La noción de función como objeto a enseñar y como objeto enseñado: Análisis de un proceso de transposición didáctica

L. Ruiz Higueras y J. L. Rodríguez Fernández
Universidad de Jaén

J. D. Godino
Universidad de Granada

Introducción

La noción de función es una de las más importantes en matemáticas, por lo que su aprendizaje es un tema obligado en los distintos niveles de la enseñanza. Por este motivo, en los últimos años ha sido objeto de muchas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, como se muestra, por ejemplo, en el trabajo de compilación de Leinhardt y cols. (1990) y en la monografía de Harel y Dubinsky (1992). Las cuestiones estudiadas en estos trabajos cubren diversos aspectos de la problemática planteada por los procesos de enseñanza y el aprendizaje de la noción de función.

Un aspecto que apenas ha sido tratado en esas investigaciones es el estudio de los cambios que el propio objeto matemático sufre en el proceso de adaptación para convertirlo en objeto de enseñanza, al que Chevallard (1991) ha denominado transposición didáctica. Esta noción teórica permite identificar fenómenos que se refieren al contenido de la enseñanza, al funcionamiento intrínseco de los sistemas didácticos y al propio sistema de enseñanza en su conjunto, fenómenos que condicionan el aprendizaje de los alumnos. La existencia de estas transformaciones es un hecho conocido aunque aún poco estudiado: en el sistema de enseñanza estos procesos a veces se ocultan y en muchas ocasiones la distancia entre el saber a enseñar y el saber científico tiende a pasar desapercibida.

Los procesos de transposición didáctica originan relaciones institucionales específicas que condicionan las concepciones de los estudiantes. Parte de los sesgos obstáculos y limitaciones de los aprendizajes logrados por los alumnos pueden explicarse por la índole de los significados institucionales realmente presentados en las clases. La caracterización de estos significados institucionales y de sus procesos de formación, es pues, un aspecto esencial para la Didáctica de la Matemática.

El objetivo fundamental que ha perseguido nuestro trabajo es mostrar los efectos de la transposición didáctica sobre la noción de función en enseñanza secundaria Hemos tratado de poner en evidencia el fenómeno de ilusión de transparencia[1] de "saber enseñado". Se han identificado los disfuncionamientos a que se ven sometidos los saberes escolares, mostrando que el sistema de enseñanza crea una *epistemología artificial* que puede conducir, en algunas ocasiones, a una *ruptura epistemológica* con el saber científico y a un distanciamiento entre el saber designado como "saber a enseñar" y el "saber enseñado".

Utilizando el marco teórico de la transposición didáctica hemos analizado, en primer lugar, el tratamiento que dan a la noción de función los programas oficiales de enseñanza secundaria actualmente en vigor en España y, en segundo lugar, el modo en que es tratada dicha noción en las clases de matemáticas de secundaria utilizando como indicador una muestra de los apuntes tomados en clase por los alumnos. Ello nos ha permitido estudiar la progresión oficialmente establecida para los saberes a enseñar en estos programas y la estructuración que de ella hacen los profesores en sus clases.

La metodología que se ha utilizado en este estudio ha sido de tipo descriptivo e interpretativo (Goetz y Lecompte, 1988). Hemos basado nuestro trabajo en el estudio cualitativo de documentos que nos ha permitido obtener información sobre el funcionamiento del sistema didáctico y del sistema de enseñanza.

Este trabajo es una parte de la tesis doctoral de Ruiz Higueras (1993) que comprende también el estudio de la evolución histórica de la noción de función desde un punto de vista epistemológico, el análisis del proceso de transposición didáctica que realizan los manuales escolares de la noción de función y la determinación de las concepciones de una muestra de 323 estudiantes de secundaria sobre dicho concepto

El proceso de transposición didáctica: su influencia en el funcionamiento del sistema didáctico

Desde hace relativamente pocos años y bajo el impulso de numerosos investigadores tales como Artigue, Brousseau, Chevallard, Douady, Vergnaud, etc. se ha constituido en el seno de las universidades francesas un grupo de investigación que se esfuerza en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de investigación específicos en Didáctica de la Matemática. Como característica de esta línea — llamada por sus autores *fundamental* — puede citarse el interés por establecer un marco teórico con sus propios conceptos y métodos, así como una concepción global de la enseñanza, estrechamente ligada a la matemática y a teorías específicas del aprendizaje. Los modelos desarrollados contemplan dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas y tratan de dar cuenta de la complejidad de las interacciones entre el saber matemático, los alumnos y el profesor, dentro del contexto particular de la clase.

Una característica relevante de este marco teórico, aunque no sea original ni exclusiva, es su consideración de los fenómenos de enseñanza— aprendizaje según un enfoque sistémico. Desde esta perspectiva, el funcionamiento global de un sistema didáctico (saber, profesor, alumno) no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes. La Didáctica de las Matemáticas se considera, de este modo, según indica Brousseau (1986), como el estudio de la evolución de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto. El estudio de las situaciones de enseñanza y de la gestión que de ellas hace el profesor se considera fundamental ya que son las que permiten dar sentido a los conocimientos construidos por los alumnos:

> La negociación por los maestros de la enseñanza de la comprensión y del sentido supone un verdadero problema didáctico: problema técnico y problema teórico de contrato didáctico (Brousseau, 1987, p. 49).

El esquema de la figura 1, debido a Arsac y cols. (1989), representa los principales componentes y relaciones cuyo estudio conjunto es el objeto principal de la Didáctica de la Matemática.

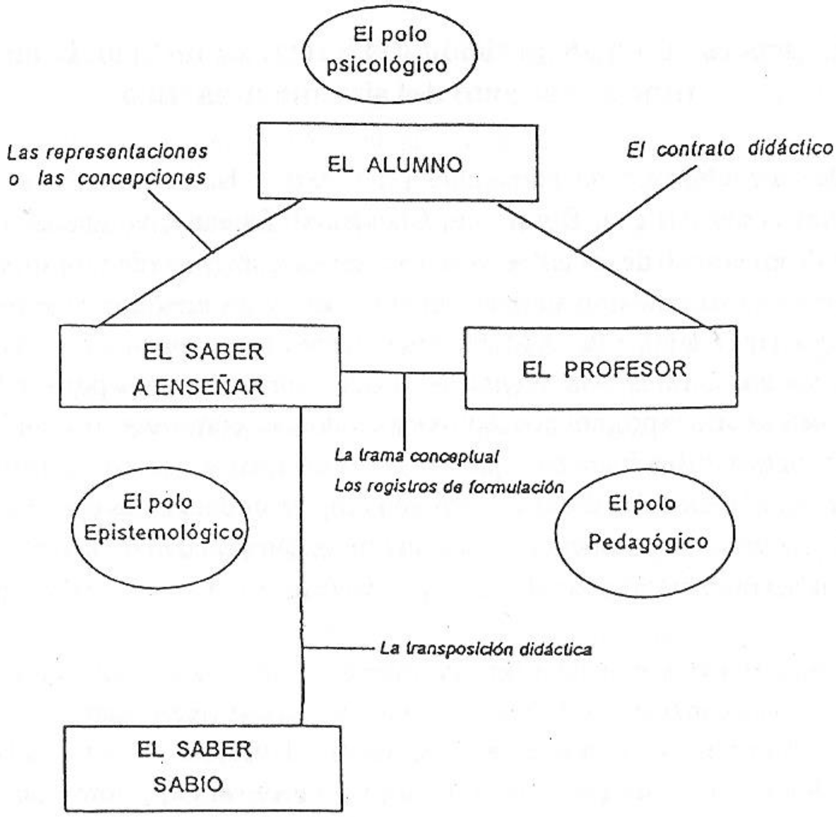


Figura 1. Componentes de los sistemas didácticos.

Como se muestra en el esquema anterior el proceso de transposición didáctica se encuentra insertado en el polo epistemológico. El profesor en su clase debe enseñar una parte del *saber científico* del cual los matemáticos profesionales son sus depositarios y productores. Es normalmente la sociedad quien solicita que una determinada parte de este saber se lleve a la enseñanza porque supone que será de utilidad social. Este saber, necesariamente, mantiene relaciones culturales y sociales con el exterior de la clase, que condicionan el contenido a enseñar y la forma de presentación. La selección del contenido a enseñar depende de muchos factores relacionados entre sí: concepciones epistemológicas dominantes entre los matemáticos y entre los profesores, objetivos fijados en la enseñanza, relaciones culturales establecidas por la sociedad con las matemáticas, etc. El saber sufrirá por lo tanto un tratamiento especial que no se puede considerar ingenuamente como una *simplificación* del saber científico, sino que se trata de un saber que posee una historia y una epistemología particulares. El *objeto a enseñar*, tal como se presenta en una clase, es así el producto de un proceso de transposición.

Otra relación fundamental dentro del sistema didáctico viene determinada por el *contrato didáctico* considerado como regulador del funcionamiento del sistema: el alumno entra en relación con un saber, no de forma privada, sino por medio de sus relaciones con otros alumnos y sobre todo con el profesor. El concepto de contrato didáctico ha sido explicitado por Brousseau (1986):

> es un conjunto de reglas, generalmente implícitas que organizan las relaciones entre el saber enseñado, los alumnos y el profesor (p. 298).

Entre el profesor y los alumnos se establece una relación que determina — explícitamente en parte, pero sobre todo implícitamente — lo que cada protagonista — profesor y alumno — tiene la responsabilidad de desarrollar y administrar en clase, así como las obligaciones recíprocas entre ellos. "Es la regla de juego y la estrategia de la situación didáctica "(p. 298), ya que fija el lugar y las funciones de cada parte.

Los sistemas didácticos están incluidos, a su vez, en un macrosistema: el sistema de enseñanza. En él influye lo que Chevallard (1991, p. 24) llama la *noosfera* que comprende a todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza, incidiendo, por tanto, de una manera directa o indirecta sobre ella (matemáticos, formadores de profesores, escritores de textos y materiales curriculares, investigadores, asociaciones de profesores, padres de alumnos, diseñadores del currículo, políticos, directores y administradores de centros de enseñanza,...). Es en la *noosfera*, donde se desarrollan los problemas que nacen del encuentro con la sociedad y sus exigencias, donde se defienden y discuten doctrinas, se conducen las negociaciones y se buscan las soluciones. Existe, así, en su interior una constante producción y debate de ideas — sobre lo que podría cambiarse y sobre lo que sería necesario hacer.

En la *noosfera* se seleccionan los elementos del saber científico que, designados por ella como "saber a enseñar", se someterán al proceso de transposición. Asumirá, por tanto, la parte visible de este proceso, denominado trabajo externo de transposición didáctica, en oposición al trabajo interno que se desarrollará en el interior del sistema de enseñanza después de la introducción oficial de nuevos elementos del saber. El proceso de transposición didáctica se puede, así, representar por el siguiente esquema:

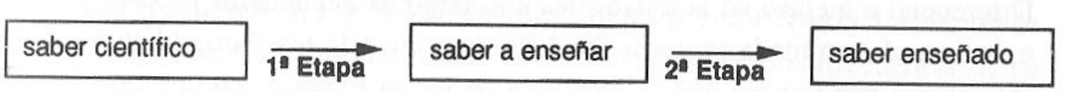


Figura 2. Etapas de la transposición didáctica.

La determinación de los objetos del saber a enseñar pasa necesariamente por la mediación de los programas y cuestionarios oficialmente establecidos. La organización y secuenciación de los saberes, la división en cursos, son procesos que necesariamente han de transformar los saberes matemáticos. Todas estas transformaciones constituyen la primera etapa del proceso de transposición. El profesor no interviene como tal más que en la segunda etapa.

La designación de los objetos a enseñar: la noción de función en los programas oficiales

Por medio de los programas oficiales se designan aquellos objetos matemáticos que deben considerarse como "objetos a enseñar". En ellos se determina la progresión legal y pública de los conocimientos, procurando, además, que sea "lógica", es decir, que esté vigilada desde el punto de vista epistemológico. Los cambios sufridos en los programas se suelen ver como meros cambios superficiales, sin embargo provocan transformaciones muy profundas que, en numerosas ocasiones, permanecen opacas tanto en los manuales escolares como en el discurso del profesor en el aula.

Los Programas de Enseñanza Secundaria (1º, 2º, 3º de BUP) y COU[2] (alumnos de 14 a 18 años) que actualmente están en vigor en España son los establecidos en 1975 (BOE, 18/IV/75) y en 1978 (BOE, 17/III/78). De la revisión de los Programas anteriores podemos deducir que el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) inicialmente desglosa los contenidos en grandes bloques (Álgebra, Geometría, Funciones Reales y Cálculo de Probabilidades y Estadística) con lo cual satisface la exigencia de "autonomización y delimitación del saber "(Chevallard, 1991, p. 59). Posteriormente, determina de forma explícita un listado de temas y propone unas orientaciones expresadas a modo de objetivos a conseguir; con esto garantiza la exigencia de "programabilidad de la adquisición del saber" (Chevallard, 1991, p. 58), es decir, hace una presentación que intenta conservar una lógica interna y lineal. La noción de función, que se supone ha quedado adquirida en el primer curso, se incluye en los restantes cursos ampliándola con el estudio de las funciones de variable real y utilizándola como herramienta básica en el álgebra, el Cálculo Diferencial e incluso en la Estadística a lo largo de Secundaria y COU. También existe una determinada organización del tiempo legal de enseñanza (distribución de los saberes por cursos) que se identifica de forma implícita con tiempo *legal* de aprendizaje, aspecto descrito por Chevallard:

La progresión de los saberes se estructura según un eje temporal, según un tiempo progresivo, acumulativo, irreversible, identificando el tiempo de enseñanza y el tiempo de aprendizaje: la ficción de un tiempo didáctico único se convierte en realidad (1991, p. 71).

En 1º de BUP se introducen sólo las funciones polinómicas de primer y segundo grado. En 2º de BUP es donde se desarrolla un mayor número de contenidos: funciones de variable real, límites, derivadas, continuidad, función logarítmica, exponencial, funciones circulares, etc. En 3º de BUP se amplía el cálculo de derivadas a las funciones trascendentes, realizan el estudio local de funciones, iniciando su representación gráfica con la ayuda del cálculo diferencial (sólo polinómicas de grado mayor que dos y racionales homográficas).

En los programas de COU se amplían los contenidos de cálculo diferencial e integral. Se introducen los conceptos de aproximación local de una función mediante polinomios, aplicándolos a funciones elementales. Se insiste en la representación de curvas dadas en forma explícita, utilizando todos los medios suministrados por el cálculo diferencial: límites, derivadas, continuidad, máximos y mínimos, etc. Se propone además que los alumnos lleguen al concepto de área de un recinto plano y trabajen con el cálculo de áreas y volúmenes sencillos, como aplicación del cálculo integral.

La concepción de la noción de función que inducen estos programas está basada en la de *aplicación entre conjuntos numéricos* —Adquirirán el concepto de función, distinguiendo dominio (conjunto original) y rango (conjunto imagen. El desarrollo de la matemática en el último tercio del siglo XIX y principios del XX ha tenido una influencia decisiva en los saberes matemáticos escolares desde los años 70, provocando una auténtica *catástrofe ecológica*[3] en la organización establecida hasta entonces. Toda la matemática ha empezado a girar en torno al objeto función como elemento unificador y generalizador, llevando a cabo una modelización uniforme de saberes que ocupaban lugares muy diversos (proporcionalidad, polinomios, ecuaciones, sucesiones, función derivada, función primitiva, función de distribución, transformaciones geométricas, etc.). Como consecuencia se ha transformado en todos los programas la organización de los contenidos y, por tanto, la progresión que ellos determinan en el aprendizaje de los alumnos.

Este modo de organización de los contenidos tuvo su origen, en España, en los Programas aparecidos en 1967 (B.O. del MEC, nº 80, p. 2429 - 2431). La noción de función, como objeto a enseñar, tomó un nuevo status como consecuencia de su consideración como aplicación entre conjuntos, sometiéndose a un proceso de renovación, fruto del "matematismo" (Chevallard, 1980, p. 9) imperante en estos años. Se benefició de valores heredados de su consideración epistemológica como objeto matemático, tales como complejidad, nobleza, generalidad, que le condujeron a ocupar un puesto muy importante en la escala de los *saberes a enseñar*.

Los saberes matemáticos escolares, en general, adquirieron una fuerte legitimidad epistemológica[4], con lo cual se elevó su status, se ennoblecieron tanto interna (dentro de la propia Matemática escolar) como externamente (ante la sociedad, en general). Se creó una enorme distancia entre los conocimientos matemáticos de dominio público y los conocimientos matemáticos escolares, incluso los de nivel elemental tales como la regla de tres, los polinomios o la resolución de ecuaciones.

> Puesto que el alumno maneja ya la noción de aplicación se ha hecho una distinción clara entre los conceptos de polinomio y de función polinomio, utilizando en este caso la palabra función para indicar que la aplicación es entre conjuntos de números. Con ello se elimina la expresión *valor numérico de un polinomio*, que venía utilizándose hasta ahora (B.O. del MEC, 1967, nº 80, p. 2430).

En la configuración de estos programas también se detecta notablemente la influencia de una ideología, que prevaleció entre los matemáticos durante los años 70, sobre la necesidad de introducir una enseñanza mucho más rigurosa del Análisis en los cursos de secundaria:

> La experiencia de una enseñanza moderna del análisis llevada a cabo en el Centro Belga de Pedagogía de la Matemática, nos permite afirmar categóricamente que es posible iniciar a los alumnos de 15 a 18 años en las nociones fundamentales de continuidad, de límite, así como en los elementos del cálculo diferencial e integral. Nuestros alumnos no consideran el análisis como la parte más difícil del curso...... Hay una gran ventaja en introducir lo antes posible los conceptos más fundamentales y los modos de pensamiento más importantes, los más típicos. Los titubeos no están permitidos: la enseñanza del análisis se impone hoy en día a nivel secundario (Papy, 1968, p. VII-VIII).

La noción de función, así pues, se comenzó a estudiar como elemento básico e imprescindible para definir los restantes conceptos del análisis matemático. Su tratamiento se fundamentó epistemológicamente en la noción de aplicación, la cual, como muestra la siguiente cita de Papy (1968, p. 20) (figura 3), se identificó con la de función:

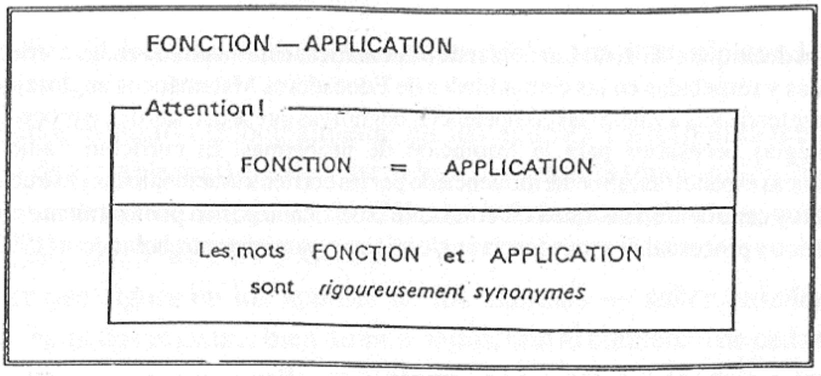


Figura 3. Identificación de función y aplicación según Papy.

En esta definición clara y concisa ya no hay la menor sugerencia a las cantidades que fluyen engendrando magnitudes variables, ni el menor recurso a puntos moviéndose sobre curvas, desapareciendo así la vieja y sugestiva idea de variabilidad que había sustentado trabajos como los de Newton, Leibniz o Euler. Es evidente que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva que la actual, Freudenthal dirá que:

> aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada sin embargo se ha oscurecido su esencial significado como dependencia entre variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático (1983, p. 497).

No obstante y a pesar del enorme éxito obtenido por los impulsores de esta ideología, que consideraba los *fundamentos de la Matemática* como los principios básicos en su enseñanza, en la mayor parte de los países donde el sistema se implantó, el movimiento de vuelta ha comenzado hace ya bastante tiempo. La promoción de las estructuras junto con una gran inflación teórica, tanto de lo numérico como de lo geométrico, después de haber suscitado un vivo entusiasmo, desataron pronto críticas muy serias, incluso antes de que se hubiera podido constatar el resultado, como las expresadas por Thom:

> El verdadero problema que debe plantearse en la enseñanza de las Matemáticas no es el del rigor, sino el de la construcción del sentido, de la justificación ontológica de los objetos matemáticos (1978, p. 148).

En la actualidad nos encontramos en España en pleno proceso de implantación y desarrollo de los nuevos Programas de la Reforma Educativa, tanto para los niveles de Educación Primaria, como de Secundaria. Su nueva configuración, en referencia a las Matemáticas, queda perfectamente reflejada en la opinión de Rico:

Podemos decir que el Diseño Curricular de Matemáticas está inspirado en las corrientes más conocidas y respetadas en las comunidades de Educadores Matemáticos anglosajones, con una fuerte tendencia a valorar las competencias cognitivas que se derivan de los procedimientos y estrategias necesarios para la resolución de problemas. El currículo tradicional de matemáticas español, usualmente influenciado por las corrientes racionalistas y estructuralistas francesas y centroeuropeas, queda fuertemente modificado por un planteamiento empirista, pragmático y procesual de procedencia anglosajona y, parcialmente, holandesa (1992, p. 21).

Una aproximación al saber enseñado: análisis de los apuntes tomados en clase por los alumnos

El profesor en su clase gestiona la estructuración de los saberes matemáticos que los programas oficiales han designado como *saberes a enseñar*; en este proceso

la herramienta esencial de su práctica es el *texto del saber* (que, para él, se convierte en palabra), con las variaciones que él se autoriza a imprimirle.... puede disponer de otras variables de comando — que no estén ligadas especificamente a los contenidos de saber — son variables subordinadas, y le permitirán sobre todo organizar la puesta en funcionamiento de su arma primera, el texto del saber (Chevallard, 1991, p. 35).

En nuestro trabajo hemos estudiado la progresión seguida por el profesor en la construcción y estructuración del *texto del saber*; ello nos ha permitido conocer restricciones y condiciones del contrato didáctico, así como fenómenos ligados al proceso de transposición didáctica.

Para aproximarnos al saber enseñado, hemos utilizado los apuntes tomados por los alumnos en clase. Las "notas" que toman los alumnos durante el desarrollo de las clases constituyen uno de los posibles dispositivos de observación del funcionamiento del sistema didáctico puesto que poseen una fuerte legitimidad institucional. Nos han permitido estudiar, si bien de un modo indirecto, *el texto del saber* que pone en funcionamiento el profesor en sus clases y la actividad matemática de los alumnos. Este dispositivo de observación tiene la ventaja, frente a las observaciones directas, de no alterar el contrato didáctico, ya que la acción del observador escapa a la visibilidad de los sujetos observados.

Hemos analizado los apuntes tomados en clase por alumnos de 2º BUP, 3º BUP y COU pertenecientes a cuatro Institutos de Bachillerato donde hemos realizado nuestro estudio. Hemos seleccionado un ejemplar de apuntes de un alumno por curso y profesor diferente, doce en total. La selección ha sido intencional, los alumnos debían asistir regularmente a clase y sus notas debían tener un mínimo de claridad y orden.

Nos hemos centrado principalmente en los apuntes correspondientes al tema (Funciones de variable real) donde se introduce la noción de función (1º y 2º de BUP), así como los temas de iniciación al Cálculo infinitesimal (límites, continuidad, derivadas, etc) (2º, 3º de BUP y COU).

El saber que figura en los apuntes de los alumnos — *saber enseñado* — se estructura según dos registros bien diferenciados, uno al comienzo de cada tema que recoge el "discurso institucionalizado" (Margolinas, 1993, p. 175) del profesor sobre los contenidos que se manejan en el aula y otro configurado por las diferentes actividades (ejercicios y problemas) que tienen a su cargo los alumnos. Mantiene, en general, una progresión ordenada según el *saber a enseñar* que determinan los programas oficiales.

Esta primera visión global de los apuntes nos ha permitido poner en evidencia la estructura topogenética del sistema de enseñanza: el profesor estará siempre encargado de la teoría, mientras que los alumnos lo estarán de la práctica.

> Se instituyen dos modos diferentes de *saber*, dos registros distintos de actos epistemológicos.... Así se genera una dicotomización del objeto del saber: una versión para el enseñante y una versión para el enseñando.... El se reserva la teoría, las leyes generales, el alumno se encuentra del lado de la "constatación", de la *verificación*, de la *aplicación* (Chevallard, 1991, p. 75-76).

Aunque en los apuntes de los alumnos no se encuentra todo lo dicho y hecho por el profesor en la clase, la información recogida apoya la hipótesis de que se realiza una presentación fiel y económica[5] de las nociones matemáticas. Esto nos muestra la creencia que deben tener estos profesores en cuanto a que

> los saberes discursivamente transportados por el profesor son el medio más eficaz y económico para el aprendizaje de sus alumnos (Chevallard, 1991, p. 23).

Adoptan, pues una hipótesis empírica sobre el aprendizaje de los alumnos: Un contenido matemático correcto no puede engendrar más que concepciones matemáticas correctas. Como consecuencia de esta hipótesis, se establece de forma implícita una identificación entre el tiempo de enseñanza y el tiempo de aprendizaje del alumno.

Todo ello es fruto también del *contrato de enseñanza* al que está ligado el profesor con la sociedad en la que vive:

Este contrato, como el contrato didáctico que rige el funcionamiento de la clase, es normalmente implícito y una de sus cláusulas, que funciona de forma implícita, la podríamos enunciar así: *Todo el contenido de una lección de Matemáticas debe ser matemáticamente correcto*. Esto, que en principio parece una tautología, sin embargo, nos conduce a explicar sus efectos en el sistema de enseñanza. Enunciar correctamente la lengua matemática corre el riesgo de volverse más importante que comprender los conceptos matemáticos e incluso de saberlos utilizar de forma pertinente. Esto tendría por corolario prohibir al profesor la subsistencia (o en el peor de los casos suscitar) de conocimientos *intermedios* en la clase (Margolinas, 1988, p. 54).

En cuanto a los imperativos debidos a la epistemología de la matemática, en los apuntes estudiados se evidencian los fundamentos básicos de la teoría de conjuntos que inciden en la configuración de las nociones básicas del análisis matemático: número real, funciones de variable real, límites, continuidad, derivación e integración.

Así, la definición de la noción de función que se adopta por parte de los profesores proviene de la anterior fundamentación; veamos, por ejemplo, la mostrada en la figura 4.

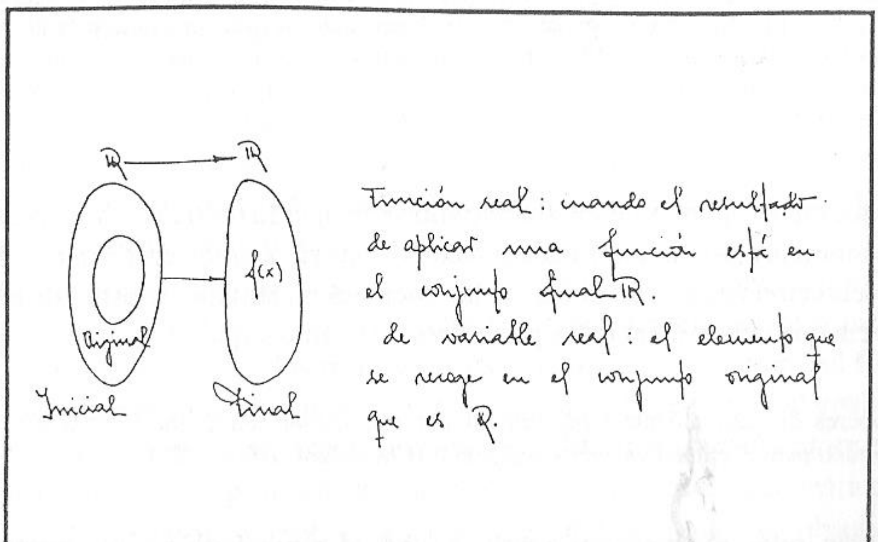


Figura 4. Función de variable real (2º de BUP).

Como podemos apreciar los profesores adoptan un recurso intuitivo para apoyar la definición de función basado en los diagramas de Venn. Aún permanece en la epistemología escolar la convicción de que:

> Los diagramas de Venn constituyen un soporte intuitivo primordial y un ideograma gráfico riguroso (Papy, 1968, p. 2).

Este soporte permite al profesor situar la función en continuidad con nociones anteriores ya conocidas por los alumnos, tales como las correspondencias. Sin embargo esta continuidad se rompe rápidamente porque una vez introducida no se vuelve a utilizar más con este sentido. Los ejercicios y actividades de clase no ponen en funcionamiento necesariamente la noción de función como aplicación entre conjuntos numéricos.

Determinación de dominios de funciones

Inmediatamente, tal y como ocurre en los manuales escolares utilizados por estos alumnos, una vez dada la definición de función, el profesor procede a la definición formal de Dominio e Imagen de una función de variable real. Posteriormente da unas *reglas* económicas para la determinación de dominios, como se indica en la figura 5.

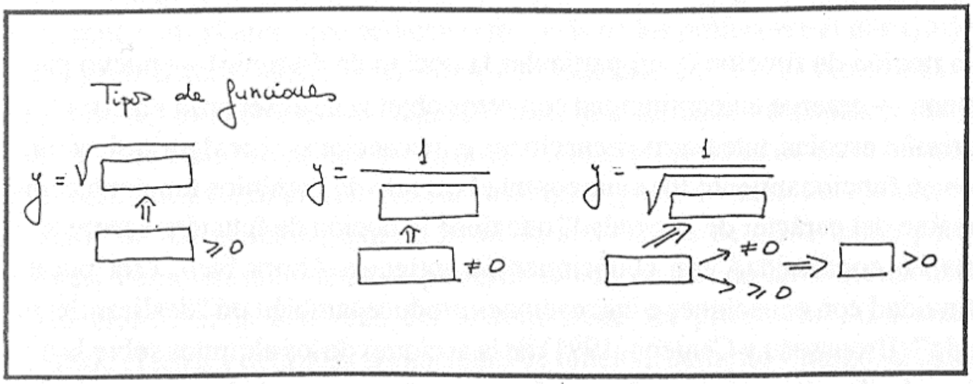


Figura 5. Tipos de funciones. Dominios (2º de BUP).

La tipología de funciones que propondrá el profesor para calcular dominios es normalmente la siguiente:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad f(x) = \sqrt{P(x)} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} \qquad f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}} \qquad f(x) = \log\frac{P(x)}{Q(x)}$$

El profesor, con las *reglas* que suministra, intenta reducir la incertidumbre de lo alumnos en la resolución de ejercicios análogos. Introduce *códigos* externos a verdadero problema consiguiendo con ello rutinizar la tarea de determinación d dominios. Se podría considerar como un modo de *efecto Topaze*[6], ya que el profeso nunca propone problemas en cuya solución los alumnos traten de dar respuesta a l cuestión: *por qué y para qué es **necesario** determinar el dominio de una función?* L introducción de estas *reglas* pone también en evidencia la hipótesis empírica qu sobre el aprendizaje tienen estos profesores: el error debe evitarse en las produccio nes de los alumnos, tanto a nivel de clase como en los exámenes.

Se recuerdan las técnicas de resolución de inecuaciones, de primer y segund grado, para ello les propone diversos ejercicios. Estas mismas técnicas se aplican la determinación de dominios. Por otra parte, observamos también en este proces un aspecto del fenómeno de *transaccionalidad del saber a enseñar:* este deb progresar en el tiempo merced a la dialéctica antiguo-nuevo.

> Un objeto de enseñanza es en un principio presentado por el profesor como nuevo a los ojos de los alumnos, va a ser objeto de un aprendizaje. Al mismo tiempo, poco a poco, el profesor mostrará que este objeto puede estar relacionado con otros conocimientos ya adquiridos, que son *antiguos* en el orden lógico de adquisición (Arsac y cols., 1989, p. 15).

La noción de función (y en particular la noción de dominio) — nuevo para lo alumnos — emerge en continuidad con otros objetos de enseñanza anteriores en l progresión escolar, tales como ecuaciones e inecuaciones. La algoritmización qu ponen en funcionamiento los alumnos en el cálculo de dominios funciona como u atenuante del carácter de "novedad" que tiene la noción de función, acentuando s puesta en continuidad con conocimientos antiguos. Ahora bien, esta puesta e continuidad con ecuaciones e inecuaciones produce también un "deslizamiento de sentido" (Brousseau y Centeno, 1991) de la acciones de los alumnos sobre la noción de función. La situación pasada se refuerza en detrimento de la presente.

En los ejercicios de determinación de dominios de funciones se comienzan a introducir unas *herramientas semióticas (praxemas)*[7] tales como los mostrados en la figura 6.

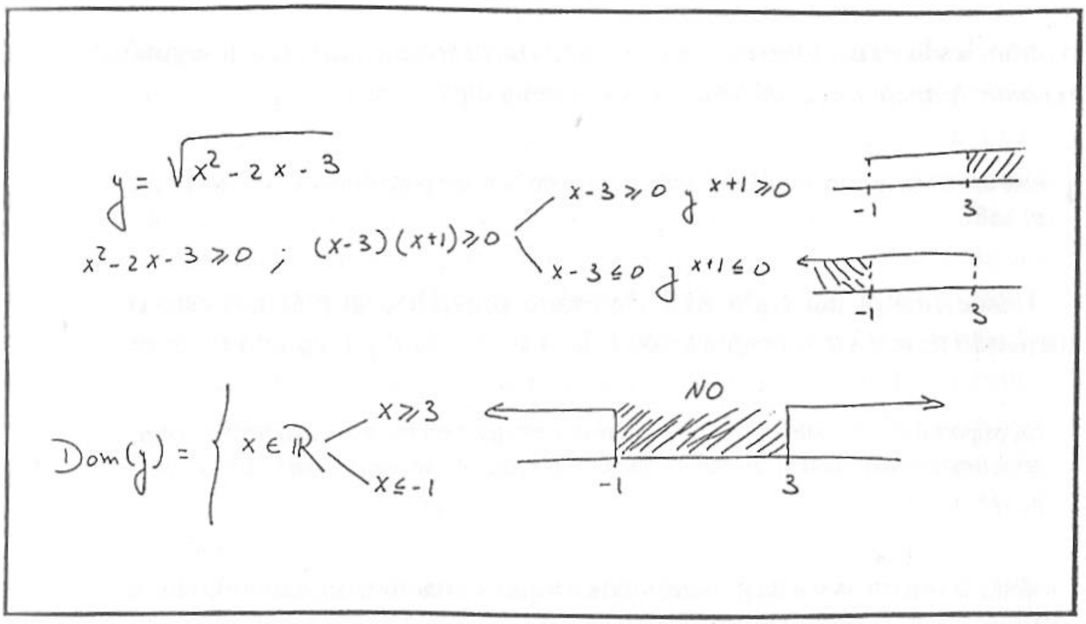


Figura 6. Praxemas: objetos ligados a prácticas específicas.

La utilización de estos *praxemas* muestra un ejemplo de "creatividad didáctica" (Chevallard, 1991, p. 23) por parte de los profesores: se crean objetos y herramientas de enseñanza que no figuran en el saber científico.

El tiempo y el esfuerzo que dedican la mayoría de los profesores al trabajo de los alumnos en la determinación de dominios de funciones es muy notable, más de la cuarta parte del total de ejercicios que realizan en el tema de funciones (principalmente en 2º de BUP) se dedica a esta tarea. El motivo de su éxito en la enseñanza parece bastante evidente: suministran múltiples posibilidades de ejercicios de evaluación de los alumnos, tanto a nivel de actividades de clase como para los exámenes. Permiten fácilmente al profesor satisfacer una de las condiciones del contrato didáctico: la actividad del alumno debe ser prioritaria. Así, una vez comenzado el tema y definidas las nociones de función, dominio y rango, el alumno, casi inmediatamente, "se pondrá activo" y "aplicará" la teoría a la resolución de ejercicios. Por otra parte, la *restricción de evaluabilidad*[8]: a que están sometidos los objetos de enseñanza hace que se generen, en numerosas ocasiones, tipos inéditos de problemas, que no se corresponden con sus raíces epistemológicas. En este sentido Chevallard (1991) indica que uno de los objetivos del estudio de la transposición didáctica es el de ejercer una "vigilancia epistemológica", es decir, examinar la distancia, la deformación, entre el objeto del saber científico y el objeto de enseñanza. En este caso podemos decir que la enseñanza ha deformado el objeto función adaptándolo fuertemente a sus necesidades de evaluabilidad, *rompiendo epistemológicamente* con los problemas y contextos a los que estuvo ligada esta noción desde su nacimiento. Es un proceso de *descontextualización* seguido de una *recontextualización* en el interior del sistema didáctico:

> este es un fenómeno muy destacable, aunque demasiado poco destacado (Chevallard, 1991, p. 188).

Desde finales del siglo XIX Dedekind generalizó al máximo este concepto, llamando función a toda aplicación f: $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$, siendo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ conjuntos cualesquiera.

> La importancia de este nuevo lenguaje reside en que permite a los matemáticos considerar relaciones entre objetos de naturaleza completamente indeterminada (Dieudonné, 1989, p. 188).

Precisamente por esta generalidad en su presentación, los matemáticos necesitan utilizar en el estudio de funciones elementos de precisión, como son, la determinación del dominio, la paridad, la continuidad, derivabilidad, etc. Los profesores intentan reproducir esta misma necesidad, y además, convierten la noción de función en un objeto de estudio en sí mismo.

> Sabemos que la inflación del tratamiento como objetos de estudio de nociones que anteriormente se observaban como simples herramientas de la actividad matemática ha reducido dramáticamente el lugar consagrado a su puesta en funcionamiento como útiles, dedicando gran cantidad de tiempo y energía en construirlas (Chevallard y Joshua, 1982, p. 189).

En los apuntes de los alumnos figuran no sólo la definición de la noción de función, sino la de dominio, imagen, gráfico, operaciones con funciones, etc., cambiando definitivamente su status, de ser herramientas[9] pasan a ser objetos del saber matemático.

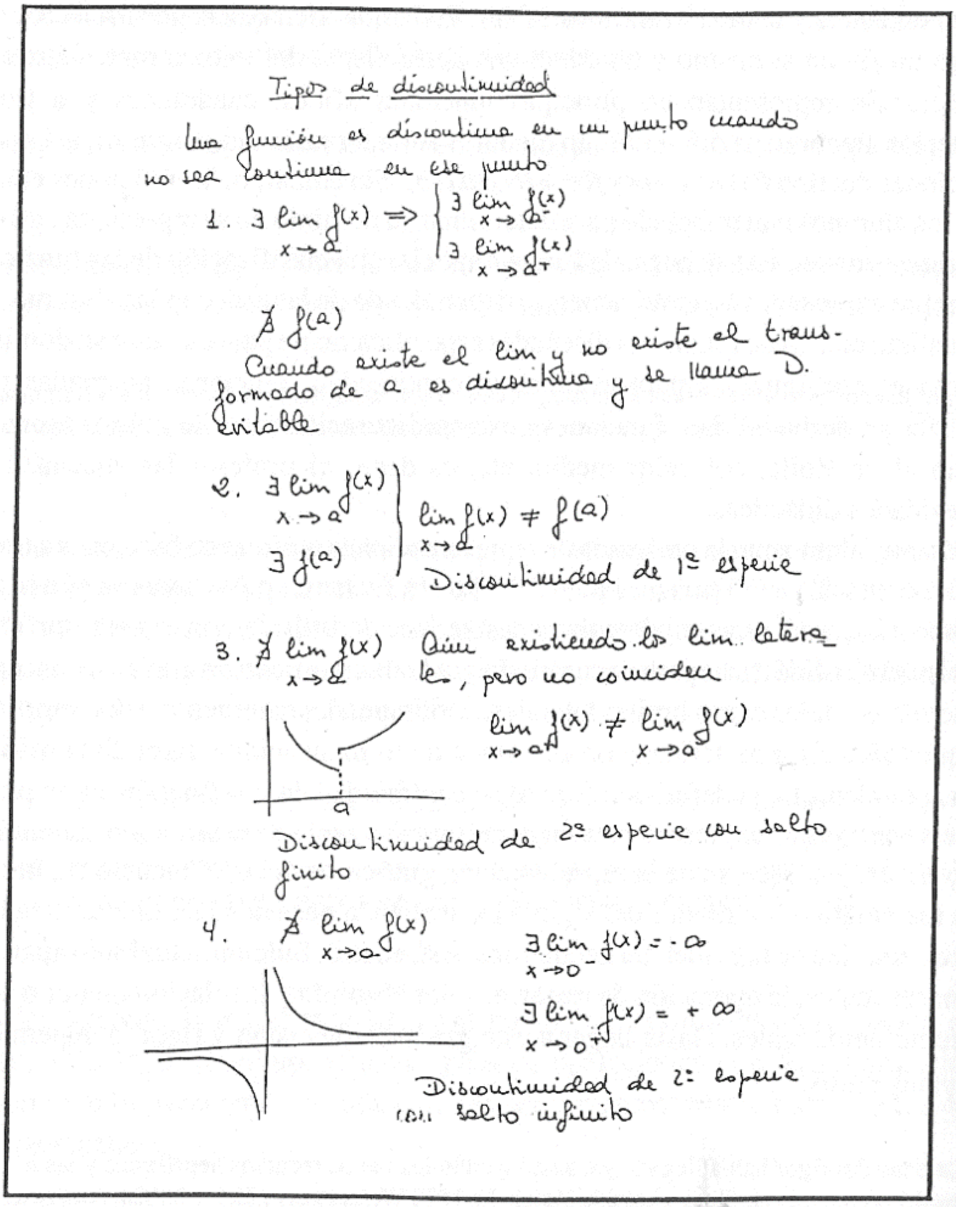
La representación gráfica de funciones

Los alumnos representan diferentes funciones expresadas algebraicamente, configurando siempre en primer lugar una tabla de valores. La tarea de representación gráfica de una función es, a lo largo de todos estos apuntes, siempre un punto de llegada a través de su expresión algebraica. Se establece pues la conexión Fórmula→Gráfico. No presentan en ningún caso situaciones de variación donde la gráfica se observe como la representación de dicha variación y en la cual se determine la dependencia y conexión entre variables. Podemos decir que la gráfica se concibe como un fin en sí mismo y no como una herramienta del trabajo matemático del alumno. Se representan en principio funciones afines, cuadráticas y a trozos (criterios algebraicos diferentes en distintos subintervalos del dominio), así como, funciones del tipo $f(x) = |ax+b|$ y $f(x) = INT(ax+b)$. Sin embargo, las funciones con las que los alumnos han trabajado para determinar su dominio no se representan en casi ninguna ocasión. Existe pues, de forma implícita una clasificación de las funciones (siempre expresadas algebraicamente) dependiendo de la tarea que los alumnos han de realizar con ellas: funciones diseñadas especificamente para calcular su dominio, funciones configuradas para estudiar su continuidad, funciones adaptadas para analizar su derivabilidad, funciones cuya configuración permite aplicar teoremas como el de Rolle, del valor medio, etc; es decir, el profesor las adecúa a sus necesidades didácticas.

Es muy abundante la presencia de representaciones gráficas de funciones a trozos o tales como $f(x) = INT(ax+b)$, o bien $f(x) = |ax+b|$. En temas posteriores, según hemos podido observar, estas representaciones se han de utilizar por el profesor como herramientas didácticas para dar un cierto grado de significación gráfica a conceptos matemáticos tales como límites laterales, continuidad, crecimiento o derivabilidad; ya que todos ellos se definen con alto grado de formalización y rigor. Si consideramos, por ejemplo, la definición formal de continuidad de una función en un punto, observaremos que expresa de una manera concisa y perfecta esta noción matemática y no necesita el recurso de la representación gráfica, es decir, el recurso figurativo. Los matemáticos de finales del siglo XIX sentían la necesidad de liberar la noción de continuidad de la evidencia geométrica. Así, en la definición actual sólo aparecen números reales, la operación de restar, el valor absoluto y la relación menor o igual entre números reales. Hasta llegar a este grado de precisión y rigor la matemática necesitó siglos:

> La edad del rigor había llegado ya, sustituyendo los viejos recursos heurísticos y las ideas intuitivas por una perfecta precisión lógica. En 1872 Weierstrass y Heine habían conseguido aritmetizar el análisis (Boyer, 1986, p. 697).

Veamos en la figura 7 el tratamiento dado a la noción de discontinuidad de funciones en los apuntes de los alumnos:



Tipos de discontinuidad

Una función es discontinua en un punto cuando no sea continua en ese punto

1. $\exists \lim_{x \to a} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \to a^-} f(x) \\ \exists \lim_{x \to a^+} f(x) \end{cases}$

$\nexists f(a)$

Cuando existe el lim y no existe el transformado de a es discontinua y se llama D. evitable

2. $\left.\begin{array}{l} \exists \lim_{x \to a} f(x) \\ \exists f(a) \end{array}\right\}$ $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Discontinuidad de 1ª especie

3. $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ Aún existiendo los lím. laterales, pero no coinciden

$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

a

Discontinuidad de 2ª especie con salto finito

4. $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

$\exists \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\exists \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Discontinuidad de 2ª especie con salto infinito

Figura 7. Tipos de discontinuidad de funciones.

El recurso mostrativo de la gráfica es constantemente utilizado. El gráfico se constituye por lo tanto en una herramienta didáctica para dar significación a objetos matemáticos definidos con alto grado de rigor y formalización y, sobre todo, fuertemente descontextualizados. Es un proceso inverso al seguido en la evolución histórica: el profesor parte de la definición formal y posteriormente muestra el gráfico como soporte intuitivo de dicha definición. En la actualidad el sistema de enseñanza valora enormemente, tanto por su economía como por su significación, el recurso geométrico de la gráfica.

El enunciado discursivo del profesor necesita de la gráfica, ambos son indispensables y los dos se complementan.

> El contrato didáctico es diferente del contrato escolar habitual donde la figura no es más que una ilustración de un enunciado discursivo (Laborde, 1988, p. 356).

La gráfica tiene así un carácter ostensivo: mostración inmediata del contenido del discurso del profesor. No se pone en juego el valor instrumental de las representaciones gráficas. La gráfica se constituye así en la enseñanza en una herramienta ostensiva que, controlada por el profesor, sirve para salvar la distancia entre el rigor y la intuición, ya que los saberes que se manejan están fuertemente descontextualizados y no adquieren ningún otro tipo de significación.

Operaciones con funciones

Las operaciones con funciones (suma, resta, producto, cociente, composición) se desarrollan con bastante extensión; primero el profesor introduce las definiciones de forma teórica rigurosa y formal como aplicación entre conjuntos, apoyándose de nuevo en los diagramas de Venn como recurso intuitivo (figura 8).

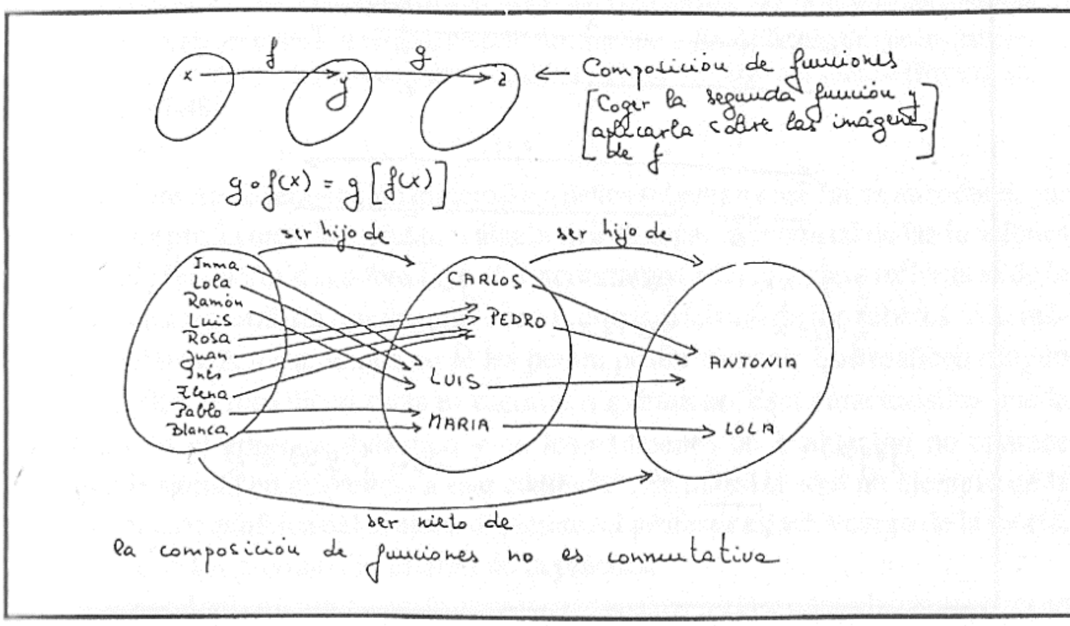


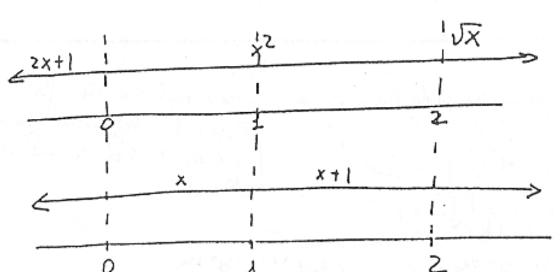
Figura 8. Composición de funciones.

Los ejemplos propuestos mediante los diagramas muestran, en todos los apuntes, un claro intento por parte de los profesores para dar "algo" de significación a esta noción matemática, pero la distancia entre los ejemplos y los ejercicios (ver figura 9) a los que los alumnos se ven enfrentados posteriormente es muy grande. Así, tanto la noción de función, como la composición de funciones, mediante estos ejemplos quedan trivializadas.

Posteriormente, se realizan ejercicios de aplicación de composición de funciones. En estos ejercicios se insiste no sólo en la determinación de la expresión algebraica de la nueva función, sino principalmente en la determinación de su dominio. Aquí el grado de complejidad aumenta considerablemente. El profesor vuelve a introducir reglas para calcularlo. De igual modo se introducen herramientas praxémicas de configuración gráfica, consideradas como artefactos didácticos, tales como los indicados en la figura 9.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \le 0 \\ x^2 & si\ 0 < x \le 2 \\ \sqrt{x} & si\ x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & si\ x < 1 \\ x+1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Dom $f(x)$, Dom $g(x)$, Dom $f \circ g(x)$



$f(x) = 2x+1$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = x$ $\quad g(x) = x$ $\quad g(x) = x+1$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \le 0 \\ x^2 & si\ 0 < x < 1 \\ (x+1)^2 & si\ 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x+1} & si\ x > 2 \end{cases} \qquad \text{Dom } f \circ g(x) = \mathbb{R}$$

Figura 9. Determinación de dominios de funciones compuestas.

En la determinación de dominios de la suma, resta, o composición de funciones, los anteriores praxemas contribuyen a configurar un nuevo algoritmo que se constituye mediante una especie de adición de algoritmos usados anteriormente. Esta tarea, ya rutinizada para funciones simples, adquiere ahora un status más noble, ya que, debido al aumento de complejidad en su ejecución experimenta una revalorización tanto para el trabajo del profesor como para el del alumno. La *restricción de evaluabilidad* de todo saber a enseñar se ve plenamente satisfecha con este tipo de tareas, son muy fecundas en la generación de ejercicios fácilmente algoritmizables y, en consecuencia, evaluables. En este sentido consideramos que:

> La algoritmización aparece en matemáticas como un medio de transacción entre el saber enseñado y el saber a *saber* (evaluable)..... El profesor no exigirá las respuestas más que de las formas frecuentemente algoritmizables del saber (Arsac y cols., 1989, p. 24).

La inflación de este tipo de tareas en la enseñanza — ejercicios de aplicación reiterada de procedimientos algoritmizables — oculta todo el sentido que la noción de función tiene de dependencia entre variables, de variabilidad, de cambio, ya que la reducción algorítmica de las nociones matemáticas contribuye al desvanecimiento del problema como motor de generación de conocimientos en los alumnos y, en consecuencia, a una pérdida del sentido epistemológico de estas nociones.

> Las situaciones clásicas (en el sistema de enseñanza) son situaciones de institucionalización sin que el profesor tome a su cargo la creación del sentido.... Existe la idea de que los saberes se pueden enseñar pero que la comprensión del sentido está a cargo del alumno (Brousseau, 1987, p. 47-48).

En un intento de renovación matemática de los saberes a enseñar se introduce, por parte de los profesores, la estructura algebraica de espacio vectorial de las funciones de variable real definidas sobre $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$. Encontramos aquí una clara influencia de la ideología estructuralista que promovió un fuerte teoricismo de los saberes matemáticos escolares. A los alumnos no se les pedirá posteriormente que realicen ningún ejercicio donde movilicen estas estructuras algebraicas. Esta característica queda implícita en el contrato didáctico y en los exámenes de evaluación no aparece ninguna pregunta en referencia a este contenido. Se muestra aquí un ejemplo de la estructura topogenética del sistema didáctico: el profesor estará a cargo de la teoría, mientras que los alumnos lo estarán de la práctica.

Podemos decir, en suma, que las tareas propuestas en clase a los alumnos en torno a la noción de función son extremadamente localizadas y, de este modo, limitadas a unos estereotipos que permiten fácilmente ser evaluados. La restricción de evaluabilidad en las tareas propuestas a los alumnos garantiza así, una eficacia alta y económica: tratar de suministrar el máximo de buenas respuestas a los ejercicios propuestos en clase o bien en los exámenes.

Conclusiones

Del análisis de la transposición didáctica de la noción de función en la enseñanza secundaria en España, podemos afirmar que los profesores presentan la noción de función en toda su generalidad. Observamos aquí un proceso inverso al seguido en la génesis histórica del concepto: su consideración como objeto matemático en su forma más acabada, es previa a su consideración como herramienta de la actividad matemática o extramatemática. No se establecen relaciones con problemas ligados a su origen y evolución epistemológicos, eliminando, de este modo, gran parte de su significación como útil de resolución de problemas ligados a la variabilidad y al cambio, en los que *fórmulas* y *gráficas* adquirieren realmente su *funcionalidad*.

La noción de función está sujeta en su enseñanza al fenómeno de *analítica del saber*, se ha desgajado en segmentos elementales: criterio-fórmula, construcción de tablas, determinación de dominios, representación gráfica; de modo que cada segmento puede constituirse a su vez en un objeto de estudio quasi autónomo.

> Esto implica una distorsión del objeto en relación con el saber sabio: el alumno verá muchos objetos allí donde el matemático no ve más que uno (Assude y Artaud, 1991, p. 166).

Esta fragmentación es consecuencia no sólo de la necesidad de programabilidad, delimitación y autonomización del saber enseñado sino de las restricciones del contrato didáctico debidas a la necesidad de evaluación. Así, de esta manera, el alumno rápidamente se pone a trabajar, a hacer ejercicios (calcular dominios, configurar tablas, representar gráficas, etc.), no tiene que esperar largas exposiciones discursivas del profesor. Además, el profesor intenta con esto satisfacer la ideología imperante en la *noosfera* respecto a la valoración de la actividad del alumno en el aula.

Todo lo anterior nos lleva también a admitir que la economía del sistema didáctico es el motor de la estructuración del conocimiento en la enseñanza:

> cuando la cantidad de información a tratar instantáneamente se vuelve excesiva para un sistema, esta se hace compleja, para tratar así de conducir la incertidumbre y la fiabilidad a un nivel aceptable (Brousseau y Centeno, 1991, p. 199).

Así, hemos podido ver cómo la noción de función se subdivide, se analiza, se complexifica, para controlar mejor cada segmento de este saber.

Señalaremos además que el funcionamiento del sistema de enseñanza actual, en relación con la noción de función, está centrado en gran medida en el registro algebraico. Las restricciones sobre las que se apoya este funcionamiento las encontramos:

- en el plano epistemológico, debido a la amplia dominación de lo algebraico en el desarrollo histórico de la noción de función;
- en el plano didáctico, debido a la fuerza que encuentra lo algebraico en el refugio algorítmico.

Este análisis didáctico nos muestra, asimismo, cómo la enseñanza ha configurado la noción de función adaptándola a sus necesidades didácticas, derivadas, por una parte, de una hipótesis empírica sobre el aprendizaje de los alumnos, y por otra, de las restricciones que establece el contrato didáctico en cuanto a la necesidad de *evaluabilidad* de los objetos de enseñanza.

Las conclusiones anteriores permiten poner de manifiesto cómo el sistema didáctico (que pone en relación alumno, profesor y saber a enseñar) produce determinadas restricciones sobre cada uno de sus elementos constitutivos, así como entre las relaciones que se establecen entre ellos. El conocimiento de estas restricciones lo consideramos pertinente para poder identificar el dominio de las modificaciones que didácticamente son posibles llevar a cabo para optimizar el aprendizaje de los alumnos. En la configuración de este dominio es necesario que, tanto los profesores como los agentes involucrados en el funcionamiento del sistema de enseñanza, tengan en cuenta:

- la necesidad de conducir una vigilancia epistemológica del proceso de transposición didáctica de la noción de función, ya que, como hemos mostrado en nuestro trabajo, la enseñanza ha generado saberes parciales, saberes transaccionales, que han recibido un status que no se corresponde con el saber matemático;
- la idoneidad de las situaciones de enseñanza de la noción de función, determinando las variables pertinentes y no pertinentes de las mismas, en referencia al **significado matemático** de dicho objeto; es la etapa más importante del proceso de transposición didáctica debido a su naturaleza didáctica y matemática;
- la necesidad de asociar la noción de función con problemas ligados a situaciones de dependencia y variabilidad, que permitan al alumno *recontextualizar* aspectos modelizantes de la noción de función asociados a su

génesis epistemológica (no limitarlos sólo a la ejercitación repetitiva de procedimientos);

• la necesidad de adecuar las situaciones de enseñanza-aprendizaje para que permitan al alumno alcanzar su solución por motivaciones de origen matemático y no sólo de las derivadas de las cláusulas implícitas del contrato didáctico (*reglillas*, códigos implícitos, notas, definiciones basadas en una heurística, etc.).

Notas

[1] Fenómeno descrito por Chevallard (1991, p. 43) por el que el saber enseñado se considera (en el sistema de enseñanza) naturalmente identificado con saber científico.

[2] BUP — Bachillerato Unificado y Polivalente, COU — Curso de Orientación Universitaria.

[3] Empleamos esta metáfora ecológica con el sentido dado en los trabajos de Rajoson (1988) y Bosch (1991).

[4] Bosch y Nin (1991, p. 180) consideran que un saber tiene una *fuerte legitimidad epistemológica* si la institución que lo produce lo reconoce como un saber incuestionable.

[5] Este término se utiliza aquí con el sentido dado por Brousseau (1988, p. 65), el profesor trata de gestionar su enseñanza de manera que el aprendizaje de los alumnos alcance un máximo de eficacia con el menor coste posible.

[6] Brousseau (1986) ha puesto en evidencia algunos fenómenos didácticos ligados al proceso de transposición didáctica. Uno de ellos, el efecto *Topaze*, se caracteriza porque la respuesta que debe dar el alumno está determinada de antemano; el profesor elige las preguntas a las cuales el alumno puede responder correctamente. Los conocimientos necesarios para producir estas respuestas cambian su significado y en realidad el conocimiento que el profesor cree enseñar desaparece por completo.

[7] Bosch (1991, p. 1) define un praxema como un instrumento de trabajo, que por su instrumentalidad contribuye al desarrollo de la actividad; y es al mismo tiempo un objeto material ostensivo que se manipula y se muestra.

[8] La restricción de evaluabilidad impone que el alumno pueda hacer cualquier cosa evaluable con el objeto que acaba de ser introducido (en el sistema didáctico) (Artaud y Assude, 1991, p. 165).

[9] Se considera que una noción tiene status de *herramienta* en la actividad matemática del sistema didáctico si es presentada por el profesor simplemente por mostración y no a partir de una definición formal (por ej. gráfico, ecuación, parámetro, etc).

Referências

Arsac, G., Develay, M. y Tiberghien, A. (1989). *La transposition didactique en Mathématiques, en Physique et en Biologie*. Lyon: IREM et LIRDIS de Lyon, Université de Lyon.

Assude, T. y Artaud, M. (1991). Topogénèse et émergence du rapport institutionnel pour l'élève. En R. Gras (Ed.), *Actes de la VI École d'Été de Didactique de Mathématiques* (pp. 164-168). Institut Mathématique de Rennes et IRESTE de Nantes, Université de Rennes.

Boletín Oficial del Estado (1975). Programas de Matemáticas para el Bachillerato Unificado y Polivalente.

Boletín Oficial del Estado (1975). Programas de Matemáticas para el Curso de Orientación Universitaria.

Boletín Oficial del Ministerio de Educación y Ciencia (1967). Programas de Matemáticas para Bachillerato.

Bosch, M. (1991). *El semiòtic i l'instrumental en el tractament classic de les situation de proporcionalitat*. Trebal de Recerca. Departament de Matematicas, Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M. y Nin, G. (1991). L'institution dans la culture: Légitimités et pertinences. En R. Gras (Ed.), *Actes de la VI École d'Été de Didactique de Mathématiques* (pp. 179-183). Institut Mathématique de Rennes et IRESTE de Nantes, Université de Rennes.

Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad. (Edición original, 1968)

Brousseau, G., (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des Mathématiques*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Bordeaux.

Brousseau, G. (1987). Les différents rôles du maître. *Actes du XIV Colloque INTER-IREM des PEN* (pp. 37-70). Nantes: IREM de Nantes.

Brousseau, G. y Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11*(2-3), 167-210.

Chevallard, Y. y Johsua, M. A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique — la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*(2), 157-239.

Chevallard, Y. (1986). Enseignement de l'algèbre et transposition didactique. Conferencia pronunciada en el Seminari e Conference di Scienze Matematiche. IRRSAE Piemonte, Turín.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique — Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage. (Edición original, 1985).

Dieudonné, J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las Matemáticas hoy*. Madrid: Alianza Universidad.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en Investigación Educativa*. Madrid: Morata.

Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington: Mathematical Association of America.

Laborde, C. (1988). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 337-364.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Task, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Margolinas, C. (1988). Un étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit X, 16*, 51-66.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Papy, G. (1968). *Le premier enseignement de l'analyse*. Bruxelles: Presses Universitaires de Bruxelles.

Rajoson, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique: Trois études de cas.* Tesis de Doctorado. Facultad de Ciencias de Luminy. Universidad d'Aix - Marseille.

Rico, L. (1992). Evaluación en el sistema educativo español: El caso de las Matemáticas. *SUMA: Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 10,* 15-24.

Ruiz Higueras, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Schneider, O. (1979). *Le passage des équations numériques aux équations paramétriques en classe de seconde.* Mémoire du D. E. A. de Didactique des Mathématiques. Université d'Aix-Marseille.

Thom, R. (1978). Matemáticas modernas y matemáticas de siempre. En J. Hernández (Ed.), *La enseñanza de las Matemáticas modernas,* (pp. 140-156). Madrid: Alianza Universidad.

Luiza Ruiz Higueras. Dep. de Didáctica de las Ciencias (Experimentales, Matemática y Sociales), Faculdad de Humanidades y Educación, Universidade de Jaén (Edificio Magisterio), c/ Virgen de la Cabeza 4, 23071 Jaen, ESPANHA.

J. L. Rodríguez Fernández. Dep. de Didáctica de las Ciencias (Experimentales, Matemática y Sociales), Faculdad de Humanidades y Educación, Universidade de Jaén (Edificio Magisterio), c/ Virgen de la Cabeza 4, 23071 Jaen, ESPANHA.

Juan D. Godino, Dep. de Didáctica de la Matemática, Escuela Universitaria de Formación del Professorado, 18071 Granada, ESPANHA. Endereço electrónico: jgodino@goliat.ugr.es.

RESUMEN. En este trabajo analizamos las transformaciones que experimenta la noción de función como objeto matemático para ser introducida en la enseñanza secundaria en España, utilizando el marco teórico de la transposición didáctica. Como fuentes de datos se utilizan los programas oficiales, y una muestra de apuntes tomados en clase por los alumnos. Las relaciones institucionales descritas respecto al objeto función son variables explicativas del significado personal construido por los alumnos. Algunas de ellas pueden originar obstáculos didácticos, por lo que se considera necesario conocerlas para planificar de modo idóneo la enseñanza.

SUMMARY. In this paper we analyse the transformations experienced by the mathematical object "function" to be introduced into the Spanish secondary school mathematics, using the theory of didactic transposition. This analysis is based on the official syllabuses and on a sample of students' classroom notes. The described institutional rapport to the concept of function can be considered as explanatory variables for the students' personal meanings about functions. As some of these rapports may give rise to didactic obstacles one should take them into account to when planing the teaching of the topic.