáveis produzindo aumentos nas pontuações dos testes.

Contudo, o critério de Lakatos para “sucesso” depende, não da popularidade da hipótese, mas dos *argumentos* que a sustentam. Aqui pode-se contrapor que o valor do “desenvolvimento da personalidade” é sustentado por melhores argumentos. Em particular, a instrução, que tenta desenvolver a personalidade da criança, também tem o potencial de aumentar a capacidade da criança para dominar as competências básicas. O “desenvolvimento da personalidade” pareceria ser facilitado por um programa que indicasse relações entre a Matemática e outros elementos da vida da criança. Mas estas relações também tenderão a ajudar a criança a recriar competências que tenham sido esquecidas. Como Wachsmuth argumenta: “se uma competência rotineira não for empregue durante algum tempo, é possível que seja total ou parcialmente esquecida; a compreensão da competência permitiria a *reconstrução* do procedimento através de conhecimento declarativo” (Wachsmuth, 1983, p. 208).

Diferentes modos de estudar a aprendizagem da Matemática

Em parte, as hipóteses reducionista e holística são incomensuráveis. Aqueles que optam pela primeira provavelmente desenharão experiências para, digamos, validar uma hierarquia de aprendizagem. O objectivo da investigação é determinar de que modo uma dada competência pode ser decomposta em competências mais simples. O principal critério para avaliar esta investigação seria o sucesso do reducionismo. Por outro lado, um investigador que acredite que a unidade básica do conhecimento é a “estrutura cognitiva” está apto a desenhar um diferente tipo de estudo. Este investigador poderá observar o efeito de diferentes tipos de ensino na criação de estruturas cognitivas. “Sucesso”, para a investigação que se baseia nesta hipótese de núcleo duro, significaria ser capaz de descrever as variáveis que interferem na construção destas estruturas.

Terá a investigação, enquadrada em qualquer uma destas duas hipóteses, tido mais sucesso? Esta pergunta é difícil de responder porque muitas evidências ainda não foram recolhidas. A afirmação de que todas as partes componentes numa redução devem ser “comportamentos observáveis” já não é popular. Contudo, alguns teóricos tentam reduzir fenómenos mentais mais complexos, não a comportamentos observáveis, mas a processos *mentais* mais simples. Esta abordagem de processamento de informação não requer que os teóricos se abstenham de todas as referências a entidades mentais. Deste modo, um teórico do processamento de informação pode “praticar” a sua hipótese reducionista e sugerir caminhos para que esta hipótese possa ser avançada. Isto é uma marca de um “programa de investigação progressista”.

Diferentes teorias da mente

Os investigadores que sustentam diferentes teorias da mente também tendem a trabalhar em paradigmas incomensuráveis. Embora os proponentes de teorias activas e passivas possam, cada um deles, estudar o desempenho da criança na realização de certas tarefas, a natureza dessas tarefas pode ser muito diferente. Adeptos da teoria passiva, por exemplo, podem estudar o modo como a criança relaciona entre si competências simples para responder a problemas mais complexos. Se a resposta “certa” não ocorrer, será mais provável que o investigador re-desenhe a sua experiência do que altere a hipótese de que a mente é passiva. Aqueles que enfatizam que a mente é activa poderão estudar se uma criança é capaz de construir ligações estruturais entre tarefas que são muito diferentes. Se as conexões não forem feitas, a implicação

não será, provavelmente, que a mente é passiva. Uma vez mais, seria a experiência que necessitaria ser reformulada.

Embora estas duas teorias da mente possam parecer incomensuráveis, pode-se argumentar que a teoria activa é mais progressista, no sentido lakatosiano. Um reforço a este argumento surge de trabalho recente sobre a teoria do conhecimento. Durante os últimos 50 ou 60 anos, os pensadores chegaram a um acordo quase unânime sobre um princípio: a distinção entre “facto” e “teoria” é difícil se não impossível de manter. Este princípio está em perfeito contraste com os pontos de vista dos empiricistas clássicos, tais como Locke e Hume. Estes pensadores clássicos argumentavam que a experiência sensorial fornecia uma “base de dados” neutral, que poderia ser usada para estabelecer afirmações teóricas. No princípio deste século, alguns filósofos da ciência tentaram avançar os pontos de vista de Locke e Hume. Schlick (1936), por exemplo, defendeu que o *significado* de uma afirmação teórica estava ligado ao seu *método de verificação* em experiência.

Estas tentativas para distinguir facto de teoria não resultaram devido a várias armadilhas lógicas (Quine, 1953b). A maior parte dos investigadores chegou agora à conclusão de que não há nenhuma teoria neutral, que seja base de observação a partir da qual se possam justificar a verdade ou a falsidade de proposições científicas. O significado desta conclusão para a presente discussão é a seguinte: a teoria passiva da mente está intimamente ligada com o clássico ponto de vista empiricista. Aqueles que sustentam que a mente é um receptor passivo de informação, como os empiricistas clássicos, tentam retirar aos “factos” qualquer contaminação de inferência humana. A teoria passiva da mente apoia e é apoiada pela distinção entre facto e teoria. Em contraste, os proponentes da teoria activa da mente não têm necessidade desta distinção. Num certo sentido, “processos cognitivos” são factos e teoria.

Diferentes perspectivas sobre a natureza das entidades matemáticas

A distinção entre nominalismo e conceptualismo é mais evidente na maneira como os proponentes de cada um deles esclarecem o *significado* dos *símbolos matemáticos*. O nominalista argumenta que o significado dos símbolos matemáticos deriva do contexto no qual os símbolos são usados. Se se pedir a uma criança que calcule a área dum losango, por exemplo, o significado dos símbolos “A”, “D” e “d” seria derivado das fórmulas da área em que estes símbolos aparecem. Não é preciso afirmar que os símbolos se referem a entidades cognitivas axiomáticas. O significado de um símbolo fica esgotado

no modo como é usado. Os conceitos matemáticos *são* só utilizações de símbolos.

Para o conceptualista, por outro lado, o significado de um símbolo matemático não pode ser totalmente especificado pela descrição do comportamento daqueles que o utilizam. Quando se pede a uma criança que calcule a área dum losango, por exemplo, o significado dos símbolos “A”, “D” e “d” advem, não só das fórmulas das áreas que a criança manipula, mas também das ideias matemáticas às quais estes símbolos se referem. Os símbolos referem-se a constructos cognitivos. O conceito é algo mais do que a utilização do símbolo.

Como se disse, parece que o nominalismo e o conceptualismo são incomensuráveis. Os nominalistas e os conceptualistas quase que “falam linguagens diferentes”. O conceptualista usa termos como “estruturas cognitivas”, “conservação”, “grupo INRC”, etc. Embora o nominalista tente traduzir estas “quimeras” em termos behavioristas, o conceptualista aceita-as tal como são. Esta diferença de linguagem torna difícil comparar os programas de investigação nominalista e conceptualista numa perspectiva neutral.

Dado o papel da “construção” na perspectiva conceptualista, juntamente com a popularidade da teoria activa da mente, poder-se-ia pensar que a teoria conceptualista é mais progressista. Contudo, esta suposição pode ser posta em causa olhando com mais cuidado para o modelo de processamento de informação. Os proponentes deste modelo garantirão prontamente que a mente é activa. Também garantirão que a mente contém estruturas cognitivas. No entanto, a natureza destas estruturas não é clara.

De um ponto de vista lógico, um computador pode ser descrito usando três noções fundamentais: entradas (inputs) vindas do exterior, saídas (outputs) para o exterior e configurações internas ou “estados” (Putnam, 1960). As entradas e as saídas são simbólicas. Um estado pode também ser especificado simbolicamente. Nomeadamente, um estado pode ser descrito especificando as acções (ir para um estado diferente, fazer sair um certo símbolo, etc.) que o computador realiza quando sujeito a uma determinada entrada. O resultado é que os trabalhos do computador podem ser descritos em termos de como o computador manipula os símbolos. Dizendo de outro modo: as “estruturas cognitivas” do computador podem ser traduzidas em comportamentos de manipulação de símbolos.

O modelo de processamento de informação pode ser interpretado, pelo menos, de dois modos. Por um lado, pode ser interpretado como uma mera função de *descrição* de como a mente manipula a informação. Termos como “registo”, “buffer” e “nodo” não têm outro significado para além da actividade

de manipulação de símbolos que eles costumam descrever. Esta interpretação “formal” do modelo é consistente com o nominalismo. Por outro lado, o modelo pode ser interpretado como uma *explicação* real ou causal de como a mente funciona. Termos como “registo”, “buffer” e “nodo” referem-se a entidades conceptuais hipotéticas. Estes termos têm um papel na explicação de processos cognitivos e têm, por isso, significado para além de um comportamento de manipulação de símbolos. Esta interpretação “real” do modelo de processamento de informação não é consistente com o nominalismo.

Embora o modelo de processamento de informação possa ser parte de um “programa progressista de investigação”, os utilizadores deste modelo nem sempre especificam as suas interpretações. Deste modo, é difícil dizer qual das duas perspectivas, nominalista ou conceptualista, é a mais progressista.

Conclusão final: Kuhn ou Lakatos?

As teorias em educação matemática assentam frequentemente em diferentes hipóteses no que respeita a quatro assuntos: valores, unidades de análise, teorias da mente e natureza das entidades matemáticas. A questão principal que se coloca é a seguinte: será mais racional aceitar algumas hipóteses em particular referentes a estes assuntos?

De um ponto de vista, as hipóteses referentes a estes assuntos são incomensuráveis. Os adeptos das diferentes hipóteses tendem a colocar diferentes questões e a estudar diferentes coisas. Como diria Kuhn: a escolha entre estas hipóteses não pode ser determinada meramente pelos procedimentos de avaliação característicos da ciência, porque estes critérios dependem do paradigma (Kuhn, 1962, p. 94).

No entanto, se a escolha entre as hipóteses é baseada nas consequências destas hipóteses na investigação em educação matemática, talvez *haja* algum espaço para decisões racionais. Mais especificamente, duas das quatro hipóteses parecem ser mais “progressistas” do que as suas rivais. A primeira é o valor do “desenvolver da personalidade”. Esta hipótese pode abarcar duas hipóteses: ela própria e o valor utilitário. A segunda é a teoria activa da mente. No contexto da história intelectual recente, esta hipótese parece ser claramente mais progressista que a teoria passiva.

Comparar as hipóteses que se referem às unidades de análise e à natureza das entidades matemáticas é, contudo, mais difícil. A metodologia reducionista inspira-se em certos modelos de processamento de informação, mas a

estratégia holística está viva nos modelos construtivistas. A perspectiva nominalista das entidades matemáticas é viável numa certa interpretação do modelo de processamento de informação. Contudo, o modelo de processamento de informação também poderia ser interpretado de um modo conceptualista. Além disso, a maior parte se não todos os construtivistas inclinam-se para uma visão conceptualista das entidades matemáticas.

Uma maneira de resumir a análise até este ponto é colocar a seguinte questão: é mais racional seguir um programa de investigação baseado num modelo de processamento de informação formalista, reducionista ou num modelo de processamento de informação conceptualista, holístico, construtivista? Ambos os modelos partilhariam a visão activa da mente; contudo, difeririam nas suas hipóteses no que diz respeito à metodologia e teoria das entidades matemáticas. Poderão também diferir na sua hipótese de “valores”. Os construtivistas inclinar-se-ão para o valor “do desenvolvimento da personalidade”. No entanto, com os teóricos do processamento de informação, o assunto não é tão claro. Gagné, que agora designa um modelo de processamento de informação, sublinha a importância do automatismo de competências (Gagné, 1983a). Será que Gagné enfatiza o automatismo porque este tende a construir a personalidade da criança ou porque ajuda a assegurar que a criança produza “respostas correctas”? Alguns dirão que é a última.

Kuhn ou Lakatos? Devido ao facto de diferentes perspectivas nos métodos de investigação e teoria das entidades matemáticas serem defensáveis e incomensuráveis, um modelo kuhniano é mais apropriado para compreender as diferenças entre os modelos de processamento de informação e construtivista. Quando os “frutos” destes programas amadurecerem, o modelo de Lakatos pode fornecer a melhor descrição. No entanto, esta história está ainda por contar.

Notas

¹Fundamentais ou fundacionais, enquanto elementos de base para uma fundamentação — NT.

²*Bug* é um erro sistemático identificável em tarefas realizadas por alunos. Este tipo de erro não provém de deslizes ou distrações ocasionais. Frequentemente, estes erros são gerados por interpretações menos correctas, por conceitos compreendidos incorrectamente ou por regras inventadas pelos alunos. *Debug* é o processo através do qual o aluno identifica e corrige o erro — NT.

³Optámos por traduzir *progressive* por progressista — NT.

⁴*thought experiment*, experiência que não existe na realidade, é imaginada e ocorre somente

a nível do pensamento — NT.

Agradecimentos

O Director da *Quadrante* deseja agradecer à revista *For the Learning of Mathematics*, e, em particular, ao seu Editor, David Wheeler, a disponibilidade manifestada para a publicação deste artigo.

Referências

- Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics*. Londres: Hutchinson Educational.
- Gagné, R. M. (1983a). Some issues in the psychology of mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 7-18.
- Gagné, R. M. (1983b). A reply to critiques of some issues in the psychology of mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 213-214.
- Gagné, R. M. (1970). Some new views on learning and instruction. *Phi Delta Kappan*, Maio, 468-472.
- Gagné, R. M. (1963). Learning and proficiency in mathematics. *The Mathematics Teacher*, 56, 620-626.
- Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.
- Kuhn, T. S. (1970). Reflections on my critics. Em I. Lakatos & A. Musgrave (Eds.), *Criticism and the growth of knowledge* (pp. 91-196). Cambridge: Cambridge University Press.
- Lakatos, I. (1970). Falsification and the methodology of scientific research programs. Em I. Lakatos & A. Musgrave (Eds.), *Criticism and the growth of knowledge* (pp. 91-196). Cambridge: Cambridge University Press.
- Popper, K. R. (1935). *Logik der Forschung*. Viena: Springer.
- Popper, K. R. (1963). *Conjectures and refutations: The growth of scientific knowledge*, Nova Iorque: Harper & Row.
- Putnam, H. (1960). Minds and machines. Em S. Hook (Ed.) *Dimensions of mind: A symposium* (pp. 138-164). Nova Iorque: New York University Press.
- Quine, W. V. O. (1953a). On what there is. Em W. V. O. Quine (Ed.), *From a logical point of view* (pp. 1-19). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Quine, W. V. O. (1953b). Two dogmas of empiricism. Em W. V. O. Quine (Ed.), *From a logical point of view* (pp. 20-46). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Schlick, M. (1936). Meaning and verification. *The Philosophical Review*, XLV, 339-353.
- Thorndike, E. L. (1922). *The psychology of arithmetic*. Nova Iorque: Macmillan.
- Wachsmuth, I. (1983). Skill automaticity in mathematics instruction: A response to Gagné. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 204-209.

Robert E. Orton.

Artigo publicado sob o título “Two theories of ‘theory’ in mathematics education”. For the Learning of Mathematics, 8(2), 36-43, 1988.

Este artigo destinava-se inicialmente a ser publicado no anterior número temático da Quadrante sobre Teoria de Educação Matemática. Razões de calendário obrigaram-nos a adiar a sua publicação para agora.

Tradução elaborada por Ana Paula Mourão e Jacques Silva e revista pelo Grupo Português de Teoria de Educação Matemática.

