Da literatura sobre a prova rigorosa em Educação Matemática: Um levantamento

Antonio Vicente Marafioti Garnica
UNESP — Universidade Estadual Paulista

Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs. (Bourbaki, *Eléments de Mathématique*)

After some twenty years of very arduous toil, I came to the conclusion that there was nothing more that I could do in the way of making mathematical knowledge indubitable. (Russell, *Portraits of memory*)

A proof becomes a proof after the social act of 'accepting it as a proof'. This is true of mathematics as it is of physics, linguists, and biology. (Manin, *A course in mathematical logic*)

What mathematicians at large sanction and accept is *correct.* (Hersh, *Proving is convincing and explaining*)

Un acto de fe no consiste en creer sin ver, o en creer en lo que no se ve, sino en creer que se ve, cualquiera que sean los ojos con que se mire, e independientemente de que se vea o de que no se vea. (*referido em* Bacca, *Tres clases de actos de fe y tres tipos de crítica*)

No léxico, tanto quanto no jargão matemático, prova e demonstração são tidos como sinônimos: é o que atesta a veracidade ou autenticidade, a garantia, o testemunho, o processo de verificação da exatidão de cálculos ou raciocínios, a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras.

A Lógica nos dá instrumental suficiente para que, dentro da Matemática, concebida como ciência formal (acadêmica), possamos definir com mais clareza a noção de demonstração: uma *demonstração* em *S* (um sistema formal, pensado como uma linguagem, um conjunto de sinais e um conjunto de regras para a manipulação de sinais) é uma seqüência finita não vazia de sentenças de *S* tal que cada uma delas é um axioma ou uma conseqüência imediata, por regras de inferências admitidas em *S*, de duas sentenças anteriores na seqüência. Um *teorema* de *S* é uma sentença *A* de *S* tal que existe uma demonstração em *S* onde *A* é a última sentença da seqüência.

A importância da prova rigorosa para o fazer em Matemática pode ser atestada, a princípio, por alguns matemáticos da envergadura do grupo Bourbaki, de cuja fala extraímos um dos trechos escolhidos para epígrafe. Não bastando isso, o discurso e a atividade cotidianos da prática científica da Matemática afirmam reconhecer a prova (ou prova rigorosa, ou demonstração) como elemento central no desenvolvimento do que se conhece por Matemática, o que é apontado pela maioria dos artigos estudados. Tais preocupações não são suficientes, porém, para que conflitos acerca da natureza da demonstração inexistam. Ao contrário, a cena das discussões sobre tal noção tem se mostrado marcada por nítidas posições controversas, alimentando o debate.

Por um lado, a literatura em Matemática — ou em Lógica, mais precisamente — cuida em tratar do problema da prova no modo tradicionalmente tido e aceito: um mecanismo definido formalmente cujas raizes não necessitam de investigação e cujos frutos compõem a conhecida produção científica em Matemática. As esferas nas quais questões sobre a natureza das demonstrações são debatidas têm sido, com maior freqüência, a da Filosofia da Matemática ou a da Filosofia da Lógica: pois não é necessária uma tematização sobre a noção de prova para que a prova seja utilizada. Por outro lado, a justificativa para a existência da noção permanece como a usual: convencer, validar, verificar.

Na literatura específica em Educação Matemática, prova ou demonstração vêm sempre adjetivadas; são, assim, "rigorosas". A necessidade ou não de uma tal adjetivação dependerá, em muito, dos aspectos que focamos: para uns — principalmente os matemáticos chamados "puros" —, uma prova é, já, prova rigorosa. Para outros, o rigor estabeleceria, entre as várias provas matemáticas possíveis, aquelas herdeiras diretas do programa estabelecido por Euclides, n'*Os Elementos*, no terceiro século antes de Cristo, programa este plasmado numa concepção platônica, assegurado e elevado ao status de elemento essencial ao fazer matemático, principalmente pelo Formalismo que intervém, com maior familiaridade do que qualquer outra escola, no fazer cotidiano da sala de aula e no da própria Matemática[1] (conforme, por exemplo, Cury, 1988). Há, ainda, autores que, seguindo Balacheff (1987), partem da explicitação mais minuciosa dos termos, para uma distinção entre prova e demonstração: uma *prova* é uma explicação aceita por uma dada comunidade num dado momento, podendo ser debatida, refutada ou aceita. No interior da comunidade Matemática, porém, só são aceitas como provas as explicações que adotam uma forma particular, um conjunto de enunciados válidos organizados segundo certas regras, sendo que um enunciado ou é reconhecido como verdadeiro ou é deduzido a partir do precedente por regras de dedução válidas e pré-fixadas, do domínio da Lógica. A esse tipo particular de prova Balacheff chama *demonstração*.

A noção de prova é um dos principais eixos pelo qual trafegam as concepções sobre Matemática. Nela são engendrados tanto o caráter mítico da Matemática quanto a proliferação desmedida de uma ideologia da certeza, suas significações unívocas e seu caráter de eternidade espaço-temporal. Tal caráter mítico surge quando a Matemática procura fundamentar-se pela exclusão do sentido (Lavalle, 1977), que tem na distanciação entre sintaxe e semântica um de seus componentes essenciais. Fruto de um programa rigoroso e constante, esboçado e levado à prática em toda e qualquer comunidade de produção de Matemática, essa exclusão de sentido — onde na verdade o sentido não morre, apenas tem uma "morte em moratória" — possibilita a dinamização das ideologias da certeza e da eternidade:

> o texto formalizado será dominável, certo, tranqüilizador e rigoroso. A formalização se apresenta sempre como elaboração, remanejamento de um discurso espontâneo, natural, ingênuo, centrado na intuição da presença do objeto. (...) Uma 'palavra', segundo a expressão de Bourbaki, é um signo no texto inicial, isto é, totalidade de um significante e de um significado. O que é signo para o matemático na sua prática primeira torna-se forma vazia na formalização do seu texto. (...) O ponto capital em tudo isso é que a forma não suprime o sentido, ela não faz senão empobrecê-lo, afastá-lo, conservá-lo à sua disposição. Crê-se que o sentido vai morrer, mas é uma morte em moratória: o sentido perde o seu valor, mas guarda a vida, da qual a forma do mito vai nutrir-se. (...) A Matemática torna-se mítica quando procura fundar-se pela exclusão do sentido (Lavalle, 1977, pp. 193-202).

Uma visada panorâmica na bibliografia disponível nos levará a concluir que a prova rigorosa é tomada como elemento formador do discurso matemático, manifestado em salas de aula — mais claramente aquelas do terceiro grau[2] — pela chamada metodologia tradicional vigente, alimentando-a e sendo por ela alimentado.

Por uma arqueologia da prova: A transformação da Matemática em ciência hipotético-dedutiva

É importante, aqui, ressaltar a quase inexistência de estudos históricos sobre o desenvolvimento da noção de prova rigorosa. Seu surgimento, como nos contam os textos disponíveis, é claro. Lugar e tempo são delimitados. Nomes são citados: Euclides, século III a.C., Grécia. Surpreende a "ausência de gestação, de laboriosas tentativas, de um parto doloroso. O 'canon' vem à luz sob sua forma ideal." Temos vários trabalhos sobre a história do rigor, o desenvolvimento das ações que transformam a prova no que por prova hoje entendemos. As justificações para a ausência de material sobre a história da prova são várias. Entre as mais freqüentes estão: (a) o modo relativamente natural com que a prova rigorosa — e sua necessidade — ingressa no discurso matemático, não oferecendo problemas *a priori*, sendo carregada adiante por uma tradição abalizadora; (b) uma certa "repugnância pela noção de 'história' no interior das ciências" (Cazenave referido em Monchicourt, 1987, p. 31); (c) as dificuldades inerentes às pesquisas de caráter histórico quase arqueológico; e, finalmente, (d) o argumento de que, no caso do rigor, não há uma história de mudanças, mas de adaptações ao que ditam as leis da Lógica[3]. No que temos de disponível, intentamos traçar, a seguir, alguns aspectos sobre o surgimento da prova.[4]

Duas teses existem. Ambas são tratadas por Arsac (1987), que as interconecta, gerando, por exclusões e complementações, uma terceira. A tese clássica sobre o surgimento da prova rigorosa é chamada de *externalista* por não envolver diretamente a comunidade matemática, ou, ao menos, por não ser engendrada no seio dessa comunidade, dependendo de parâmetros externos, a saber, a sociedade grega como um todo. Tal tese é dada na afirmação de que "a transformação da Matemática em ciência hipotético-dedutiva será a 'aplicação' das regras do debate argumentativo que governava a vida política na cidade grega" (Arsac, 1987, p. 271) e encontra referencial teórico bastante atual e claro. Enquanto a constituição do povo grego radica-se num passado muito distante, passando pela cultura das Cíclades, pelas civilizações minóica e micênica, fermento da criatividade artística dos Dórios, Eólios e Jônios dos anos geométricos (séculos XI a VIII a. C.), é certo que a constituição das cidades gregas ocorre, entre os séculos VIII e VII a. C., através da percepção da possibilidade de uma concepção mais realista do soberano — os até então "comedores de presentes" —, onde palavra falada e escrita desempenham papéis essenciais:

O aparecimento da Pólis constitui, na história do pensamento grego, um acontecimento

> decisivo. (...) Seu advento (...) marca um começo, uma verdadeira invenção. (...) O que implica o sistema do Pólis é primeiramente uma extraordinária proeminência da palavra sobre todos os outros instrumentos de poder. (...) A palavra não é mais o termo ritual, a fórmula justa, mas o debate contraditório, a discussão, a argumentação. (...) Todas as questões de interesse geral que o soberano *tinha* por *função regularizar* (...) são agora submetidas à arte oratória e deverão resolver-se na conclusão de um debate; é preciso, pois, que possam ser formuladas em discursos, amoldadas às demonstrações antitéticas e às argumentações opostas. (...) Uma segunda característica da Pólis é o cunho de plena publicidade dada às manifestações mais importantes da vida social. (...) A Pólis existe apenas na medida em que se distinguiu um domínio público: (...) um setor de interesse comum, opondo-se aos assuntos privados; práticas abertas, estabelecidas em pleno dia, opondo-se a processos secretos. (...) Tomada dos fenícios e modificada por uma transcrição mais precisa dos sons gregos, a escrita poderá satisfazer essa função de publicidade [por não se tratar] mais de um saber especializado, reservado a escribas, mas de uma técnica de amplo uso, livremente difundida no público (Vernant, 1989, pp. 34-36).

Ressaltemos que a transformação da Matemática em ciência hipotético-dedutiva, segundo a tese externalista, dá-se num embate entre o público e o privado, na criação das cidades gregas, dentro delas e mesmo entre elas, já que em Esparta, entre os lacedemônios, a palavra não era assim concebida: "no lugar de *Peithó*, a força da persuasão, [estes] celebrarão, como instrumento da lei, o poder de *Phobos*, esse temor que curva todos os cidadãos à obediência" (Vernant, 1989, p. 47). A trajetória posterior da prova, a história do seu rigor, nos indicará, novamente, esse embate entre o público e o privado, entre a comunidade escolar e a matemática, um misto de *Peithó* e *Phobos*, com limitantes severos, restritos à avaliação de uma comunidade que legaliza os processos de argumentação em Matemática. Disso trataremos adiante.

Por um outro lado, intervém a tese *internalista*, considerando como geradora a questão: que problema tornou indispensável a introdução da demonstração em Matemática? Partindo de uma tal questão, considera Arsac que o surgimento da demonstração é contemporâneo ao problema da irracionalidade. Segundo Boyer, é possível que a descoberta do problema da incomensurabilidade/irracionalidade tenha sido feita por pitagóricos em algum momento no século V, sendo que "alguns atribuem especificamente a Hipasus de Metapontum durante a primeira parte do último quarto do quinto século a. C., enquanto outros a colocam meio século mais tarde" (Boyer, 1974, pp. 53-54). Em relação a esta segunda tese, duas faces devem ser consideradas: o problema será analisado por Arsac num quadro aritmético e num quadro geométrico. No primeiro, constata-se que o número 2 não admite raiz quadrada racional enquanto que o quadro geométrico constata a impossibilidade da diagonal de um quadrado admitir partição comum com seu lado. A partir disso, algumas considerações são feitas. Arsac é minucioso. Disso, afirma ser absolutamente impossível constatar a incomensurabilidade única e exclusivamente a partir do traçado gráfico.

Pela figura, acredita, concluir-se-ia pela possibilidade da partição comum. Por outro lado, as provas da irracionalidade no domínio aritmético implicam o uso do raciocínio por absurdo. Como não se pode, em nenhum momento, precisar o grau de abstração e a necessária axiomatização do conceito de número utilizado, emprega-se o termo "prova" e não "demonstração", seguindo as especificações de Balacheff (1987), expostas anteriormente.

Baseado no exposto acima e tendo partido de uma também quase inexistência de trabalhos sobre as influências recíprocas entre a Matemática e a sociedade grega, Arsac opta por uma interconexão entre as duas teses, numa síntese enunciada em dupla proposição, na forma de negativas:

- sem o problema da irracionalidade, a transformação da Matemática [em ciência hipotético-dedutiva] não seria produzida, mesmo dentro da sociedade grega;
- num outro contexto de sociedade, mesmo se confrontados com o mesmo problema, a Matemática não seria transformada como o foi possível ser na Grécia (1987, p. 298).

Também auxilia a compreender o surgimento da prova rigorosa no discurso matemático e suas intrincadas correlações com a filosofia e a política o trabalho de Miguel (1995). Seu foco primeiro não é a prova, mas a procura da constituição do paradigma que sustenta o Formalismo Pedagógico Clássico em Educação Matemática, esse "estilo de prática educativa em Matemática que extermina, consciente ou inconscientemente, o significado e o sentido do conhecimento que busca transmitir, gerando nos estudantes a sensação de que o *único sentido de um ato está no próprio ato* " (Miguel, 1995, p. 8). Tal paradigma mostra-se plasmado num "formalismo filosófico", que, na Filosofia da Matemática, significa a opção pelo "ideal da sistematização dedutiva da Matemática e [por] uma certa atitude em relação à natureza do conhecimento matemático" (p. 8). Para isso, o autor vai buscar as raizes da concepção "clássica" de Matemática, para o que acredita necessário "estabelecer um laço de continuidade político-epistemológica, por um lado entre a leitura platônica e a cosmologia pitagórica e, por outro lado, entre a leitura platônica e o empreendimento euclidiano" (p. 11). Para estabelecer tal "laço", Miguel parte das teses levantadas por Szabó, em artigo de 1960. As conclusões de Szabó são que as explicações disponíveis "permanecem na esfera de generalidades abstratas, isto é, carecem de concretude (...) e [não podem] ser confirmadas por dados históricos" (p. 16). Parte, assim, para a investigação do desenvolvimento histórico da demonstração matemática, do conceito de evidência e a origem dos "princípios" na Matemática grega. Disso, nos interessa a primeira etapa dessa trajetória de Szabó, sintetizada por Miguel:

> o raciocínio de Szabó é o seguinte: Euclides utiliza-se da Lógica estrita na construção de suas demonstrações porque em sua época a validade de um teorema era *mostrada* por meio da Lógica. Aquilo que ele queria dizer por 'demonstratio' ('desenvolvimento') era expresso em grego pelo verbo . δεικνμι Conseqüentemente, esse verbo em Euclides é o termo técnico para 'desenvolvimento lógico'. Mas como os gregos interpretavam a '*demonstratio*' antes dessa época? Por meio de vários argumentos, Szabó conclui que a técnica de demonstração na Matemática grega antiga era a simples *visualização*. Diz que os antigos pitagóricos consideravam a Geometria como ιστοριη, isto é, como uma ciência inseparável da *visão* e que, por volta da época de Platão, os gregos ainda tinham consciência do antigo significado do verbo, deiknu, isto é, '*concretamente visível*'. Disso decorre imediatamente que a passagem da concepção primitiva para a concepção euclidiana da 'demonstratio' deve ter sido provocada por uma tendência anti-ilustrativa e anti-empírica da ciência grega. Onde buscar as razões para o surgimento dessa tendência e da sua ligação com o desenvolvimento da ciência dedutiva grega? Mediante verificação da surpreendente freqüência da demonstração indireta nas provas do Livro VII dos *Elementos* de Euclides (...) Szabó levanta a conjetura de que foi devido ao uso da demonstração indireta que a Matemática se transformou em uma ciência dedutiva e sistemática. (...) Esta última conjetura permite a Szabó explicar a conexão orgânica existente entre forma indireta de demonstração e tendência anti-empírica e anti-ilustrativa. Isso porque, na Filosofia eleática, esses dois fenômenos eram inseparáveis, uma vez que os filósofos eleáticos usavam o método da demonstração indireta para provar apenas aqueles teoremas que flagrantemente feriam a experiência do senso-comum (Miguel, 1995, pp. 17-18).

Segundo Otte (1990, 1993 e 1994), envolvidas com a constituição da prova formal como revisitação da postura grega, estão a Revolução Industrial e suas conseqüências, como a divisão do trabalho e os processos de individualização. Com efeito, "a maior revolução econômica, antes da Revolução Industrial, foi a intensificação na produtividade da agricultura através do controle hidráulico, algum tempo antes do final do quarto milênio a.C., que transformou o insalubre pântano-jângal no berço das civilizações sumério-acadiana e egípcia" (Toynbee, 1987). Já que uma revolução do porte da Industrial não surge sem uma bem determinada trajetória que a faz emergir num dado momento, partindo do controle hidráulico da Antigüidade e passando, por exemplo, pela invenção da imprensa, chegamos aos teares ingleses dos séculos XVI e XVII. A imprensa escrita representa um momento chave em nossas especulações:

> Essa tecnologia [da imprensa escrita] tornou a comunicação e o conhecimento relativamente autônomos de agentes e deu-lhes uma qualidade genuinamente social. A viagem para Florença permitiu a Galileu relacionar o mundo da pesquisa

> científica com o da tecnologia, relação esta que deve ser entendida como tendo sido estabelecida mais pelas prensas venezianas do que pelo contato pessoal. (...) O que diferencia a utilização de artefatos mecânicos pelos antigos de sua versão na Pós-Renascença é a ênfase no processo secreto e no conhecimento secreto. A mecânica dos antigos, nesse sentido, assemelhava-se à alquimia. (...) No momento histórico em que a prensa permitiu que o conhecimento fosse transformado em objeto de mercado, esse conhecimento ganhou muito em sua significância. (...) Em termos históricos, o fato básico relacionado ao papel da imprensa foi que ela mudou fundamentalmente a relação entre as pessoas e o conhecimento e, daí, o conceito de conhecimento na sociedade. (...) Assim, dinamizou-se o crescimento do conhecimento, de modo que, no século XVI, podia-se falar de uma explosão de conhecimentos (...) o que continua presente em nossos dias e é a mais importante raiz da Era Mecanicista na qual operamos (Otte, 1993a, p. 282).

Se da produção de conhecimentos foi desvinculado seu ingrediente secreto, pois permitia a imprensa a divulgação cada vez mais ágil dessa produção, vinculou-se a ela a individualização: "para nós, nos dias de hoje, o tema central dos matemáticos do período romântico pode soar como não romântico e até como repelente. Os novos matemáticos devotaram-se ao rigor (...). O que a nova geração de matemáticos descobriu foi o *matemático*, do mesmo modo que os românticos haviam descoberto que na poesia havia o poeta e na música havia o músico" (Wiener, referido em Otte, 1990, p. 60). Sendo assim, a individualização que caracteriza a pesquisa exige, para uma divulgação de resultados, métodos mecânicos como os que são efetivados numa prova rigorosa de concepção contemporânea, pois "parece ser um exercício em lógica e a lógica nada tem a dizer sobre algo que não seja uma proposição. (...) A prova transformou-se num exercício de arranjar corretamente certas proposições, sendo uma atividade da lógica proposicional" (Otte, 1994, p. 299). A rigorosa prova matemática mecanizou-se.

O público e o privado: um espaço de conflitos

Sobre a questão do conflito entre o público e o privado na constituição da noção de prova rigorosa e, por conseguinte, no estabelecimento de um dos marcos mais fundamentais e caros ao modo de produção em Matemática, há mais pontos a explorar.

Segundo Davis e Tymoczko (referidos em Hanna, 1989, p. 21), "as filosofias tradicionais do Logicismo, Formalismo e Intuicionismo[5] são 'teorias privadas' que descrevem uma Matemática ideal. Mas, sendo uma atividade social, a Matemática necessita de uma 'teoria pública'". Além disso, a quase totalidade do material disponível sobre o tema apresenta, decorrente de uma reconstrução da história do rigor nas provas, a afirmação, sempre bem argumentada, de que as provas, como concebidas no seio de uma dominante matemática platônica, são uma espécie de ficção. O programa de rigor sistematizado por Euclides, dizem, não é, nem nunca foi, seguido rigidamente na produção em Matemática: passos, axiomas, regras de inferência, entre outros elementos substanciais ao processo de prova nem sempre são explicitados, donde a aceitação de um resultado, entre os que produzem Matemática, ser mais um processo social de negociação de significados dentro do grupo de especialistas ao qual o resultado em questão se relaciona, do que o mero seguir cego das regras impostas pela proposta formal. De acordo com Maslow (referido em Hanna, 1989, p. 22), "compreensão, significância e argumentação convincente são 'motivadores positivos' para a aceitação [da prova]: são esses fatores que retêm a atenção do matemático praticante para um novo teorema e o move à aceitação ativa. (...) Por outro lado, a validade estrutural do argumento matemático para um novo teorema, isto é, a validade atual ou potencial de sua forma como distinta de seu conteúdo, é, meramente, um 'fator higienizante', reconhecido como essencial mas tido como garantido."

Assim, a posição da veracidade acima de qualquer suspeita dada pela prova rigorosa vem sendo desafiada. Os próprios matemáticos admitem que uma prova completa seria demasiadamente enfadonha e sem sentido para, por exemplo, sua divulgação. Mais ainda, sugerem a existência de diferentes graus de validade formal em suas provas, obtendo o mesmo grau de aceitação. Além disso, os matemáticos concordam "que quando uma prova é válida somente por sua forma, sem considerar seu conteúdo, acrescenta-se muito pouco à compreensão de seu objeto e, ironicamente, pode não ser muito convincente" (Hanna, 1989, p. 20). Tais afirmações podem ser atribuídas tanto a Hanna (1989, 1993), de onde vem a citação, quanto a Davis e Hersh (1985), Davis (1972), Kitcher, Tymoczko, Manin e Maslow (referido em Hanna, 1989), entre outros. Existe nisso uma certa confusão entre a concepção de prova e a função que ela desempenha ou deveria desempenhar. Essa confusão foi abordada com mais profundidade por Otte (1992), ao tratar das conexões entre a prova, a Matemática Aplicada e a Matemática Pura, afirmando que ela se deve a diferentes noções de prova consideradas (meros cálculos, processo algorítmico das provas computacionais e concepção formal). Ainda assim, concordamos que os conceitos de prova vigentes na prática podem ser amalgamados num só conceito, aquele plasmado numa visão platônica de Matemática.

> O século XX ainda não delineou o que, de modo genérico, chamamos de Matemática Platônica. Alguns de seus princípios são os que seguem:
> - a crença na existência de certas entidades matemáticas ideais (...) ;
> - a crença em certos modos de dedução;

• a crença de que se uma afirmação matemática faz sentido, então pode ser provada como sendo verdadeira ou falsa;
• a crença de que, fundamentalmente, a Matemática existe separada dos seres humanos que a fazem. O *pi* estaria no céu.
Embora tais crenças tenham sido muito questionadas por matemáticos do porte de Kronecker, Gödel, Borel, Brouwer, Weyl e, mais recentemente, Bishop, as crenças platônicas continuam a reger o dia-a-dia da prática matemática. (...) Numa série de conferências sobre Matemática não-platônica, um comentário típico era: '- Bem apresentado, mas irrelevante. Voltemos ao nosso (platônico) quadro negro.' Como a prática é realizada numa comunidade, pode-se dizer que o rei pode estar nu, mas se toda a corte também estiver, tudo bem (Davis, 1972, p. 252).

Sobre tal "atmosfera platônica", segue a afirmação de Hanna (1989):

O desenvolvimento da Matemática e os comentários de matemáticos praticantes sugerem que se aceita um novo teorema quando alguma combinação dos seguintes fatores está presente:
• eles compreendem o teorema, os conceitos nele incorporados, seus antecedentes lógicos e suas implicações e nada existe que sugira que ele não seja verdadeiro;
• o teorema é significativo o suficiente para ter implicações em um ou mais ramos da Matemática (e então é importante e útil o suficiente para garantir estudo e análise detalhados);
• o teorema é consistente com o corpo dos resultados matemáticos aceitos;
• o autor tem uma reputação impecável como *expert* na área à qual se refere o teorema;
• existe um argumento matemático convincente (rigoroso ou não) para ele, de um tipo que já tenha sido encontrado antes. (...)
O papel da prova no processo de aceitação é similar ao seu papel na descoberta. As idéias matemáticas são descobertas por um ato de criação no qual a lógica formal não está diretamente envolvida[6]. Elas não são derivadas ou deduzidas, mas desenvolvidas num processo cuja significância para o corpo existente da Matemática e seu futuro potencial são reconhecidos pela intuição informal. Embora a prova seja um pré-requisito essencial para a publicação, ela não precisa ser nem rigorosa, nem completa. (...) Os matemáticos, mesmo os matemáticos ideais, são hábeis para fazer e conhecer Matemática somente por participarem de uma comunidade matemática (pp. 21-22).

Investigando as intrincadas ligações existentes na esfera da prática científica, o trabalho de Silva (1993), por exemplo, complementa o de Hanna, esclarecendo como a criação, aceitação, homologação e divulgação dos resultados em Matemática se dá: no círculo pensamento ⇔ individualidade ⇔ tutela, onde a certeza matemática é preservada.

O trabalho com Matemática é um ato de verificação interna no sentido em que a verificação da validade de uma determinada afirmativa, ou o encadeamento/conexão de elementos das ou para afirmativas, dispensam, em última instância, referências outras, de natureza material

> (pessoas, bibliografia, experimentos etc). Ultrapassados os elementos iniciais para o desenrolar da tarefa, a continuidade do trabalho depende do aluno ter adquirido ou não o esquema de verificação na situação determinada pela especificidade do trabalho (estudo), passando, 'aluno-orientador-grupo restrito de especialistas' a um nível de cumplicidade que se constituirá como um grupo em si na medida em que exercerem um esforço para impedir o deslize dos significantes matemáticos (Silva, 1993, p. 219).

Os trabalhos até aqui citados, de forma quase unânime, apontam a existência de critérios próprios definidos dentro e para a comunidade matemática, onde a prova rigorosa tem sido, há muito, concebida como fundante do conhecimento, metodologia básica da produção científica, definidora, por excelência, de um caráter exato, correto, unívoco que caracteriza a Matemática. Muito embora tais considerações sejam freqüentemente trazidas à luz, os autores estudados afirmam que o conhecimento matemático tem sido desenvolvido numa atmosfera quase avessa à prova, sendo que a validade das proposições feitas, conseqüentemente, é meramente probabilística. Escapa a tais autores, entretanto, a prova híbrida levada às salas de aula que são o *medium* propício para a proliferação da cultura do saber institucional regido pelos critérios dos grupos de especialistas. É através de um deslizamento da prática científica para a prática pedagógica que a tradição se manifesta, cristaliza-se e, revigorada, assume proporções insondáveis para os não familiarizados com a cultura matemática vigente. Foge das ações que são próprias da sala de aula a prova rigorosa como a concebida — mas não realizada — no seio da comunidade científica. O que ingressa na sala de aula de Matemática é uma prova híbrida, reconhecidamente uma colagem de propostas formais. Tal hibridismo, entretanto, reforça a existência e o poder de um formalismo fictício, o mesmo que determinaria a atividade matemática. Não existindo, de fato, a prova formal, seria necessário estabelecer quais e como são as provas levadas a essas salas de aula, os porquês de assim serem levadas, possibilitando visões alternativas para seu tratamento nesse contexto.

Na esteira dessas referências, um material de referência básica em se tratando de questionar o formalismo matemático — e, conseqüentemente, o modo "clássico" de ação com as provas rigorosas em salas de aula — é a obra de Imre Lakatos, principalmente seu *Proofs and refutations—The logic of mathematical discovery* de 1976, organizado por J. Worral e E. Zahar e publicado pela Cambridge University Press. Na tradução brasileira (Lakatos, 1978), e, a julgar pela introdução, também na versão original, a tese doutoral do autor ocupa o primeiro capítulo. A obra, de inegável importância histórica para a Filosofia da Matemática e, conseqüentemente para a Educação Matemática, tem como objetivo explícito, desafiar o formalismo, "escola de filosofia matemática que tende a identificar a Matemática com a sua abstração axiomática formal e a filosofia da Matemática como metamatemática" (Lakatos, 1978, pp. 13-14), o que Lakatos faz apoiado na conjectura Descartes-Euler sobre poliedros. Os fundantes para as posições assumidas no *corpus* do texto são dados por Popper e Polya, sendo que atacar a proposta a partir da trajetória de construções e reconstruções de prova da conjectura foi sugerida ao autor pelo próprio Polya (Davis e Hersh, 1985). Embora não pudéssemos deixar de tecer esses comentários, a revisitação desses fundantes de Lakatos e sua proposta do método das provas e refutações, merecem estudo especial e pormenorizado, visto que, mais do que meramente desafiar o formalismo, Lakatos contribui com um conceito realmente inovador de prova "rigorosa" e indica (implicitamente) possíveis modos de ação para a sala de aula. Além disso, suas afirmações dão luz à filosofia quasi-empiricista da Matemática, que tem servido de elemento básico para a constituição de uma filosofia própria para a Educação Matemática[7] e tem exercido flagrante fascínio nos educadores matemáticos. Há, porém, críticas ao trabalho de Lakatos. Como representante de um ponto de vista crítico, apresentamos as considerações de Gila Hanna[8] (1994):

> Em minha opinião, temos tendido a glorificar certos aspectos do *Provas e refutações* e os nossos esforços para modelar tais aspectos na sala de aula de Matemática podem ser muito artificiais e, em muitos casos, contra-produtivos. Desde a publicação do *Provas e refutações*, de Lakatos, tem havido muita discussão entre filósofos, matemáticos e educadores matemáticos sobre esse novo modo de ver a descoberta matemática. Mas os sérios resultados associados à descoberta matemática, certamente, não foram, ainda, totalmente estabelecidos. (...) Eu tenho receio de não estarmos sendo tão críticos como deveríamos sobre o trabalho de Lakatos. E tal trabalho sofre de muitas fraquezas. Por exemplo: o método da análise da prova defendido por Lakatos funciona no caso dos poliedros, mas ele é realmente aplicável para toda a Matemática? Para alguma outra parte da Matemática? Devemos notar que o método da análise da prova repousa sobre um exemplo particular, o estudo dos poliedros, um campo onde é relativamente fácil sugerir os contra-exemplos que o método de Lakatos exige. Mas nunca nos aventuraríamos a generalizar tendo por base um único exemplo! Não há garantia de que o método seja igualmente válido para outras partes da Matemática. Muito pelo contrário: não é difícil acharmos exemplos onde o processo da descoberta matemática ou aquele de se achar uma prova seria radicalmente diferente daquele descrito no *Provas e refutações* . Por exemplo, o estudo dos poliedros na prova do Teorema de Euler, como descrito em Lakatos, serve para enfatizar o papel crucial que as definições desempenham como pontos de partida no processo de provar. Uma vez que definições adequadas sejam formuladas, o teorema é demonstrado para todos os casos possíveis e não há mais discussão. Os matemáticos, porém, quando trabalham no campo das definições adequadas, ou com uma "base conceitual", para usar o termo de Bourbaki, o processo da prova não segue aquele descrito por Lakatos.

A prova e o currículo: de suas funções na prática pedagógica

Os autores consultados concordam: uma prova deve explicar, convencer, permitir o reconhecimento do fazer em Matemática, enriquecer nossa intuição, conquistar e permitir que sejam conquistados novos objetos e, final e sinteticamente, ampliar os horizontes de compreensão dos conceitos e práticas matemáticos. Concordam também que as provas apresentadas nos textos didáticos desempenham um papel pobre na comunicação das idéias matemáticas, herdando as lacunas apresentadas na produção científica ("A outra parte é análoga e deixamos para você", "é fácil mostrar", "você pode verificar isso", "sendo um cálculo simples ..."), reduzindo-se a meros cálculos mecânicos, tanto quanto as provas apresentadas em sala de aula.

A proposta mais claramente exposta sobre a necessidade de inclusão da prova rigorosa nos currículos escolares, em todos os níveis — mas com ênfase para o 1º e 2º graus, daí a novidade —, é a dos reformadores de currículos dos anos 50 e 60, o que ficou conhecido como o projeto "Matemática Moderna". Hanna (1983) estuda os reflexos e limitações dessas tentativas de modernização curricular plasmadas no uso das provas rigorosas, concluindo positivamente pela presença das provas nos currículos, mas não como uma metodologia universal imposta, e sim como uma das maneiras de se estudar a validade de um conceito. No Brasil, por exemplo, a Matemática Moderna também teve seus efeitos perversos sentidos até hoje — mesmo decretada a falência de tal proposta — principalmente nas abordagens de textos didáticos ainda disponíveis e veiculados com insistência nas escolas de ensinos básico e médio (Imenes, 1989). Tratamos aqui, portanto, dos perigos da formalização prematura e do mecanicismo que acompanhou a implementação da visão "bourbakista" nas salas de aula. Hanna afirma ainda que, se partirmos da proposta dos reformadores, ou seja, a prova rigorosa como recurso usado para refletir o atual estágio de desenvolvimento da Matemática, essa sua função deveria ser melhor examinada sob dois aspectos: por um lado, não há nem mesmo consenso sobre o que é a prova rigorosa — consenso este que unificaria, de certo modo, as ações -; e, por outro lado, há o atual desprezo quanto ao "rigor", o qual tem sido a tônica de várias atitudes em relação à prova, que deve convencer, mesmo que para isso esse rigor tenha de ser relativizado. Caracteriza-se, assim, a prova rigorosa como algo que não reflete a prática matemática corrente, sendo, pois, secundária para o fazer na Matemática atual, negando a proposição primeira dos reformadores de currículo.

Rigor ou rigores: uma revisitação aos conceitos de rigor e intuição

Se temos considerado a existência de uma história do rigor, de concepções de rigor que mudam, ora com o tempo, ora ao gosto da comunidade de juizes qualificados, da importância às vezes fictícia desse rigor, torna-se necessária uma incursão nesse domínio. Propomos aqui, então, um pequeno desvio na seqüência que vínhamos tomando para esclarecer mais apropriadamente o conceito de rigor, o que nos leva a questionar, também, nesse contexto, o papel da intuição. Em relação ao tema *rigor* fogem dos autores alguns aspectos de capital importância para a discussão: sobre qual concepção de rigor estamos falando? Existe uma concepção transitória de rigor? Bicudo (1993), partindo de um estudo etimológico do termo e estabelecendo como pontos de referência as questões da linguagem natural, afirma:

> Na Matemática, igualmente [com relação à linguagem comum], o rigor tem (...) dupla função, sintática e semântica. (...) Como no âmbito de qualquer linguagem, (...) ser rigoroso em Matemática significa proceder de acordo com as regras de sua gramática, a LÓGICA. (...) O que queremos afirmar com tais considerações, é que NÃO houve, ao longo dos tempos, uma modificação do conceito de rigor em Matemática, o que significa sempre seguir inflexivelmente os cânones da Lógica (...). O que tem mudado, como não poderia deixar de ser, é esse sistema gramatical da Matemática (p. 61).

Essa atenção mais detalhada ao termo *rigor*, embora escape a maioria dos autores estudados, em nada prejudica as afirmativas já feitas, ao contrário, reforça a existência de um cânone rígido ditado pela Lógica, cujas limitações práticas tornam inviável o que se defende como prova "rigorosa". Tão importante quanto a elucidação do conceito de rigor, a continuidade do artigo de Bicudo trata de estabelecer o vínculo existente, segundo ele, entre rigor e intuição[9]:

> a intuição é construida no tratamento cotidiano das questões e (...) a 'segurança' da intuição, baseada na familiaridade das questões tratadas, se esboroa de encontro a situações novas, que ultrapassem os limites daquelas que a ajudaram a se construir. Aí, então, o rigor é fundamental para liberar tais situações de tudo o que seja essencial e, desse modo, preparar o terceiro terreno em que vicejará a nova intuição. É por essa tensão dialética entre intuição e rigor que se sobe na espiral do conhecimento matemático. Mesmo que não percebamos, a intuição está impregnada do rigor que colaborou na possibilidade de sua criação. É o equilíbrio das tendências de *diferenciação* (intuição) e *unificação* (rigor). Não há avanço de uma sem a outra (p. 64).

Desse modo, Bicudo considera o rigor de uma prova formal como "retendo", em si, os "momentos" intuitivos que permitiram sua manifestação. Nesse rigor — que perdura — e na prova rigorosa — seu veículo —, temos os constitutivos essenciais da metodologia da Matemática "formal". O aparecimento, aqui, de questões do domínio da intuição foi o que nos fez perceber a despreocupação dos autores estudados com relação aos processos de matematização não-formais, exatamente aqueles aos quais a literatura atual em Educação Matemática — principalmente a que sugere abordagens alternativas no tratamento do conteúdo matemático em sala de aula — vem consagrando espaço considerável, categorizando-os no que chamamos "as tendências da Educação Matemática", do que são exemplos a Etnomatemática, a Resolução de Problemas, a Modelagem e a Modelação Matemáticas etc[10]. Ora, tratando a prova rigorosa como elemento essencial do fazer matemático, campo fértil para a construção desse conhecimento, ficam descaracterizadas como sendo "Matemática", as intuições primeiras e compreensões pré-predicativas que, como as matemáticas "culturais" de certos grupos sociais, as etnomatemáticas, podem ser posteriormente formalizadas vindo a integrar o mundo acadêmico com comprovadas possibilidades de reversão no quadro de negatividades que caracteriza a Matemática formal na sala de aula. Tal despreocupação é, tão somente, a constatação de que os autores consideram como "Matemática" a "matemática acadêmica", pois, aparentemente, tanto as "outras" matemáticas prescindiriam de uma tal noção de prova rigorosa quanto a própria Matemática dispensaria, *a posteriori*, as intuições primeiras conforme os próprios autores concordam na esteira de Hadamard (1947).

De uma possível organização para a continuidade da trajectória

Um levantamento bibliográfico mais pontual sobre a prova rigorosa, apresentado de forma sistemática, é do que nos ocupamos na seqüência desse trabalho. Junto aos demais artigos já utilizados até aqui, essa listagem encerra como um ciclo de referências, pois foram "varridas" quase todas as indicações bibliográficas de todos os artigos estudados. As sínteses que expomos podem nos auxiliar a construir uma visão panorâmica do que vem sendo dito sobre a prova rigorosa, oferecendo, por vezes, indicativos pertinentes para o tratamento desse aspecto da Matemática nas salas de aula. Esse panorama tenta classificar as referências disponíveis para um futuro leitor voltado ao mesmo tema, e por ser esta uma pretensão desse nosso artigo, oferecemos, ao final, uma listagem bibliográfica na qual figuram outros textos além dos que serão aqui efetivamente analisados. Para uma organização da seqüência de apresentação desses estudos optamos por categorizar os trabalhos em grandes regiões temáticas, embora haja uma nítida interconexão entre elas, além de haver trabalhos "intercambiáveis", pois que poderiam pertencer a duas ou mais "regiões".

A sala de aula como objetivo de propostas e fonte de pesquisas

Leron (1983) apresenta em seu artigo o que chama de um método alternativo para a veiculação da prova rigorosa em sala de aula, o *método estrutural.* Posto em contraposição ao que chama de "método linear" de apresentação de provas em textos didáticos, o método de Leron inicia-se com uma visão panorâmica do resultado a ser provado e dos elementos que contribuirão para a constituição de sua prova. A partir daí são estabelecidos vários níveis, dos quais o primeiro (inicial) deve ser, normalmente, bastante curto e livre de tecnicismos. Por outro lado, o nível final "é bastante detalhado, assemelhando-se nisso às provas lineares padrão". Dentre esses dois níveis, são construidos outros tantos quanto necessários para que, pouco a pouco, todas as variáveis envolvidas no processo de demonstração sejam esclarecidas ou mesmo demonstradas. Assemelha-se, assim, sob nosso ponto de vista, a certas exposições de textos clássicos de Matemática, onde resultados particulares são estabelecidos para, a seguir, serem amalgamados ou servirem de apoio a teoremas mais gerais. São ainda dados, em seu artigo, exemplos do método, onde a resultados demonstrados linearmente em livros didáticos consagrados segue-se a versão do método estrutural, enunciados todos os níveis construidos.

Hanna (1990), discutindo a existência de três diferentes percepções de prova — a prova formal, a prova aceitável e o ensino da prova —, enfatiza a necessidade de serem desenvolvidas provas que não somente provem, mas que expliquem. Essa mesma discussão é a que aparece em Hanna (1989a). Como diferenciar as provas que *provam* das provas que *explicam*? Para isso, o exemplo dado é simples: considera-se a afirmação de que a soma dos n primeiros inteiros positivos, $S(n)$, é dada por $n(n+1)/2$. A prova por indução finita é chamada por Hanna de não explicativa (como em geral, argumenta, são as provas por indução). A prova desse resultado que, além de ser uma prova aceita em termos matemáticos carrega a possibilidade de ampliar a compreensão de outros aspectos é a dada por Gauss, por exemplo, ou a da representação geométrica dos n primeiros inteiros positivos como triângulos retângulos isósceles de pontos. O exemplo é bom, a base de discussão é pertinente, mas há a impossibilidade de serem encontradas provas alternativas (como as apresentadas para o resultado utilizado pela autora) para qualquer resultado em Matemática. Percebendo isso, Hanna diz ser um desafio, para o professor, encontrar provas explicativas para as afirmações matemáticas.

Barbeau (1990) apresenta cinco exemplos de proposições matemáticas com discussões que, fugindo do escopo do puramente formal e reforçando a necessidade de uma ênfase no aspecto histórico quando da veiculação da prova, pretendem estabelecer a possibilidade de iluminar pontos que no tratamento convencional ficam obscuros. O artigo, porém, é curto demais para que as idéias, apresentadas de uma forma muito geral, possam ser totalmente apreendidas.

Movshovitz-Hadar (1988) apresenta dois teoremas sobre matrizes e números primos para, depois, tecer considerações sobre algumas possibilidades no tratamento com a prova rigorosa. Os modos de apresentação que discute vão do formal até o da apresentação de exemplos particulares de uma dada situação para posterior generalização, passando (a) pelo que o autor chama de "uma apresentação verbal simbólica", que consiste em enfatizar, além do que o professor escreve, o que o professor fala; (b) por uma apresentação "via inquérito indutivo" que consiste em separar a demonstração em passos — sub-demonstrações — que no final do processo formarão a prova na íntegra; e (c) por uma apresentação "global", semi-formalizada, antes da formalização final. Uma categorização mais global das formas de apresentação de demonstrações é então apresentada: a categoria das apresentações de "estímulo à resposta" em contraposição à da "descoberta guiada".

Yackel e Cobb (1994) seguem a proposta de retomada à ênfase no raciocínio matemático, conforme ditada pelo National Council of Teachers of Mathematics, apoiando a utilização das provas explicativas de Hanna (1989a, 1990). Nesse contexto, sugerem que as provas desenvolvidas em sala de aula devem ter um caráter de interação social, o que pode ser basicamente traduzido como sendo o método de levar os alunos a compartilhar métodos de solução, respostas, pensamentos e caminhos por eles encontrados em exposições orais perante a sala, afirmando que "mesmo generalizações não-articuladas e injustificadas são produtivas para o aprendizado".

Bell (1976) categoriza as explicações de crianças sobre as "demonstrações" dadas a certas proposições matemáticas. Este artigo vem complementar um artigo anterior, do mesmo ano, no qual pelo menos duas categorias de explicações puderam ser estabelecidas num trabalho com alunos de mesma faixa etária: o "estágio 1 (abstração), onde certos modelos ou relações podem ser reconhecidos, ampliados ou descritos mas sem uma tentativa de explicá-los, justificá-los ou deduzi-los. (...) e o estágio 3 (prova), no qual ou um argumento dedutivo informal — mas aceitável e completo — foi dado, ou o conjunto dos possíveis casos foi totalmente checado de modo empírico" (p. 23). No artigo de 1976, a partir da afirmação de que, dados dois números consecutivos e sua soma, um e apenas um dentre esses três números é um múltiplo de três, só se pode constatar que a falha nas argumentações de 48% dos alunos ou é devida a lacunas anteriores no conhecimento ou à inabilidade para coordenar, ao mesmo tempo, todos os dados do problema.

Chazan (1993) documenta a preferência dos alunos por argumentos empíricos — principalmente o uso de exemplos —, em vez de preferirem os dedutivos quando da apresentação dos conteúdos matemáticos. Nisso interferem dois conjuntos de crenças: o conjunto das afirmações do tipo "Evidência é prova" (por exemplo, o uso de exemplos claros, desenhos e cálculos computacionais são suficientes) e o das afirmações do tipo "A prova dedutiva é simplesmente evidência" (alguns estudantes vêem as provas dedutivas como provas para um caso único, o caso associado, por exemplo, ao diagrama considerado. Não reconhecem o aspecto genérico desses auxiliares na prova dedutiva).

Radford (1994) aborda o problema da aprendizagem da demonstração. Partindo da afirmação de que o conceito de demonstração está intrinsecamente ligado à concepção que se têm dos objetos matemáticos, estabelece a necessidade de uma mudança conceitual, pensando na veiculação das demonstrações em salas de aula. A mudança conceitual "requer, em particular, uma transformação das representações (especialmente da figura, no caso da Geometria) e da organização e informação (que toma a forma de um novo modo de organização lógico-dedutiva)" (Radford, 1994, p. 21). Para que seu texto progrida, Radford lança mão da noção de demonstração pelo "exemplo genérico", extraída da tipologia de provas proposta por Balacheff: "contrariamente ao que ocorre na demonstração por visualização [que é embasada numa concepção 'ingênua', aquela da crença num mundo matemático no qual os objetos *são* a sua representação e se estruturam em relações que não mudam de um desenho a outro], no 'exemplo genérico' [a construção gráfica disponível] é conscientemente tida como representante de uma classe" (p. 25). Disso, alguns exemplos — interessantes, todos, porém, do campo da Geometria — surgem, como o da formação de um mosaico de triângulos para a demonstração de proposições básicas da Geometria Euclideana. Além disso, o texto oferece considerações pertinentes sobre concepções que são freqüentemente detectadas nos alunos, classificando-as em *fenomenológicas* (onde Fenomenologia é termo tomado em seu "sentido mais simples, de uma referência aos 'fenômenos' observáveis pelos sentidos"), *dinâmico-intuitivas* (onde figuram as demonstrações por "exemplo genérico") e *abstrato-dedutivas* (a categoria das provas dedutivas do "tipo euclideano"). De um modo geral, reforça a validade dos *problemas abertos* — também propostos por Balacheff — no trabalho cotidiano com as provas, nos quais a formulação da questão não contém sua resposta; e dá elementos importantes para esclarecer a dinâmica da elaboração da prova, o que faz munido da distinção entre etapas — a heurística e a da redação do texto da demonstração: "observamos que, ao mesmo tempo em que o processo heurístico projeta em linhas gerais a etapa da redação, esta última pode solicitar certas informações que farão o aluno retornar e, inclusive, verificar completamente o processo heurístico" (Radford, 1994, p. 30). Certamente, o que importa no trabalho de Radford é mais o desenvolvimento de seu pensamento — o que faz apoiado em inúmeras referências fundamentais — que propriamente suas conclusões. Numa dessas conclusões, afirma-se que "se o aluno não desenvolveu as habilidades lógicas que podem assegurar o êxito do encadeamento dedutivo das proposições, a heurística (que permite propriamente ir 'à caça' das proposições) se vê fortemente debilitada, a ponto de carecer de sentido" (Radford, 1994, p. 30). Não tendo estabelecido de modo claro quais os fundantes de sua própria investigação, pode-se ver, nessa conclusão, o que já apontamos em outros textos, isto é, um reforço da demonstração concebida como limitada ao âmbito acadêmico. Finalmente, cabe ressaltar que, embora não seja seu tema principal, Radford tece algumas considerações sobre como trabalha com provas em cursos de formação de professores.

Mok (1992) estuda o ensino e a aprendizagem da prova por indução, concluindo que os alunos têm dificuldades de três tipos: 1) uma inabilidade para usar o 'modus ponens'; 2) falhas em compreender que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ é uma afirmação condicional e 3) não vêem a necessidade de assegurar a validade de $P(1)$.

Von Asch (1992) discute a questão da prova rigorosa no contexto dos chamados "cursos de serviço", aqueles que, não sendo cursos específicos de Matemática, a utilizam como ferramenta. Von Asch questiona se a prova rigorosa deve ser tratada ou omitida nos programas de tais cursos. O nível de abstração exigido pelas provas formais foi considerado e optou-se, para os cursos de serviço, por provas chamadas de pré-formais, consideradas suficientes.

O trabalho de Cury (1988), analisa os erros de alunos em demonstrações de Geometria, partindo do pressuposto de que "os erros cometidos pelos alunos nas demonstrações de teoremas estão relacionados com o processo de ensino-aprendizagem, em qualquer um dos níveis; com o abandono do ensino de Geometria Dedutiva nos 1º e 2º graus; com o excesso de rigor e formalismo que exigimos nas demonstrações desde o início do curso de Matemática e com a falta de explicitação de uma Filosofia da Matemática que norteie a prática docente" (Cury, 1988, p. 11). Daí, categoriza os erros em oito tipos: (I) erros referentes ao emprego incorreto da linguagem matemática, mau uso de símbolos e interferência de significados diversos, falta de clareza e precisão; (II) os relacionados ao tratamento gráfico do problema, caracterizados pela introdução de informações erradas; (III) falha na conceituação; (IV) conclusões inaceitáveis; (V) não utilização de resultados já conhecidos; (VI) uso da tese como elemento da hipótese; (VII) lapsos orais, de leitura ou escrita; e (VIII) erros no uso da linguagem natural: ortografia, pontuação, concordâncias nominal e verbal. Destaca que "as demonstrações que o professor apresenta vêm imbuídas de uma concepção eclética de Matemática, aparecendo geralmente temperadas com pitadas de Logicismo e Formalismo". (Cury, 1988, p. 20).

Freitas (1993), em trabalho desenvolvido na França, investiga a "produção de provas num campo particular de problemas situado na passagem da Aritmética para a Álgebra". Os objetivos são, além da identificação desses tipos de provas — o que Freitas faz baseado na tipologia de provas de Balacheff[11] —, a verificação dos mecanismos de interação entre linguagem e "nível" de prova, avaliando a representação (concepção?) que os alunos têm sobre a prova em Matemática. Como resultados, a pesquisa indica: 1) o surgimento de duas categorias de provas, entre as utilizadas pelos alunos pesquisados, não presentes na categorização anteriormente adotada, às quais chama de "prova por enunciado" e "prova algébrica". Consistem na utilização e sistematização de proposições matemáticas, consideradas verdadeiras, apresentadas em linguagem natural, no primeiro caso, e em linguagem algébrica, no segundo; 2) a dificuldade de obtenção de provas intelectuais, sobretudo nas provas algébricas e 3) a prova "algébrica" corresponde mais à "representação" de prova matemática para os alunos: "observou-se que as provas produzidas pelos alunos estão ligadas à representação que eles têm de uma prova, mas é sobretudo o domínio de uma dada linguagem em relação a um determinado problema que vai determinar o tipo de produção. De modo geral, as provas algébricas são mais valorizadas porém menos produzidas" (Freitas, 1994, p. 5).

Um retorno aos aspectos históricos

Siu (1993) estuda os comentários de Liu Hui, matemático chinês do século terceiro, feitos ao *Jiu Zhang Suan Shu* (*Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*) um texto matemático escrito entre 100 a.C. e 100 d.C.. O texto é uma coleção de 246 problemas matemáticos sobre vários tópicos, arranjados em nove capítulos. Os comentários de Hui, apontados por Siu, podem ser tidos como uma prova explicativa (argumentativa, discursiva, no sentido de Balacheff (1987), não no de Hanna (1989a, 1990)). A intenção é mostrar que, caracterizada a prova como uma explicação com a função de convencer e clarificar, há uma abundância de provas em outros textos antigos além dos gregos.

Dhombres (1993), também num enfoque de procura a elementos históricos, enfatiza a importância, quando possível, de quebrar a tradição da prova única de resultados:

> É interessante notar que os geômetras meticulosos que copiam a longa prova euclideana do livro XII [da Proposição 2, que introduz uma das mais poderosas ferramentas da geometria antiga: o método da exaustão] são bastante casuais quando tratando com outras figuras similares — eles apenas consideram alguns resultados óbvios. (...) de acordo com essa abordagem da uma-única-prova, provar o mesmo resultado de dois modos diferentes é um pecado mortal. (...) o que está envolvido aqui não é apenas a questão da brevidade ou o desejo de deixar o prolixo de lado. Dar duas (ou mais) provas parece, mesmo indiretamente, implicar na existência de dois caminhos para o conhecimento matemático. Isso contradiz a afirmação implícita de existir apenas um caminho natural, somente a seqüência autorizada dos passos lógicos que levarão à conclusão correta (pp. 401-402).

A partir dessas afirmações, o autor usa como exemplo o matemático belga Gregório de Saint Vincent, autor de uma única obra, a *Opus Geometricum*, publicada em 1647 (quando nem a *Geometria* de Descartes, nem a *Geometria dos Indivisíveis* de Cavalieri estavam disponíveis), para mostrar a força que duas ou mais demonstrações de um mesmo resultado podem ter. Gregório provou que a área limitada por uma hipérbole, uma de suas assíntotas e duas linhas paralelas à outra assíntota pode ser expressa por meio de uma função logarítmica. Em seu trabalho algumas proposições são enunciadas (as de número 106 a 110 são estudadas), assegurando aparentemente os mesmos mecanismos de ação e levando ao mesmo resultado. Os modos de agir (geometricamente) em uma prova, porém, equivalem a modos de prova analíticos na outra. A comparação entre tais provas permite-nos ir da Geometria Clássica à Geometria Analítica. A transição, porém, não foi feita por Gregório, mas um leitor moderno poderia antecipar a nova perspectiva. Daí a força em ampliar contextos que as duas provas podem ter.

Hanna e Jahnke (1993), traçando inicialmente um histórico da prova matemática (não de sua constituição na história, como fez Arsac (1987), mas elementos de uma história do rigor), expõem que a prova rigorosa, aliada desde seu início às questões geométricas, não era amplamente utilizada — não pelo menos na mesma acepção em que o era na Geometria — em Álgebra e Análise, sendo prática comum nos séculos XVII e XVIII a não-explicitação de exceções que um resultado poderia exigir.

> Até o século XIX (...) era aceito que a validade universal dos teoremas em Álgebra e Análise era garantida pelo fato de que todas as operações eram realizadas simbolicamente, com o uso de letras. Vista como um modo de levar adiante uma seqüência de operações, a prova poderia

> consistir, também, de cálculos feitos sobre um exemplo numérico desde que não fossem usadas propriedades especiais dos números que se tinha à mão. Não era necessário, ainda, explicitar as regras de cálculo. (...) A explicação dos domínios numéricos e regras algébricas, dada no início do século XIX, tornou-se um processo que partia da Matemática elementar para a Álgebra e, então, passando por Weierstrass e outros, na aritmetização da análise, culminou com a noção do método axiomático de Hilbert. Esse processo trouxe a adaptação da Álgebra e da Análise ao esquema dedutivo de Euclides. Paradoxalmente, a Álgebra tornou-se o modelo da prova rigorosa em Matemática (pp. 423-425).

Da proposta formalista de exclusão da semântica na demonstração de proposições matemáticas, Hanna e Jahnke extraem dois tipos de sistema matemático: um em sentido estrito e outro em sentido amplo. Um sistema matemático *estrito* é um sistema axiomático na acepção de Hilbert, um campo sintaticamente estruturado onde a semântica não toma parte. A introdução da semântica nesse sistema (constituindo, assim, o de sentido amplo) se dá com a inclusão, nele, de um conjunto, o das aplicações pretendidas (I), de onde se forma um par (C,I), cujo núcleo estrutural C é o sistema no sentido estrito. A prova formal, ou "puramente dedutiva", pertence ao sistema em sentido estrito, enquanto os autores advogam a importância de serem concebidas as provas no sistema (C,I), sendo esse o domínio único no qual a prova adquiriria significado:

> Da definição formal de números negativos pode-se provar a equação (-1).(-1) = 1, por exemplo, da qual podemos dizer ter uma interpretação intuitiva aplicável em todos os casos. É somente por suas aplicações a cálculos com números negativos, por exemplo, que tal equação adquire significado. (...) O conceito puramente dedutivo de prova trata da derivação formal, enquanto que a justificação pela aplicação refere-se ao fato de que toda justificação deve apelar a alguma base, e a base última, do ponto de vista do significado, é a aplicação (p. 427).

De matemáticos e máquinas: a validade da prova por computador

Pretendemos, aqui, considerar a utilização do computador no domínio das demonstrações, focando, especificamente, o debate sobre a validade das provas rigorosas desenvolvidas com o recurso da informática. O pano-de-fundo dessa cena é composto de argumentações divergentes. Por um lado, há os matemáticos advogando pela inaceitabilidade do recurso e, por outro lado, os educadores matemáticos, que creditam aos computadores uma possibilidade de ruptura com o reiterado fracasso do ensino e aprendizagem da Matemática. Estão em jogo, portanto, mais uma vez, as concepções advindas da prática científica da Matemática e as fundadas na preocupação com a utilização de recursos alternativos para a sala de aula de Matemática, no círculo da Educação Matemática.

Uma maior atenção ao tema da validade das provas desenvolvidas pelos computadores foi dada a partir de 1976, quando a demonstração da conjectura das Quatro Cores, feita por Appel e Haken chegou a ganhar as páginas da revista *Times*. A publicidade explica-se face ao embaraço que o uso do computador na demonstração causou na comunidade de matemáticos. A maior fonte de referência sobre o tema vem dos trabalhos de Davis e Hersh (1985), Hersh (1993) e Davis (1993), acompanhados pelos textos de Otte (1992, 1993). Entre os autores citados, Davis e Hersh têm sido colaboradores em alguns dos textos mais conhecidos sobre Matemática e Ensino de Matemática, entre especialistas e não-especialistas. Mesmo quando estudamos seus trabalhos individuais, vemos uma certa coerência e complementaridade difícil de ignorar. É esse o caso quando tratam das provas realizadas via computador.

Num dos artigos aqui em foco, Davis (1993) advoga sobre a importância dos "teoremas visuais" para a sala de aula. O que são "teoremas visuais"? Um teorema visual é, grosso modo, um *output* visual ou gráfico de um programa de computação que os olhos organizam em um todo coerente e identificável, sendo útil para inspirar questões matemáticas de natureza tradicional ou que contribuem para nossa compreensão e enriquecimento de algumas situações matemáticas ou reais. "É a passagem da iteração matemática à figura percebida, tida ou intuída em toda sua complexidade visual, explícita ou não" (Davis, 1993, p. 339). Em outros termos, Davis clama por uma retomada à importância do olhar num contexto sócio-cultural que é mais visual do que verbal, afirmando que deveríamos restituir aos olhos seu posto de órgãos legítimos para a descoberta. "No final do século XIX a Geometria declarou sua total independência do espaço como percebido pelos humanos ou como funciona em Física". Os livros-textos de Geometria dizem: — *não confie em seus olhos*, mas esquecem de dizer, segundo o autor, que uma representação geométrica acurada é um suporte bastante útil para o desenvolvimento de uma prova, ao contrário do que indica a prova clássica que estabelece serem isósceles todos os triângulos (conforme Saad, 1991). Assim, acredita que a frase "os olhos mentem" pode ser re-colocada: o que os olhos indicam pode ser interpretado de modo subjetivo e a interpretação ocorre como resultado da experiência, sendo expressa na linguagem natural ou em ações. Por esse motivo, é ao cérebro — dizem — que precisamos render homenagens, pois ele é "o raciocinador por excelência. O cérebro é puro, doce, simples e bom. Mas quem tem um cérebro assim?" (Davis, 1993, p. 335). Desse modo, segue que, independentemente da aprovação ou não da comunidade de matemáticos praticantes, os teoremas visuais devem ser adotados nos processos de ensino e aprendizagem. É hora da procura de um equilíbrio entre as metodologias da Matemática.

O computador aí tem seu papel. O próprio autor esclarece, em outros textos, as limitações que a comunidade de juizes impõe para a aceitação de um resultado que envolva o uso da máquina. Davis (1972) afirma:

> A coisa toda [a noção de prova formal] é, em princípio, perfeitamente mecanizável sendo trabalho para um escravo ou seu moderno equivalente: o computador. (...) uma prova pode ser comparada com um programa. Os axiomas são análogos ao *input*. O teorema, análogo ao *output*, enquanto a prova é o programa. Encontrar uma prova consiste em encontrar um programa. Para verificar uma dada prova precisamos somente fazer o programa correr novamente (p. 256).

Mas a chance de falhas nesse "correr", em termos probabilísticos, não é infinitesimal. A verificação "introduz novas fontes de erro: os erros randômicos causados por flutuações nas características físicas da máquina e os inevitáveis erros humanos no design e produção de hardware e software. (...) Para a maioria da Matemática não trivial, a esperança de uma tal prova formal permanece apenas hipotética, [e é rejeitada] porque os detalhes da computação da própria máquina permanecem (inevitavelmente) escondidos." O livro de Davis e Hersh (1985) traz mais elementos para a discussão:

> não há como negar que a aceitação do teorema de Haken-Appel envolve um certo tipo de fé[12]. Mesmo se eu ler e verificar cada linha que eles escreveram, tenho ainda que acreditar que cálculos de computador efetuam realmente o que se supõe que efetuem. Assim, minha crença na demonstração do teorema das quatro cores depende não somente da crença em minha própria habilidade em compreender e verificar raciocínios matemáticos, mas também de minha crença de que os computadores funcionam e fazem o que se espera que façam. Isso é uma crença de um tipo totalmente diferente. Não tenho mais razões para tal crença do que para qualquer outra sobre factualidade ou confiabilidade do 'conhecimento comum' — coisas que todos sabem e em que eu acredito por que aceito 'o que todo mundo sabe'. Dessa maneira, o conhecimento matemático é reduzido ao nível do conhecimento comum (p. 427).

É realmente intrigante! As provas formais, já foi afirmado, têm, na produção científica costumeiramente divulgada, lacunas que as tornam incompletas, sujeitas, por isso, exclusivamente à avaliação de um grupo determinado de juízes qualificados. Mais ainda: além de uma prova formal integral raramente ser feita, se fosse feita, dizem, não seria verificada. O próprio artigo de Davis (1972) afirma — com o aval de muitos revisores e consultores conceituados — que muitos teoremas divulgados em periódicos científicos são falsos por se apoiarem em resultados (falsos) não provados ou provados com lacunas grandes o suficiente para suportar uma incorreção. Isso nos faz pensar que somente se o computador fosse aceito como sócio do clube as desconfianças não seriam tantas e a aceitação de seus resultados dar-se-ia mais facilmente...

Otte (1993) oferece mais elementos para esclarecer o embate entre o computador e a Matemática chamada "pura" [13]:

> A Matemática Pura defendo sua autonomia tanto diante das aplicações quanto diante do computador. (...) A Matemática é 'produção criativa' no sentido da arte, sem nenhuma utilidade e sem objeto. Tais reações revelam o desejo de separar o criativo da atividade mecânica. (...) É evidente que a separação só acontece de forma aceitável e razoável quando se admite que a própria Matemática não é um mero formalismo, e que seus objetos não surgem simplesmente por imposições arbitrárias. (...) Os argumentos céticos, que duvidam da possibilidade de que o computador possa pensar um dia, oscilam entre substancialismo e funcionalismo. Por um lado, o pensamento do computador, por outro, é preciso evidentemente aceitar que uma simulação programada de um pensamento ou de um sentimento pressupõe uma descrição teórica dessas coisas. Como porém a descrição de um pensamento é algo diferente de um pensamento efetivo, fica automaticamente provado por essa mudança de tipo que o computador não pode nem pensar nem sentir. (...) A argumentação (...) contra o pensamento do computador alcançou recentemente uma grande popularidade, sobretudo, por causa do filósofo americano John Searle. (...) Numa palavra: o espírito é mais do que sintaxe, é também semântica. (...) A afirmação de Searle, de que os computadores só podem 'pensar' sintaticamente, implica de facto uma concepção funcional de pensamento. A função é essencial numa estrutura formal ou num algoritmo. (...) A função do processamento de informações é [própria] do homem e do computador, mas com a substância é diferente, uma vez que o homem dispõe de 'processos mentais'. (...) Não podemos distinguir a atividade criativa da mecânica quando não se leva em conta o objeto da atividade. Também o pensamento algorítmico é tão complexo que ele não pode ser controlado e dirigido algorítmica e tecnicamente (pp. 179-192).

Da construção de conclusões

Finalmente, as considerações que temos feito até agora, baseados na literatura disponível em Educação Matemática, permitem-nos afirmar, em síntese, que:

(a) a prova rigorosa é elemento fundamental se pretendemos compreender como funciona o discurso matemático e como são engendradas as concepções que permeiam a sala de aula de Matemática, sendo, assim, tema importante à Educação Matemática;

(b) no que se refere à questão do rigor, os estudos analisados parecem não conceber a possibilidade de um rigor alheio à Matemática dita "formal", desenvolvida na esfera acadêmica[14];
(c) o surgimento da prova, à época dos gregos, e mesmo sua formalização, amplamente divulgada no mundo contemporâneo, carecem de estudos históricos mais apurados acerca de seu surgimento;
(d) prova rigorosa e utilização de informática ainda são questões polêmicas, cercadas de paradoxos que focam validade, teoria e prática;
(e) várias são as contribuições que fazem referência a metodologias para o uso da prova em sala de aula, embora estas possam ser vistas como compartimentadas, não tendo um projeto global que lhes sirva como fundamentação;
(f) a prova rigorosa é engendrada, executada, verificada e, finalmente, validada por processos nitidamente sociais, afirmação esta que, de certa forma, rompe com alguns dos aspectos do formalismo que deveriam caracterizá-la;
(g) não existem disponíveis trabalhos que tratem especificamente da questão da prova rigorosa imersa no contexto da formação do professor de Matemática[15].

Notas

1 A proposta "formalista", segundo consenso dos autores pesquisados, está radicada em Euclides. Porém, segundo Arsac (1987), objetar-se-á que *Os Elementos* de Euclides não satisfazem completamente os princípios básicos que caracterizariam o que hoje entendemos por prova rigorosa, por tomar axiomas implicitamente ou apelar com certa freqüência às figuras. Na realidade, Hacking (1986) mostra, estudando Descartes e Leibniz, que o conceito da prova matemática rigorosa neste último é quase o mesmo que o moderno conceito, tendo sido ele, portanto, o primeiro a conceber a prova nos termos como hoje a concebemos, sugerindo, por exemplo, que a validade da prova estaria não no conteúdo, mas na forma, definindo-a como uma seqüência de sentenças, iniciando por uma identidade e procedendo por um número finito de passos ancorados na Lógica. *Insights* seriam irrelevantes para o reconhecimento da validade da prova, tornando a verdade, assim, como resultado de um processo mecânico de cálculos. Além disso, existiria uma prova, mesmo que infinita, para toda e qualquer verdade. Entretanto, o que aqui afirmamos, situando Euclides como ponto inicial, é que, com *Os Elementos*, os resultados matemáticos passaram a necessitar de uma forma de sistematização mais elaborada do que o mero embate entre argumentos conceituais desvinculado de uma forma pré-determinada.

2 Há a necessidade de um estudo complementar sobre a utilização das provas rigorosas na escolaridade anterior ao terceiro grau, no Brasil. As informações que recolhemos de professores em exercício e de pesquisadores em Educação Matemática — muitas vezes em caráter informal e que, por isso, devem ser futuramente sistematizadas, formando nova investigação —, nos indicam que, nesses níveis de ensino, a prova é muito raramente trabalhada.

3 Segundo Bicudo (1992), o conceito de rigor não se altera, altera-se, sim, o sistema "gramatical" da Matemática, ditado pela Lógica. É nesse sentido que afirmaremos existir uma história do rigor,

isto é, uma história das alterações do sistema de suporte das regras que indicam as ações possíveis numa demonstração.

[4] A tese de que a necessidade da incorporação da prova ao discurso matemático teria tido origem na crescente descrença da classe sacerdotal em certo período da história grega pode ser investigada. Tal afirmação está, de certa forma, incluída nas discussões de Arsac, cujas teses iniciais estão radicadas em Szabó (referido em Miguel, 1995), que defende ter sido uma Matemática teórica originada pela influência decisiva do racionalismo eleático sobre as idéias pitagóricas. Para sua argumentação, Szabó vale-se do estudo de conjeturas disponíveis, entre as quais a de Kolmogorov: "O ponto de vista de Kolmogorov é o de que a mudança qualitativa no desenvolvimento da Matemática deve ser atribuída ao avançado desenvolvimento sócio-político do estado grego e à sua vida cultural. Isso, por sua vez, fez com que o desenvolvimento da dialética, isto é, da arte da disputa e do embate de idéias, atingisse um grau mais elevado, dando origem ao nascimento do pensamento filosófico *independente da religião*, o qual, por sua vez, colocou à Matemática novas tarefas" (Miguel, 1995, p. 16, grifo nosso).

[5] As afirmativas a seguir fazem vir à cena as concepções em torno do pensamento matemático. No corpo do texto, os argumentos mostrarão que, por um lado, não existe adoção explícita de uma Filosofia da Matemática que norteie a prática pedagógica (Cury, 1988) e, por outro lado, que as atuais concepções fundamentalistas diferem amplamente em vários pontos (Hanna, 1983), como em relação à noção de número, de infinito, e no modo de tratar as questões lógicas.

[6] Tal tese segue claramente a exposta em Hadamard (1947), que se inspira na conferência de Poincaré na sociedade de Psicologia de Paris e, a partir disso, traça elementos que julga fundamentais para entender os mecanismos da invenção no campo da Matemática, ressaltando a importância do "sonho" como fonte de inspiração.

[7] Ernest (1991), por exemplo, prepara o terreno para sua Filosofia da Educação Matemática, formando uma Filosofia da Matemática que mescla o quasi-empiricismo de Lakatos com o convencionalismo de Wittgenstein, ao que chama de Construtivismo Social.

[8] São também críticos — no sentido amplo do termo— do trabalho de Lakatos, por exemplo, os textos de Ernest (1991) e Davis e Hersch (1985), que resumem boa parte do que já foi tratado sobre o tema na literatura em Educação Matemática.

[9] Concorda com a base dada pela intuição na geração de conhecimento, acompanhando Hadamard e Bicudo, a afirmativa de René Thom (referido em Monchicourt, 1987, p. 86): "O que é próprio da atividade científica contemporânea é ser praticamente semelhante a uma *atividade instintiva*, ou seja, praticamente não raciocinada. As pessoas trabalham em ciência dentro de espartilhos quase imediatamente sociológicos e não fazem escolhas filosóficas conscientes" (grifo nosso) (ver também início da nota 6).

[10] Exceção deve ser feita à tendência que cuida em estudar as possibilidades de interferência da História da Matemática no ensino e aprendizagem. Vários artigos partem de um levantamento histórico que poderia muito bem ser levado à sala de aula.

[11] Além das diferenciações entre explicação, prova e demonstração que faz Balacheff e das quais também nos utilizamos, Freitas situa a distinção entre dois níveis de prova, também de Balacheff, segundo a qual as provas podem ser consideradas pragmáticas (se apelam à ação ou à ostensão) ou intelectuais (quando se apóiam somente sobre a formulação de propriedades em jogo e de suas relações). Desses dois níveis ramificam-se três tipos de provas pragmáticas (o empirismo ingênuo, a experiência crucial e o exemplo genérico) e detecta-se uma única representante das provas intelectuais: a experiência mental.

[12] É interessante notar o análogo dessa situação com a polêmica de Berkeley e os defensores dos processos do cálculo infinitesimal, em 1734 (nota nossa).

[13] A aceitação das provas por computador, ou mesmo do computador no seio do fazer científico, tem sido mais polêmica entre a comunidade da chamada Matemática Pura. Na Matemática Aplicada, por exemplo, tanto quanto na Computacional, as restrições quase inexistem, fazendo-se, da máquina, ao contrário, objeto de pesquisa. Um parâmetro, embora insuficiente, para diferenciar entre os tipos de Matemática Pura e Aplicada seria, não sem polêmica, a natureza ontológica das suas pretensões. Aqui, usamos "Matemática Pura" e "Matemática Aplicada" no sentido usual dado aos termos. Uma diferenciação dessa natureza, porém, não é algo tão simples. Na Inglaterra, como no Brasil, por exemplo, ainda hoje elas estão juntas nos Departamentos de Matemática. Já na França e na Alemanha elas constituem departamentos distintos. Segundo Otte, isso se deve a como os países conceberam a Revolução Industrial (comunicação particular). Em D'Ambrosio (1987, p. 97) "De maneira clara, a distinção entre a Matemática pura e a Matemática aplicada tem que ser interpretada de uma maneira diferente. O que foi denominado Matemática pura — e continua assim chamado — é o resultado natural da evolução da disciplina dentro de uma atmosfera social econômica e cultural que não pode ser desengajada das expectativas de um certo momento histórico. Não se pode desconsiderar que L. Kronecker, Karl Marx e Charles Darwin foram contemporâneos. A Matemática Pura em oposição à Matemática Aplicada entrou em consideração mais ou menos na mesma época, sem os sentidos sugeridos políticos e filosóficos óbvios. Para os países do terceiro mundo esta distinção é altamente artificial e ideologicamente perigosa".

[14] Inexistem, por exemplo, trabalhos sobre a argumentação (rigorosa ou não) desenvolvida para justificação de afirmações nas etnomatemáticas: "Uma grande falsificação que existe em relação à Etnomatemática é dizer que ela não tem nenhum estágio teórico, que ela não tem método, que é feita *ad hoc*. Não, esse método, essa regra existe, está incorporada no pensar, mas não é explicitada tão claramente como é na Matemática formal. [Mas a literatura, quando fala da prova rigorosa, só fala da prova formal acadêmica], só fala dela, o que é uma grande distorção no meu entender" (D'Ambrósio, em Garnica, 1995, p. 137).

[15] Embora não tematize propriamente a prova rigorosa na formação de professores, uma exceção deve ser feita em relação ao artigo "La enseñanza de la demonstración: aspectos teóricos y prácticos", de Radford (1994), onde há uma breve referência sobre o assunto. Esse item nos é particularmente importante por indicar a necessidade de um estudo que explicitamente articule "formação de professores" e "prova rigorosa". Assim, a partir dessa indicação, elaboramos o trabalho "Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática", nossa tese de doutorado.

Referências

Alibert, D. e Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht: Kluwer.

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration: Essai d'epistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *8*(3), 267-312.

Bajani, G. e Sinha, D. K. (1992). Proofs of geometry through computer. *Book of Abstracts, 7th International Congress on Mathematics Education* (p. 354). Québec City: Université Laval.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Barbeau, E. J. (1990). Three faces of proof. *Interchange, 21*(1), 24-27.

Bell, A. W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Berkeley, G. (s/d). The analyst — Or a discourse addressed to an infidel mathematician. *The works of George Berkeley* (Vol. III, pp. 13-60). Oxford: Clarendon Press.

Bicudo, I. (1992). Análise não-standard. *Boletim de Educação Matemática-BOLEMA, 8*, 60-67.

Borba, M. C. (1992). Teaching mathematics: Challenging the sacred cow of mathematical certainty. *The Clearing House (What's new?), 65*(6), 32-33.

Bourbaki, N. (1954). *Théorie des ensembles* (Livro I). Paris: Hermann & Cie.

Boyer, C. (1974). *História da Matemática* (Trad. Elza F. Gomide). São Paulo: McGraw-Hill.

Chazan, D.(1993). High school geometry students: Justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(3), 359-387. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cury, H. N. (1988). *Análise de erros em demonstrações de Geometria Plana: Um estudo com alunos do terceiro grau.* Dissertação de Mestrado em Educação: Ensino e currículo. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Davis, P. J. (1972). Fidelity in mathematical discourse: Is one plus one really two?. *The American Mathematical Monthly, 79*(3), 252-263. EUA: The Mathematical Association of America.

Davis, P. J. e Hersh, R. (1985). *A experiência matemática* (Trad. João Bosco Pitombeira). Rio de Janeiro: Francisco Alves.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 333-344.

Dhombres, J. (1993). Is one proof enough? Travels with a mathematician of the baroque period. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 401-419.

Epp, S. S. (1994). The role of proof in problem solving (with comments and discussion). Em A. H. Schoenfeld (Org.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 257-285). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Epstein, R. I. e Carnielli, W. A. (1989). *Computability: Computable functions, Logic and the foundations of Mathematics.* Pacific Grove: Wadsworth & Brooks.

Ernest, P.(1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* Nova Iorque: Falmer Press.

Fetissov, A. I. (1994). *A Demonstração em Geometria* (Trad. de Hygino H. Domingues). São Paulo: Atual.

Freitas, J. L. M. de (1993). *L'activité de validation lors du passage de l'arithmétique à álgebre; Une étude des types de preuves produites par des élèves de collège/lycée.* Tese de Doutoramento. Montpellier: IREM.

Freitas, J. L. M. de (1994). A atividade de validação na passagem da aritmética para a álgebra: Um estudo de tipos de provas produzidos por alunos de primeiro e segundo graus. *Seminário sobre novas perspectivas da Educação Matemática no Brasil* (Série Documental (Eventos), nº 4, 2ª parte, pp. 1-7). Brasília: INEP.

Garnica, A. V. M. (1995). *Fascínio da técnica, declínio da crítica: Um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática.* Tese de doutoramento em Educação Matemática. Rio Claro: IGCE-UNESP.

Garuti, R. et al. (1995). Towards statements and proofs in elementary arithmetic: an exploratory study about the role of teachers and the behaviour of students. *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 129-36). Recife: PME 19.

Gerdes, P. (1992). *Sobre o despertar do pensamento geométrico.* Curitiba: Edit. da UFPR.

Hacking, I. (1986). Leibniz and Descartes: Proofs and eternal truths. Em T. Honderich (Ed.), *Philosophy through its past* (pp 211-24). Inglaterra: Penguin Books.

Hadamard, J. (1947). *Psicologia de la invención en el campo matematico* (Trad. L. A. Santaló Sors). Buenos Aires: Espasa Calpe.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in Mathematics Education.* Toronto: OISE Press.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 20-23.

Hanna, G. (1989a). Proofs that prove and proofs that explain. *Actes de la 13éme Conférence Internationale — Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 45-51). Paris: PME.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Hanna, G. (1994, mimeo). Comentários às exposições sobre 'argumentação matemática' no grupo de trabalho sobre 'Prova Rigorosa' do Annual Meeting of the American Educational Research Association, Nova Orleans.

Hanna, G. e Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 421-439.

Hariki, S. (1992). *Analysis of mathematical discourse: Multiple perspectives.* Tese de Doutorado em Filosofia. Universidade de Southampton, Inglaterra.

Hegenberg, L. (1975). *Significado e conhecimento.* São Paulo: EPU/Edusp.

Henderson, D. W. (1992). *Proof as a convincing argument that answers-why?.* USA: Math. Depth-Cornell University. (mimeo)

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Horgan, J. (1993, Outubro). The death of proof. *Scientific American, 279*, 74-82.

Imenes, L. M. P. (1989). *Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem de Matemática.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio Claro: IGCE-UNESP.

IREM. (1989). La démonstration mathématique dans l'Histoire. *Actes du 7ème Colloque INTER-IREM: Épistemologie et histoire des mathématiques.* Besançon/Lyon: IREM.

Lakatos, I. (1978). *A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações* (Trad. Nathanael C. Caixeiro). Rio de Janeiro: Zahar.

Lavalle, P. (1977). O mito em Matemática. Em G. Luccioni (Org), *Atualidade do mito* (Trad. Carlos Arthur R. do Nascimento). São Paulo: Duas Cidades.

Leron, U. (1983). Structuring Mathematical Proofs. *American Mathematical Monthly, 90*(3), 174-85. USA: The Mathematical Association of America.

Livingston, E. (1986). A non-technical introduction to ethnometodological investigations of the foundations of Mathematics through the use of a theorem of Euclidean geometry. Em E. Livingston (Ed.), *The ethnometodological foundations of mathematics* (pp. 1-15). Londres: Routledge & Kegan Paul.

Mackenzie, D. (s/d). *Formal methods and the sociology of proof.* Inglaterra: Universidade de Edimburgo. (mimeo)

Manno, A. G. *A filosofia da Matemática.* (Trad. Armindo J. Rodrigues). Lisboa: Edições 70.

Miguel, A. (1995, Março). A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em Educação Matemática. *Zetetiké, 3*, 7-39.

Monchicourt, M-O. (Org.). (1987). *Abordagens do real* (Trad. Maria Gabriela Bragança). Lisboa: Dom Quixote.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 249-266.

Mori, M. (1992). An attempt at lightening student's confusion in the study of the necessary condition and sufficient condition. *Book of Abstracts, 7th International Congress on Mathematics Education* (p. 127). Québec City: Université Laval.

Mok, A-C. I. (1992). The learning of mathematical induction. *Book of Abstracts, 7th International Congress on Mathematics Education* (p. 32). Québec City: Université Laval.

Movshovitz-Hadar, N. (1988). Stimulating presentation of theorems followed by responsive proofs. *For the learning of Mathematics*, *8*(2), 12-19 e 30.

Neubrand, M. (1992). Social patterns in the acceptance of proofs. *Book of Abstracts, 7th International Congress on Mathematical Education* (p. 289). Québec City: Université Laval.

Nozari, A.(1992). Universal Algorithm for proving arbitrary statements. *Book of Abstracts, 7th International Congress on Mathematical Education* (p. 295). Québec City: Université Laval.

Otte, M. (1994). Mathematical Knowledge and the problem of proof. *Educacional Studies in Mathematics*, *26*, 299-321. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Otte, M. (1993). *O formal, o social e o subjetivo: Uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática* (Trad. Raul Fernando Neto et al.). São Paulo: UNESP.

Otte, M. (1990). Intuition and formalism in mathematical proof. *Interchange*, *21*(1), 59-64.

Otte, M. (1993a). Towards a social theory of mathematical knowledge. Em C. Keitel e K. Rutven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics Education and technology*. Berlim: Springer.

Prado J. R. C. (1979). Matemática, ciência empírica. *Esboço de Figura — Homenagem a Antonio Candido* (pp. 205-222). São Paulo: Duas Cidades.

Radford, L. (1994). La enseñanza de la demonstración: Aspectos teóricos y práticos. *Educación Matemática*, *6*(3), 21-35. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Reid, D. A. (1995). Proving to explain. *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 137-43). Recife: PME 19.

Ruelle, D. (1993). *Acaso e caos* (Trad. Roberto Leal Ferreira). São Paulo: UNESP.

Saad, T. A. (1991). *Por que fazer (um)a demonstração em geometria?* Rio Claro: IGCE-Depto de Matemática-UNESP. (mimeo)

Schwartz, J. L. (1994). The role of research in reforming Mathematics Education: A different approach. Em A. H. Schoenfeld (Org.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 1-17). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Silva, J. J. da (1989). *Sobre o predicativismo em Hermann Weyl*. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência-UNICAMP.

Silva, M. R. G. da (1993). *Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio Claro: IGCE-UNESP.

Siu, M-K. (1993). Proof and Pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's comentary on Jiu Zhang Suan Shu. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(3), 345-357.

Sundholm, G. (1993). Question of proof. *Manuscrito*, *XVI*(2), 47-70.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tarski, A. (1991). Verdade e demonstração. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, *1*(1, Série 3), 91-123 (Trad. de Jesus de Paula Assis).

Tieszen, R. (s/d). What is a proof. Em M. Detlefsen (Ed.), *Proof, Logic and Formalization* (pp. 57-76). Londres: Routledge.

Van Asch, B. (1992). To prove, why and how?. *Book of Abstracts, 7th International Congress on Mathematics Education* (p. 292). Québec City: Université Laval.

Vernant, J-P. (1989). O universo espiritual da Pólis. *As origens do pensamento grego* (pp. 34-47) (Trad. Ísis Borges B. da Fonseca). Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning Mathematics. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Yackel, E. e Cobb, P. (1994). *The development of young children's understanding of mathematical argumentation*. Hammond: Purdue University. (mimeo)

Wheeler, D. (1990). Aspects of mathematical proof. *Interchange*, *21*(1), 1-5.

Winchester, I. (1990). Understanding mathematical proof: Beyond 'Eureka!'. *Interchange*, *21*(1), 65-71.

Antonio Vicente Marafioti Garnica, Rua Primeiro de Agosto, 5-39/18, 17010-011 Bauru, São Paulo, BRASIL.

RESUMO. No artigo examinamos parte da literatura disponível sobre a prova rigorosa em Educação Matemática, sem a pretensão de esgotar o tema. Tal estudo constituiu-se no estágio pré-reflexivo a partir do qual desenvolvemos trabalho de doutorado. Os artigos e livros estudados traçam um panorama do que tornou possível à Matemática transformar-se numa ciência hipotético-dedutiva, levando-nos a concluir que embora existam exemplos de provas anteriores a Euclides, foi com o geômetra de Megara que se constituiu o que hoje concebemos como o parâmetro de rigor para a Matemática. Percorremos a trajetória de uma "arqueologia da prova", passamos pela discussão sobre os aspectos sociais próprios da atividade de provar feita por matemáticos profissionais e, chegando aos dias atuais, focamos a ainda polêmica questão da imersão dos computadores no domínio das provas rigorosas. Em termos gerais, alguns elementos constitutivos essenciais, que apresentamos à guiza de conclusão, podem ser extraídos dessa análise crítica da literatura.

ABSTRACT. In this paper we examine some materials available on the rigorous proof. It constitutes our pre-reflexive stage, the still little elaborate and obscure data which our doctoral thesis tried to enlighten. The articles and books we examine bring forth aspects which provide Mathematics with means to turn itself into a deductive hypothetical science, and although it is possible to point out some examples, previous to Euclid, of solid arguments to consubstantiate mathematical propositions, we can detect that it was with the geometrician from Megara that an initial picture of rigor in the proofs emerges. Many texts present us a certain "archeology" allowing us to trace the beginning of a route which, heading out by the need for a clarification of the meaning of "having rigor", keeps on bringing up social aspects proper to the activity of proving things which is executed in the medium of professional Mathematics. The route of the review of the literature ends at the present time when we focus on the still polemical question of the use of computer science in the domain of the rigorous proofs. In general terms, some constitutive elements can be drawn out from the material under analysis, which are presented as a possible conclusion.