Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos

Margarida Junqueira
Escola Secundária de S. João do Estoril

Introdução

A importância da Geometria nos currículos dos ensinos básico e Secundário é, na actualidade, largamente reconhecida (Hershkowitz, 1994). Esta disciplina é uma fonte de problemas não rotineiros, que propiciam o desenvolvimento, entre outras, das capacidades de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação, identificadas como fundamentais para os cidadãos no presente e no futuro (NCTM, 1991). Discutem-se, no entanto, abordagens diversificadas para a Geometria, propondo-se conteúdos e metodologias variadas.

A discussão debruça-se, entre outros temas, sobre as potencialidades das novas ferramentas computacionais — os Ambientes Geométricos Dinâmicos (AGD) (Noss, Hoyles, Healy e Hoelzl, 1994), no ensino e aprendizagem da Geometria. Recorrendo a estes ambientes é possível fazer investigações e resolver problemas que anteriormente apenas estavam reservados a alguns, o que leva a defender que o tipo de trabalho realizado pelos especialistas geómetras está agora ao alcance dos professores e dos alunos nas escolas.

Esta *promessa* dos criadores desses ambientes, embora suportada por investigação, necessita de estudos mais aprofundados. Torna-se necessário perceber como é que a realização de actividades com recurso aos AGD influencia o ensino e aprendizagem da Geometria, que novos tipos de actividades se devem propor e como é que devem ser usadas nas aulas (Laborde, 1993a; 1993b). Isto é uma questão pertinente, sobretudo nas escolas portuguesas, em que os AGD estão a dar os primeiros passos, e consequentemente a investigação neste domínio é ainda muito restrita.

Para investigar as aprendizagens dos alunos em contextos em que se introduzem ambientes computacionais, podem colocar-se diferentes questões. Se se assumir que os alunos desempenham um papel activo na construção dos seus conhecimentos e competências, resulta que uma questão importante a colocar é: *o que é que os alunos fazem com esta máquina?* (De Corte, 1992). No caso da Geometria e dos AGD, a questão pode formular-se do seguinte modo:

- Como é que os alunos exploram construções geométricas num ambiente dinâmico?
- Como é que essa exploração os habilita a compreender os objectos e relações geométricas, a formular conjecturas e a elaborar argumentos indutivos e dedutivos?

No sentido de encontrar respostas para estas questões desenvolveu-se um estudo[1] que tinha como finalidade *caracterizar a Geometria que fazem os alunos quando interagem com um AGD*, especificamente através da *descrição, análise e interpretação dos processos desenvolvidos para:*

- *fazer construções geométricas;*
- *justificar os processos de construção;*
- *investigar as construções e descobrir propriedades das figuras.*

Este artigo começa por abordar as linhas teóricas que enquadraram o estudo, visando a aprendizagem da Geometria com especial destaque para o papel dos novos ambientes computacionais. Descreve-se em seguida um modelo de abordagem da Geometria recorrendo aos AGD que tem como referência algumas das indicações metodológicas propostas nos currículos da Nova Reforma. Expõe-se depois a metodologia utilizada no estudo e por último apresentam-se as conclusões mais relevantes sobre os processos referidos em cima.

Aprendizagem da Geometria e os AGD

A discussão sobre a problemática da aprendizagem da Geometria com recurso aos AGD inicia-se através de uma perspectiva generalista em que se analisam as suas potencialidades para o desenvolvimento de *estratégias de aprendizagem poderosas* para a aprendizagem desta disciplina. Passa-se depois para perspectivas mais restritas, reflectindo sobre: (i) a noção de *figura geométrica* e o estatuto das construções geométricas enquanto forma de representar as figuras, particularmente quando são feitas num AGD; (ii) o papel da *prova* e da *formulação de conjecturas* na actividade matemática e as ampliações que os AGD podem trazer a essa actividade.

Estratégias de aprendizagem poderosas e os AGD

As ferramentas computacionais só podem constituir um veículo para a construção de conhecimentos, capacidades e atitudes, se devidamente integradas em potentes ambientes de ensino e aprendizagem, isto é em situações que promovam no aluno os processos de aprendizagem necessários para atingir os objectivos educacionais desejados. Esta ideia leva De Corte (1992) a formular a noção de *ambientes de aprendizagem poderosos*, baseado numa revisão dos trabalhos de diversos investigadores dos processos de ensino e aprendizagem, nomeadamente naqueles que utilizaram o computador. No quadro 1 sintetizam-se as dimensões e respectivos princípios orientadores dessa noção[2].

Quadro 1. Ambientes de aprendizagem poderosos.

Dimensões	Princípios orientadores
Conteúdos: (visam a formação das competências)	• conhecimentos específicos • métodos heurísticos • estratégias de metacognição • estratégias de aprendizagem
Métodos de ensino:	• modelação • apoio • estruturação • articulação • reflexão • exploração • generalização
Sequência de tarefas de aprendizagem	• complexidade e diversidade progressivas • competências gerais antes de competências específicas
Contexto social de aprendizagem	• aprendizagem de forma contextualizada • contacto e observação de especialistas • aprendizagem de forma intrínseca • organização de diálogos

Os ambientes que permitem fazer construções no ecrã de um computador utilizando propriedades das figuras geométricas, e ainda manipular essas construções conservando as propriedades usadas, permitem criar estratégias para o ensino e a aprendizagem da Geometria que integram as quatro dimensões do modelo de De

Corte (1992).

Os *conteúdos* aparecem como a primeira dimensão desse modelo e englobam, para além de conhecimentos específicos, outras competências. Os ambientes geométricos computacionais proporcionam a construção de uma base de conhecimentos sobre Geometria, mas, sobretudo, "apoiam os alunos nas capacidades de resolução de problemas: planeamento (controlo), conjecturação (heurísticas), e flexibilidade (controlo e heurísticas)" (Dreyfus, 1992, p. 264). Constituem uma "andaimaria computacional (*computacional scaffolding*)" que sustenta o desenvolvimento das ideias dos alunos e lhes permitem construir o seu conhecimento geométrico a partir do que para eles é uma "abordagem 'natural'" (Noss e outros, 1994, p. 360). Para resolver um determinado problema os alunos começam por ensaiar soluções aproximadas que se sentem capazes de fazer. Essas tentativas heurísticas levam-nos a ter intuições que lhes permitem descobrir soluções para os problemas.

Também os *métodos de ensino* referidos por De Corte podem ser implementados com recurso aos ambientes computacionais geométricos. Segundo Schwartz (1992) o sentido de competência inclui o desenvolvimento da capacidade e da disposição dos alunos para fazer e explorar conjecturas. Estes ambientes são poderosos para a indução de descobertas em Geometria, que podem ser formuladas através de conjecturas. Os alunos podem construir figuras, manipulá-las, ser levados a intuir as suas propriedades e a sentir a necessidade de descobrir todos os casos em que estas se mantêm (Saraiva, 1992). Utilizando o computador, "o estudante pode 'ver' com os seus olhos, e com os olhos da mente, os invariantes de uma forma que sofre transformações dinâmicas" (Hershkowitz, 1994, p. 167). Estes são comportamentos típicos dos geómetras que os alunos podem modelar e adoptar na resolução de problemas de Geometria, incrementando a sua compreensão e o seu à-vontade nesta disciplina.

A interacção com estes ambientes computacionais fomenta igualmente a articulação e a reflexão, no sentido que De Corte (1992) dá a estes termos. Utilizando-os como "espelhos intelectuais", os alunos podem testar as suas ideias e delinear novas relações entre os objectos em estudo (Schwartz, 1989, p. 58). O *feedback* devolvido pela manipulação das construções no ecrã do computador apoia o aluno na resolução dos problemas e leva-o a reflectir sobre os processos de resolução. Esta reflexão produz-se não apenas como consequência da informação devolvida, mas também através de uma visualização baseada num processo interactivo entre raciocínio indutivo e dedutivo (Laborde e Laborde, 1992). As explorações desenvolvidas em ambientes computacionais fazem com que o aluno compreenda as relações entre os conceitos geométricos de uma forma mais profunda, e levam-no a pensar de um modo mais geral e mais abstracto.

A terceira dimensão do modelo de De Corte refere a *sequência de tarefas de aprendizagem*, nomeadamente a sua complexidade e diversidade progressivas. Nos novos ambientes geométricos pode ser executado um maior leque de acções e objectos mais complexos podem ser manipulados facilmente, permitindo a realização de tarefas progressivamente complexas, e de uma complexidade maior do que as que eram executadas com as ferramentas clássicas (Laborde, 1993b). Essa complexidade, se for induzida através de situações de ensino e aprendizagem adequadas, conduz a um progresso intelectual dos alunos.

Condicionalismos de ordem diversa têm levado a que as actividades com recurso a esses ambientes aconteçam em grupo, o que permite criar *contextos sociais* favoráveis à aprendizagem, quarta dimensão do modelo de De Corte. Como referem Battista e Clements (1992) uma das forças destes ambientes é a geração espontânea de aprendizagem cooperativa. McCoy (1992) concluiu que, pelo facto de nestes contextos os alunos terem de comunicar com os outros membros do grupo, bem como com o professor, se geram discussões facilitadoras da organização do seu próprio processo de raciocínio, levando-os a aprender de uma forma intrínseca.

Em síntese, como salienta o NCTM (1991), os programas de computador que permitem aos alunos construir figuras geométricas e efectuar medições tendem a criar um ambiente propício à investigação das propriedades e relações geométricas. A resolução de problemas de Geometria segue, assim, uma via semelhante à utilizada pelos especialistas desta disciplina.

O facto de as actividades com computador se realizarem habitualmente em grupo desenvolve nos alunos um acréscimo de competência, quer no domínio específico da Geometria, quer no domínio geral de resolução de problemas, nomeadamente na colocação e validação de conjecturas.

Figuras geométricas

A dualidade de perspectivas em que a Geometria tem sido considerada — modelação do espaço físico e teoria axiomática — conduziu a uma dualidade na natureza das figuras geométricas. Por um lado são entidades materiais traçadas em papel, anteriormente na areia, mais recentemente nos ecrãs dos computadores, mas também são objectos de uma teoria, resultantes de uma abstracção da realidade (Laborde, 1993a). Para retratar esta dupla natureza tem sido proposto distinguir entre *desenho* e *figura*. O *desenho* refere-se à entidade material, enquanto que a *figura* se refere a um objecto da teoria, ou como diz Parzysz (Laborde, 1993a, p. 49) "o objecto geométrico que é descrito pelo texto que o define". Esta definição pressupõe que o significado de uma figura não pode ser retirado apenas de um desenho, mas tem de ser dado numa forma discursiva.

Embora os geómetras adoptem algumas convenções que os ajudam a ultrapassar as limitações das representações gráficas materiais, para Laborde (1993a, p. 52) existe sempre um hiato entre *desenho* e *figura*, por duas razões:

- apenas alguns aspectos dos desenhos são relevantes para o problema a resolver; a interpretação do desenho depende das hipóteses levantadas no problema que só podem ser explicitadas por meio de uma linguagem;
- um desenho em Geometria não pode expressar a variabilidade de elementos das figuras, enquanto que a formulação em linguagem natural, ou por meio de uma expressão simbólica, torna possível definir um elemento variável se se indicar o universo a que pertence.

Uma figura da Geometria Euclidiana é um objecto da teoria, o significado, e pode originar vários significantes, desenhos ou descrições discursivas (Laborde, 1993a). Muitos problemas em Geometria consistem em mostrar que diferentes descrições caracterizam a mesma figura, ou em descrever uma figura por processos diferentes. Por exemplo, um *losango* pode ser descrito como um *quadrilátero em que os lados opostos são paralelos e iguais* ou como um *quadrilátero em que as diagonais são perpendiculares e se bissectam.*

Segundo Laborde (1993a) o facto de não se clarificar perante os alunos a distinção entre *desenho* e *figura*, atrás referida, dificulta a sua análise teórica das figuras. Como a literatura mostra (Hershkowitz, 1989) os conceitos próprios que os alunos constroem sobre as figuras geométricas privilegiam a aparência material dos desenhos, o que introduz alguns obstáculos na análise teórica das figuras.

Os obstáculos causados pelos aspectos perceptuais dos desenhos têm sido estudados intensivamente e foram sintetizados por Yerushalmy e Chazan (1990) nas três categorias que se referem a seguir.

Modos de 'ver' um desenho. As regras da psicologia gestaltista permitem prever o modo mais usual como um desenho é visualizado. Por vezes, essa visualização pode não apoiar um raciocínio que conduza à solução do problema, como mostra o exemplo seguinte (figura 1) proposto por Duval (Laborde, 1993a, p. 53).

O desenho [figura 1] foi dado aos alunos acompanhado da informação adicional de que [BC] e [B'C'] são paralelos, bem como [AB] e [A'B'] e [AC] e [A'C']. [Os alunos] tinham de provar que A é o ponto médio de [B'C']. Duval refere que apenas 18% dos alunos conseguiu executar a tarefa. Visualmente o desenho representa quatro triângulos num maior em vez de três paralelogramos [o que constitui a forma mais adequada de interpretar o desenho para resolver o problema].

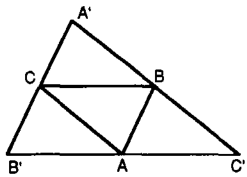


Figura 1. Neste desenho é mais fácil visualizar quatro triângulos num maior do que três paralelogramos.

Para muitos alunos, a capacidade para "atingir de forma selectiva e sequencial as partes e o todo" não se desenvolve facilmente. De acordo com o modelo de van Hiele de desenvolvimento do raciocínio geométrico[3], os alunos começam por interpretar as figuras/desenhos como um todo e só num segundo nível é que são capazes de observar diferentes partes de um desenho e analisar propriedades das figura.

Particularidade de um desenho. Na maioria das aulas de Geometria os desenhos são apresentados como modelos que representam uma classe de objectos, nos quais está contida a *essência da situação.* Contudo, cada desenho tem características próprias que não são representativas da classe. Por exemplo, um triângulo acutângulo escaleno, que normalmente representa um *triângulo qualquer*, não apresenta ângulos rectos ou obtusos. Segundo Presmeg (Yerushalmy e Chazan, 1990, pp. 199-200) este obstáculo "apanha os alunos na ratoeira do caso concreto de uma imagem ou desenho que pode fazer pensar em detalhes irrelevantes, ou mesmo introduzir dados falsos". Por exemplo, alguns alunos consideram paralelos determinados segmentos de recta de uma figura só porque estes o aparentam ser no desenho que a representa.

Desenhos tipo como modelos. Através da instrução os alunos constroem conceitos geométricos próprios que são parciais (não incluem todos os aspectos da definição) ou são incorrectos (incluem atributos que não lhes pertencem). Esses conceitos são fortemente influenciados pelos exemplos prototípicos das figuras, isto é, os exemplos privilegiados que a investigação tem mostrado serem adoptados como modelos dos conceitos geométricos (Hershkowitz, 1989). Por exemplo, na figura 2 os três triângulos são rectângulos, mas A é o triângulo rectângulo *mais típico.*

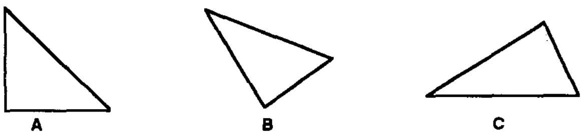


Figura 2. Triângulos rectângulos sucessivamente mais difíceis de identificar.

Segundo Matos (1992b, p. 109) a construção dos conceitos geométricos não é apenas influenciada pelos exemplos prototípicos. Em certos casos torna-se necessária uma "interpretação dinâmica que tenha em conta as acções que os alunos esperam realizar quando se lhes pede que desenhem determinados elementos das figuras geométricas". Para essa interpretação Matos (1992b, p. 99) utiliza a noção de *guião* (*script*) desenvolvida por Schank e Abelson — "um guião é uma sequência coerente de acontecimentos esperados pelo indivíduo, que o envolvem como participante ou como observador". Por exemplo, numa investigação relatada por Hershkowitz (1989), em que foi solicitado aos alunos que desenhassem diagonais de diferentes polígonos, estes apenas traçaram diagonais contidas no interior dos polígonos côncavos (figura 3), isto é utilizaram o *guião* que lhes tinha permitido resolver o problema em contextos semelhantes (Matos, 1992b).

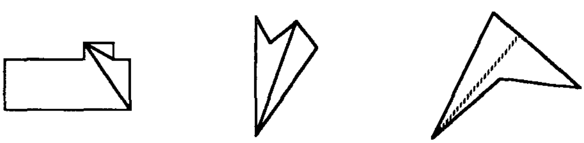


Figura 3. 'Diagonais' desenhadas por alunos em polígonos côncavos.

Figuras, construções geométricas e os AGD

Desde sempre, as construções geométricas constituíram uma forma de representar figuras em que se procura materializar as suas propriedades mais do que a sua aparência. Os matemáticos gregos clássicos faziam construções utilizando apenas régua e compasso, o que deu origem a interessantes problemas de Geometria. Por exemplo, a construção de um segmento com o dobro do comprimento de um segmento dado e de um quadrado com o dobro da área de um quadrado dado, levaram ao problema da determinação do lado de um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado. Ao longo de vários séculos procurou-se a solução para este problema que no final do século XIX se demonstrou ser impossível de resolver apenas com régua e compasso. Mas o principal interesse da procura de soluções para este problema, e para outros problemas de construção geométrica, esteve na investigação das figuras que propiciou e na descoberta das suas propriedades.

A realização e exploração de construções geométricas, praticada pelos especialistas geómetras ao longos dos tempos, constitui uma forma poderosa de ensinar e aprender a Geometria. Pode ser muito ampliada se recorrer aos AGD. Estas ferramentas computacionais possibilitam a construção de figuras geométricas utilizando explicitamente as suas propriedades, mas, sobretudo, viabilizam a variação dessas construções, proporcionando a visualização de muitas e diferentes representações de uma figura. Por exemplo, no ambiente computacional dinâmico *Cabri-géomètre* é possível construir um losango utilizando propriedades das suas diagonais: bissectam-se e são perpendiculares. Ao deslocar com o rato, no ecrã do computador, os pontos de base dessa construção, esta toma diferentes aparências mas conserva sempre as propriedades referidas, bem como outras decorrentes dessas (por exemplo, os quatro lados iguais, os ângulos opostos iguais, etc.). A figura 4 tenta transmitir esta ideia. Deslocando certos pontos (vértices) em **A** a construção adquiriu sucessivamente as aparências **B** e **C**, mas manteve as propriedades do losango. Num AGD é pois possível materializar um *losango qualquer*, salientando as propriedades dessa figura e não só à sua aparência.

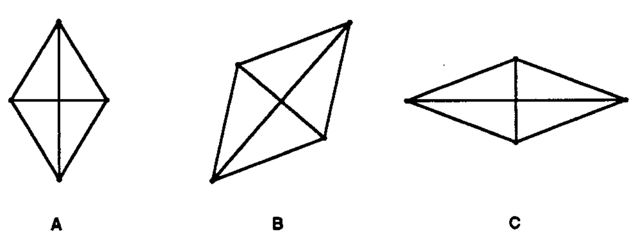


Figura 4. Aparências da construção de um losango num AGD obtidas por deslocação de vértices.

O processo utilizado para obter uma construção num AGD determina a forma como ela pode variar e as diferentes aparências com que pode ser visualizada. Voltando ao exemplo do losango, também é possível construi-lo colocando adequadamente quatro pontos no ecrã do computador, (os vértices) e construindo os quatro segmentos (os lados) definidos por esses pontos. No entanto a construção assim obtida *desmancha-se* (Noss e outros, 1994), isto é, quando se desloca um desses vértices perde a aparência da figura losango, uma vez que não foi feita recorrendo a uma descrição explícita das suas propriedades e relações geométricas características. No entanto, se se construírem os vértices do losango a partir de dois segmentos de recta perpendiculares que se bissectam, obtém-se um losango *resistente* (Laborde, 1993a), isto é, quando se manipula a construção, esta conserva sempre a aparência do losango, mas, sobretudo, conserva as relações utilizadas pára a fazer e permite visualizar outras relações e propriedades decorrentes de essas.

Uma construção feita num AGD, visualizada no ecrã de um computador, representa uma figura geométrica definida pelo conjunto de propriedades e relações que se conservam invariantes através da manipulação. Na medida em que através dessas construções é possível, por exemplo, visualizar *figuras quaisquer,* elas adquirem um estatuto diferente das construções feitas em papel com régua e compasso. Por isso Laborde (1993a) considera que estas novas representações materiais dos conceitos geométricos estão "mais próximas" da noção teórica de figura geométrica.

Conjecturas e provas

Habitualmente os matemáticos chamam *prova* ao raciocínio lógico-dedutivo que utilizam para estabelecer a verdade das suas afirmações e para comunicarem uns com os outros. A prova é um argumento que convence alguém que sabe do assunto. Mas é preciso ir mais ao fundo na questão. Se se analisar o papel da prova na actividade dos matemáticos, em particular o facto de estes procurarem, de forma sistemática, novas demonstrações para teoremas clássicos — como é o caso, por exemplo, do teorema de Pitágoras — verifica-se que a prova leva também à colocação de novos problemas e consequentemente à criação de nova Matemática:

> A prova tem vários objectivos simultâneos. Sendo exposta ao escrutínio e ao julgamento de uma nova audiência, a prova é sujeita a um processo constante de crítica e revalidação. Erros, ambiguidades e equívocos são desfeitos pela exposição permanente. [...] A prova, em última análise, aumenta a compreensão, através da revelação do âmago do assunto. A prova faz surgir nova matemática. O jovem matemático que estuda provas chega mais perto do processo de criação de nova matemática (Davis e Hersh, 1981, p. 151).

Esta noção de prova é influenciada pelas teses de Lakatos (1984) para quem a

Matemática não se desenvolveu num crescendo contínuo do número de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas através da melhoria incessante das conjecturas graças à especulação e à crítica, graças à lógica das provas e refutações. Na criação da Matemática colocam-se problemas, fazem-se conjecturas, analisam-se exemplos, apresentam-se contra-exemplos, refazem-se conjecturas; formula-se um teorema quando se considera que este refinamento de ideias responde a uma questão significativa.

Certas provas matemáticas, para além do sentido de *convencer* sobre o que se sabe, têm ainda outros dois: *esclarecer* sobre como se sabe e *interessar* em perceber porque é que se sabe (Barbin, 1993). Duas experiências de ensino e aprendizagem do teorema da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ilustram estes diferentes sentidos da prova (Barbin, 1993). Primeiro um trabalho realizado por Balacheff. Este autor propôs uma sequência em que começou por solicitar aos vários grupos de alunos de uma turma que medissem e somassem as amplitudes dos ângulos de vários triângulos. Perante os diferentes valores obtidos pelos grupos, a demonstração (tradicional) do teorema apareceu como um meio de pôr toda a turma de acordo sobre o resultado. Mas essa não é a única razão pela qual se constroem conceitos e saberes matemáticos. O primeiro objectivo do matemático é o de resolver os problemas, aparecendo a prova com uma das ferramentas dessa resolução. Esta ideia está subjacente numa outra sequência didáctica proposta por Dina van Hiele. Os alunos começaram por explorar pavimentações do plano, o que lhes permitiu organizar os conhecimentos geométricos em *árvore genealógica*. Começaram por comprovar experimentalmente a igualdade dos ângulos em *escadas* e *serras* (figura 5) — os *antepassados* — e a partir daí deduziram as proposições geométricas.

Figura 5. Igualdade de ângulos em *Escadas* e *Serras*.

O valor da soma das amplitudes dos ângulos de um triângulo apareceu a propósito do problema dos nós de uma pavimentação triangular (figura 6). Esse saber justificou-se pela necessidade de assegurar o *bom pegamento* da pavimentação e a demonstração surgiu quando se tratou de encontrar os *antepassados na árvore da Geometria*. Ao contrário da situação tradicional, em que a recta auxiliar usada nesta demonstração, paralela a um dos lados do triângulo e passando pelo vértice oposto, aparece como que por magia, nesta sequência didáctica foram os alunos quem descobriu a sua necessidade.

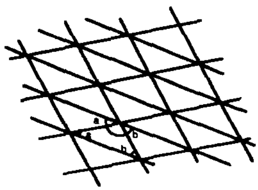


Figura 6. Pavimentação triangular e a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo.

Esta forma de ensino revela uma concepção construtivista do conhecimento matemático na medida em que, a partir de situações problemáticas, permite construir ao mesmo tempo conceitos e demonstrações. A actividade de demonstrar não tem como objectivo apenas *convencer* mas procura também compreender *comos* e *porquês*. A demonstração aprende-se por etapas em que o seu sentido é progressivamente esclarecido.

O modo como a demonstração é tradicionalmente apresentada aos alunos não facilita a sua aprendizagem. Considera-se a Geometria como o tópico privilegiado para a aprendizagem da prova, mas, para começar, propõe-se-lhes que provem propriedades fáceis de visualizar, o que os confunde sobre o papel da demonstração em Matemática (Dreyfus e Hadas, 1987).

Muitos alunos obtêm conclusões a partir de acções realizadas sobre um número reduzido de casos. Por exemplo, deduzem que a mediana divide um triângulo em dois triângulos com a mesma área a partir de medições efectuadas em três triângulos. Outros consideram que uma prova se refere a um único caso, aquele que está especificamente representado no desenho associado a essa prova. Esses alunos não têm em conta o aspecto genérico dos desenhos nas provas geométricas. Não compreendem que a validade da conclusão se pode generalizar a todas as figuras que satisfazem os dados. Alguns alunos rejeitam esta ideia ao ponto de considerarem que uma prova dedutiva não é suficiente para garantir a não existência de contra-exemplos (Chazan, 1993). A prova matemática aparece, em última análise, como uma espécie de retórica específica para a aula de Matemática, o que leva os alunos a não se empenharem na realização de provas, não porque não sejam capazes de o fazer, mas porque não vêem qualquer razão para o fazer (Balacheff, 1991a).

O sucesso ou o insucesso na produção de provas também aparece associado ao nível de van Hiele de desenvolvimento de raciocínio geométrico dos alunos. No Nível 1 (Visual) os julgamentos dos alunos baseiam-se apenas nos modelos das figuras que observam. Por exemplo, podem dizer que uma dada figura é um rectângulo porque *parece uma porta*. No Nível 2 (Descritivo/Analítico), embora continuem a observar ou a visualizar representações das figuras, baseiam os seus julgamentos na rede de relações nelas representadas. Por exemplo, um aluno pode pensar num losango como uma figura com os quatro lados iguais. Neste Nível são capazes de estabelecer e reflectir sobre relações entre figuras, mas ainda não são capazes de perceber o que significa dizer que uma propriedade decorre de outra. Nos Níveis 1 e 2 os alunos não duvidam da validade das suas observações empíricas, pelo que não atribuem significado à prova, vêem-na como a justificação do óbvio. O raciocínio dedutivo ocorre primeiramente no Nível 3 (Abstracto/Relacional), quando se estabelece a rede de relações lógicas entre propriedades dos conceitos. Por exemplo, podem dizer que um quadrado é um losango porque *é um losango com algumas propriedades extra* (Battista e Clements, 1992).

Conjecturas, provas e os AGD

A grande maioria das propriedades das figuras geométricas pode ser (re)descoberta através do seguinte método heurístico, proposto por Schumann (1991), que parte da realização de construções geométricas e coloca o desafio de perceber porque é que essas construções funcionam e descobrir as suas consequências:

1. Descoberta indutiva de teoremas através de construções gráficas.
   - Resolução de um problema adequado de construção. Resultado: uma configuração[4] geométrica.
   - Análise do resultado da construção (também através da inclusão e destaque de elementos essenciais, obtidos através de medições e de cálculos baseados em medições). Resultado: uma primeira suposição.
   - Realização de novas construções que tenham em consideração casos diferenciados e verificação da suposição nessas construções. Resultado: confirmação da suposição com a formulação de um primeiro teorema ou negação da suposição.
2. Descoberta e apresentação da prova.
   - Necessidade da prova: motivação.
   - Análise do problema: estabelecer as hipóteses e a tese.
   - Aplicação de métodos heurísticos para descobrir provas (avançar da hipótese para a tese, trabalhar em sentido contrário, raciocinar por analogia com outras

provas, etc.).

- Documentação da prova tendo em vista a sua compreensão.

3. Tratamento do teorema e da prova (metabase).
   - Discussão e explicação da metodologia para descobrir teoremas e provas.
   - Aplicação de métodos heurísticos, como especialização, generalização, comparação, inversão, para produzir novas afirmações.

(Re)descobrir propriedades geométricas com recurso apenas às ferramentas clássicas tem três grandes inconvenientes: o tempo que se gasta na construção de um número suficientemente grande de exemplos relacionados com a propriedade, com frequência pouco precisos; o tempo que se gasta na realização de medições e cálculos pouco precisos; as construções resultantes são estáticas e apenas podem ser tornadas flexíveis por meio da imaginação. Se a exploração das construções se fizer com recurso aos AGD ultrapassam-se estes inconvenientes. Realizando uma construção geométrica e observando as suas modificações, feitas em tempo real e segundo critérios do próprio utilizador, este pode perceber que características permanecem invariantes, quais as que se modificam, fazer experiências que lhe permitam compreender as causas das invariâncias, em suma, investigar as propriedades geométricas das figuras num permanente vai e vem entre indução e dedução, adaptando os métodos antigos à dinâmica do mundo actual.

A investigação (Battista e Clements, 1992) mostra que o trabalho de alunos que utilizaram ambientes geométricos computacionais tem uma qualidade manifestamente superior à usual. Ultrapassaram os conteúdos de Geometria habituais, reinventaram definições, fizeram conjecturas, colocaram e resolveram problemas significativos e desenvolveram provas originais. A formulação de conjecturas nem sempre acontece facilmente e, por vezes, causa mesmo frustação, sobretudo na fase inicial em que constitui um tipo de actividade com que a grande maioria dos alunos está pouco familiarizada. A força da evidência das imagens constitui um obstáculo à necessidade da feitura de uma prova para validar uma conjectura. Principalmente os alunos mais fracos formulam generalizações e consideraram-nas automaticamente válidas com base nos poucos casos por eles experimentados, mas, a pouco e pouco, passam da elaboração de generalizações por testagem de um número de casos particulares para a testagem de casos mais gerais. No final muitos alunos fazem conjecturas e sentem a necessidade de as justificar. Alguns percebem que os teoremas por si descobertos necessitam de ser provados antes de serem aceites como verdadeiros, ao contrário do que acontece com os teoremas dos livros de texto.

Observações análogas são também referidas por Saraiva (1992) num estudo que realizou com alunos do 10º ano de escolaridade, sobre exploração de figuras geométricas em computador, formulação de conjecturas e respectiva prova. Este autor salienta, em particular, o facto de alguns alunos conseguirem entender a importância da prova formal como meio de estabelecer a verdade matemática, principalmente no sentido de elucidar porque é que essa verdade acontece.

Novas perspectivas para abordar a Geometria

Os alunos do estudo referido em cima (Saraiva, 1992) tiveram um contacto com a Geometria bastante diferente do habitual em escolas portuguesas. De facto, têm estado arredadas dos nossos currículos, e da maioria das nossas salas de aula, abordagens experimentais da Geometria assentes num vai e vem entre indução e dedução.

A Nova Reforma criou uma oportunidade para alterar esta situação. Foi assim que, tendo como referência algumas das suas propostas, se concebeu um modelo de abordagem da Geometria que, a partir da exploração de figuras geométricas no ecrã do computador através de processos dinâmicos, visava levar os alunos a familiarizarem-se (Teodoro, 1993) com as figuras geométricas, as suas propriedades e aplicações.

Descreve-se a seguir como isto foi concretizado.

A Geometria no currículo da Nova Reforma

O ensino e aprendizagem da Geometria em Portugal, como em muitos outros países, atravessou uma séria crise, em grande parte consequência do movimento da Matemática Moderna que trouxe para o seu estudo o carácter excessivamente formal e abstracto da teoria de conjuntos. Anteriormente à Nova Reforma a Geometria reduzia-se na prática ao estudo de transformações geométricas e algumas das suas propriedades. Mas quase sempre esses conteúdos eram empurrados para o final do ano lectivo, sendo apresentados bastante à pressa e de um modo muito formal e teórico, subestimando-se a exploração de problemas geométricos através de abordagens intuitivas e manipulativas.

O reconhecimento dessa situação levou os autores dos novos programas a 'recuperar' a Geometria e a dar-lhe aí um lugar de destaque (Lobato, 1992). Como refere esta co-autora dos programas do Ensino Básico, este nível de ensino privilegia o desenvolvimento do conhecimento do espaço baseado sempre na experimentação sobre figuras. Nesta linha, indicam-se como objectivos os seguintes (DGEBS, 1991a, p. 11):

- Identificar, descrever e comparar figuras geométricas.
- Conhecer e aplicar propriedades e relações geométricas, nomeadamente a igualdade e a semelhança na análise de figuras e na resolução de problemas.
- Realizar construções geométricas usando instrumentos adequados.
- Efectuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro.
- Aplicar conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes na resolução de problemas.
- Reconhecer e aplicar simetrias, translações e rotações a um estudo dinâmico do plano.

Mas a parte mais inovadora desses programas são as metodologias que recomendam, as quais implicam o envolvimento activo do aluno na construção do seu conhecimento geométrico. Por exemplo, o programa do 7º ano refere (DGEBS, 1991a, p. 15):

> Pretende-se, na Geometria do 7º ano, fornecer um conjunto de conhecimentos básicos a partir de actividades de medição e construção e simultaneamente ir propondo situações tais que, através da análise e comparação de figuras, o aluno possa efectuar raciocínios dedutivos e indutivos, justificando propriedades simples, prevendo outras, comparando e sistematizando conhecimentos adquiridos fazendo eventualmente alguma demonstração desde que esta seja posta como um problema e encarada como um desafio.
> Ao resolver problemas geométricos, individualmente ou em grupo — através de construções, fazendo experiências, seleccionando estratégias, formulando hipóteses, descrevendo processos e justificando o modo de proceder — o aluno vai desenvolvendo não só a capacidade de raciocínio como também a capacidade de comunicação.

Estas mesmas ideias são desenvolvidas nos programas do 8º ano e do 9º ano (DGEBS, 1991a, pp. 31 e 47), e também no programa do Ensino Secundário (DGEBS, 1991b).

A Geometria através de construções em AGD

Foi com este pano de fundo que se concebeu e implementou uma experiência de ensino, a que se deu o nome *Cabri 9º 5 - Exploração de Construções em AGD*, que visou o ensino e aprendizagem da unidade Geometria no Plano no 9º ano de escolaridade e que utilizou como recurso o Cabri-géomètre. Esta experiência teve como ideia-chave a exploração de figuras geométricas pelos próprios alunos através da realização, justificação e investigação de construções resistentes, isto é, que conservassem determinadas características através do arrastamento.

Uma vez que normalmente os alunos não são peritos em colocar e resolver problemas, e podem mesmo não ter os conhecimentos geométricos necessários para elaborar argumentos dedutivos nem a capacidade de procurar respostas gerais, as actividades de construção podem ser um bom ponto de partida para os iniciar na actividade típica dos geómetras, (Yerushalmy, Chazan e Gordon, 1990). Tendo isto em conta, começou-se por solicitar aos alunos a realização de actividades que, de forma mais ou menos directa, propunham a construção de figuras geométricas. Através de um processo heurístico, gerado pelo *feedback* proporcionado pelo arrastamento do rato, os alunos executavam a construção no ecrã do computador e corrigiam-na até obterem as características da figura pretendida. A regra de resistência ao arrastamento obrigava-os a imaginar um processo de fazer a construção que tivesse subjacente uma descrição da figura em termos das suas propriedades e não se baseasse apenas na sua aparência.

Se se limitar o trabalho num AGD à realização de construções que não se desmanchem, corre-se o risco de se reduzir a actividade geométrica ao desenvolvimento de algoritmos mecanizados (Battista e Clements, 1992). Para conseguir que os alunos reconhecessem explicitamente propriedades das figuras e estabelecessem o seu relacionamento e ordenação lógica, solicitou-se que justificassem as construções, isto é, que explicitassem razões por que a construção funcionava. Considerou-se, neste caso, a justificação como actividade matemática não só com sentido de convencer da validade da construção, mas sobretudo de esclarecer como tinha sido feita e de interessar em perceber porque é que se tinha sabido fazer. A justificação de uma construção aparecia, neste contexto, como uma *prova que explica* (Chazan, 1993), tipo de provas que este autor considera particularmente adequadas para introduzir os alunos na necessidade da prova matemática.

Para aprofundar a actividade geométrica dos alunos, para além da dedução de propriedades das figuras já conhecidas, propôs-se também a pesquisa de outras propriedades, induzidas por observação da transformação das construções através do arrastamento. Solicitou-se que investigassem algumas das suas construções, que tentassem descobrir novas propriedades das figuras representadas e ainda que justificassem algumas das propriedades que descobriram.

Neste quadro as propriedades geométricas apareceram aos alunos como um recurso para a resolução de actividades específicas, e não como "uma coisa" que tinham de decorar e aplicar de forma rotineira.

Com a realização dessas actividades esperava-se que, progressivamente, os alunos identificassem propriedades das figuras geométricas, as ordenassem e estabelecessem relações entre elas. Por outras palavras, considerou-se que a *exploração de construções* em AGD, na perspectiva tripla: realização, justificação e investigação, poderia constituir uma estratégia de intervenção poderosa, no sentido de De Corte (1992), para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, em particular tendo em conta o modelo de van Hiele.

O modelo didáctico implementado está esquematizado na figura 7.

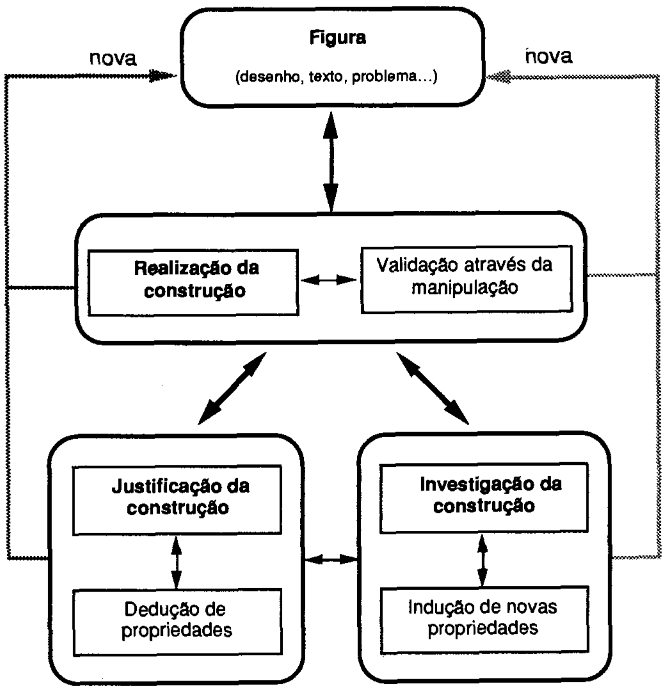


Figura 7. Uma abordagem da Geometria via construções em AGD

A experiência *Cabri 9º 5*

A experiência de ensino *Cabri 9º 5* teve lugar numa turma do 9º ano[5] de uma escola secundária dos arredores de Lisboa, no ano lectivo 1992/93. A unidade Geometria do Plano foi leccionada intercalando aulas em que a professora da turma apresentou conceitos e propriedades geométricas novos, com outras aulas em que os alunos realizaram actividades de construção de figuras geométricas e de exploração dessas construções (actividades essas que foram concebidas no quadro do modelo didáctico descrito na secção anterior).

A experiência ocupou vinte e quatro aulas, em duas fases. A primeira fase decorreu a meio do Segundo Período do ano lectivo e ocupou cinco aulas. Nesta fase, para além de testar condições logísticas, tiveram-se como principais objectivos habituar os alunos a trabalhar em grupo e proporcionar-lhes um primeiro contacto com o Cabri-géomètre. Assim, na primeira aula apresentou-se este programa computacional, tendo-se, desde logo, discutido a questão das construções que se desmancham ou não. Nas restantes aulas os alunos realizaram construções de um triângulo rectângulo, de um rectângulo e de um triângulo com os lados paralelos a outro. Descreveram os processos que utilizaram para obterem construções resistentes destas figuras e começaram a fazer pequenas explorações (descobriram que podiam transformar a construção do rectângulo num quadrado e verificaram que os ângulos de dois triângulos com os lados paralelos são iguais). As actividades foram propostas por meio de fichas de trabalho elaboradas pela professora da turma e pela investigadora[6].

As dezanove aulas que constituíram a parte principal da experiência realizaram-se no Terceiro Período do ano lectivo. Alternaram entre realização de actividades na sala dos computadores (CEM - onze aulas) e discussão das fichas de trabalho e apresentação de novos conceitos e propriedades na sala habitual (SH - oito aulas). Em média duas das quatro aulas semanais foram na sala dos computadores.

Para trabalhar nos computadores os vinte e oito alunos da turma formaram oito grupos (número de postos computacionais disponíveis). Nas aulas que tiveram lugar na sua sala habitual os alunos mantiveram os lugares usuais, onde trabalhavam aos pares na resolução de exercícios e problemas sempre que era caso disso.

A investigadora participou em todas as aulas da experiência. Nas que utilizaram o computador, acompanhou o trabalho dos grupos, dialogou com eles, apoiando-os na explicitação das suas ideias e na ultrapassagem de dificuldades.

O quadro 2 resume as aulas realizadas. Como se pode ver, na segunda fase, mais ou menos a meio e no final, os alunos realizaram duas fichas de Avaliação (cuja classificação foi tida em conta na sua classificação final). Estas fichas foram feitas com recurso ao Cabri-géomètre. Para a ficha Avaliação 1 os alunos mantiveram os seus grupos habituais. Para fazerem a ficha Avaliação 2 a investigadora e a professora da turma formaram pares. Para cada par escolheram-se alunos de nível idêntico e que estivessem habituados a trabalhar juntos.

Quadro 2. Resumo das aulas realizadas.

Nº	Data	Local	Sumário
Primeira fase			
1	09.03.93	SH	Figuras semelhantes. Semelhança de triângulos
2	11.03.93	CEM	Apresentação do Cabri-géomètre; exploração livre
3	12.03.93	CEM	Triângulo rectângulo (ficha 1)
4	15.03.93	CEM	Rectângulo (ficha 2)
5	16.03.93	CEM	Rectângulo (ficha 2). Triângulos de lados paralelos (ficha 3)
Segunda fase			
1	23.04.93	CEM	Triângulos e quadriláteros com os lados iguais (ficha 4)
2	26.04.93	CEM	Triângulos com dois lados iguais (ficha 5)
3	27.04.93	SH	Classificação e propriedades dos triângulos (ficha 6)
4	29.04.93	CEM	Hexágonos e triângulos inscritos em circunferências (ficha 7)
5	03.05.93	SH	Ângulo ao centro, corda e arco correspondente. Ângulo inscrito
6	04.05.93	CEM	Avaliação 1
7	10.05.93	SH	Propriedades do ângulo inscrito (ficha 8)
8	13.05.93	CEM	Propriedades da mediatriz. Circunferência circunscrita (ficha 9)
9	14.05.93	SH	Propriedades da mediatriz
10	17.05.93	CEM	Aplicações da mediatriz e circunferência (ficha 10)
11	18.05.93	SH	Propriedades geométricas em circunferências
12	20.05.93	CEM	Aplicações das propriedades das circunferências (ficha 11)
13	21.05.93	SH	Ângulos com o vértice na circunferência
14	24.05.93	CEM	Distância de um ponto a uma recta. Bissect. de um ângulo (ficha 12)
15	25.05.93	SH	Ângulos excêntricos da circunferência
16	27.05.93	CEM	Incentro de um triângulo (ficha 13)
17	28.05.93	SH	Revisões
18A	31.05.93	CEM	Avaliação 2 (metade da turma)
18B	01.06.93	CEM	Avaliação 2 (metade da turma)

Experiência de ensino uma metodologia para estudar processos desenvolvidos por alunos

A investigação levada a cabo visava descrever e interpretar processos desenvolvidos por alunos para fazer e explorar construções de figuras geométricas com recurso a um AGD. Pretendia-se observar esses processos como acontecem em tempo real e no seu contexto habitual, e ainda intervir no seu desenvolvimento ensaiando diferentes vias de actuação, como normalmente o professor faz.

Tendo em conta estes objectivos, considerou-se adequado implementar uma *experiência de ensino* (*teaching experiment*), "poderosa metodologia de investigação construtivista" (Lesh, Amit e Kelly, 1994, p. 160) "utilizada na formulação de explicações do comportamento matemático das crianças" (Cobb e Steffe, 1983, p. 83) que tem como objectivo "'apanhar' os processos no seu desenvolvimento e determinar como é que o ensino pode influenciar de maneira optimizada esses processos" (Kantowski, 1978, p. 45).

Esta caracterização de experiência de ensino desfaz qualquer associação apressada com a noção de estudo experimental, que o nome possa sugerir. Essas investigações visam determinar as causas dos fenómenos que estudam, formuladas através de hipóteses sujeitas a experimentações laboratoriais. As *experiências de ensino*, como aqui se consideram, têm como finalidade descrever e interpretar processos de desenvolvimento dos fenómenos sobre que se debruçam, induzidos por meio de intervenções planificadas.

Origens e desenvolvimento das experiências de ensino

Esta abordagem metodológica remonta aos trabalhos de Vygotsky e de outros psicólogos e pedagogos soviéticos seus contemporâneos. Mais tarde as experiências de ensino foram retomadas por investigadores norte americanos preocupados em estabelecer pontes entre a investigação educacional e a realidade das salas de aula. Kantowski (1978) promoveu uma ampla divulgação desta metodologia de investigação, que usou na sua tese de doutoramento para estudar o desenvolvimento de capacidades na resolução de problemas em Geometria. Outros autores norte americanos seguem as propostas de Kantowski, desenvolvem teoricamente as experiências de ensino e utilizam-nas nos seus estudos, principalmente Cobb e Steffe (1983).

Recentemente vários autores advogam as experiências de ensino como forma adequada de efectuar estudos em contextos de salas de aula reais. Por exemplo, Lesh e outros (1994) fazem a sua apologia no estudo do desenvolvimento do conhecimento matemático e das capacidades de alunos e professores.

Características das experiências de ensino

Identificam-se na literatura três características gerais das experiências de ensino. Em primeiro lugar a sua *natureza longitudinal*. "Uma característica geral das experiências de ensino é a interacção 'longo prazo' entre os experimentadores e um grupo de crianças" (Cobb e Steffe, 1983, p. 87), que duram normalmente períodos de seis semanas a dois anos. Também Kantowski (1978, p. 46) refere que o "tratamento instrucional" é aplicado e os dados são recolhidos num extenso período de tempo.

Uma segunda característica é o *estudo dos processos de passagem dinâmica de um estado de conhecimento para outro.* Embora tenha importância o que os alunos fazem, o maior interesse está em como o fazem (Cobb e Steffe, 1983). Para Kantowski (1978, p. 45) 'dinâmica' caracteriza numa palavra a experiência de ensino, uma vez que é "o movimento da ignorância para o conhecimento, de um nível de operação para outro, de um problema para uma solução" que interessa os investigadores. A terceira característica é a *natureza qualitativa dos dados.* Os dados qualitativos emanam de duas possíveis fontes. A primeira são *episódios de ensino* (*teaching episodes*), nos quais os dados tomam a forma de trocas textuais entre o professor e os alunos, bem como descrições dos contextos instrucionais e das respostas dos alunos nesses contextos. A segunda fonte são entrevistas clínicas conduzidas em momentos seleccionados da experiência de ensino (Cobb e Steffe, 1983). Estes autores salientam que nos seus estudos colocaram a ênfase em episódios de ensino, pois estes proporcionaram-lhes as melhores oportunidades para investigar as construções matemáticas dos alunos. Dada a sua natureza, os resultados das experiências de ensino são apresentados normalmente na forma de narrativas que incluem análise dos comportamentos observados e conclusões retiradas dessa análise (Kantowski, 1978).

Recolha e tratamento de dados na experiência *Cabri 9º 5*

Para caracterizar os processos desenvolvidos pelos alunos que constituíam o objectivo específico deste estudo, a principal fonte de dados foram sete episódios de ensino (Cobb e Steffe, 1983) realizados com pares ou trios de alunos de cada um dos grupos da turma. Os episódios de ensino aconteceram durante a segunda fase da experiência. Quatro mais ou menos a meio e os outros três perto do final, de acordo com as disponibilidades dos alunos. Todos os episódios obedeceram à mesma planificação geral, que teve a preocupação de respeitar as condições de trabalho habituais dos alunos. A investigadora propôs a cada grupo que refizesse e discutisse algumas das actividades que tinha resolvido nas aulas, nomeadamente aquelas em que detectou particularidades relevantes na resolução: dificuldades, contradições ou resoluções inesperadas. Cada episódio terminou com a resolução de uma actividade nova. Durante a realização das actividades a investigadora questionou bastante os alunos para os levar a falar sobre o que estavam a fazer, mas também lhes deu sugestões, para ultrapassarem dificuldades e para os levar a reflectir de forma mais aprofundada sobre os seus processos de resolução e para os ajudar a verbalizar as suas ideias. Segundo Kantowski (1978) em estudos deste tipo é aceitável dar sugestões aos sujeitos, de modo a serem observadas as aprendizagens que ocorram durante a situação de testagem.

Para cada um dos episódios de ensino elaborou-se um guião[7], o qual apenas referia as actividades a propor, seleccionadas das fichas que os alunos já tinham resolvido e ainda uma actividade nova. A forma como a discussão das actividades seria feita não estava estruturada, acontecia em função dos desempenhos dos alunos. Assim, por vezes, optou-se por seguir ou aprofundar ideias dos alunos e abandonar actividades pré-seleccionadas.

Os episódios de ensino ficaram registados em vídeo. Dificuldades de ordem técnica na realização das gravações estiveram na origem de terem sido realizados extra-aula e com um máximo de três alunos por grupo. Mas essa contingência revelou-se enriquecedora, uma vez que permitiu à investigadora concentrar a sua atenção num único grupo de alunos durante um maior período de tempo e levá-los a aprofundar o seu trabalho, ao contrário do que acontecia normalmente nas aulas, em que a maioria dos alunos tinha tendência para "despachar" depressa as tarefas propostas.

O acervo dos dados recolhidos foi submetido à técnica de análise de conteúdo, visando a formulação de categorias que permitissem descrever, analisar e interpretar os processos desenvolvidos pelos alunos para realizar, justificar e investigar construções geométricas. Para o efeito não se dispunha de um sistema de categorias pré-definido. As categorias obtidas (quadro 3) emergiram dos dados e foram refinadas em diferente etapas de análise.

A partir destas categorias e sub-categorias foi possível caracterizar a Geometria que os alunos participantes neste estudo fizeram, como se mostra a seguir.

Quadro 3. Categorias de análise.

Construções	Aparência das construções Percursos de construção Construções resistentes
Justificações	Descrição das construções Tipos de justificação Obstáculos na justificação das construções
Investigações	Observação de relações invariantes explicitadas Orientação da investigação de construções Destaque dado às relações que variam Ultrapassagem de obstáculos visuais Apropriação de uma investigação aberta Formulação de conjecturas
Construções + Justificações + Investigações	Utilização da manipulação

A Geometria feita por alunos com recurso a um AGD

Nesta secção referem-se os processos desenvolvidos pelos alunos para fazerem construções geométricas, justificarem os processos de construção utilizados e para investigarem as suas construções com vista à (re)descoberta de propriedades das figuras.

Realização de construções geométricas

Na experiência que se implementou propuseram-se aos alunos diversas actividades de construção geométrica, verificando a *regra da resistência*. Uma construção deveria basear-se em propriedades e relações da figura que pretendia representar de modo a conservar as suas características através da manipulação, e não "copiar" apenas a sua aparência, desmanchando-se em seguida.

A realização de construções geométricas com recurso ao computador suscitou a adesão da grande maioria daqueles alunos, sobretudo dos que participaram nos episódios de ensino. Sentiram que foram capazes de fazer as actividades propostas, ainda que em alguns casos necessitassem de apoio, ao contrário do que acontecia com muitas actividades nas aulas habituais, como afirmaram expressamente alguns alunos (Junqueira, 1994).

Sobre os processos de construção desenvolvidos destacam-se os pontos seguintes.

1. A aparência das figuras geométricas, considerada no sentido do Nível 1 de van Hiele, foi preponderante nas construções que os alunos fizeram. Indicadores desta tendência foram, por um lado, a necessidade, manifestada por quase todos os alunos, de reproduzir os desenhos propostos nas fichas de trabalho; por outro lado, a preferência manifestada pela realização de construções com a aparência de exemplos prototípicos das figuras geométricas (Hershkowitz, 1989), principalmente colocando-as na posição preferida, horizontal/vertical (Matos, 1992b).

O "conhecimento cultural" (Laborde, 1993a, p. 66) que os alunos constroem sobre as figuras geométricas leva-os a reconhecerem-nas e a analisarem-nas mais facilmente quando são representadas em posições familiares. Por outro lado, a maioria dos alunos gostava de apresentar "construções bonitas", como eles próprios diziam, e condicionalismos culturais faziam-nos considerar visualmente "mais bonitas" as construções na posição preferida (tendo em conta as imagens gráficas no ecrã do computador).

Por exemplo, para obter um quadrado inscrito numa circunferência, um grupo de alunos começou por fazer a construção na posição sugerida pela ficha (figura 8A), mas posteriormente rodaram o quadrado e colocaram-no com dois lados na horizontal (figura 8B). Interrogados sobre se a construção deixava de representar um quadrado por estar numa ou noutra posição responderam que não, mas que estavam "mais habituados àquela forma de quadrado, [em A] parecia mais um losango".

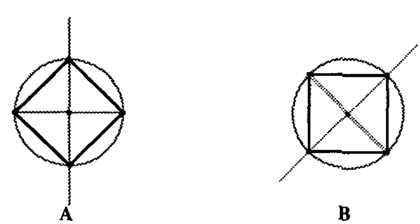


Figura 8. O quadrado B é mais típico do que o quadrado A.

A observação das construções com muitas e variadas aparências no ecrã do computador levou muitos alunos a generalizar os seus conceitos sobre as figuras geométricas exploradas durante a experiência de ensino — triângulos, quadriláteros e circunferência —, e a atribuírem menos importância à aparência das figuras.

Por exemplo, numa actividade da última ficha (Avaliação 2) apareceram triângulos rectângulos nas posições indicadas na figura 9.

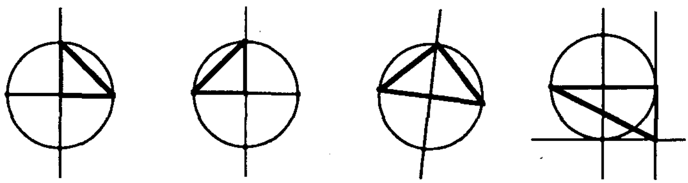


Figura 9. Triângulos rectângulos em diferentes posições.

2. Para fazerem as suas construções os alunos utilizaram processos de construção diversificados. Descobriram esses processos seguindo determinados percursos que se agruparam nos quatro tipos descritos a seguir.

- *Construções que se desmancham.* Os alunos obtinham uma construção que se desmanchava, aparentemente com as características solicitadas, mas que não resistia à manipulação, e ficavam-se por aí.
- *Construções que se desmancham, depois resistentes.* Os alunos começavam por fazer uma construção que se desmanchava, manipulavam-na e observavam a não conservação das características da figura. A partir daí descobriam processos de obter uma construção resistente, utilizando propriedades e relações geométricas.
- *Construções resistentes com ensaios.* Os alunos ensaiavam vários processos para obter uma construção resistente, em que utilizavam propriedades e relações geométricas.
- *Construções resistentes sem ensaios.* Os alunos, sem fazerem quaisquer ensaios, obtinham uma construção resistente, em que utilizavam propriedades e relações geométricas da figura.

Os dois primeiros tipos de percursos têm em comum o facto de os alunos terem começado por fazer tentativas que se desmanchavam, o que não acontece nos dois últimos, em que os processos de construção recorreram a propriedades e relações geométricas. No entanto, a classificação dos percursos feita não deve ser entendida hierarquicamente. Os mesmos alunos utilizaram um ou outro desses percursos em diferentes situações, consoante a figura a construir lhes era mais ou menos familiar.

3. Até ao final da experiência apareceram construções que se desmanchavam. Para alguns alunos a necessidade de obter construções que não se desmanchassem terá sido uma regra de jogo de que não compreenderam a necessidade. Mas, noutros casos, o regresso pontual a construções que se desmanchavam pode considerar-se

uma "alteração de tarefa" (Laborde, 1993a) resultante da necessidade de apresentar uma resposta, em situações em que os alunos não eram capazes de descobrir outra solução.

A maioria das construções realizadas começaram por se desmanchar, mas depois transformaram-se em resistentes. A realização de construções temporárias que se desmanchavam e sua manipulação pode ser considerada um mecanismo auxiliar que apoiava os alunos na realização de construções resistentes, mais definitivas, o que é afinal a ideia da colocação de andaimes (*scaffolding*) como referem Noss e outros (1994).

A visualização das suas ideias espelhadas no ecrã do computador (Schwartz, 1989) permitiu aos alunos, por um lado, perceber a incorrecção das construções quando estas se desmanchavam, e, por outro, testar a adequação das suas ideias para resolver os problemas em causa.

Por exemplo, para construir um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência, vários grupos começaram por construir dois ou mais pontos sobre a circunferência e as tangentes à circunferência nesses pontos (figura 10A). Deslocaram os pontos sobre a circunferência de modo a colocarem tangentes consecutivas, aparentemente, perpendiculares. A partir dessas tentativas descobriram que se os quatro pontos de tangência fossem os extremos de dois diâmetros perpendiculares a perpendicularidade das tangentes não se desmanchava (figura 10B).

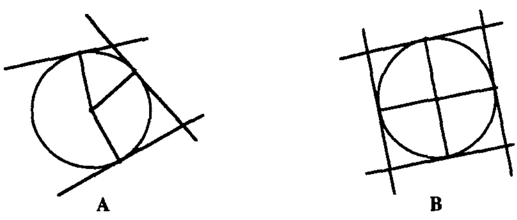


Figura 10. Tentativas para construir um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência.

Para realizar certas construções resistentes os alunos inventaram processos que depois passaram a repetir em novas construções — guiões, segundo Matos (1992b). Esses guiões tiveram um papel significativo no trabalho dos alunos, na medida em que lhes facultaram uma forma de iniciar as actividades propostas, e também uma certa "economia de pensamento" (Matos, 1994). No entanto, com frequência, esses guiões eram usados de forma automática, sem que os alunos tivessem muito explícitas as propriedades e relações geométricas que lhes estavam subjacentes.

Os guiões e a aparência visual pareciam garantir aos alunos a validade das suas construções.

Por exemplo, para obter o centro de uma circunferência os grupos adaptaram um algoritmo seu conhecido. Anteriormente tinham construído e observado que as mediatrizes dos três lados de um triângulo se intersectavam no mesmo ponto, o centro da circunferência circunscrita. Para resolver o novo problema todos os grupos inverteram esta situação, baseados no efeito visual familiar daquela sequência de acções. Nenhum grupo se lembrou de que bastavam duas cordas e duas mediatrizes para determinar o centro, apesar de só terem intersectado duas das três mediatrizes que construíram.

A influência deste guião levou um dos grupos a ignorar um processo correcto que tinham utilizado para fazer a construção (figura 11). Construíram o triângulo e a mediatriz de um dos lados, intersectaram essa mediatriz com a circunferência e determinaram o ponto médio do segmento definido por esses pontos de intersecção. Depois continuaram e construíram as mediatrizes dos outros dois lados e o seu ponto de intersecção.

Construção VISION10

Circunferência
Pontos sobre circ. *A*, *B*, *C*
Segmentos def. por 2 pontos *[AB]*, *[AC]*, *[BC]*
Pt. médio *D*
Recta perpendicular *r*
Intersecção recta-circ. *E*, *F*
Pt. médio *G*
Pt. médio *H*
Mediatrizes *s*, *t*
Intersecção de 2 rectas *I*

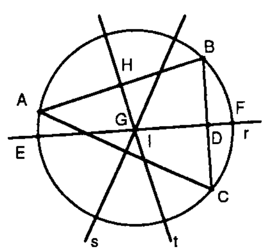


Figura 11. *História* da construção feita pelos alunos e registada pelo Cabri-géomètre[8].

A obrigação de realizar construções resistentes, ainda que de início pudesse parecer uma regra arbitrária aos alunos, foi um pretexto para a realização de actividades geométricas complexas. Ao procurarem processos de construção que conservassem determinadas relações e propriedades das figuras envolveram-se em explorações que lhes permitiram aprofundar os seus conhecimentos geométricos.

Justificação de construções geométricas

Durante a experiência esteve sempre presente a noção de que, só por si, a realização de construções geométricas que não se desmanchassem poderia colocar a ênfase apenas nos processos de construção. Assim, tentou-se induzir nos alunos a necessidade de mostrar porque é que as suas construções funcionavam, através da explicitação e ordenação de propriedades das figuras usadas para fazer a construção e outras deduzidas dessas.

Verificou-se que a maioria dos alunos participantes neste estudo demorou bastante tempo para perceber o sentido da justificação de uma construção e, na medida em que esse tipo de actividade lhes trouxe mais dificuldades do que a realização das construções, não aderiram tão facilmente como a esta última.

Os processos desenvolvidos pelos alunos na justificação de construções podem ser sintetizados nos pontos a seguir.

1. A justificação dos processos de construção foi antecedida de uma fase em que os alunos descreviam o processo de construção. De início essas descrições eram pouco claras. Referiam sobretudo as acções que tinham executado, sem parecerem distinguir os objectos geométricos e suas relações, das primitivas do Cabri-géomètre que permitiam obtê-los. Apoiando-se na primitiva *História* muitos alunos começaram a estruturar melhor as descrições e a utilizar de forma mais adequada a terminologia geométrica. Em particular, passaram a nomear os objectos que construíam, e a referir-se-lhes por esses nomes, o que inicialmente não faziam mesmo quando isso era expressamente solicitado.

2. Para justificar as suas construções os alunos utilizaram processos variados que se agruparam nos oito tipos descritos em baixo.

- *Ad hoc.* Os alunos davam uma resposta qualquer, umas vezes sem muito sentido, outras repetindo propriedades (semi)decoradas nem sempre adequadas à situação em análise.
- *Circular.* Os alunos usavam na justificação o que era necessário justificar, normalmente a definição da figura representada pela construção.

  Por exemplo, numa determinada actividade dizia-se que "um papagaio é um quadrilátero com os lados consecutivos iguais dois a dois", pedia-se que construíssem um papagaio e perguntava-se como podiam garantir que a figura obtida era um papagaio. Entre os nove pares que fizeram esta actividade dois responderam *tem os lados iguais 2 a 2* e três pares responderam *tem os lados consecutivos iguais 2 a 2*. Isto é, cinco pares justificaram utilizando a definição que era dada.

• *Aparência visual.* Os alunos justificavam baseados na observação da aparência da construção, sem serem capazes de explicitar as propriedades subjacentes da figura.

Por exemplo, para obter o centro de uma circunferência, um par de alunos inscreveu um rectângulo na circunferência, e, em seguida, construíram as duas diagonais do rectângulo e o seu ponto de intersecção. Quando se lhes pediu que justificassem porque é que as diagonais do rectângulo passavam no centro da circunferência, um dos alunos respondeu, apontando a construção no ecrã, que era *metade do rectângulo para um lado e metade para o outro* e não deu qualquer outra resposta.

• *Descrição do processo de construção.* Os alunos repetiam parcialmente ou integralmente o processo utilizado para fazer a construção, algumas vezes identificando explicitamente propriedades da figura.

• *Identificação de relações invariantes através da manipulação.* Os alunos referiam relações (principalmente de igualdade de segmentos) que tinham observado permanecerem invariantes através da manipulação.

• *Aritméticas/algébricas.* Os alunos operavam com comprimentos ou amplitudes.

• *Deduzidas em um ou dois passos.* Os alunos seleccionavam e ordenavam logicamente uma ou duas propriedades da figura, deduzidas do processo de construção. Por exemplo, um par de alunos construiu um losango dada uma das diagonais, como se mostra na figura 12, e justificou que *os lados do losango [eram] iguais ao raio das circunferências que o envolv[iam].*

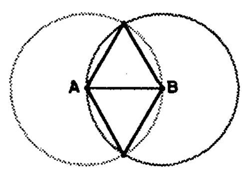


Figura 12. Construção de um losango.

• *Mistas.* Os alunos misturavam tipos de justificação, nomeadamente *aparência visual, processo de construção* e *dedução de uma ou duas propriedades.* Por exemplo, para construir um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência, uma aluna traçou duas rectas perpendiculares passando pelo seu centro, determinou os pontos de intersecção dessas rectas com a circunferência e traçou quatro tangentes passando por esses pontos (figura 13).

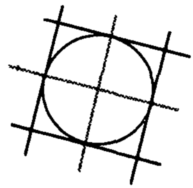


Figura 13. Construção de um quadrado com os lados tangentes a uma circunferência.

Para justificar que os lados da figura obtida eram iguais disse: *As tangentes são perpendiculares aos raios e ... um raio vai desde qualquer ponto da circunferência ao centro, o centro é como se fosse o ponto médio ... logo tem sempre a mesma medida para qualquer um dos lados. O raio vai medir metade do lado do quadrado ... Se nós fizéssemos os quatro raios iríamos ter quatro quadradinhos pequeninos.*

Os tipos de justificação baseados na evidência empírica foram os preferidos pelos alunos, principalmente a observação da aparência da construção e a descrição, integral ou parcial, do processo de construção. Muitas vezes recorriam a justificações empíricas para reforçar outra argumentação. Schoenfeld (referido por Battista e Clements, 1992) observou igualmente uma preferência por justificações recorrendo a dados empíricos. Também Chazan (1993) detectou o uso de evidência empírica como reforço de argumentação lógica.

3. Identificaram-se dois grandes tipos de obstáculos na justificação das construções, respectivamente de natureza visual e verbal.

Os obstáculos visuais foram causados pelos aspectos perceptuais das representações materiais das figuras. A preferência dos alunos pelos exemplos prototípicos das figuras levou-os a visualizar determinadas propriedades associadas a esses exemplos. Essa visualização influenciava as suas justificações na medida em que ficavam fixos nela e dificilmente a generalizavam. A dificuldade em analisar diferentes aspectos de uma construção para atender de forma selectiva e sequencial às partes e ao todo (Yerushalmy e Chazan, 1990) constituiu outro obstáculo de natureza visual às justificações. Os alunos fixavam-se em propriedades para eles mais evidentes, num sentido gestaltista, e/ou directamente associadas ao processo de construção, e não reorganizavam o campo de uma forma que lhes permitisse fazer a respectiva justificação. Segundo Laborde (1993a) os obstáculos de natureza perceptual são consequência de os alunos analisarem efectivamente a construção no ecrã do computador e não a figura representada por essa construção.

Na opinião de muitos alunos, a maior dificuldade em justificar as construções decorria da sua falta de capacidade para exprimirem oralmente, e sobretudo por escrito, as ideias "que tinham na cabeça", dificuldade esta que se tornou muito patente nos episódios de ensino.

A diferença entre o discurso da investigadora e o dos alunos causou também alguns obstáculos. Os alunos consideravam que as suas respostas empíricas serviam como justificação, a investigadora insistia em obter justificações mais formalizadas e os alunos não percebiam o que deveriam responder. O debate mantido ao longo dos episódios de ensino aproximou os níveis de discurso e, em alguns casos, permitiu que os alunos deduzissem progressivamente as justificações.

4. Alguns dos tipos de justificação referidos anteriormente deram destaque, respectivamente, à aparência visual da figura, à identificação de propriedades ou ao relacionamento de propriedades. De acordo com o destaque dado inseriram-se esses tipos de justificação num dos três primeiros níveis de van Hiele, como se mostra no quadro 4.

Quadro 4. Tipos de justificação e níveis de van Hiele.

Justificação	**Nível de van Hiele**
Aparência visual	Nível 1 (Visual)
Descrição do processo de construção Observação de relações invariantes	Nível 2 (Descritivo/Analítico)
Deduzida em um ou dois passos	Nível 3 (Abstracto/Relacional)

Muitas justificações apresentadas pelos alunos não podem ser inseridas no modelo de van Hiele. Certas justificações *circulares* e certas justificações *mistas* podem considerar-se "a meio caminho" entre aparência visual e utilização implícita de propriedades e/ou entre utilização implícita e explícita de propriedades, revelando uma transição entre níveis. As justificações *ad hoc*, em certa medida decorrentes de sistemas de crenças dos alunos, e as justificações *aritméticas/algébricas* não estão previstas no modelo.

Em parte, a dificuldade que muitos alunos experimentaram em fazer, e mesmo em entender, o sentido da justificação de uma construção pode ter a ver com o seu nível de van Hiele de desenvolvimento de raciocínio geométrico. Segundo De Villiers (referido por Battista e Clements, 1992) apenas no Nível 3 um aluno é capaz de acompanhar e dar uma justificação lógica de uma construção. Ora apenas um número reduzido de alunos da turma participante terá atingido esse nível no final da experiência.

5. Ainda que a justificação das construções se tivesse revelado um tipo de actividade difícil para os alunos, a insistência nesse tipo de actividade levou alguns a empenharem-se nisso e, tendo umas vezes o apoio da professora, outras vezes recorrendo a apontamentos pessoais, começaram a apresentar pequenas justificações formais. A interpretação destes resultados no quadro da teoria de aprendizagem de Vygotsky leva a considerar que "a influência de outros indivíduos foi mais transformadora" (Oliveira, 1993, p. 61) nos alunos em que a justificação das construções por via dedutiva estaria na sua *zona próxima de desenvolvimento*.

Investigação de construções geométricas

Na experiência de ensino levada a cabo, para além da realização de construções resistentes e da respectiva justificação, previa-se a investigação das construções através da sua manipulação, procurando que os alunos descobrissem novas relações invariantes, formulassem conjecturas sobre propriedades das figuras e eventualmente justificassem-nas também.

No que se refere aos processos de investigação de construções merecem destaque os pontos seguintes.

1. De início, a investigação das construções pelos alunos entregues a si próprios revelou-se uma actividade quase sempre aleatória. Ficavam fascinados pela possibilidade de manipular as construções no ecrã dos computadores, gostavam de o fazer depressa e de as aumentar e reduzir até aos limites possíveis. Eram particularmente atraídos por aquilo que observavam variar (Laborde, 1993a).

No entanto, reconheciam relações invariantes e propriedades para as quais se lhes chamava a atenção e que já esperavam ver acontecer.

Por exemplo, todos os grupos reconheceram que o ângulo que inscreveram numa semicircunferência era sempre recto; também concluíram que os segmentos que unem um ponto da mediatriz de um segmento com os respectivos extremos são sempre iguais.

2. Os alunos precisaram de considerável orientação e apoio para se habituarem a manipular as construções de forma sistematizada e ordenada e a reflectirem sobre o *feedback* devolvido pelo *software*, como Laborde e Laborde (1992) fazem notar. Discutiu-se, em particular, a necessidade de prestar atenção não só ao que variava, mas também ao que permanecia invariante, como fazem os geómetras no seu trabalho. Adaptando uma metáfora proposta por Mason (1993), tentou-se que os alunos não olhassem apenas para as construções no ecrã, mas que através delas olhassem para as figuras geométricas e as analisassem.

3. O longo tempo dispendido na investigação de algumas construções proporcionou a ultrapassagem de obstáculos visuais que de início impediram uma análise adequada das figuras, e permitiu, em alguns casos, a identificação de relações invariantes, a descoberta da respectiva justificação, e a generalização de certos conceitos geométricos explorados. O diálogo que os alunos mantiveram entre si e com a investigadora teve aí um papel relevante.

Por exemplo, não foi fácil para um par de alunos perceber porque é que são iguais os segmentos que unem o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo com os respectivos vértices. Já tinham observado que os segmentos que unem um ponto da mediatriz de um segmento com os respectivos extremos são iguais, mas visualizavam essa propriedade através de um segmento horizontal e a respectiva mediatriz vertical o que era impossível de acontecer com os três lados do triângulo. Depois de observarem a construção em muitas posições e de bastante conversa com a investigadora um dos alunos percebeu como devia usar a propriedade para fazer a justificação pretendida e ele próprio explicou a situação ao colega.

4. A proposta de investigação de certas construções de uma forma muito aberta, sem um objectivo explícito para os alunos, pareceu provocar-lhes alguma insegurança. Apenas se apropriaram dessas actividades quando começaram a descortinar que conclusões poderiam obter. Nesses casos os alunos começaram por formular *conjecturas restritas*, isto é, baseadas na observação de um número limitado de aparências da construção. Contra-exemplos, por vezes sugeridos pela investigadora, levaram-nos a rejeitar algumas conjecturas. A análise de um exemplo bastante familiar de uma figura em discussão, constituiu uma etapa fundamental na (re)formulação e validação de conjecturas, a partir da qual os alunos observaram aparências diversificadas da construção que lhes permitiram estabelecer *conjecturas genéricas* (Balacheff, 1991).

Por exemplo, em três episódios de ensino foi proposto aos alunos que tentassem descobrir *o que é que acontecia ao ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo quando se deslocavam os seus vértices.* No início os alunos não tinham qualquer ideia sobre o que é que procuravam. Um dos grupos começou por formular a conjectura de que *o ponto variava de acordo com o tamanho dos lados do triângulo*, mas verificaram que podiam *encolher* um dos lados sem que isso acontecesse. Deslocando um dos vértices acabaram por transformar o triângulo num triângulo rectângulo e conjecturaram que, nesse caso, o ponto coincidia com o ponto médio da hipotenusa. Por sugestão da investigadora, deslocaram outros vértices de modo a obterem outros triângulos rectângulos e confirmaram experimentalmente a sua conjectura (figura 14). (Outro grupo chegou mesmo ao justificar esta conjectura.) Em seguida foram ver o que é que acontecia com outros tipos de triângulos. Observaram diferentes triângulos com os três ângulos agudos e com um ângulo obtuso e concluíram que o ponto de intersecção das mediatrizes se localizava, respectivamente, no interior dos triângulos e no seu exterior.

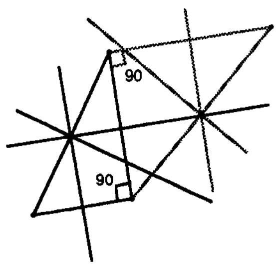


Figura 14. O ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo rectângulo coincide com o ponto médio da hipotenusa.

Exploração de construções geométricas e a manipulação

Analisam-se, por último, as actividades realizadas pelos alunos de um ponto de vista global, referindo a finalidade com que manipularam as suas construções e a forma como o fizeram, tendo em conta que a manipulação das construções e a interpretação do *feedback* devolvido pelo *software* foi um denominador comum dos três tipos de actividades.

1. Os alunos manipulavam as suas construções para as *explorarem*, no sentido de descobrirem processos de as obter, de as justificar e/ou de investigar propriedades das figuras. Na maioria das vezes, a exploração incluía fases de *validação* em que a construção era arrastada para verificar se conservava as características pretendidas. Também Laborde (1993a) refere que *exploração* e *validação* são as duas grandes finalidades com que os alunos manipulam as construções.

Identificaram-se quatro tipos principais de utilização da manipulação das construções, que se caracterizam no quadro 5.

Quadro 5. Tipos de utilização da manipulação.

Manipulação	Caracterização
Obter uma construção com uma aparência específica	
	Os alunos manipulavam as construções para lhes dar uma determinada aparência, a fim de: • adaptar a construção a uma tarefa que não conseguiam realizar por outro processo; • obter exemplos prototípicos das figuras.
Invalidar construções	
	Os alunos manipulavam as construções para verificar se se desmanchavam.
Reconhecer relações e propriedades	
	Os alunos manipulavam as construções para identificar relações e propriedades das figuras: • sugeridas explicitamente; • generalizadas a partir de exemplos prototípicos; • outras propriedades.
Testar ideias	
	Os alunos manipulavam as construções para testar ideias e perceber a sua adequação (ou não) para realizar as actividades.

2. Identificaram-se três níveis na forma como os alunos utilizaram a manipulação das construções e interpretaram o *feedback* devolvido. Esses níveis evoluem do reconhecimento das figuras através da aparência das construções, para o reconhecimento empírico de propriedades das figuras e para o relacionamento de propriedades. No quadro 6 caracterizam-se esses níveis: *Elementar*, *Intermédio* e *Elaborado*.

Nestes níveis reconhecem-se características dos três primeiros níveis do modelo de van Hiele. Respectivamente, o nível *Elementar* associa-se ao Nível 1 (Visual) de van Hiele, o nível *Intermédio* associa-se ao Nível 2 (Descritivo/Analítico) de van Hiele e o nível *Elaborado* associa-se ao Nível 3 (Abstracto/Relacional) de van Hiele Esta associação fundamenta-se no facto de os alunos utilizarem a manipulação e interpretarem o *feedback*, dando relevo à aparência da figura, à identificação de propriedades, ou ao relacionamento de propriedades, tal como aconteceu na justificação das construções.

Laborde (1993a; 1993b) também refere três níveis na utilização da manipulação e interpretação do *feedback* devolvido pelo *software*, nos quais a autora reconhece os três primeiros níveis de van Hiele.

Quadro 6. Níveis de utilização da manipulação.

Nível	Caracterização
Elementar	A manipulação era utilizada para: • obter construções com uma determinada aparência (normalmente exemplos prototípicos da figura), mas que se desmanchavam; • identificar relações e propriedades explicitamente sugeridas em construções prototípicas. O feedback devolvido era interpretado segundo a aparência das construções.
Intermédio	A manipulação era utilizada para: • comprovar se as construções se desmanchavam; • testar ideias e descobrir processos de obter construções resistentes; • dar às construções aparências prototípicas, para facilitar a sua análise; • reconhecer nas construções propriedades e relações sugeridas explicitamente e implicitamente. O feedback devolvido era interpretado baseado na identificação de propriedades e relações.
Elaborado	A manipulação era utilizada para: • dar à construção diferentes aparências para analisar diferentes perspectivas de uma figura; • comprovar e generalizar relações e propriedades identificadas em exemplos prototípicos da figura; • investigar construções e descobrir novas propriedades e relações das figuras. O feedback devolvido era interpretado com base na identificação e no relacionamento de propriedades e relações.

3. A observação do trabalho dos alunos, nas aulas e nos episódios de ensino, permitiu comprovar que o nível *Intermédio* de utilização da manipulação foi o dominante, seguindo-se o nível *Elementar* e depois o nível *Elaborado*. Estes resultados, a par das relações estabelecidas entre tipos de justificação e níveis de van Hiele, apontam para o facto de o Nível 2 de van Hiele parecer ser o nível maioritário na turma, no final da experiência de ensino. Um número razoável de alunos não atingiu esse Nível (2) e alguns alunos, em número reduzido, atingiram o Nível 3.

Esta situação está de acordo com os resultados de diversos estudos internacionais, que mostram serem os Níveis 1, 2 e 3 os identificados em alunos deste grau de escolaridade (9º ano), predominando o Nível 2 (Battista e Clements, 1992).

Os desempenhos de alguns alunos mostraram que estes nem sempre permaneciam num mesmo nível de utilização da manipulação, antes oscilavam entre eles, por vezes regressando a um nível mais baixo quando se lhes deparava alguma situação nova cuja solução não descobriam rapidamente.

Esta observação leva a admitir a hipótese de que alguns alunos da turma estariam em trânsito entre níveis de van Hiele, a exemplo do que referem Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991). Aponta ainda no sentido de um aluno num determinado nível de van Hiele poder voltar pontualmente a níveis mais baixos quando se lhes deparam tarefas que não dominam, como referem Fuys, Geddes e Tischler (1988). Estas observações estão na linha das críticas feitas ao modelo de van Hiele sobre a descontinuidade nos níveis e a sua independência de conteúdos específicos, salientadas por Battista e Clements (1992).

Conclusão

As conclusões descritas na secção anterior, ainda que de uma forma necessariamente redutora, podem sintetizar-se no seguinte:

- *Realização de construções.* Foram actividades que os alunos apreciaram porque se sentiram capazes de descobrir processos de as fazer. Seguiram caminhos diversificados, muitas vezes começando por ensaiar tentativas que lhes forneciam pistas para a resolução. Privilegiavam a aparência das figuras e reproduziam sequências de objectos e relações que tinham experimentado produzirem construções resistentes à manipulação. Progressivamente substituíram os exemplos prototípicos das figuras pela variedade de outros que obtinham através da manipulação (mas preferiam os exemplos típicos porque os trabalhos ficavam "mais bonitos").
- *Justificação das construções.* Foi um tipo de actividade em que os alunos tiveram dificuldade. A justificação das construções, explicitando propriedades geométricas por uma certa ordem, pareceu não fazer muito sentido para alguns alunos, pois a evidência mostrava-lhes o que era pedido. Desenvolveram métodos próprios, variados, de justificação, baseados essencialmente na aparência visual da construção e/ou na descrição do processo que tinham utilizado para a fazer. Mas a pouco e pouco, alguns começaram a deduzir uma ou duas propriedades das figuras e a utilizá-las nas justificações.
- *Investigação das construções.* Neste tipo de actividades a atenção dos alunos era sobretudo atraída pelo que viam modificar-se. Formulavam conjecturas com base em poucos exemplos. Necessitaram de orientação para, progressivamente, começarem a observar invariâncias e a formular conjecturas baseadas na observação de exemplos variados da figura.
- *Exploração das construções*: na forma como os alunos globalmente, realizaram, justificaram e investigaram as construções, identificaram-se três níveis: *Elementar*, *Intermédio* e *Elaborado*, que se associaram respectivamente aos

Níveis 1, 2 e 3 do modelo de van Hiele de desenvolvimento do raciocínio geométrico. O nível *Intermédio* foi dominante na turma, o que pode significar que a maioria daqueles alunos estaria no Nível 2 de van Hiele. Alguns alunos atingiram o Nível 3 mas outros não passaram do Nível 1 de van Hiele.

O estudo reforça a hipótese, defendida teoricamente, de que a realização, justificação e investigação de construções num AGD pode constituir uma estratégia de intervenção poderosa para a aprendizagem da Geometria. No entanto, para dar frutos, necessita de ser desenvolvida a longo prazo, percorrendo as etapas necessárias ao desenvolvimento do raciocínio geométrico sem as ultrapassar, fazendo uso de actividades progressivamente complexas, que devem ser realizadas pessoalmente mas, sobretudo, partilhadas, numa dialéctica de justificações e refutações, com colegas e professores.

Qualquer investigação que se debruce sobre a utilização educativa de ambientes computacionais depara-se com um vasto campo de análise influenciado por muitas e diferentes variáveis. O poder educativo dos ambientes computacionais está no ambiente de aprendizagem que patrocinam, entendido este como o conjunto de inter-relações que se estabelecem entre alunos, professores, aparelhagem tecnológica, materiais de apoio, etc. (Teodoro, 1993). Embora este estudo tenha tido a preocupação de interligar diferentes componentes do campo que analisou, as "lâmpadas" utilizadas na observação iluminaram preferencialmente certos fenómenos e deixaram outros na sombra ou mesmo na obscuridade, como seria inevitável. Dessas "zonas de sombra", sugeridas pela pesquisa teórico/empírica a que se procedeu, emergiram, entre outras, as questões seguintes, que merecem ser mais desenvolvidas em investigações futuras: Que papéis têm as representações de figuras geométricas na aprendizagem, particularmente das novas representações em AGD? Quais são os papéis das conjecturas e provas no desenvolvimento do conhecimento geométrico dos alunos? Que contribuições trazem os AGD? O Modelo de van Hiele explica adequadamente o desenvolvimento do raciocínio geométrico? De que reformulações necessita? A tradição da sala de aula, as interacções que aí acontecem, as atitudes dos alunos, como se modificam num contexto em que se introduz um AGD? Que influências têm essas modificações? Que materiais se devem desenvolver para apoiar a utilização dos AGD e como os utilizar?

Notas

[1] Estudo realizado no âmbito de uma dissertação de Mestrado (Junqueira, 1995).

[2] A noção de *ambiente de aprendizagem poderoso* encontram-se desenvolvida em De Corte

(1992).

[3] Existe abundante literatura sobre o *modelo de van Hiele de desenvolvimento do raciocínio geométrico*, bem sintetizada por Battista e Clements (1992). Em números anteriores da *Quadrante* este modelo é também analisado (Junqueira, 1993; Matos, 1992a).

Para uma melhor compreensão de algumas questões discutidas no artigo caracterizam-se resumidamente os três primeiros níveis de van Hiele (Battista e Clements, 1995):

- *Nível 1 (Visual).* Os alunos raciocinam sobre figuras geométricas com base na aparência de representações das figuras e nas transformações visuais que executam sobre elas. Identificam figuras, como quadrados e triângulos, como *gestalts* visuais, com frequência depois de terem visionado protótipos. Por exemplo, podem dizer que uma dada figura é um rectângulo porque 'parece uma porta'.
- *Nível 2 (Descritivo/Analítico).* Os alunos raciocinam experimentalmente; estabelecem propriedades das figuras observando, medindo, desenhando, e fazendo modelos. Identificam as figuras através das suas propriedades e não só como globalidades visuais. Por exemplo, um aluno pode pensar num losango como uma figura com quatro lados iguais.
- *Nível 3 (Abstracto/Relacional).* Os alunos começam a raciocinar logicamente. Formam definições abstractas, distinguem condições necessárias e suficientes para definir um conceito, compreendem e, por vezes, apresentam argumentos lógicos. Classificam as figuras hierarquicamente analisando as suas propriedades e dão argumentos informais para justificar as suas classificações. Por exemplo, dizem que um quadrado é um losango porque 'é um losango com algumas propriedades extra'.

[4] Seguindo uma linha defendida por autores franceses e alemães, Schumann (1991, p. 104) considera que "a rede de pontos, rectas, semi-rectas, segmentos de recta, ângulos em circunferências, arcos de circunferência, etc., e suas incidências deve ser entendida como uma configuração geométrica".

[5] Por falta de condições logísticas não foi possível realizar a experiência numa turma da Nova Reforma. Uma vez que os conteúdos da unidade Geometria do Plano do antigo currículo do 9º ano transitaram para o novo currículo, optou-se por trabalhar essa unidade didáctica mas com uma abordagem metodológica recomendada nos novos programas.

[6] Para mais detalhes sobre esta experiência ver Junqueira (1994; 1995). Em anexo (I) apresentam-se duas das fichas propostas.

[7] Em anexo (II) apresenta-se um desses guiões.

[8] Os pontos e as rectas não foram nomeados pelos alunos, as letras indicam a ordem pela qual foram construídos objectos do mesmo tipo. O nome da construção foi atribuído pelos alunos.

Referências

Balacheff, N. (1991a). The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proof. Em A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Balacheff, N. (1991b). Treatment of refutations: aspects of the complexity of a construtivist approach to mathematics learning. Em E. Glasersfeld (Ed.), *Radical construtivism in mathematics education* (pp. 89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Barbin, E. (1993). Que concepções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens? (I/II). *Educação e Matemática, 27/28*, 21-25, 11-14.

Battista, M., Clements, D. (1992). Geometry and spatial reasoning. Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. "A project of the NCTM"* (pp. 420-464). Nova Iorque: Macmillan Publishing Company.

Battista, M., Clements, D. (1995). Geometry and proof. *Mathematics Teacher, 88*(1), 48-54.

Bellemainn, F. e Laborde, J. M. *Cabri-géomètre* [Programa de computador]. Grenoble, França: Universidade Joseph Fourier. LSD2-IMAG.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justifications for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Cobb, P. e Steffe, L. (1983). The constructivist researcher as the teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education 14*(2), 83-94.

Davis, P. J., Hersh, R., (1981). *The mathematical experience*. Londres: Penguin Books.

De Corte, E. (1992). Aprender na escola com as novas tecnologias da informação. Em V. D. Teodoro e J. C. Freitas (Orgs.), *Educação e computadores* (pp. 99-117). Lisboa: GEP.

DGEBS (1991a). *Programa Matemática - Plano de organização do ensino-aprendizagem, Ensino básico 3º Ciclo* (II). Lisboa: INCM EP.

DGEBS (1991b). *Matemática - Métodos Quantitativos - Organização curricular e programas, Ensino secundário*. Lisboa: INCM EP.

Dreyfus, T. (1992). Aspects of computerized learning environments which support problem solving. Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds), *Mathematical problem solving and new information technologies, research in contexts of pratice* (pp. 255-266). Berlim: Springer-Verlag.

Dreyfus, T. e Hadas, N. (1987). Euclid may stay — and even be taught. Em M. Lindquist e A. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12, 1987 Yearbook* (pp. 47-58). Reston, VA: NCTM.

Fuys, D., Geddes, D. e Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education -Monograph* (3). Reston, VA: NCTM.

Gutiérrez, A., Jaime, A. e Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisistion of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education 22*, 237-251.

Hershkowitz, R. (1989). Psychological aspects of learning geometry. Em J. Kilpatrick e P. Nesher (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R. (1994). The role of geometry in general education. Em C. Gaulin, B. Hodgson, D. Wheeler e J. Egsgard (Eds.), *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education, 1992* (pp. 160-167). St.-Foy, Canadá: Les Presses de l'Université Laval.

Junqueira, M. (1993). Conjecturas e provas informais em geometria com recurso a ferramentas computacionais. *Quadrante, 2*(1), 63-78.

Junqueira, M. (1994). Construções geométricas em ambientes dinâmicos no 9º ano. Em A. Vieira, E. Veloso e L. Vicente (Orgs.), *ProfMat 94 — Actas* (pp. 206-215). Lisboa: APM.

Junqueira, M. (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos*. Tese apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Ciências de Educação. Lisboa: APM.

Kantowski, M. G. (1987). The teaching experiment and Soviet studies of problem solving. Em L. Hatfield (Ed.), *Mathematical problem solving* (pp. 43-52). Columbus, OH: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Laborde, C. (1993a). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. Em C. Keitel e K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 48-67). Berlim: Springer-Verlag.

Laborde, C. (1993b). Do the pupils learn and what do they learn in a computer based environment? The case of Cabri-géomètre. Em B. Jaworski, (Ed.), *Proceedings of the Conference Technology in Mathematics Teaching 93* (pp. 39-52). Birmingham, Reino Unido: University of Birmingham.

Laborde, C., Laborde, J.-M. (1992). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies, research in contexts of pratice* (pp. 177-192). Berlim: Springer-Verlag

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations - Essai sur la logique de la découverte mathématique.* Paris: Hermann.

Lesh, R., Amit, M. e Kelly, E. (1994). Characteristics of effective model-eliciting problems. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (III)* (pp. 160-167). Lisboa: Program Committee of the 18th PME Conference.

Lesh, R. e Kelly, E. (1994). Action-theoretic and phenomenological approaches to research in mathematics education: Studies of continually developing experts. Em R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer e B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 277-286). Dordrecht: Kluwer.

Lobato, G. (1992). Novos programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário - Que mudanças? *Educação e Matemática, 19/20*, 3-6.

Mason, J. (1993). Less may be more on a screen. Em B. Jaworski, (Ed.), *Proceedings of the Conference Technology in Mathematics Teaching 93* (pp. 367-374). Birmingham, Reino Unido: University of Birmingham.

Matos, J. M. (1992a). Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados. *Quadrante, 1*, 93-112.

Matos, J. M. (1992b). Cognitive models in geometry learning. Em J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies, research in contexts of pratice*, (pp. 93-112). Berlim: Springer-Verlag.

Matos, J. M. (1994). Aprendizagens de Matemática, ou de que são feitos os conceitos matemáticos? Em A. Vieira, E. Veloso e L. Vicente (Orgs.), *ProfMat 94 — Actas* (pp. 45-49). Lisboa: APM.

McCoy, L. (1992). Correlates of mathematics anxiety. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 14*, 51-57.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L. e Hoelzl, R. (1994). Constructing meanings for constructing: An exploratory study with Cabri Géomètre. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (III)* (pp. 360-367). Lisboa: Program Committee of the 18th PME Conference.

Oliveira, M. (1993). *Vygotsky, aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico.* S. Paulo: Editora Scipione.

Saraiva, M. (1992). *O Computador na aprendizagem da Geometria - Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade*. Tese apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação. Lisboa: Pólo do Projecto MINERVA do DE-FCUL.

Schumann, H. (1991). Interactive theorem finding through continous variation of geometric configuration. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 10*(3), 81-105.

Schwartz, J. (1989). Symposyum: Visions for the use of computers in classroom instruction. *Harvard Educational Review, 59*(1), 51-61.

Schwartz, J. (1992). Can we solve the problem solving problem without posing the problem posing problem? Em J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies, research in contexts of pratice* (pp. 167-176). Berlim: Springer-Verlag.

Teodoro, V. (1993). A model to design computer exploratory software for science and mathematics. Em D. Towne, T. de Jong e H. Spada (Eds.), *The use of computer models for explication, analysis and experiential learning*. Berlim: Springer-Verlag.

Yerushalmy, M. e Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 199-219.

Yerushalmy, M., Chazan, D. e Gordon, M. (1990). *Mathematical problem posing: implications for facilitating student inquiry in classrooms*. Education Development Center, Inc., Havard Graduate School of Education.

Maria Margarida Bettencourt de Beires Junqueira, Quinta da Galiza, Lte 217, 1º Esq. - S. João do Estoril, 2675 ESTORIL.

RESUMO. Um ambiente geométrico dinâmico *(AGD) computacional permite fazer construções e manipulá-las, conservando invariantes as relações estabelecidas. A literatura salienta que recorrendo a um AGD se podem criar* estratégias poderosas *para a construção pessoal e social do conhecimento geométrico. Neste quadro, investigou-se como é que os alunos de uma turma do 9º ano de escolaridade fizeram e exploraram construções num AGD e como é que isso os habilitou a compreender objectos e relações geométricas, a formular conjecturas e a elaborar argumentos indutivos e dedutivos.*

Os alunos descobriram por si próprios processos de fazer as construções geométricas propostas. Privilegiavam a aparência das figuras e reproduziam sequências de objectos e relações que tinham experimentado serem resistentes à manipulação. Para justificar os processos de construção recorriam sobretudo a dados da evidência empírica, mas, através do diálogo, alguns alunos identificavam e relacionavam propriedades das figuras. Quando exploravam as construções a sua atenção era mais atraída pelo que viam modificar-se, necessitando de orientação para observar invariâncias e formular conjecturas. Na exploração das construções identificaram-se três níveis que se associaram aos Níveis 1, 2 e 3 do modelo de van Hiele de desenvolvimento do raciocínio geométrico.

ABSTRACT. On a computer dynamic geometry environment *(DGE) one can make constructions and drag them, keeping invariant the relations set up. The literature shows that by using a DGE* *it is possible to build* powerful strategies *for the personal and social construction of geometric knowledge. In this framework, we investigate how students of a 9th grade class made and explored constructions on a DGE and how this allowed them to understand geometric objects and relations, to make conjectures, and to make deductive and inductive reasoning.*

The students themselves found processes to make the proposed geometric constructions. They privileged the appearance of the figures and reproduced sequences of objects and relations they had experienced to be drag resistant. To justify the constructions they mainly used empirical evidence, but, through dialogue, some students recognised properties of the figures and related them to each other. In exploring the constructions their attention was mainly attracted by what they saw changing, and needed orientation to see invariants and to formulate conjectures. In exploring the constructions three levels were found that were associated to the van Hiele levels 1, 2 and 3.

Anexo 1. Fichas

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nomes

____

____

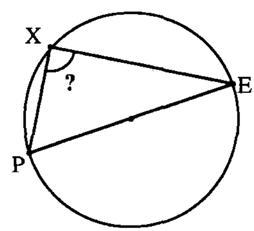
9º Ano - Turma 5 - Grupo ____________ ___/__/1993

Avaliação 1

Gravem as construções que fizerem na disquete (drive A ou B).

1

- Construam um segmento [PE].
- Construam a circunferência de diâmetro [PE].
- Construam um ponto X sobre a circunferência.



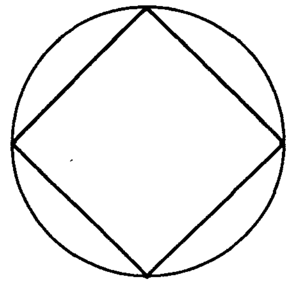
1.1 Marquem e meçam o ∠ PXE. Qual é a sua amplitude?

1.2 Desloquem o ponto X sobre a circunferência. O que acontece à amplitude do ∠ PXE?

1.3 São capazes de justificar esse facto?

2

2.1 Construam uma circunferência. Construam um quadrado inscrito na circunferência.



2.2 Meçam os comprimentos dos lados do quadrado.
Marquem os ângulos e meçam as amplitudes. Registem os dados na figura ao lado.

2.3 Porque é que os lados ficam iguais quando deslocam os pontos de base do vosso quadrado? (Se tal não acontecer recomecem a construção!)

2.4 Porque é que os ângulos ficam iguais quando deslocam os pontos de base do vosso quadrado? (Se tal não acontecer recomecem a construção!)

Escola Secundária de S. João do Estoril

CABRI

Nomes

____

____

9º Ano - Turma 5 - Grupo ______________ ___/__/1993

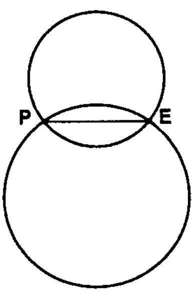
Ficha 10: Aplicações da mediatriz

Gravem as construções que fizerem na disquete (drive A ou B).

1

1.1 Criem um segmento de recta [PE]. Construam a mediatriz de [PE].

1.2 Construam duas circunferências distintas que passem pelos pontos P e E.



1.3 Poderiam construir outras circunferências passando pelos pontos P e E? Quantas? Porquê?

2 No menu **Criação (Création)** escolham o item **Circunferência. (Cercle).** Coloquem o cursor num ponto qualquer do ecrã, carreguem no botão do rato e arrastem. Aparece uma circunferência sem o centro.

2.1 Façam uma construção que permita localizar o centro da circunferência.

2.2 O ponto que construiram é mesmo o centro da circunferência? Porquê?

Anexo 2. Guião de um dos episódios de ensino

Episódio de ensino 3 (E3)

Data: 17/5/93; 16 h 35 m - 17 h 25 m
Alunos: PF, RD (Grupo 6)
Informar os alunos de que o objectivo da entrevista é tentar perceber a maneira como pensam quando fazem as actividades propostas. Pedir que falem em voz alta e que digam tudo em que estiverem a pensar. A entrevista não tem efeitos para avaliação, é apenas para o trabalho de investigação. Agradecer a colaboração que vão dar.

I

1. Analisar a ficha 10.

1.1 Para responderem a 1.2 escolheram um ponto da mediatriz para centro da circunferência e um dos extremos do segmento para ponto da circunferência. Tinham a certeza de que essa circunferência iria passar pelo outro extremo do segmento? Porquê?

1.2 Qual foi a primeira ideia que tiveram para fazer a segunda construção? Abram o ficheiro S10 e vamos ver a história. Expliquem o que fizeram.

1.3 Concordam com a resposta que deram a 2.2? Porquê?

2. Aproveitar a construção anterior para fazer uma investigação matemática. Deslocar os vértices do triângulo. O que é que acontece ao circuncentro? (Observar como manipulam a construção.)

São capazes de descobrir alguma relação entre o tipo de triângulo e a localização do circuncentro? (Observar como manipulam a construção.)

3. Último desafio: localizar um ponto sobre uma estrada equidistante da casa de PF e de RD (criar uma recta e dois pontos P e R).

II

Opinião de cada aluno sobre o trabalho que se tem feito. Que diferenças encontraram em relação às aulas habituais?