Uma análise do Teorema Fundamental do Cálculo em alguns livros-texto[1]

Armindo Cassol[2], Claudia Laus Angelo[2], Lígia Arantes Sad[2]
e Maria Regina Gomes da Silva[2]
UNESP — Universidade Estadual Paulista

Introdução

A UNESP[3], Campus de Rio Claro, tem como uma de suas atividades interdepartamentais, o Grupo de Pesquisa e Ação (GPA), constituído por professores de Matemática das redes pública e particular, professores da UNESP, alunos do Curso de Formação de Professores de Matemática e alunos da Pós-Graduação em Educação Matemática, cujas pesquisas visam a amenizar o fracasso do ensino da Matemática em todos os níveis e evitar as rotinas que o sustentam.

O GPA é composto por subgrupos, um dos quais, o GPA-2, tematiza questões relativas ao ensino e aprendizagem do Cálculo. A formação deste subgrupo se deu, por um lado, devido a importância do Cálculo na constituição do pensamento diferencial e integral pelo aluno, já que tal constituição é a "porta de entrada" para o desenvolvimento de outras disciplinas. Por outro lado, devido aos índices de reprovação que vêm caracterizando o Cálculo como disciplina responsável pela reprovação e pela evasão na Universidade. O trabalho desse subgrupo durante o segundo semestre de 1994 escolheu como tema o *Teorema Fundamental do Cálculo*, não apenas por tratar-se de um marco histórico na gênese do Cálculo, ao relacionar a diferencial com a integral, mas, principalmente porque, como o próprio nome enuncia, ele continua a ser "fundamental" no estatuto atual, estabelecido pela comunidade acadêmica, reforçado pelos livros-texto, por professores e alunos no fazer de sala de aula.

Neste artigo examinaremos livros textos de Cálculo no que diz respeito ao Teorema Fundamental do Cálculo, aqui denominado TFC. Tal escolha se justifica, não apenas porque esses livros são "guias" para o desenvolvimento da disciplina, mas, sobretudo, pelo poder outorgado àqueles que os escrevem na posição da autoridade que, por isso, lhes é socialmente atribuída. Do ponto de vista da Educação Matemática parece, pois, natural investigar como esse tópico é tratado. Optamos pela análise dos livros-texto mais comummente indicados como bibliografia básica ou complementar em cursos em que a disciplina Cálculo é obrigatória, a saber: Ávila (1981), Demidovitch (1986), Guidorizzi (1985), Kaplan e Lewis (1972), Lang (1977), Leithold (1982), Piskounov (1977), Simmons (1987), Swokowski (1983) e Carvalho e Silva (1994). Nesta análise, examinamos a forma como o TFC é tratado. Atentando para a metodologia aí usada, com a preocupação do ensino e aprendizagem deste teorema, focamos os pré-requisitos exigidos para a compreensão do TFC nos vários livros, a presença da noção geométrica, as aplicações e os exercícios propostos.

Fundamentamo-nos, para esta análise, em alguns dos aspectos do *Modelo Teórico dos Campos Semânticos* (Lins, 1993) que propõe *conhecimento* como uma crença-afirmação com uma justificação para esta crença-afirmação e *Campo Semântico* como uma coleção de conhecimentos cujas justificações estão todas relacionadas a um mesmo modelo (Lins, 1993). Melhor definindo, *Campo Semântico* é um modo de produzir significados (Lins, 1994).

Observamos que nos livros textos o objeto matemático TFC varia de autor para autor, ora na sua formulação, ora no seu tratamento; e que os livros pressupõem um leitor pleno, aluno ideal, com desenvolvimento cognitivo adequado para constituir, a partir de seus enunciados, os objetos requeridos, e não um leitor comum, "aluno real" (Baldino, 1985), que precisa aprender.

Sobre o Teorema Fundamental do Cálculo

O que se denomina Teorema Fundamental do Cálculo é o teorema que relaciona a operação de derivação com a de integração. Esse teorema é o marco da origem do Cálculo Diferencial e Integral.

Historicamente, ainda que Fermat, desde 1629, influenciando seus contemporâneos e sucessores imediatos, Lagrange, Laplace e Fourier, tivesse inventado métodos analíticos de procedimento equivalentes a diferenciação e integração, ele não percebeu a significância da relação entre ambos os métodos,

(...) a relação entre derivação e integração como problemas inversos um do outro não foi entendida até que Barrow a explicasse, em 1670 (Struik, 1989, p. 168).

No entanto, o método de Barrow carecia de uma forma algorítimica simples. Coube, pouco tempo depois, a Newton e a Leibniz, trabalhando independentemente, prover uma fundamentação lógica aos procedimentos de Barrow. Newton e Leibniz perceberam a universalidade da relação entre derivação e integração e por isso são considerados os fundadores do Cálculo (Boyer, 1959).

O Teorema Fundamental do Cálculo, em sua versão atual, estabelece que, dada uma função,

$$f\colon [a,b] \to \Re, \text{ contínua:}$$

- se F é uma primitiva de f então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- se uma função F é definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, para todo x em $[a,b]$,

então $F'(x) = f(x)$ em $[a,b]$.

Essa formulação do TFC, sob a forma de duas proposições, entretanto, não é assim concebida por todos os autores de livros-texto, o que de certa forma acaba refletindo a concepção que os professores têm do teorema.

Em pesquisa recente Toumasis (1993) propôs a seguinte questão:

Qual dos dois teoremas a seguir você considera como sendo o Teorema Fundamental do Cálculo e quais as razões para sua resposta?

Teorema 1. Se f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para $x \in [a,b]$

então $F'(x) = f(x)$.

Teorema 2. Se F é diferenciável em $[a,b]$ e F' é integrável no mesmo intervalo, então

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Das 46 respostas obtidas, 63% apontam o *Teorema 1*, porque nele se baseia o *Teorema 2*. Toumasis (1993) sugere então uma demonstração do *Teorema 2* sem fazer uso do *Teorema 1*, o qual é obtido baseado no *Teorema 2*. Assim, mostra a equivalência dos dois, o que não é novidade, pois esta equivalência fora sugerida, por exemplo, em Ávila (1981), apesar deste não apresentar a demonstração do *Teorema*

2 independentemente do *Teorema 1*.

Essa análise nos levou à indagações acerca do tratamento dado ao TFC pelos autores matemáticos, anteriormente citados, e às possíveis conseqüências para o ensino-aprendizagem.

A exposição do teorema

A análise dos livros-texto de Cálculo selecionados nos mostrou variações quanto à apresentação do tópico *Teorema Fundamental do Cálculo* e ao modo como esse tópico é trabalhado.

Apesar da importância que é atribuída ao TFC nos cursos de Cálculo — por ser o objeto que articula derivada e integral[4] — os livros-texto não abrem um capítulo para ele. De modo geral, tratam o TFC como uma seção do capítulo "Integral Definida". Piskounov (1977) e Demidovitch (1986), sequer abrem uma seção. Isso leva o eventual leitor, vez ou outra, a não encontrar uma referência explícita ao TFC no índice do livro consultado. Questionamos, a partir disso, que importância é esta, tão alardeada e não evidenciada.

A formulação do TFC tanto em Swokowski (1983) como em Carvalho e Silva (1994) é apresentada em duas versões: uma referente à *derivada da integral* e a outra, à *integral da derivada*:

> Seja f contínua num intervalo fechado $[a,b]$.
>
> Parte I. Se a função G é definida por $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ para todo x em $[a,b]$, então G é uma antiderivada de f em $[a,b]$.
>
> Parte II. Se F é uma antiderivada de f, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (Swokowski, 1983, p. 247).

Ávila (1981), Kaplan e Lewis (1972) e Lang (1977) exibem o TFC apenas como a *derivada da integral*, sendo que a *integral da derivada* sequer é mencionada na exposição do teorema. Ávila e Kaplan e Lewis porém, explicitam, posteriormente, a segunda versão como conseqüência da primeira. Há uma separação clara entre o TFC, enquanto derivada da integral, e a fórmula de Barrow:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, que aparece como uma conseqüência do TFC. Já Lang (1977) apresenta a segunda versão — num outro capítulo — sem relacioná-la ao TFC.

Guidorizzi (1985), Leithold (1982), Piskounov (1977), Simmons (1987) e Demidovitch (1986) concebem como TFC a versão *integral da derivada*. Estranha-se em Guidorizzi a referência desta versão como sendo o "1º Teorema Fundamental do Cálculo", posto não haver um "2º" na seqüência deste tópico, no livro.

Portanto, através da apresentação, já podemos constatar que o TFC não é exatamente o mesmo para autores diferentes. Dependendo do livro escolhido, ele é, ora a *integral da derivada*, ora a *derivada da integral*, ora as duas coisas. Um leitor que não conheça tal teorema e por algum motivo deseje estudá-lo, talvez encontre dificuldade para encontrá-lo se o livro escolhido for Piskounov (1977) ou Demidovitch (1986), pois estes autores se referem ao TFC como *Fórmula de Newton-Leibniz*.

Motivações para o estudo do teorema

Os livros que, na apresentação do TFC, enfatizam a obtenção da fórmula da integral definida pela variação de uma primitiva, têm como motivação principal facilitar o cálculo deste tipo de integral. Tal fato é manifestado quando as integrais definidas são apresentadas com dificuldades crescentes na sua resolução. Neste caso, iniciam resolvendo integrais definidas usando somas de Riemann, para posteriormente apresentarem exemplos nos quais a definição se mostra muito trabalhosa ou "insuficiente":

> O cálculo de integrais definidas pela definição (5.16)[5] é bastante trabalhoso, mesmo nos casos mais simples. Nesta seção demonstraremos um teorema que permite calcular uma integral definida sem utilizar limites de somas (Swokowski, 1983, p. 246).

> ... podemos usar possivelmente limites de somas para achar os valores numéricos de integrais complicadas tais como $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{7+x^5}}$ e $\int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)^4 \frac{dx}{x^2}$? Isto, é claro, está fora de questão; e daqui vamos para onde? É evidentemente necessário um método de calcular integrais muito mais forte e poderoso... (Simmons, 1987, p. 287).

Outras motivações são encontradas nos livros mencionados: efeitos teóricos de investigação matemática; respostas a problemas ou situações deixadas em aberto *a priori*; cálculo de áreas, volumes, velocidades, momentos de inércia, comprimentos de curvas e trabalho mecânico. Embora autores citem motivações como "meio de investigação científica" (Piskounov, 1977, p. 429) a ênfase em cálculo de áreas e volumes é tão enfatizada que as demais motivações terminam relegadas a segundo plano.

Encadeamento lógico da demonstração

Reportando-nos aos argumentos e conceitos matemáticos utilizados na demonstração do TFC, notamos que os autores supõem um leitor que tenha conhecimentos prévios necessários à compreensão do seu encadeamento lógico. Esses conhecimentos estão presentes na obra. No entanto, devido à ordem didática adotada, tais pressupostos estão ameaçados pelo esquecimento. Exemplo disto é observado em Guidorizzi (1985), onde no decorrer da demonstração do TFC, se lê:

$$\ldots F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Segue, então, do TVM, que, para uma conveniente escolha de $\bar{c}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$, teremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(\bar{c}_i)\Delta x_i \text{ (p. 304).}$$

Ora, o *TVM* citado aí *en passant* é o teorema do valor médio para derivadas, que está situado dois capítulos antes.

No encadeamento lógico da demonstração do TFC, na primeira versão, *derivada da integral*, Ávila (1981) e Swokowski (1983) usam propriedades e conceitos, tais como: a aditividade da integral, o TVM para integrais, a continuidade da função f em $[a,b]$ posta no enunciado, a definição da integral definida, a definição de derivada. Esses conceitos, nesta mesma versão do TFC, também são utilizados por Lang (1977) e Kaplan e Lewis (1972), com exceção do TVM para integrais, que é substituído pela seguinte estimativa:

Seja uma função contínua no intervalo $[a,b]$ de tal forma que

$A \leq f(x) \leq B$ para $a \leq x \leq b$. Então

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B(b-a).$$

Na segunda versão — *integral da derivada* — observamos duas direções para o encadeamento lógico da demonstração. Uma faz uso da primeira versão que se encontra como parte do próprio TFC em Swokowski (1983), ou é considerada como um outro teorema em Leithold (1982) e Piskounov (1977). Esta, faz uso também da proposição "duas funções que têm mesma derivada diferem por uma constante" e da definição ou propriedade $\int_a^a f(x)dx = 0$.

A outra direção é encontrada em Guidorizzi (1985) e Simmons (1987) que, não tendo a primeira versão do TFC, utilizam, no encadeamento lógico: a integrabilidade em $[a,b]$ de uma função f, a existência de uma primitiva F de f em $[a,b]$, o TVM para derivadas aplicado em F, a definição de integral definida.

Guidorizzi (1985), na demonstração do TFC, aplica o TVM para derivadas na função F, pressupondo, pois, a continuidade de F em $[a, b]$, que está implícita na expressão "se F for uma <u>primitiva</u> de f em $[a,b]$" (Guidorizzi, 1985, p. 304, sublinhado nosso). Isto só é identificado por um leitor mais atento, que ao ler *primitiva em [a,b]*, "lê" também derivável em $[a,b]$ e, portanto, derivável em a e em b, logo contínua em $[a,b]$. O autor parece pressupor um leitor pleno que a prática nos mostra não ser o caso mais freqüente.

Simmons (1987), no início da seção "O Teorema Fundamental do Cálculo", propõe achar uma fórmula explícita para a função área $A(x)$, onde $A(x)$ é a área sob o gráfico da função f de a até x. Para isso estabelece uma "demonstração" para o cálculo de $A(x)$ baseada no conceito geométrico de área, sem, no entanto, mencionar qualquer ligação desta com o TFC. A seguir enuncia o TFC e remete o leitor, em nota de rodapé, para a demonstração posta num dos apêndices do livro. A demonstração que se encontra nesse apêndice não apresenta explicitamente passagens esclarecedoras do encadeamento lógico, ou seja, o leitor não encontra aí uma prova completamente linearizada. Estamos falando da "linearização da cadeia significante" (cf. Baldino e Cabral, 1994) que nas demonstrações culmina com a explicitação das quatro regras de inferência — particularização universal, particularização existencial, generalização universal e generalização existencial — obedecendo uma certa ordem de organização lógica. Estranha-se também a referência "Uma outra prova do Teorema Fundamental do Cálculo", ficando a dúvida se *outra prova* pressupõe uma anterior — que não é identificada claramente — ou se essa referência quer transmitir a idéia de uma forma diferente de demonstração.

Para a forma de estruturação deste livro — colocar a demonstração geral num apêndice — encontramos as seguintes justificativas:

> Um dos principais aspectos que distinguem este livro e o tornam talvez único em relação a todos os demais é notado pelo exame dos apêndices, que comentarei rapidamente. Antes de fazê-lo, enfatizo que este material é inteiramente separado do texto principal, podendo ser cuidadosamente estudado, consultado ocasionalmente ou completamente ignorado, conforme o desejo de cada estudante ou professor (Simmons, 1987, Prefácio).

Ou ainda:

> Do ponto de vista puramente matemático, é possível para os professores dar cursos em muitos níveis diferentes de sofisticação usando — ou não — o material selecionado contido neste apêndice (Simmons, 1987, Prefácio).

Já Demidovitch (1986) e Carvalho e Silva (1994) não propõem qualquer desenvolvimento teórico. O objetivo de Demidovitch pareceu-nos bastante claro no sentido de solicitar aplicações imediatas, antecedidas por alguns exemplos "padrão", da fórmula resultante do teorema. A ausência de demonstração neste autor é justificada pela seguinte observação:

> Os parágrafos do Compêndio contêm pequenas introduções teóricas e explanação das fórmulas. No entanto, pressupõe-se que o estudante *(sic)* tenha assistido as aulas correspondentes do curso de análise matemática e, assim, as formulações apresentadas dos teoremas têm apenas caráter de trabalho. Por isso, em muitos casos, as condições de demonstração não são apresentadas por completo (Demidovitch , 1986, Prefácio).

Carvalho e Silva (1994) não traz uma demonstração do TFC, talvez por dar "uma ênfase considerável às aplicações" (Introdução, p. XI).

Ao examinarmos as demonstrações do TFC nos livros de Cálculo citados, conforme o exposto acima, notamos que geralmente estas se adequam à padronização da estrutura socialmente aceita das "exposições teóricas": a demonstração do TFC remete o leitor ao teorema da média para integrais, já, a demonstração deste, para os teoremas do valor médio, de Rolle, da existência de máximo etc. Assim, o saber contido no TFC só tem sentido se apresentado de forma hierarquicamente organizada, segundo uma ordem estabelecida aos conhecimentos ditos do Cálculo.

No discurso dessa forma hierárquica, o professor, reforçado pelo livro didático, procura fortalecer o "saber" com seus fundamentos inquestionáveis e colocar a promoção do aluno — ser aprovado ou não — como conseqüência da aquisição deste "saber".

A organização da parte teórica do livro-texto, como já citamos, traz sempre afirmações e proposições necessárias à manutenção do encadeamento lógico, no entanto as justificativas nem sempre as acompanham de perto. Assim, para o aluno real, e não o sujeito ideal, interlocutor pleno, sem falhas, o ponto central que lhe dê sentido ao TFC — como objeto pulsional — está sempre por ser encontrado, ou impedido de ser realçado em meio às idas e vindas que precisa realizar para prosseguir e deixar claro o que lhe parece omisso, as justificativas. Para este aluno que procura fazer sentido do TFC através do livro-texto, o que lhe proporcionaria uma certa intimidade com este objeto, não há muito o que esperar, a não ser que ele aprenda "um certo cálculo" ou que ele entenda todos os passos da demonstração. Nessa trajetória, quando apenas "memoriza" resultados ou quando procura a justificação de todos os passos, o aluno acaba por se afastar ou até esquecer do seu desejo inicial, que era dar sentido ao objeto estudado.

Presença da noção geométrica

De um modo geral a apresentação visual-geométrica de área é usada por todos os autores, quer seja nos preliminares do TFC, quer seja na sua demonstração. Com isso, o leitor fica submetido a justificativas baseadas em seqüências de argumentos matemáticos e também a ilustrações.

Na demonstração do TFC nos livros-texto, chamamos a atenção para a presença de dois modos distintos de produção de significado, através de justificativas diferentes, que levam à constituição de dois campos semânticos; "Campo Semântico é um modo de produzir significado" (Lins, 1994, p. 31). Um deles consiste no *campo semântico do pensamento diferencial* dado pelo desenvolvimento do princípio de limite, com justificativas baseadas em argumentos matemáticos; o outro consiste no *campo semântico visual-geométrico*, dado pela nucleação do modelo de área, com justificativas baseadas na ilustração. Nos exercícios e aplicações do TFC chamamos a atenção para a presença, vez ou outra, quando na constituição do pensamento diferencial e integral, do *campo semântico infinitesimal*, dado pelo uso de elementos infinitesimais. Na prática de sala de aula, o aluno, consciente ou inconscientemente, acaba por constituir os objetos do cálculo pelos significados nesses campos semânticos.

Simmons (1987) e Lang (1977), antes de apresentarem o que eles chamam de TFC, trazem respectivamente uma introdução e um teorema utilizando uma função positiva e uma conseqüente função área (cuja derivada é esta função positiva, ou seja, é a versão *derivada da integral*). No desenvolvimento dessa introdução e na demonstração desse teorema, o apelo ao modelo visual-geométrico é direto, mas nenhuma referência é feita para correlacioná-lo com o TFC.

Observamos que para resolver o problema de calcular a integral de funções complicadas através do limite de somas, ou seja, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$, Simmons propõe, às páginas 278-281, encontrar um *método mais eficiente* usando área:

Em vez de pedir a área *fixada* à esquerda na Fig. 6.16, pedimos a área *variável* produzida quando a extremidade direita é considerada móvel, de modo que a área seja uma função de x, como é sugerido pela Fig. 6.16b.

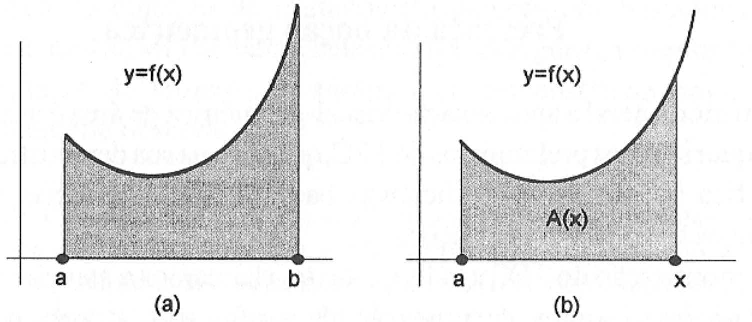

Figura 6.16

Se essa função área é denotada por $A(x)$, então é claro que $A(a)=0$ e $A(b)$ é a área da figura dada em 6.16a. Nossa meta é achar uma fórmula explícita para $A(x)$ e, então, determinar a área desejada, fazendo $x=b$. Há vários passos nesse processo, que consideraremos separadamente para torná-lo mais claro.

Passo 1 Começamos estabelecendo o fato crucial de que

$$\frac{dA}{dx} = f(x). \quad (4)$$

Após a demonstração desse primeiro passo, desenvolve:

Passo 2 A equação (4) possibilita atingirmos a meta de achar uma fórmula para função área $A(x)$. O raciocínio segue o seguinte caminho. Por (4), $A(x)$ é uma das antiderivadas de $f(x)$. Mas, se $F(x)$ é qualquer antiderivada de $f(x)$, então sabemos pelo Capítulo 5, que

$$A(x)=F(x)+c \quad (5)$$

para algum valor da constante c. Para determinar c, pomos $x=a$ em (5) e obtemos $A(a)=F(a)+c$; mas, como $A(a)=0$, isto leva a $c=-F(a)$. Portanto,

$$A(x)=F(x)-F(a) \quad (6)$$

$$A(x)=F(x)-F(a) \quad (6)$$

que é a fórmula desejada.

Passo 3 Tudo que resta é observar que

$$\int_a^b f(x)dx = A(b) = F(b) - F(a),$$

por (6) e pelo significado de $A(x)$.

Após tais considerações, este autor estabelece formalmente o TFC, sem se reportar explicitamente a elas. Ou seja, o autor não evidencia a correlação entre o TFC e o modelo proposto (contendo os três passos) que utiliza a noção visual-geométrica de área.

Se o leitor não perceber esta correlação, ele tenderá a não produzir significados para o TFC através das ilustrações, ou seja, ele não constituirá o campo semântico visual-geométrico, uma vez que as justificativas do TFC, para ele, estarão baseadas somente nos argumentos matemáticos da demonstração formal. Já a percepção desta correlação, tenderá a levar o leitor à justaposição dos dois campos semânticos envolvidos, ou à escolha predominante de um deles, o que certamente o faria constituir um sentido para o TFC.

Kaplan e Lewis (1972) ao demonstrarem o teorema, não se utilizam do aspecto visual-geométrico de área. No entanto, durante os preliminares, este aspecto é constantemente enfatizado, sendo usado como interpretação geométrica de uma função positiva. Convém salientar também que esses autores, semelhantemente ao que fazem Simmons (1987) e Lang (1977), discutem e demonstram a versão *derivada da integral* em termos de uma função área, utilizando recursos visual-geométricos, mas sem se referirem ao TFC. A diferença é que em Kaplan e Lewis (1972) esta discussão faz parte da seção 4-4, muito anterior à seção 4-17 do TFC.

Swokowski (1983), Piskounov (1977) e Ávila (1981), depois de enunciarem o TFC e antes ou durante o procedimento da demonstração formal, salientam o aspecto geométrico de área para funções positivas sem, entretanto, que este aspecto seja necessário para validar a demonstração. Vemos então, a presença dos dois campos semânticos, quase simultaneamente. Pensamos que o objetivo dos autores, ao utilizar o aspecto geométrico de área, seja dar uma melhor compreensão da demonstração do TFC. No entanto, o que constatamos através da prática de sala de aula é que, para o aluno, predomina a crença na integral como área ou como um meio de calculá-la, isto é, o campo semântico visual geométrico é preferencial em relação ao campo semântico do pensamento diferencial. Isso se deve, principalmente, ao poder de convencimento da ilustração.

Guidorizzi (1985) usa auxílio visual-geométrico quando expõe a soma de Riemann, interpretando-a como

> ... diferença entre a soma das áreas dos retângulos acima do eixo de x e a soma das áreas dos que estão abaixo do eixo de x (p. 298).

Já na demonstração do TFC não faz qualquer referência geométrica, usa apenas justificativas baseadas em argumentos matemáticos.

Demidovitch (1986), embora não demonstre o TFC, antes de enunciá-lo traz aspectos geométricos na apresentação da definição de integral definida e nos exemplos subseqüentes.

A utilização de mais de um campo semântico não é um obstáculo para a aprendizagem, pelo contrário, é um meio facilitador da compreensão, desde que o aluno constitua estes campos e faça a correlação (metaforicamente) entre eles. Estas ligações podem ser fonte de constituição de novos conhecimentos, processo de interesse e relevância para a aprendizagem matemática.

> students need to become conscious of the interactions between processes such as representing and abstracting. The working mathematician is using many processes in short succession, if not simultaneously, and lets then interact in efficient ways (Dreyfus e Tall, 1991, p. 41).

Na constituição do pensamento matemático, particularmente em nível de terceiro grau, é constante a interação entre campos semânticos caracterizados, em graus variados, por representação e abstração. Por exemplo, o campo semântico visual-geométrico caracteriza-se preponderantemente por representação, enquanto que o campo semântico do pensamento diferencial caracteriza-se preponderantemente por abstração.

Como a interação entre o campo semântico visual-geométrico de área e o campo semântico do pensamento diferencial muitas vezes não ocorre, acontecem fatos como:

O aluno ao se deparar com o problema de calcular $\int_{-1}^{1} x^3 dx$, e operando no campo semântico visual-geométrico de área, vê:

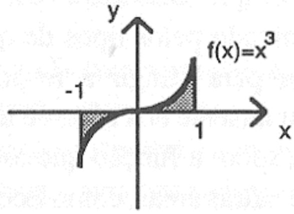

Figura 1.

Portanto não faz sentido o resultado ser zero, uma vez que para ele "a integral é área" e esta é visualmente percebida na figura, ou seja, o aluno está constituindo os seus significados no campo semântico visual geométrico de área, sem fazer a interação com o campo semântico do pensamento diferencial que o levaria naturalmente a escrever:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^3}{4}\right|_{-1}^{1} = 0.$$

Este efeito poderia ser evitado se o livro contivesse observações a respeito destas mudanças de justificativas, ou se o próprio professor, fazendo a intermediação, provocasse a atenção para esta justaposição de campos semânticos.

Exercícios e aplicações

Os exemplos em que se utiliza o TFC, em forma de exercícios resolvidos, são usados de dois modos: ou como modelos de aplicação direta da teoria e referenciais para a resolução dos exercícios propostos, ou como complementos da própria teoria.

As listas de exercícios propostas pelos autores analisados caracterizam-se, predominantemente, por um estilo padrão do tipo "Calcule...". Geralmente, o caminho que o aluno deve seguir para a solução do exercício é (im)posto no enunciado, por exemplo, "Calcule as integrais seguintes, fazendo as mudanças de variáveis indicadas.", ou ainda, "Verifique ... utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo" etc. Exercícios desse tipo, que comummente encabeçam as listas, não provocam no aluno uma necessidade de buscar maiores justificativas em campos semânticos, podando-lhe qualquer oportunidade de constituir os fundamentos que lhe dariam o porquê. Uma tentativa de mudança nesse quadro parece ocorrer em Carvalho e Silva (1994) que coloca as aplicações como parte central do ensino do Cálculo, afastando-se da apresentação clássica (teoria, exemplos e aplicações).

A proposta tradicional dos exercícios acaba induzindo o aluno a repetir, decorar, reproduzir, levando-o a conceber que estas são as estratégias exigidas dele, o que, muitas vezes, acaba sendo reforçado pelos tipos de questões das provas. O aluno passa a resolver os exercícios para atingir a resposta "correta", sem maiores digressões. O que notamos estar ausente nos textos é um esclarecimento, que acaba sendo olvidado pelo professor, sobre a função que estes exercícios têm, enquanto ferramentas para aplicações em outras áreas, como Economia e Física, ou ainda para resolução de problemas do tipo:

Determine m de modo que a região acima da curva $y=mx^2$ ($m>0$), à direita do eixo dos y, e abaixo da reta $y=m$ tenha uma área de K unidades, onde $K>0$ (Leithold, 1982, apêndice A-26).

Calcule a integral e interprete o resultado geometricamente (...)

$$\int_{-a}^{a} \operatorname{sen} x\,dx, \quad a > 0 \qquad \text{(Ávila, 1981, p. 213)}$$

que podem provocar reflexões sobre o TFC; ou mesmo podem fazer com que os alunos que ainda não constituíram significado para o TFC venham a constitui-lo.

Resta destacar que tais problemas, geralmente, encontram-se em número reduzido ao final das listas de exercícios, e por isso e talvez por irem além de meras manipulações mecanicistas, são "deixados de lado" pelo aluno.

As aplicações do TFC, referem-se geralmente a cálculo de: áreas, volumes, comprimento de arco, trabalho, densidade e massa, momentos, pressão de líquidos e centro de massa, com justificativas baseadas na versão *integral da derivada* ou resultado equivalente.

Chamaram-nos atenção as justificativas dadas por Simmons (1987, pp. 298-299) para as aplicações de área, pois sem ter abordado diferenciais, ou elementos infinitesimais, escreve

$$A = \int dA = \int_a^b f(x)dx,$$

considerando "pedaços convenientemente pequenos" de área, o que envolve o campo semântico do pensamento infinitesimal. O mesmo procedimento é usado nas demais aplicações.

Embora concordemos que este campo semântico do pensamento infinitesimal é fértil para tratar do TFC e de suas aplicações, discordamos da mudança de campos semânticos, sem maiores explicações, onde nas demonstrações e resultados, as justificativas estão baseadas em argumentos que usam continuidade e limites, enquanto que nas aplicações aparecem justificativas baseadas nos infinitésimos.

Considerações finais

A análise do tratamento dado ao Teorema Fundamental do Cálculo por autores de livros-texto, nos permitiu observar que:

1) há variações na apresentação do teorema e na sua demonstração, assim como nas exigências de pré-requisitos para o encadeamento lógico dessa demonstração;

2) as motivações apontam o TFC como elemento facilitador para o cálculo da integral definida, com ênfase no cálculo de áreas e volumes;

3) a presença da noção geométrica, encontrada em todos os autores, está relacionada à noção visual de área;

4) as aplicações e os exercícios propostos são usados ora como modelos de aplicação direta da teoria para resolução de exercícios propostos, ora como complementos da própria teoria.

Consideramos que o livro-texto desempenha papel relevante na prática pedagógica de Cálculo, entretanto a diferença de tratamento em termos da apresentação, da nomenclatura, da forma de demonstração, da escolha de argumentos etc., aponta para a necessidade de um uso criterioso de um livro didático como bibliografia básica ou complementar, e o cuidado que devemos ter ao escolher determinado livro para ser trabalhado em sala de aula, ou ao sugerir aos alunos que procurem na biblioteca qualquer livro sobre o assunto, para não transparecer a idéia de que "é tudo a mesma coisa".

Os objetivos do professor em relação à aprendizagem, ou seja, o "que", "como" e "porque" o aluno deve saber um conteúdo específico é que devem nortear a(s) escolha(s) da abordagem do TFC. É fundamental, portanto, que o professor tenha claro que outras formas de tratamento estão sendo deixadas de lado em nome de um direcionamento pré-estabelecido, por ele ou pela instituição. Um processo de escolhas não claramente definido e não explicitado pelo professor, (im)põe ao aluno uma produção de significados segundo uma demanda dos modos do direcionamento tutelar do professor ou do próprio livro-texto, limitando ou bloqueando as possibilidades do aluno de desenvolver outros tipos de produção de significado para a formação do objeto matemático que o aluno deve apreender.

Com base na nossa vivência enquanto professores de Cálculo, e fundamentando-nos na teoria dos Campos Semânticos (Lins, 1993) acreditamos que a utilização de mais de um campo semântico não constitui obstáculo para a aprendizagem do aluno, desde que ele esteja familiarizado com essa diversificação. Acrescenta-se a isso que a correlação entre esses campos, quando possível, certamente leva o aluno a um desenvolvimento cognitivo mais efetivo. Sendo assim, resta defender que discordamos, apenas, da mudança de campos semânticos, sem maiores explicações.

Particularmente na análise dos livros, observamos que nas demonstrações e resultados as justificativas estão baseadas em argumentos que usam continuidade e limites, enquanto que em algumas aplicações aparecem justificativas baseadas nos infinitésimos, onde podemos evidenciar uma diversificação de justificativas, e portanto de campos semânticos. Tal diversidade, sob nosso ponto de vista, deve ser realçada e tomada como um caminho eficaz a seguir na direção da aprendizagem.

É mais do que claro que a atitude do professor em sala de aula não pode ser imputada, de maneira absoluta, como decorrência imediata do discurso apresentado pelo livro-texto. A atitude do professor e dos alunos frente a um texto, ou a um determinado discurso, depende, na verdade, da visão e da postura crítica com que eles se assumem em relação ao conhecimento sistematizado. Entretanto, é também mais do que claro que a crença na autoridade concedida pelo discurso científico do livro texto — que supõe um interlocutor pleno, afastado do interlocutor real, do aluno que precisa aprender — acaba influenciando, as escolhas e decisões de sala de aula. Estas, dependem, sempre, da ação mediadora do professor.

Notas

[1] Este artigo é resultado de pesquisa realizada no Subgrupo de Cálculo do GPA — Grupo de Pesquisa-Ação — do Departamento de Matemática da UNESP, Rio Claro-SP, Brasil, durante o ano de 1994, sob a orientação do Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino.

[2] Alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, IGCE, UNESP, Rio Claro-SP, Brasil.

[3] Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", uma das três universidades públicas do Estado de São Paulo, Brasil.

[4] Esta importância também é evidenciada em Boyer (1959, p. 10) : "This relationship between the derivative and the definite integral has been called *the root idea of the differential and integral calculus*".

[5] (5.16) Definição: Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a,b]$. A integral definida de f desde a até b, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, é dada por $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_i f(w_i)\Delta x_i$ desde que o limite exista.

Referências

Ávila, G. S. S. (1981). *Cálculo 1: Funções de uma variável* (4ª ed.). Rio de Janeiro: LTC.

Baldino, R. R. (1985). O aluno real. *Linha direta, 1*. Rio Claro: SBEM.

Baldino, R. R. e Cabral, T. C. B.(1994, Dezembro). A pulsão em um caso de dificuldade especial em cálculo. *Educação e Sociedade*, 485-500.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development.* Nova Iorque: Dover Publications.

Carvalho e Silva, J. (1994). *Princípios de Análise Matemática Aplicada.* Lisboa: McGraw-Hill.

Demidovich, B. e outros (1986). *Problemas e exercícios de Análise Matemática* (5ª ed.). Moscovo: Editora Mir.

Guidorizzi, H.L. (1985). *Um curso de Cálculo* (Vol.1). Rio de Janeiro: LTC.

Kaplan, W. e Lewis, D. J. (1972). *Cálculo e Álgebra Linear: Vetores no plano e funções de uma variável* (Vol.1). Rio de Janeiro: LTC.

Lang, S. (1977). *Cálculo* (Vol.1). Rio de Janeiro: LTC.

Leithold, L. (1982). *O Cálculo com Geometria Analítica* (Vol. 1) (2ª ed.). São Paulo: HARBRA.

Lins, R. C. (1993). Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais sólidas as bases da pesquisa. *Revista de Educação Matemática, 1*(1), 75-91.

Lins, R. C. (1994). O modelo teórico dos campos semânticos: Uma análise epistemológica da Álgebra e do pensamento algébrico. *Dynamis, Revista Tecno-Científica, 2*(7), 29-39.

Piaget, J. (1973). *Problemas de Psicologia Genética.* Rio de Janeiro: Forense.

Piskounov, N. (1977). *Cálculo Diferencial e Integral* (Vol. 1) (5ª ed.). Porto: Lopes da Silva.

Simmons, G. F. (1987). *Cálculo com Geometria Analítica* (Vol. 1). São Paulo: McGraw-Hill.

Struik, D. J. (1989). *História concisa das Matemáticas.* Lisboa: Gradiva.

Swokowski, E. W. (1983). *Cálculo com Geometria Analítica* (Vol. 1). São Paulo: McGraw-Hill.

Toumasis, C. (1993). What is the fundamental theorem of integral calculus? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(5), 685-687.

Armindo Cassol, IGCE, UNESP, Rua 10, nº 2527. Caixa Postal 178, CEP 13500-230, Rio Claro-SP, BRASIL.

Claudia Laus Angelo, IGCE, UNESP, Rua 10, nº 2527. Caixa Postal 178, CEP 13500-230, Rio Claro-SP, BRASIL.

Lígia Arantes Sad, IGCE, UNESP, Rua 10, nº 2527. Caixa Postal 178, CEP 13500-230, Rio Claro-SP, BRASIL.

Maria Regina Gomes da Silva, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP, Campus de Bauru, Avenida Luiz Edmundo C. Coube s/n, Vargem Limpa, 17033-360 Bauru-SP, BRASIL.

RESUMO. Neste artigo, apresentamos um exame do tratamento do Teorema Fundamental do Cálculo nos livros mais freqüentemente citados nas bibliografias de programas de cursos de Cálculo, no ensino superior. Nosso interesse está voltado para a metodologia visando ao ensino-aprendizagem. Analisamos, nas exposições do teorema e da demonstração, a exigência de pré-requisitos, o encadeamento lógico da demonstração, as motivações elegidas, a presença da noção geométrica, as aplicações e os exercícios propostos. Para esta análise tomamos como base a teoria dos Campos Semânticos (Lins, 1993). Concluímos que o objeto matemático Teorema Fundamental do Cálculo não é exatamente o mesmo para autores diferentes, tanto em sua *formulação como em seu tratamento. Concluímos também que os autores supõem um interlocutor pleno que se afasta do interlocutor real, o aluno que precisa aprender.*

ABSTRACT. This paper analyzes the Fundamental Theorem of Calculus as it is presented in the most quoted text books in bibliographic references and syllabuses of college calculus courses. We focus on the teaching/learning methodology at work in these textbooks. In the analysis of the theorem and of its demonstration, we consider the following related aspects: pre-requisite requirements, logical links of the demonstration, the elected motivations, the presence of the geometric notion, applications, as well as proposed exercises. Such analysis is supported by the theory of Semantic Fields (Lins, 1993). We come to the conclusion that the Fundamental Calculus Theorem as a mathematical object is not exactly the same to different authors, not only in its formulation, but also in the way it is treated. We also conclude that the authors assume an ideal "complete interlocutor" that does not match the real interlocutor, i. e. the student who needs to learn.