Sistema de signos e aprendizagem conceptual[1]

Terezinha Nunes
University of London

Os conceitos têm sido, com frequência, discutidos com base nas suas estruturas lógicas subjacentes. Esta ideia é certamente verdadeira tanto para a teoria de Piaget como para a de Vygotsky. Consequentemente, a mudança conceptual tem sido vista, em ambas as teorias, como um processo de mudança estrutural. Na teoria piagetiana, o conceito mais relevante, neste aspecto, é o de *equilibração*, um processo que garante o equilíbrio entre o organismo e o meio ambiente, através do desenvolvimento de estruturas lógicas. No trabalho de Vygotsky, os conceitos significativos quanto a este assunto são os de *conceitos espontâneos e científicos*, um contraste que enfatiza a utilização de categorias funcionais quando os conceitos são espontâneos e de categorias taxonómicas (definidas logicamente mais do que experimentalmente) quando os conceitos são científicos.

Neste artigo, discutirei um aspecto diferente dos conceitos: a sua relação com o sistema de signos usado no pensamento e na comunicação. Não considerarei os conceitos de uma maneira estática (por exemplo, que tipo de conceito tem o sujeito?), mas de uma maneira dinâmica (por exemplo, que actividades baseadas em conceitos é que o sujeito desenvolve?). Gostaria de sugerir que os sistemas de signos utilizados no pensamento e na comunicação desempenham um papel fundamental no desenvolvimento conceptual. Eles permitem, dirigem e condicionam o raciocínio através da sua função mediadora. Mas mais que isso: têm um papel estruturante na formação de conceitos e influenciam o tipo de conceitos que se desenvolvem durante as experiências de aprendizagem. A evidência em que me apoiarei é do domínio da Educação Matemática. A concepção do sistema de signos que utilizarei é lata. Incluirei como um sistema de signos diferentes recursos que os sujeitos podem conceber durante a resolução de problemas e concentrar-me-ei especialmente na utilização de recursos que podem ser observados e descritos com algum detalhe.

O papel facilitador dos sistemas de signos

Segundo Luria (1979) todas as funções mentais superiores são mediadas por sistemas de signos. Sem essa mediação, estaríamos basicamente restringidos ao aqui e agora. A função facilitadora dos sistemas de signos no domínio dos conceitos matemáticos é tão óbvia que apenas dois exemplos de actividades nas temáticas elementares serão mencionados neste texto.

Primeiro, consideremos a actividade de contagem. Para contar adequadamente como Gelman e Gallistel (1978) afirmaram, é necessário: 1) estabelecer uma correspondência um-a-um entre palavras únicas de contagem e os objectos que estão a ser contados; 2) manter as palavras da contagem numa ordem fixa; 3) usar a última palavra para representar o número de objectos naquele conjunto. Apesar desta actividade parecer muito simples, ela não pode ser efectuada sem o papel mediador das palavras de contagem. Um sistema tem de ser usado se quisermos manter as palavras numa ordem fixa. A maioria das crianças de sete/oito anos, em muitas culturas, podem contar facilmente até mil, se quiserem, e produzir tabelas de um milhar, numa ordem fixa. Este fantástico sucesso, que tomamos como garantido, só é possível porque eles se apoiam num sistema através do qual criam mais do que memorizam, as palavras, segundo uma ordem fixa. Assim que a estrutura das palavras de contagem oral está percebida, o utilizador do sistema pode produzir tabelas de contagem que ele nunca ouviu. Neste caso, a estrutura do sistema permite ao utilizador ir para além dos limites naturais da sua memória.

O número mais elevado que pode ser conseguido por um sujeito que domine o sistema de contagem no seu meio ambiente não é determinado pelas capacidades de memória do contador, mas pelo sistema. Sistemas não-básicos, como os descritos por Lancy (1983) em Papua, Nova Guiné, usam os nomes de partes do corpo tomados numa ordem sistemática como um auxiliar de memória e permitem, algumas vezes, aos seus utilizadores, contar para cima de sessenta e oito ou algo semelhante. Contudo, como o sistema não tem uma base e não é recursivo, o sistema é finito e o mesmo acontece com a capacidade de contagem dos seus utilizadores. No caso da contagem, as culturas têm desenvolvido, no decurso da história, sistemas de numeração que permitem aos seus utilizadores ultrapassar as suas limitações naturais de memória.

Um segundo exemplo pode ser encontrado no caso dos sistemas métricos. A nossa percepção de comprimentos, por exemplo, está sujeita a todos os tipos de ilusões. No caso da largamente conhecida ilusão de Muller-Ayer, por exemplo, falhamos quando comparamos dois segmentos de recta que são apresentados muito perto um do outro.

A nossa percepção também está sujeita a uma ilusão de constância do tamanho, pela qual nós superavaliamos o tamanho de objectos a uma distância, e pela bem conhecida ilusão do tamanho da lua, que nós percepcionamos como tendo diferentes tamanhos à medida que a noite avança. A nossa memória do comprimento também é limitada e dificilmente poderíamos esperar olhar para uma janela e ir a uma loja comprar a quantidade de tecido correctamente para lhe fazer um cortinado. E mais: a percepção do comprimento é subjectiva no sentido em que diferentes pessoas podem não concordar nos seus julgamentos sobre comprimentos, numa mesma situação. Por exemplo, no caso da ilusão de Muller-Lyer, diferentes sujeitos apresentam diferentes níveis de ilusão, e não se consegue um consenso entre os sujeitos quando se lhes pede que calculem o tamanho da diferença entre os segmentos de recta. As culturas têm desenvolvido, ao longo da história, sistemas de medida que permitem aos seus utilizadores ultrapassar as suas limitações perceptivas, mnemónicas e intersubjectivas. Apesar de não vermos melhor conseguimos medir os segmentos de recta na ilusão de Muller-Lyer e verificar que os segmentos de recta têm o mesmo comprimento.

O papel facilitador dos sistemas de contagem e de medida é nitidamente fundamental para a nossa capacidade de executar muitas actividades matemáticas, na nossa vida diária, dentro e fora da escola.

O papel orientador e limitador dos sistemas de signos

O papel facilitador dos sistemas de signos é facilmente demonstrável. É muito mais difícil de demonstrar o papel orientador e limitador dos sistemas de signos no raciocínio, porque este assunto envolve a interacção entre processos de raciocínio dos sujeitos e o sistema externo. Nesta secção, serão brevemente apresentados vários exemplos de como as pessoas fazem cálculos com diferentes sistemas de signos, para demonstrar que os processos de cálculo são orientados e limitados pelos sistemas de signos. Quatro diferentes tipos de representação utilizados no cálculo serão comparadas: dedos, números orais, números escritos e ábaco.

Aritmética digital

Morton e Newman (1990) observaram as capacidades de cálculo de crianças jovens (sete anos) quando tinham de resolver problemas em que a situação problemática era aditiva, mas em que uma parcela era desconhecida. Por exemplo, "O teu professor tem quatro lápis e dez crianças querem desenhar; quantos lápis a mais ele necessita de tirar do armário?". Para crianças pequenas, esta situação é aditiva porque o professor necessita de mais lápis e não subtractiva, porque nada é retirado. Mas como é que se adiciona um número quando não se sabe qual ele é? Morton e Newman observaram que as crianças com sucesso tinham desenvolvido uma maneira de representar a situação, com os seus dedos, que permitia o sucesso. Eles levantavam os dez dedos e separavam quatro dos outros. Quando faziam isto, a maioria das crianças nem precisava de contar os dedos do outro conjunto: eles reconheciam o seu padrão visual como seis. Este procedimento conduzia ao sucesso, mesmo quando as crianças não sabiam que operação aritmética efectuar, e a maioria das crianças desta idade não sabia que operação efectuar para resolver este problema. Contudo, a utilização de *números com os dedos*[2], como lhes chamam Morton e Newman, está restrita a problemas nos quais, pelo menos um dos números não é superior a dez. O mesmo problema, apresentado às mesmas crianças, com números superiores, conduz ao insucesso. Como tal, os números com os dedos estão restritos a valores pequenos, como consequência do número de padrões visuais que podem ser reconhecidos.

Uma utilização diferente dos dedos nos cálculos tem sido recentemente descrita por Nunes e Moreno (1995). Observámos crianças pequenas, com problemas de audição, usar um algoritmo com os dedos para fazerem adições e subtracções. No algoritmo da adição, por exemplo, o signo para uma das parcelas é executado com uma mão, enquanto o signo para a outra parcela é executado com a outra mão. À medida que a criança aumenta, gradualmente, os números assinalados para uma das parcelas, numa das mãos, ela diminui os números da outra mão, como se transferissem o valor de uma mão para a outra, até que não existissem mais números para serem adicionados. O algoritmo é útil para crianças com problemas de audição porque as liberta da necessidade de tentar recordar factos de adição verbal (como oito mais cinco é igual a treze). Crianças com deficiência auditiva que conhecem este algoritmo têm melhores resultados quando respondem a questões sobre adições e subtracções (como "quanto é oito mais três?" ou "quanto é catorze menos cinco?") do que uma coorte de crianças com problemas auditivos e que não conhece este algoritmo. O algoritmo desempenha um papel facilitador. Contudo, há limitações no seu desempenho, que podem ser claramente associadas à utilização do algoritmo. Quando o número oito, por exemplo, é assinalado, há três dedos que estão levantados, o indicador, o médio e o anelar. Se o oito está a ser adicionado a um outro número, estes três dedos precisam de ser baixados, visto que cada unidade é adicionada ao número assinalado com a outra mão. Quando os três dedos são baixados, todos os dedos estão em baixo novamente, mas a criança precisa de se lembrar que ainda restam cinco unidades para serem adicionadas. Não é invulgar que crianças pequenas que aprendem este algoritmo se esqueçam das cinco unidades que ainda restavam e que obtenham, por exemplo, oito como o resultado da adição cinco mais oito. Este erro pode ser associado directamente ao sistema; as mesmas crianças não fariam este erro se resolvessem o mesmo cálculo usando blocos para representar as parcelas. Como tal, o algoritmo focado facilita a tarefa das crianças, quer pela libertação da necessidade de memorização de factos aditivos verbais que são difíceis para elas, quer por limitar as suas práticas de cálculo em formas particulares.

Aritmética oral e escrita

Nunes, Schliemann e Carraher (1993), desenvolveram detalhadamente a utilização de números orais e escritos durante o cálculo e os efeitos destes sistemas de signos no processo de cálculo. Os estudos foram efectuados no Brasil, onde as crianças das classes trabalhadoras estão expostas a duas formas de aritmética, uma oral e outra escrita.

A aritmética escrita é ensinada na escola. Apesar de as crianças necessitarem de produzir factos aditivos por si (quer de memória, quer pela contagem dos dedos), a prática aritmética que elas usam caracteriza-se como escrita devido ao papel orientador e limitador jogado pelos símbolos escritos, durante o cálculo. Quando é efectuada uma adição, por exemplo, assim que os números estão escritos, o utilizador do sistema parece deixar de pensar nos valores como um todo. Os dígitos são adicionados da direita para a esquerda. O cálculo pode ser feito deste modo porque o valor relativo do dígito foi descarregado[3] no papel, (usando a terminologia de Hatano, 1995). Será recuperado, depois, quando o resultado é lido, desta vez da esquerda para a direita. O cálculo com papel e lápis explora as características especiais do sistema: a adição é efectuada por colunas, que devem estar alinhadas correctamente, para que o resultado esteja certo. De facto, esta é uma fonte de dificuldades para as crianças nos estádios iniciais de aprendizagem, porque as crianças podem não respeitar os arranjos por colunas ou podem arrumar as colunas da esquerda para a direita, usando a direcção em que escrevemos os números como um guia. Uma outra característica do algoritmo escrito é que todos os dígitos são tratados da mesma maneira, sem ter em conta o seu lugar no número, e os resultados parciais são escritos, permitindo que as restrições de memória sejam rapidamente ultrapassadas.

As consequências destas características levam à previsão de forças e fraquezas no desempenho do cálculo, como consequência da utilização dos algoritmos escritos. A força reside no facto de números muito grandes, bem como longas listas de números poderem ser operados de um modo relativamente simples. Usando este algoritmo podemos, por exemplo, adicionar listas de números que não conseguiríamos memorizar. A fraqueza está nos tipos de erro esperados na aritmética escrita. O cálculo da direita para a esquerda significa que o valor de um erro aumenta à medida que o cálculo prossegue. O cálculo com base nos dígitos, sem olhar para a quantidade que o número representa, também leva a um enfraquecimento do controlo parcial dos resultados durante o processo de cálculo.

Ao contrário da aritmética escrita, a aritmética oral não é sistematicamente ensinada nas escolas brasileiras, mas é sobretudo aprendida em situações do dia-a-dia, como as compras. A aritmética oral favorece o processo de controlo dos resultados porque a referência às quantidades permanece explícita ao longo de todo o processo de cálculo. O cálculo é feito dos valores maiores para os mais pequenos e continuamente verificada ao longo do processo.

Para ilustrar, uma solução típica de um problema aditivo como 230 + 150, em aritmética oral, seria: “duzentos e trinta , mais cem, trezentos e trinta; mais cinquenta, trezentos e oitenta”. De modo semelhante, numa subtracção como 200 — 35, uma solução típica é “duzentos, menos trinta, cento e setenta; menos cinco, cento e sessenta e cinco”. Um exemplo final será dado, relativo a um problema de divisão, em que uma criança estava a resolver o problema de distribuir igualmente 75 berlindes entre 5 rapazes: “Dê dez berlindes a cada um, o que faz cinquenta berlindes. Sobram vinte cinco, para dar a cinco rapazes. (...) Isso é cinco mais para cada um, o que faz quinze para cada um” (Nunes, Schliemann e Carraher, 1993).

A aritmética oral, tal como a prática escrita, tem forças e fraquezas. É difícil usar aritmética oral com números muito grandes e com listas longas, e esta é uma fraqueza importante. Contudo, o facto de o significado ser preservado ao longo do cálculo fortalece o processo de controlo do cálculo efectuado. Quando se cometem erros, espera-se que eles sejam mais pequenos.

As fraquezas da aritmética escrita, em contraste com a aritmética oral, foram observadas em estudos que utilizaram um design intra-sujeitos, em que as mesmas crianças resolviam problemas usando quer aritmética oral, quer escrita, em diferentes ocasiões, e um design inter-sujeitos, em que sujeitos que utilizam aritmética oral e têm pouca instrução formal (pequenos produtores rurais, capatazes da construção civil, pescadores) eram comparados com estudantes, que se apoiavam mais em práticas aritméticas escritas. A utilização de práticas orais levava a uma diferença significativa e a menos erros, para qualquer das quatro operações. Quando se observavam erros, os que resultavam da aritmética oral eram relativamente mais pequenos do que os que resultavam da aritmética escrita, como demonstrativos de uma associação significativa entre o tipo de procedimento aritmético utilizado e o tamanho relativo do erro (Nunes, Schliemann e Carraher, 1993).

Outro estudo que contrasta a aritmética oral e escrita foi realizado por Nunes (1993) com problemas de números relativos, nos quais o cálculo desempenhava um papel menor, mas verificar o processo de resolução do problema mantendo o seu significado presente, era muito importante. Os valores utilizados eram todos múltiplos de dez (por exemplo, 40, 30, 20); a questão importante para quem resolvia o problema era se devia adicionar ou subtrair os números. Na aritmética escrita, quem resolve os problemas tem de lidar com o facto de que -20 e -30 devem ser adicionados juntos, apesar de estarem precedidos do sinal menos, que noutras circunstâncias indicaria uma subtracção. Na aritmética oral, em que os números e operações não são representados numa forma escrita, a escolha da operação não deveria ser influenciada por dificuldades baseadas na notação escrita.

Neste estudo, crianças e adolescentes de três níveis de escolaridade foram convocados para uma condição de teste oral ou escrito, e apresentavam oralmente os mesmos problemas de números relativos. Todos os problemas se relacionavam com ganhos e perdas de um hipotético agricultor nos seus diferentes tipos de colheitas, uma situação que era familiar a todos os sujeitos. Aos que estavam convocados para a condição escrita pediu-se-lhes que escrevessem os números antes de resolverem os problemas e aos que estavam convocados para a condição oral não tinham papel e lápis disponíveis na situação de teste.

Os sujeitos da condição oral tiveram um desempenho significativamente melhor do que os da condição escrita.

Uma análise dos erros ocorridos na condição escrita indica que eles resultaram do conflito de duas práticas aritméticas escritas, que os sujeitos tinham aprendido na escola. Este conflito envolve (pelo menos) duas regras principais. Primeiro, na aritmética escrita ensinada antes dos números relativos, os sinais representam as operações e as crianças são ensinadas a fazer separadamente as diferentes operações. Não devem, por exemplo, adicionar e subtrair usando um só algoritmo. Quando os números relativos são introduzidos, os sinais já não representam operações porque dois números negativos podem ser adicionados, ou um números positivo pode ser subtraído de um negativo. Segundo, quando os sujeitos usam os sinais mais e menos para representar uma operação, eles não podem escrever o sinal da operação depois da apresentação do primeiro número do problema, mas só quando o segundo número foi apresentado. Num tal estado inicial de apresentação do problema, os sujeitos ainda não podem saber que operação eles necessitarão de efectuar e devem esperar por mais informação para saber que sinal devem pôr.

Os erros típicos da resolução de problemas com números relativos devem, portanto, ser de dois tipos. No primeiro tipo de erro, espera-se que os sujeitos da condição escrita falhem ao escrever se o primeiro número do problema é positivo ou negativo. A operação dependerá do que o segundo número indicar ser um lucro ou uma dívida, e eles esperam até terem obtido esta informação para escreverem o sinal. Um segundo tipo de erro envolve efectuar a operação indicada pelo sinal, independentemente de duas dívidas serem apresentadas consecutivamente. Isto resultaria, por exemplo, em subtrair um número negativo de outro, em vez de os adicionar. Estes foram os tipos de erro observados por Nunes (1993).

As dificuldades dos sujeitos com a aritmética escrita ao resolverem problemas com números relativos não podem ser apenas atribuídos a uma falta de compreensão dos problemas com números relativos, pelas razões que se seguem. Primeiro, deve ser relembrado que os sujeitos foram escolhidos aleatoriamente para a condição oral ou escrita e os sujeitos na condição oral tiveram um desempenho de nível superior. A escolha aleatória deve garantir o controlo das capacidades dos sujeitos. Segundo, os sujeitos de condição escrita eram frequentemente capazes de se aperceberem de que tinham cometido um erro, quando se lhes perguntava como tinham chegado àquele resultado. Conseguiam, então, auto-corrigir-se durante a sua explicação oral e concluíam dizendo "Não sou capaz de fazer no papel, só sei fazer na minha cabeça". Por exemplo, o seguinte problema foi dado a J. C.: "Seu Severino [nome do agricultor] começou a estação com uma dívida de 10 cruzados [moeda brasileira, naquela época]. Plantou mandioca e feijão. Teve um lucro de 20, na mandioca, e um lucro de 10 no feijão. Qual era a sua situação no final do ano?" J. C. escreveu 10, sem nenhum sinal (um erro do primeiro tipo), mais 20 por baixo (um lucro requer um sinal mais), e depois 10 numa terceira linha, abaixo do 20, sem um novo sinal. Somou todos os números e escreveu 40 na sua resposta. Contudo, quando lhe perguntámos se este 40 era lucro ou perda, uma questão que púnhamos, por rotina, quando os sujeitos não indicavam a direcção do valor, J. C. respondeu: "Não, não é isso. Não sei fazer no papel. Ele agarrou no lucro dos feijões e pagou os 10 que devia, e ainda tem os 20 da mandioca".

Resumindo, o contraste entre a aritmética oral e escrita ilustra como o sistema de signos e as práticas culturais que lhe estão associadas, orientam e limitam os raciocínios dos sujeitos durante a sua execução. Quando o sujeito é capaz de saltar fora de um sistema e de utilizar um outro, podemos observar um processo de raciocínio diferente. Estas mudanças no raciocínio não podem ser entendidas sem atribuir um papel orientador e limitador aos sistemas de signos usados na mediação dos raciocínios.

Aritmética do ábaco

Hatano (1995) fez recentemente uma revisão de literatura sobre a aritmética do ábaco e descreveu as características da sua utilização pelos grandes mestres. Os grandes mestres parecem desenvolver uma representação mental e espacial do ábaco, que funciona como um "ábaco mental". A investigação indica que esta representação interna é espacial (e, como tal, preserva as características do sistema de signos externos) por diferentes razões. Primeiro, os grandes mestres conseguem efectuar cálculos enquanto respondem a questões simples, uma descoberta que indica que a interferência verbal não é significativa. Contudo, se lhes pedirmos para olharem para um quadro, o seu desempenho sofre uma quebra, um resultado que indica que a interferência espacial é significativa. Outra indicação de que o ábaco interno preserva as características espaciais do sistema externo é que os grandes mestres conseguem recordar números com 15/16 dígitos e dizer os dígitos, na ordem directa e inversa, com a mesma facilidade, uma tarefa que não consegue ser feita facilmente quando utilizamos códigos verbais para recordar os dígitos. Finalmente, apesar de apresentarem uma memória tão maravilhosa para dígitos, que podem ser registados no seu ábaco mental e, como tal, apoiar-se no sistema de signos, a sua memória para outras listas como nomes de flores não é melhor que a de outra pessoa.

As características da operatividade com o ábaco são, num certo sentido, similares às da aritmética escrita: as operações são efectuadas com dígitos e usam uma representação espacial, como suporte. Tal como a aritmética escrita, o controle dos valores durante o cálculo não faz parte da prática cultural. É mais rápido calcular duas vezes para ver se se obtém o mesmo resultado, do que incluir o controlo dos valores durante o cálculo. Obviamente, os grandes mestres não cometem erros quando fazem cálculos, como acontece com as crianças pequenas brasileiras, quando utilizam a aritmética escrita. Contudo, a sua falta de verificação dos cálculos quando usam o ábaco pode ser observada de duas maneiras. Primeiro, se dermos a mesma lista de números para adicionar duas vezes, com uma linha com uma leve modificação (como mover o primeiro número para a última posição da lista), eles não reconhecem que acabaram de adicionar os números. Segundo, eles não simplificam o cálculo usando factos relacionados. Por exemplo, se lhes pedirmos para multiplicar um número por 99, eles não o multiplicam por 100 e, depois, subtraem o número. Esta última técnica é utilizada quando a consideração do valor faz parte do processo de cálculo.

Portanto, a aritmética do ábaco, mesmo se efectuada num ábaco mental, conserva os aspectos espaciais do ábaco mais as forças e as fraquezas desta prática cultural.

Tomadas em conjunto, a análise destas diferentes formas de aritmética indica que os sistemas de signos utilizados durante o cálculo, quer representados externamente (dedos, dígitos escritos, produções orais) ou internalizados (ábaco mental) parecem tornar-se objectos sobre os quais operamos. Enquanto interagimos com estes objectos, o nosso processo de raciocínio é um produto desta interacção; os sistemas de signos orientam e limitam o que conseguimos atingir com eles**.**

O papel estruturante dos signos na formação de conceitos

Quando pensamos em situações problemáticas, necessariamente usamos sistemas de signos que mediatizam as nossas interacções. Quando um sistema de signos é utilizado como mediador numa situação de aprendizagem, influencia a nossa interacção na situação e o tipo de conceito que surgirá dessas interacções. Isto pode ser visto quando a utilização de diferentes sistemas, numa mesma situação, pode levar a diferentes esquemas conceptuais. Gostaria de salientar, aqui, duas linhas de investigação: uma série de estudos sobre o conceito de área (Nunes, Light e Mason, 1993; Nunes, Light, Mason e Allerton, 1994) e alguns dos trabalhos efectuados no contexto de aprendizagem matemática em ambiente com computadores (Noss, 1985).

Maneiras alternativas de representar o conceito de área

Há (pelo menos) duas maneiras pelas quais se pode calcular a área de uma figura plana. A primeira, é a mais habitual na nossa sociedade e é formalmente ensinada na escola. Envolve medir o comprimento e a largura da figura e utilizar estas medidas numa fórmula que dá a área. A área do rectângulo, por exemplo, é comprimento vezes largura. Esta maneira de calcular a área corresponde ao esquema de *produto de medida* (ver Vergnaud, 1983). Neste tipo de concepção de área, duas medidas elementares, comprimento e largura, obtidos, por exemplo, em centímetros, são multiplicadas para originar uma terceira e nova medida, a área, em centímetros quadrados. O segundo esquema de cálculo de área envolve começar por unidades de área — por exemplo, centímetros quadrados. Se estas unidades de área forem arrumadas em linhas e colunas, sobre a figura, a área é calculada pela multiplicação do número de unidades numa linha vezes o número de linhas. Esta aproximação é equivalente ao esquema da multiplicação designado por *isomorfismo das medidas* (ver Vergnaud, 1983). Nesta concepção de área existe uma correspondência um-para-muitos entre o número de linhas e o número de unidades de área em cada linha. As duas concepções diferem de um modo muito básico: a concepção do produto de medidas envolve três variáveis, enquanto isomorfismo de medidas envolve apenas duas.

Esta análise fez-nos levantar a hipótese de que as crianças desenvolveriam diferentes esquemas de área consoante lhes fossem proporcionadas experiências de aprendizagem em que usassem unidades lineares ou de área. Numa série de estudos sobre a área (Nunes, Light e Mason, 1993; Nunes, Light, Mason e Allerton, 1994) investigámos se as crianças explicariam como obtinham a área de figuras, tais como rectângulos e paralelogramos, de modo diferente e em correspondência com o tipo de instrumento[4] de medida que lhes era dado. Os instrumentos de medida eram, neste caso, sistemas de signos que mediariam as suas tentativas para quantificar a área.

Pedimos a pares de crianças inglesas, dos 8 aos 10 anos, para resolverem alguns problemas de áreas. Os pares de alunos foram distribuídos aleatoriamente por uma de duas condições. Na primeira condição, foram-lhes dadas réguas como instrumentos de medida. Na segunda condição, foram-lhes dados tijolos de 1 cm2, mas não lhes demos tijolos suficientes para cobrir completamente as figuras, para que a solução de simplesmente cobrir a figura e contar o número de tijolos não fosse possível.

As crianças foram confrontadas com duas figuras cuja área não podia ser visualmente comparada com certeza — por exemplo, dois rectângulos em que um era mais comprido, enquanto o segundo era mais largo. Foi dito às crianças que as duas figuras eram o desenho de duas paredes que tinham sido pintadas por dois amigos, tendo cada um deles pintado uma parede. Depois, os amigos tinham recebido o pagamento dessa pintura em conjunto. Antes de dividir o dinheiro, queriam saber se tinham feito a mesma quantidade de trabalho e precisavam de comparar a superfície das duas paredes. Portanto, não havia dúvida de que a superfície coberta era o assunto a comparar. Os alunos recebiam feed-back nas sucessivas tentativas ao observarem o experimentador cobrir cada figura com papel colorido previamente cortado, que podia ser rearranjado de modo a cobrir perfeitamente as duas figuras, quando tinham a mesma área, mas que apenas cobria exactamente uma delas, quando as áreas eram diferentes. Este procedimento foi percebido como um bom teste de igualdade, por parte de todas as crianças.

Apesar de todas as crianças terem sido ensinadas sobre áreas na escola, havia bons motivos para esperarmos que teriam de desenvolver a sua compreensão de área durante os nossos estudos, pois já tinha sido documentado (ver Dickson, 1989, por exemplo), que as crianças inglesas deste nível etário não dominavam a área do rectângulo, apesar desta lhes ter sido ensinada. As crianças do nosso estudo tinham sido ensinadas, inicialmente, a cobrir as figuras com unidades de área e a contá-las. Depois desta prática, tiveram uma lição de formalização, em que lhes foi ensinada a fórmula do comprimento vezes a largura. Esperávamos que as crianças que tivessem assimilado a fórmula não tivessem dificuldade com os problemas iniciais do nosso estudo, que envolviam a comparação de rectângulos, mas que ainda tivessem de ajustar os seus procedimentos quando lidassem com figuras em forma de U, que podiam ser decompostas em rectângulos e, também, quando comparassem um rectângulo com um paralelogramo.

O desempenho dos alunos, nestes problemas, diferiu em função do sistema de signos que tinham disponível na situação experimental, réguas ou unidades de área. As diferenças foram observadas quer quanto ao número de respostas correctas, quer quanto ao tipo de concepção utilizada na resolução do problema. As crianças que tinham à sua disposição unidades de área tiveram um desempenho significativamente superior ao das que tinham réguas.

Os alunos que tinham a régua como instrumento de medida costumavam, mais frequentemente, adicionar as medidas do que multiplicá-las. Eles calculavam ora o perímetro, ora o semi-perímetro. Alguns dos alunos continuavam, depois, tomando uma decisão sobre o tamanho relativo dos números, com base nesta informação. Alguns alunos não consideravam uma informação adequada, mas não sabiam o que fazer em seguida; eles sentiam que não podiam decidir se as duas crianças tinham ou não feito a mesma quantidade de trabalho. As respostas destes sujeitos parecem indicar que eles consideravam que medidas lineares eram apropriadas para avaliações lineares. As aprendizagens anteriores não os ajudaram muito porque o instrumento de medida não tinha sido apropriado para mediar as suas interacções com os objectos, do seu ponto de vista. Um terceiro grupo de crianças utilizou uma estratégia de resolução de problemas que parece bastante significativa. Tentaram utilizar a régua como uma unidade de área, colocando-a contra uma das arestas da figura e movendo-o para o lado oposto, enquanto contavam quantas réguas cabiam na figura. A régua não era vista como um instrumento de medida convencional e linear, era tratada como uma unidade de área não convencional. A análise dos desempenhos destas crianças mostra que as suas dificuldades quanto ao conceito de área estavam relacionadas com o sistema de signos que tinham para mediatizar as suas interacções. Um sistema que origina medidas lineares não parecia um bom meio para os seus fins. Mesmo as crianças que conseguiam resolver com sucesso o problema da comparação dos rectângulos usando o comprimento vezes a altura, tinham dificuldade em comparar um rectângulo com um paralelogramo. Eles não se apercebiam de que a altura e o lado do paralelogramo não eram o mesmo. Usavam uma concepção “lado vezes lado” que, quando aplicada ao paralelogramo, produzia uma solução incorrecta.

Os alunos que tinham unidades de área como instrumento de medida frequentemente descobriam uma fórmula para resolverem o problema, número de tijolos numa linha vezes o número de linhas, e usavam-na com sucesso para ultrapassar o facto de faltarem tijolos. Esta fórmula era mais facilmente modificada para resolver o problema da área do paralelogramo do que a fórmula do comprimento vezes a altura que lhes tinha sido ensinada. A altura do paralelogramo e o número de linhas são a mesma medida. O relativo sucesso destes alunos, por comparação com os que usavam réguas, não pode ser explicada por uma melhor compreensão da área, uma vez que eles tinham sido distribuídos aleatoriamente pelos seus grupos. Fomos levados a concluir que o seu sucesso era possível porque o instrumento de medida que mediava as suas interacções na situação problemática tinha um efeito nestas interacções, que tinha como resultado uma concepção operacional diferente de área.

Resumindo, o esquema de área das crianças, nesta série de problemas, era nitidamente influenciado pelo instrumento de medida que lhes tinha sido fornecido. As crianças que tinham recebido unidades de área inventaram a fórmula "número de unidades numa linha vezes o número de linhas". As crianças a quem tinham sido dadas réguas podem ter utilizado uma fórmula previamente aprendida ou desenvolvida, "lado vezes lado", para calcularem a área dos paralelogramos. Cada sistema de signos parecia chamar a atenção para aspectos particulares do circuito, e deve sublinhar-se que o papel estruturante do sistema de signos na formação de conceitos não pode ser visto de uma forma determinista. Os sujeitos têm as suas próprias ideias sobre o que se pretende atingir naquela situação e podem usar um instrumento de uma maneira inesperada, quando o sistema mediador em si é considerado. Nestas experiências, as crianças que se queriam basear em unidades de área usaram a régua como uma unidade de área e não como um instrumento para obter medidas lineares. Como tal, o sistema de signos desempenha um papel estruturante nas interacções do sujeito enquanto mediador do raciocínio, mas não determina o resultado da aprendizagem sem que levemos em conta o próprio papel do sujeito naquela situação.

Conceitos desenvolvidos em ambientes com computadores

O próximo exemplo do papel estruturante dos signos no desenvolvimento de conceitos relaciona-se com a aprendizagem matemática de crianças em ambientes com computadores. Apresentarei, aqui, apenas um exemplo (para mais exemplos ver Noss, 1995).

Para poderem trabalhar em ambientes com computadores, as crianças necessitam de aprender sistemas de signos que, segundo creio, estruturam o tipo de compreensão que desenvolvem naquela situação. Este papel estruturante pode ser visto de duas maneiras, por exemplo, no contexto do desenho de figuras com o LOGO. Primeiro, as actividades de desenhar figuras com papel e lápis, e no LOGO, são muito diferentes. Quando desenhamos com papel e lápis, certas características da figura necessitam tornar-se salientes para que a figura "pareça certa" no final. Por exemplo, quando desenhamos um paralelogramo com a régua, papel e lápis, necessitamos usar procedimentos que assegurem que os lados opostos são paralelos e do mesmo comprimento. Pequena ou nenhuma atenção é dada aos ângulos (especialmente na situação mais habitual, em que desenhamos usando uma régua mas não um transferidor). A igualdade dos ângulos opostos é um resultado do procedimento que pode não ter sido intencional e de que o sujeito pode não se ter apercebido. Pelo contrário, quando desenhamos um paralelogramo com o LOGO, o facto de os lados opostos serem paralelos é um produto do procedimento, que pode ter recebido pouca atenção. O procedimento especifica o valor dos ângulos e o comprimento dos lados, mas não a relação entre os lados. Como tal, estas duas actividades sublinham aspectos diferentes da mesma figura e é provável que resultem em visões diferentes do que é um paralelogramo.

Segundo, desenhar uma figura com o LOGO pode ser feito através de procedimentos gerais, que deixam valores particulares sem especificação, apesar de ser necessário entrar com uma variável no procedimento, indicando que alguns valores serão especificados mais tarde. Por exemplo, a medida de um ângulo ou de um lado de uma figura podem não ser identificadas mas um nome, como ÂNGULO1 ou LADO1, serão introduzidos no procedimento. Este modo de desenhar figuras é provável que tenha dois efeitos: 1) — pode permitir aos alunos vir a ver como similares ou pertencendo à mesma família figuras que eram previamente tidas como muito diferentes, se as figuras podem ser produzidas pelo mesmo procedimento, introduzindo diferentes valores para ÂNGULO1 ou LADO1; 2) — parece permitir experiência directa com um conceito de variável, uma vez que às variáveis é dado um nome no procedimento e os valores são preenchidos mais tarde.

Noss (1995) descreve um estudo no qual crianças de 11 anos estavam envolvidas em actividades com LOGO para descobrirem um procedimento geral para desenhar paralelogramos. De acordo com este autor, um número de alunos começara com a noção de que um paralelogramo é "um rectângulo com os lados inclinados". Segundo Noss, esta noção impede um rectângulo de ser um paralelogramo. Contudo, no decurso do desenho de figuras com LOGO, estas crianças de 11 anos foram levados a desenvolver procedimentos gerais para desenhar paralelogramos, tais como o que a seguir se indica:

```
Para a Forma :Lado1 :Lado2 :Ângulo
Repetir 2 [ FD :Lado1 RT :Ângulo FD :Lado 2
```

RT 180 — :Ângulo]
FIM

Quando se pensa num paralelogramo nos termos desta formulação, dentro de um sistema de signos como o LOGO, onde as figuras são representadas pelos procedimentos usados para as desenhar, alguns alunos conseguiam aperceber-se que um rectângulo é, na verdade, um caso especial dos paralelogramos, em que ÂNGULO = 90. Segundo Noss, isto é o que, de facto, foi observado; alguns alunos (embora não todos) conseguiram ver os paralelogramos como incluindo o caso especial do rectângulo.

Outro resultado observado por Noss (1985) foi de que os alunos trabalhando no ambiente LOGO desenvolviam a sua compreensão de "variável" e mostravam ganhos positivos numa avaliação independente levada a cabo fora do computador. Um exemplo do tipo de item incluído neste teste envolve dar a fórmula para o perímetro de uma figura irregular com muitos lados, todos com o mesmo comprimento. Contudo, o número exacto de lados da figura não podia ser visto porque um borrão de tinta cobria parcialmente a figura. A solução esperada é utilizar uma letra para representar o número de lados, indicando que, seja qual for o número de lados, este é o valor que se considera na fórmula. Esta solução foi observada, nos sujeitos de Noss, com maior frequência, no pós-teste, quando já tinham trabalhado com o LOGO, do que no pré-teste, antes do trabalho com o LOGO. Além disso, a notação usada pelos aprendizes do LOGO quando resolviam o problema no pós-teste reflectia o sistema de signos que eles tinham utilizado no ambiente LOGO, mais do que a notação literal tradicional para variáveis usada na álgebra (por exemplo, podia ter utilizado a palavra LADO para indicar o número de lados, em vez de letra n).

Resumindo, os sistemas de signos fornecem aos utilizadores a oportunidade de aproximação dos problemas de um modo particular, que se relaciona com como as situações podem ser representadas. Porque os signos mediatizam o pensamento dos sujeitos e, frequentemente, também as suas acções, numa situação de aprendizagem, tornam-se parte dos elementos que estruturam as interacções dos sujeitos e o conceito emergente. Diferentes sistemas de signos podem realçar diferentes aspectos de um conceito e a coordenação destes diferentes aspectos não é um assunto simples e directo.

Conclusões

A influência do sistema de signos no desenvolvimento da mente não é um novo tópico. Whorf (1956), por exemplo, sugeriu que o pensamento estava tão influenciado pela linguagem que éramos levados a ver o mundo de maneiras que eram determinadas pela nossa linguagem. Esta hipótese foi simplificada em situação de teste quando as pessoas viam a cor diferenciada em função do vocabulário das cores na sua língua. E esta hipótese particular resultou falsa (Berlin e Kay, 1969). Pessoas que só usavam dois termos para as cores ainda vêem muitas cores diferentes e demonstram a variedade de cores que eles percebem quando lhes pedimos para fazer discriminação de cores.

Vygotsky (1978) e Luria (1973) também sublinharam a influência do sistema de signos no nosso pensamento. Uma das suas hipóteses era de que os sistemas de signos eram instrumentos mentais que permitiam aos seres humanos ultrapassar os seus limites naturais de percepção e memória, por exemplo. Sublinharam, contudo, que ao contrário dos instrumentos de trabalho manual, que não mudam radicalmente a anatomia da nossa mão, signos como ferramentas mentais modificavam a mente do seu utilizador. A partir deste facto, esperavam que as pessoas letradas e iletradas diferissem radicalmente na sua capacidade para pensar logicamente e para usar a linguagem para estruturar o seu raciocínio. Mas quando Scribner e Cole (1981) sujeitaram esta hipótese a um teste empírico, verificou-se que ela estava errada. Letrados e iletrados não pareciam separados por uma grande divisão nas suas capacidades. A instrução não parecia alterar radicalmente a mente das pessoas.

A falta de sucesso destas primeiras análises sobre o impacto dos signos no pensamento parecem-me resultar do facto de esperar demasiado de um só sistema de signos. A linguagem natural e a instrução embora potentes, não fazem todo o trabalho da mente. Ainda precisamos de outros sistemas, até para a vida quotidiana. A capacidade de utilização de múltiplos sistemas é provável que seja um factor importante para ultrapassar a rigidez da mente que é, num certo sentido, parte quer da visão de Whorf sobre a linguagem e da de Vygotsky e Luria sobre a instrução. Se só tivéssemos um sistema de signos, dificilmente poderíamos dizer a natureza do sistema através da natureza da mente e da natureza do objecto. Uma nova maneira de olhar para os sistemas de signos é observarmos a variedade de signos, e assumirmos que os signos influenciam os processos de raciocínio quando são parte das interacções dos sujeitos, numa dada situação, mas não quando não estão a ser utilizados. Podemos, então, levantar questões como: O que conseguem atingir, as mesmas pessoas, com diferentes sistemas de signos? Que oportunidades é que a utilização de diferentes instrumentos mentais fornece ao aprendiz durante a aprendizagem? O que é que o instrumento permite e limita? E quando é uma boa altura para mudar para outro instrumento?

Resumindo, existe muita evidência que sugere que os sistemas de signos jogam um papel fundamental no desenvolvimento e utilização de conceitos. Actuam como mediadores, ou objectos mentais, com que raciocinamos. Contudo, não há necessidade de os tornar o hardware do pensamento. Podem ser utilizados e dispensados em diferentes circunstâncias e com objectivos diversos. Esta flexibilidade na relação entre pensamento e a utilização de diferentes sistemas de signos é provável que desempenhe um papel importante no desenvolvimento de conceitos matemáticos porque diferentes sistemas realçam diferentes aspectos de um mesmo conceito.

Notas

[1]Artigo solicitado na sequência da Escola de Verão sobre *Cognição e Cultura* da Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Vila Viçosa, 1994 e inicialmente apresentado na *Conference on Conceptual Change*, Jena, 1994.

[2]*finger numbers* (NT).

[3]*off-loaded* (NT).

[4]Optámos pela tradução de instrumentos de medida, quando no texto se fala de *mental tools* e por traduzir *tools* por ferramenta quando esta palavra se refere à teoria de Vygotsky (NT).

Referências

Berlin, B. e Kay, P. (1969). *Basic color terms: Their universality and evolution*. Berkeley: University of California Press.

Dickson, L. (1989). Area of a rectangle. Em D. C. Johnson (Ed.), *Children's mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching*. Windsor, Reino Unido: NFER Nelson.

Gelman, R. e Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Hatano, G. (1995, em impressão). Learning arithmetic with an abacus. Em T. Nunes e P. Bryant (Eds.), *How do children learn mathematics?* Palmer, Reino Unido: Lawrence Erlbaum.

Lancy, D. F. (1983). *Cross-cultural studies in cognition and mathematics*. Nova Iorque: Academic Press.

Luria, A. R. (1973). *The working brain: An introduction to neuropsychology*. Nova Iorque: Basic Books.

Luria, A. R. (1979). *Curso de Psicologia Geral*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Morton, F. e Newman, D. (1990). Constructivism, phenomenology, and the origin of arithmetic skills. Em L. P. Steffe e T. Wood (Eds.), *Transforming young children's mathematics education. International perspectives* (pp. 62-75). Hillsdale, Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.

Moreno, C. (1994). *Young children with hearing difficulties learning mathematics*. Tese de Mestrado em preparação, Institute of Education, Universidade de Londres.

Noss, R. (1985). *Creating mathematical environment through programming: A study of young children learning LOGO*. Tese de Doutoramento não publicada, University of London.

Noss, R. (1995, em impressão). Meaning mathematically with computers. Em T. Nunes e P. Bryant (Eds.), *How do children learn mathematics?* Palmer, Reino Unido: Lawrence Erlbaum.

Nunes, T. (1992). Cognitive invariants and cultural variation in mathematical concepts. *International Journal of Behavioral Development, 15,* 433-453.

Nunes, T. (1993). Learning mathematics: Perspectives from everyday life. Em R. B. Davis e C. A. Maher (Eds.), *Schools, mathematics, and the world of reality* (pp. 61-78). Needham Heights, Massachusetts: Allyn and Bacon.

Nunes, T. (1994, em impressão). Cultural practices and the conception of individual differences. Theoretical and empirical contradictions. *New Directions for Child Development*.

Nunes, T., Light, P. e Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and Instruction, 3,* 39-54.

Nunes, T., Light, P., Mason, J. e Allerton, M. (1994). The role of symbols in structuring reasoning: Studies about the concept of area. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. III), (pp. 255-262). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Nunes, T., Schliemann, A. D. e Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Nova Iorque: Cambridge University Press.

Scribner, S. e Cole, M. (1981). *The psycology of literacy*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Em R. Lesh e M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 128-175). Londres: Academic Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Whorf, B. L. (1956). *Language, thought and reality*. Boston: MIT Press.

Terezinha Nunes, Department of Child Development and Primary Education, Institute of Education, 20 Bedford Way, LONDON WC1H 0AL, INGLATERRA. Endereço electrónico: temstnu@ioe.ac.uk.

Tradução elaborada por Margarida César.