Do triângulo ao trapézio semiótico: Uma análise do pensamento metafórico em problemas de aplicação da matemática

Susana Carreira
Universidade Nova de Lisboa

Introdução

O reconhecimento de que as aplicações e a modelação têm um papel fundamental na aprendizagem de tópicos de matemática tem vindo a aumentar gradualmente, um pouco por todo o mundo. De referência indispensável na abordagem da relação entre a matemática e a realidade, tanto nos seus aspectos filosóficos e epistemológicos como na sua integração e influência no ensino da matemática, são os trabalhos que têm sido produzidos e publicados no âmbito da International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA), a qual se tem realizado, desde 1983, com uma periodicidade bianual (vejam-se, por exemplo, Sloyer, Blum e Huntley (1995); Houston, Blum, Huntley e Neill (1997)).

Uma preocupação crescente com o desenvolvimento de capacidades cognitivas favorece o interesse pela procura de contextos capazes de estimular o raciocínio matemático, a descoberta e a exploração de conexões, a competência crítica, a criatividade e a capacidade de construir e interpretar modelos matemáticos nos mais variados domínios da realidade. Nesse sentido, as aplicações da matemática e os problemas de modelação são encarados como contextos mobilizadores de uma *aprendizagem significativa* da matemática. Afirma-se e fortalece-se a ideia de que a procura de ligações entre a matemática e a realidade fomenta a construção de significados que contribuem para a aprendizagem de conceitos matemáticos fundamentais.

A aprendizagem alicerçada em problemas de aplicação e modelação vem colhendo novos ímpetos e abrindo novas vias de trabalho. A utilização de modelos matemáticos para a resolução de problemas da realidade, enquanto processo ligado à aprendizagem da matemática, exige uma abordagem que não se esgote nos aspectos estritamente técnicos e algorítmicos da manipulação dos modelos (Abrantes, 1994; Galbraith, 1995; Carreira, 1995, 1996a, 1996b; Amorim, 1997).

Os problemas de modelação e aplicação da matemática trazem para a aula de matemática singularidades próprias, introduzindo elementos que enriquecem e ampliam a matriz semiótica do conhecimento matemático (Matos e Carreira, 1997; Carreira, 1997a, 1997b).

O desafio de perceber em que consiste uma *aprendizagem significativa* da matemática e a procura de uma explicação sustentada para o facto de os problemas de aplicação e modelação poderem contribuir para essa aprendizagem, justifica a importância de uma teorização da *metáfora* no presente trabalho.

Várias são as questões que impelem nesta direcção. Qual o papel da metáfora na produção e na ampliação do significado? Em que medida se pode falar numa base metafórica de constituição dos conceitos matemáticos? Que relação existe entre modelo matemático e metáfora? A ligação entre a matemática e a realidade pressupõe um pensamento metafórico? Em que medida os problemas de aplicação da matemática são potenciais contextos de metaforização? Como é que a produção de metáforas reverte em significados e sustenta aprendizagens?

O pensamento metafórico como forma de cognição

A origem etimológica da palavra metáfora remete para translação e deslocamento. A metáfora arranca os significados já constituídos da sua situação habitual e transfere-os para um novo campo referencial. Isto quer dizer que as significações não são formas estáveis, mas dotadas de uma capacidade de variação e de um dinamismo que lhes permite servir outros referentes, impedindo que os conceitos cristalizem numa univocidade semântica.

Sobre a natureza da metáfora e o seu papel no pensamento e no discurso humanos há duas posições extremadas e litigantes (Petrie e Oshlag, 1993): (1) a metáfora tem a sua razão de ser como veículo de conhecimento e contém verdades e lições; (2) a metáfora oculta o sentido, é escorregadia e incerta e impede a possibilidade de afirmação (a metáfora diz que alguma coisa é e, ao mesmo tempo, que não é).

A primeira destas perspectivas está no cerne da teoria contemporânea da metáfora e apoia-se fortemente na chamada visão *interactiva* do funcionamento da metáfora (Black, 1962, 1993; Lakoff, 1987, 1993, 1995; Lakoff e Johnson, 1980; Lakoff e Nuñez, 1997). A segunda, por outro lado, vai beber à tradição aristotélica a concepção de figura de estilo e de desvio da linguagem literal. Quer a ideia da metáfora como substituição quer a da metáfora como comparação, ambas estreitamente ligadas, apresentam insuficiências. Se o que a metáfora faz é substituir um sentido literal por outro figurado, ou seja, se é possível anular o tropo, parafraseando a metáfora em linguagem literal, então a metáfora será apenas um sintoma de incompatibilidade semântica que se poderá corrigir sem consequências notáveis. Nesse caso, a metáfora serviria apenas para uma maior economia verbal ou para um embelezamento do discurso. No caso de se pensar na metáfora como uma comparação abreviada ou símile, não haveria por que considerá-la literalmente falsa, a não ser que a comparação também o fosse. Nessa altura, como lembra Monegal (1994), em vez de se tratar de uma expressão que contém um *choque semântico*, a metáfora seria uma proposição branda que nada acrescentaria ao símile, para além de economia ou beleza. Em ambas as hipóteses, a metáfora estaria subordinada a uma estilística da ornamentação e seria uma decoração suplementar que não adicionaria qualquer informação nova àquela que poderíamos adquirir por outros meios.

É contra esta redução à figura de estilo que reagem aqueles que vêem na metáfora um recurso essencial na construção dos nossos sistemas conceptuais. Por exemplo, Lakoff (1993) defende que é necessário perscrutar as nossas formas comuns e convencionais de pensamento para descerrar o lugar e a função única da metáfora. Não nos limitamos a falar ou escrever metaforicamente; a verdade é que pensamos e agimos com base em metáforas poderosas e penetrantes. A evidência sustenta a afirmação do carácter ubíquo da metáfora nas nossas formas de conceber e compreender o mundo, desde os domínios mais mundanos aos mais abstractos, levando a postular a metáfora como uma das nossas ferramentas conceptuais de aprendizagem e de produção de conhecimento.

O centralismo da metáfora no desenvolvimento de conceitos coaduna-se com uma visão epistemológica particular – as ideias e os conhecimentos não são guardados em compartimentos selados. Ao contrário, têm a capacidade de atravessar fronteiras, de se deslocar entre domínios conceptuais e de encontrar novos terrenos para germinação, assumindo novas formas criativas.

Qualquer explicação das potencialidades cognitivas da metáfora tem de começar com a noção de que diferentes domínios conceptuais – um domínio-origem e um domínio-alvo – são colocados em interacção. A metáfora permite ver o domínio-alvo em termos do domínio-origem. Mas a qualidade projectiva das metáforas não se reduz a um fluxo de sentido único; a *interacção* constitui um dos seus atributos essenciais. O que isto significa é que na metáfora estamos perante um sistema de transferência de traços ou propriedades que não apenas pertencem à carga semântica de cada termo mas que abarcam os nossos conhecimentos sobre cada elemento da metáfora. Um dos aspectos mais importantes desta teoria é o reconhecimento de que a interacção modifica ambos os elementos conceptuais postos em confronto pela metáfora.

A conciliação da incongruência literal com a congruência metafórica explica-se (1) pela assimilação predicativa – o enunciado metafórico torna semelhantes, isto é, semanticamente próximos, os termos que estariam inicialmente afastados, (2) pela dimensão icónica – o pensamento metafórico é uma forma de "ver como", isto é, uma capacidade imaginativa de mudar a nossa maneira de ver as coisas e de redescrever o mundo e (3) pela referencialidade dividida – a metáfora mantém um compromisso ambivalente com a realidade, introduzindo uma nova dimensão na percepção do real a que poderemos chamar de visão estereoscópica.

Uma última nota acerca das potencialidades cognitivas da metáfora deve fazer notar que a compreensão de um conceito pela via metafórica é algo de muito diferente de encapsular o conceito numa definição ou descrição que pretenda traduzir algum significado pré-determinado. A metáfora induz semelhanças e múltiplas significações, faz sobressair certos aspectos do conceito ao mesmo tempo que esbate outros, mas, acima de tudo, cria conexões entre diversos conceitos. A metáfora não entrega o significado *correcto*; ela provoca a produção de significados, na medida em que estimula um acto de compreensão (Sierpinska, 1994). O significado da metáfora não a antecede, antes é o resultado de uma interacção que se actualiza na colisão entre campos semânticos díspares.

Significado e aprendizagem da matemática

Foi já referida uma das preocupações que enquadra o presente trabalho: perceber de que modo a ligação da matemática escolar ao real concorre para uma aprendizagem significativa de conceitos matemáticos. A questão que se coloca em seguida é a do eventual carácter pleonástico da expressão "aprendizagem significativa". Será possível falar-se de aprendizagem sem se falar de significado? Não será o significado o âmago da aprendizagem, em particular, da aprendizagem de conceitos? Em que medida a aprendizagem pode ser encarada como um processo de desenvolvimento conceptual e, nesse sentido, como uma actividade de produção de significados? E qual é, então, o significado de significado?

A revista *Sciences Humaines* publicou, no seu número de Maio de 1998, um dossier intitulado: *Do signo ao sentido*. No editorial, fala-se da aventura semiótica para exprimir a possibilidade de olhar o mundo como se este fosse povoado de signos, mais do que de coisas. Palavras, textos, sinais, imagens, símbolos, gestos, formas, cores e odores, tudo o que nos rodeia, pode tornar-se, quer se queira ou não, portador de significação.

Falar de signos é falar de um esquema conceptual complexo, feito de relações entre diversos elementos. O processo de significação ou processo semiótico realiza-se na estrutura triádica do signo. Este é um dos pressupostos básicos da teoria de Charles Sanders Peirce (1978) que faz intervir o acto de interpretação no processo de significação. O signo é o produto da interacção de três elementos: significante, referente e interpretante. Um signo só se torna signo quando remete para um interpretante – um signo mais desenvolvido ou uma explicação do signo inicial, isto é, um incremento cognitivo do primeiro. Cada interpretante pode, então, ser encarado como um novo signo e ter, portanto, o seu novo interpretante e assim por diante, num perene movimento recursivo a que se chamará de semiose ilimitada (Peirce, 1978; Eco, 1973/81, 1988).

O interesse do universo sígnico e da sua forma de funcionamento é particularmente crucial quando abordamos o problema do saber matemático. A matemática é frequentemente entendida como a ciência dos símbolos, por excelência. Muitos defenderão até que a matemática é o paraíso em que nos libertamos definitivamente da necessidade de referência ao mundo dos sentidos. Mas esta posição está longe de colher unanimidade. Para Freudenthal (1983), por exemplo, os objectos matemáticos são criados como meios de organização de fenómenos, tanto do mundo real como da matemática. Os conceitos, ideias e estruturas da matemática constituem descrições organizadoras, mas o processo de criação matemática não se queda neste ponto. Os meios organizadores, uma vez criados, oferecem um novo campo de fenómenos que, por sua vez, poderão ser alvo de novas organizações. Estamos, assim, perante uma imagem da matemática em que se torna saliente o contínuo desdobramento de campos semânticos ou, se quisermos, uma cadeia ilimitada de relações de significação.

Esta imagem é rica em implicações quando se deseja estudar os processos de significação dos alunos na aprendizagem de ideias matemáticas. A forma como os significados se jogam nesta semiose progressiva reforça, por um lado, o inestimável papel da interpretação e, por outro, a importância de ver nos objectos matemáticos meios organizadores de fenómenos, tanto do mundo real como da matemática.

Steinbring (1997) coloca uma interrogação que tem eco no presente trabalho. Quais são as "causas" que prejudicam ou até destroçam o significado matemático e quais as que favorecem a criação de significado nas interacções em curso na sala de aula?

A perspectiva de que a compreensão humana é metafórica na sua natureza e de que a aprendizagem é um processo evolutivo – sustentado pela possibilidade de desenvolvimento, transformação e ramificação dos significados – legitima a importância de trazer o pensamento metafórico para uma investigação da aprendizagem da matemática enquanto processo de significação.

O triângulo semiótico na perspectiva Peirciana do processo de significação

O esquema triangular do processo de significação foi introduzido, em 1892, por Gottlob Frege e tornou-se no modelo de uma série de posteriores *triângulos semióticos* em que as designações atribuídas aos elementos a colocar nos três vértices foram sendo alteradas em sucessivas versões (figura 1).

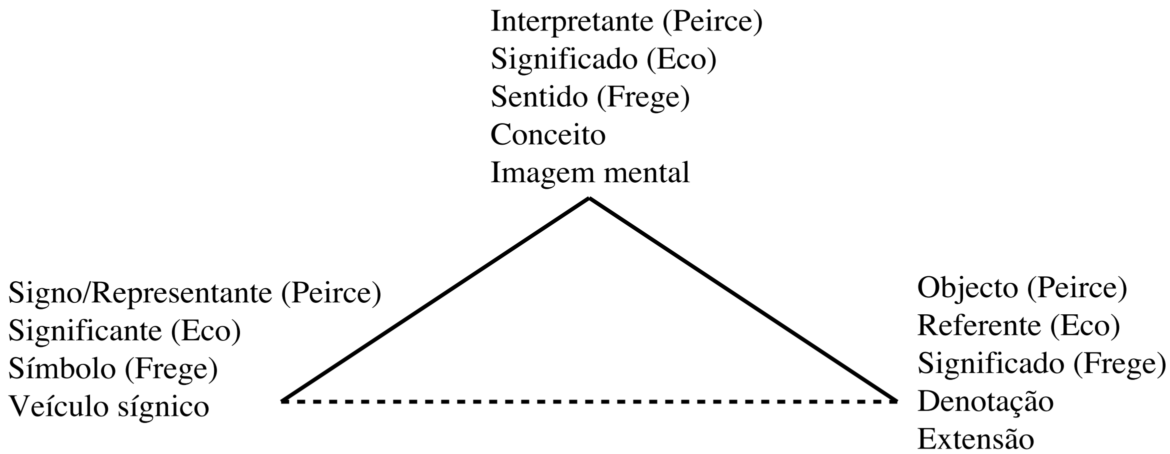


Figura 1. Diferentes versões do triângulo semiótico.

Um pressuposto básico da teoria de Peirce é o de que todos os signos partilham uma estrutura comum, na medida em que operam e são definidos em termos de relações que se estabelecem entre três elementos. O primeiro elemento, que ora designa simplesmente por *signo* ora chama de *representante*, consiste na unidade perceptível que transporta ou conduz o significado do signo (por exemplo, um conjunto de fenómenos, uma palavra impressa, um sinal luminoso de trânsito, um aceno). O segundo elemento do signo é o *objecto*, isto é, aquilo que o signo representa ou aquilo por que é tomado. Este objecto não tem de ser algo de físico ou real e pode ser mesmo um outro signo. O terceiro elemento do signo é o *interpretante*, ou seja, aquilo que faz com que o signo signifique o objecto para um dado sujeito.

> Um signo, ou representante, é qualquer coisa que está em lugar de outra, sob algum aspecto ou a determinado respeito. Ele dirige-se a alguém, quer dizer, cria no espírito dessa pessoa um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido. A este signo, assim criado, chamo o interpretante do primeiro signo. Este signo está no lugar de alguma coisa: do seu objecto. Em lugar do objecto, não sob todos os aspectos, mas por referência a uma espécie de ideia a que chamei, por vezes, o fundamento do representante (Peirce, em Deledalle, 1978, p. 121).

Assim, o interpretante é o produto (na mente do sujeito) da interpretação do signo para a significação do objecto e desempenha um papel semelhante ao de um intérprete que afirma que um estrangeiro está a dizer a mesma coisa que ele, noutra língua. De acordo com esta hipótese, o interpretante é também ele um signo, embora de uma natureza mental e cognitiva. Eis como na teoria de Peirce, a interpretação é um processo indispensável sem o qual não é sequer possível falar de signo. Por outras palavras, um signo só se torna signo quando é envolvido no acto de significação, o acto em que recebe uma interpretação e determina um outro signo para o mesmo objecto.

A semiose é, então, uma acção que implica a cooperação de três elementos – um signo, o seu objecto e o seu interpretante – e que, sendo tri-relativa, não pode reduzir-se, de forma alguma, a acções entre pares.

Deledalle (1978) comenta o jogo triádico da teoria peirciana do signo, utilizando um exemplo ilustrativo, em torno da palavra 'granada'. O mesmo exemplo será aqui explorado com a introdução de algumas variações.

Pensemos, pois, na palavra 'granada', colocada fora de qualquer contexto. Sabemos bem que esta palavra tem um significado, mas esse significado só poderá ser conhecido se o signo 'granada' remeter para um outro signo, que será o seu interpretante: por exemplo, *cidade, arma, mineral*. Suponhamos que a palavra me sugere, pessoalmente, o interpretante 'mineral', uma vez que uso um anel ornado com uma pedra de um certo tom vermelho (*grenat*) e sei que o nome dado a este tipo de semi-preciosa é o de 'granada'. Assim, a palavra 'mineral' tem um significado que me serve para compreender o significado de 'granada'. Mas a verdade é que os interpretantes de 'granada', mesmo nesta situação, não se esgotam aqui: joalharia, mineralogia, semi-preciosa, etc., são interpretantes que estão conectados a vários outros como vermelho escuro, brilho vítreo, formação granular, cristalização, dodecaedro, etc. É evidente que não precisarei de percorrer todos estes interpretantes para decidir sobre o significado do signo primitivo, mas a verdade é que estes constituem parte integrante de tal significado. No meu caso, o signo 'granada' tem um objecto concreto, materializado, especificamente, na pedra ornamental do anel que possuo. Assim, o signo 'granada' diz qualquer coisa deste objecto, mas não diz nada do signo interpretante 'mineral'. É só no momento em que o signo envia para o interpretante 'mineral' que ele me pode falar da espécie mineralógica que tem esse nome e que não me poderia fazer conhecer, se eu não a conhecesse já (figura 2).

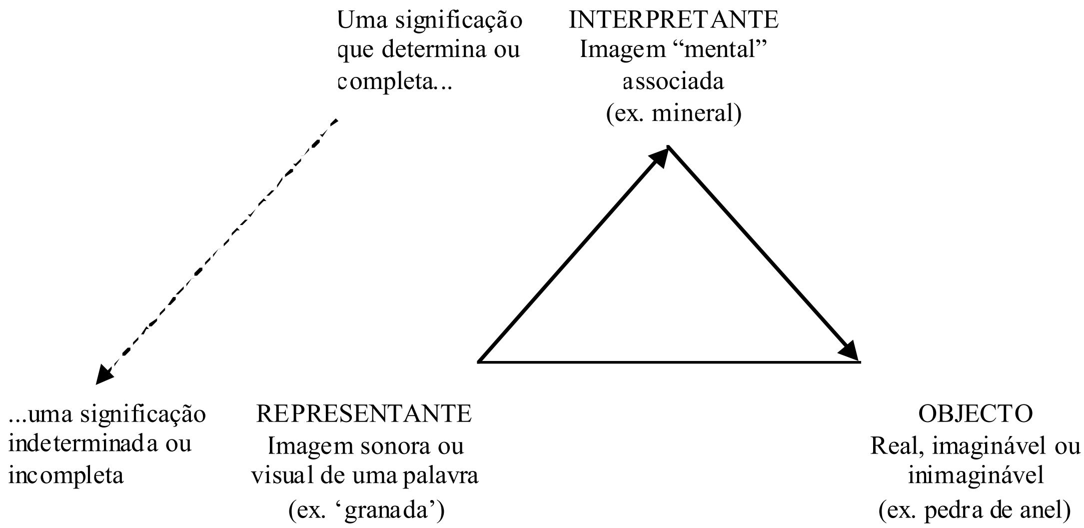


Figura 2. O mecanismo triádico do signo

A metáfora e a duplicação da referência

As noções de referência e interpretante (ou sentido) de um signo readquirem um interesse singular quando investigadas contra o pano de fundo do conceito de metáfora. É esse, também, um dos valiosos contributos de Paul Ricoeur (1983) na explicação do pensamento metafórico.

Tendo em mente a natureza icónica da metáfora, Ricoeur estipula a necessidade de um encontro entre sentido e referência. Do mesmo modo que o enunciado metafórico conquista o seu sentido sobre as ruínas do sentido literal, ele adquire também a sua referência sobre as ruínas daquilo a que se chamaria, por simetria, referência literal. Se concordarmos que é na interpretação que o sentido literal e o sentido metafórico se distinguem e se articulam, é também na interpretação que, graças à suspensão da referência de primeira ordem, se liberta uma referência de segunda ordem que é, propriamente, a referência metafórica.

Estamos perante aquilo a que se dá o nome de *duplicação da referência*. A referência duplica-se no acto de construção do sentido metafórico.

O sentido de um enunciado metafórico é suscitado pelo malogro da interpretação literal do enunciado; na interpretação literal, o sentido destrói-se a si mesmo. Ora essa auto-destruição de sentido conduz ao desmoronamento da referência primária. A auto-destruição de sentido, por influência da impertinência semântica, tem como contrapartida uma inovação de sentido. A derrocada da referência que está associada ao sentido literal tem como contrapartida uma nova intenção referencial.

O argumento de Ricoeur é um argumento de proporcionalidade:

> a outra referência, aquela que nós procuramos, estaria para a nova pertinência semântica tal como a referência abolida está para o sentido literal destruído pela impertinência semântica. Ao sentido metafórico corresponde uma referência metafórica, como ao sentido literal impossível corresponde uma referência literal impossível (Ricoeur, 1983, p. 343).

Tal é o esquema da duplicação da referência. Ele consiste, no essencial, em fazer corresponder à metaforização do sentido uma metaforização da referência. É esta duplicação da referência que nos leva ao momento icónico da metáfora. Há uma certa utilização anterior das palavras que cria uma espécie de *visão estereoscópica*; um novo estado de coisas é apercebido no desmembramento do equívoco semântico. A instauração de uma proximidade entre duas significações, até então afastadas, estimula a construção do ícone e cria uma proximidade nas próprias coisas. Por outras palavras, é engendrada uma nova maneira de ver – um ver icónico, um ver como, um ver metafórico.

O alcance desta nova visão do pensamento metafórico parece-nos de tal forma importante que sugere um natural prolongamento do processo de significação. O que advém desta teoria induz a uma espécie de reconstrução do triângulo semiótico para dar lugar ao aparecimento de um *trapézio semiótico* (Carreira, 1998), (figura 3).

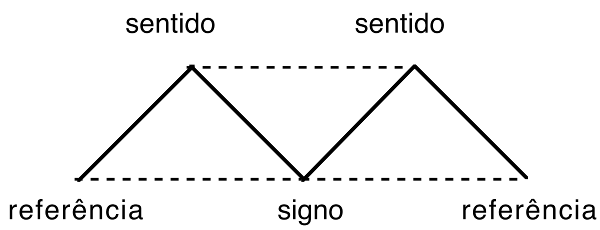


Figura 3. A metáfora como esquema trapezoidal de relações de significação

O que merece ser destacado no esquema trapezoidal é a intervenção de dois sentidos e dois referentes no mesmo signo. No referido esquema, postulamos uma ligação entre os dois sentidos (literal e metafórico) que se repercute na duplicação da referência. Pensar metaforicamente é, portanto, pensar em termos duplamente referenciais. A semelhança surge, metaforicamente, na aproximação entre sentidos que, por seu lado, gera a proximidade entre as coisas.

Assim, e utilizando um exemplo de Lakoff e Johnson (1980), perante o enunciado metafórico *TEMPO É DINHEIRO*, começamos por enfrentar o conflito semântico que nos diz: o tempo não é, de facto, a mesma coisa que o dinheiro. Resolver o conflito metafórico é desfazer o sentido literal de dinheiro que aplicamos a coisas concretas como moedas, notas, cheques, contas bancárias, etc. Sabemos bem que o tempo não *é* isso. Mas resolver o conflito é descobrir o carácter icónico da palavra dinheiro no enunciado. É, afinal, criar um novo sentido para o tempo, é ver o tempo como o dinheiro, em determinado sentido. Esse sentido é aquele em que o dinheiro corresponde a alguma coisa que pode ser gasta, economizada, perdida, investida, negociada, etc. O tempo, passa a ter, em virtude da metáfora, os mesmos predicados. O conflito está resolvido e, com ele, uma nova referência passa a estar disponível para o tópico principal. Há um novo objecto que antes estava afastado da ideia de tempo e que subitamente passou a estar próximo. Descobrimos, assim, não apenas o modo como as coisas realmente são – como afirma Black (1993) – mas também *o* que as coisas realmente são.

O problema dos repuxos e a análise do pensamento metafórico dos alunos

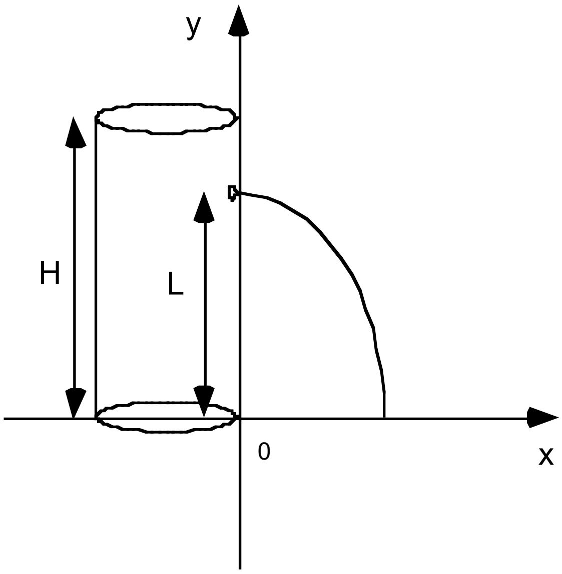
A forma como o trapézio semiótico pode funcionar como instrumento analítico na compreensão dos processos de aprendizagem envolvidos na resolução de problemas de aplicação é ilustrada de seguida, com a apresentação de um exemplo de um protocolo de análise. Trazido aqui como um "caso", o exemplo que agora se apresenta faz parte de um conjunto de dados e de análises consideravelmente mais vasto e que pode ser encontrado no trabalho de investigação desenvolvido por Carreira (1998). Cabe, pois, fazer notar que as conclusões formuladas a propósito do exemplo tratado surgem reforçadas, complementadas e sustentadas por um corpo de dados que permitiu retirar evidência empírica do modo como o pensamento metafórico actua na resolução de problemas de aplicação.

O contexto pedagógico sobre o qual incidiu a recolha dos dados empíricos aqui apresentados será apenas brevemente delineado, remetendo-se o leitor para uma exposição mais detalhada em Moreira (1996). O projecto de investigação envolveu duas turmas de alunos de uma cadeira de Análise Matemática do 1º ano do Curso Superior de Gestão. A utilização de problemas ligados à realidade, a exploração de modelos matemáticos e a sua interacção com conceitos matemáticos formais foram elementos constituintes da organização do currículo. O trabalho de grupo nas propostas de aplicação e modelação apresentadas foi igualmente uma estratégia constante.

A proposta de trabalho a que se refere a análise seguinte envolvia o estudo de um fenómeno relativamente trivial. Trata-se da trajectória de um repuxo, proveniente de um orifício que é feito na parede lateral de um recipiente que está cheio de água. Dependendo da altura do recipiente e da altura a que se faz o orifício, obtêm-se repuxos com diferentes trajectórias parabólicas.

Fixado um referencial, a trajectória da água pode ser descrita por meio de uma equação cartesiana. A obtenção desta equação implica a utilização de modelos da física, tanto da mecânica newtoniana como da mecânica dos fluidos.

Foi dada aos alunos a equação cartesiana que modela a trajectória de um repuxo genérico e foi apresentado o esquema de um recipiente cilíndrico e de um repuxo sobre um referencial cartesiano (figura 4).



$$y = L - \frac{x^2}{4H - 4L} \qquad H > L > 0$$

Figura 4. Esquema e equação da trajectória de um repuxo, para um cilindro de altura H e um orifício de altura L.

Na proposta de actividade, propunha-se, a dada altura, que os alunos encontrassem a expressão que definia o alcance (A) como função de H e L. Posteriormente, fixava-se a altura do cilindro (H) com o valor 1 e perguntava-se a que altura deveria ser feito o orifício na parede do cilindro para se obter um repuxo de alcance máximo.

Os alunos do grupo aqui analisado chegaram à seguinte expressão para o alcance, no caso em que a altura do cilindro era H=1: $A = 2\sqrt{L - L^2}$.

Por sugestão de um dos alunos do grupo, inicia-se, nessa fase, a determinação do valor de A num certo número de pontos. O objectivo era o de conseguir uma visão do comportamento do alcance com a variação da altura do orifício. Esta tentativa de auscultação da variação do alcance foi, ainda, acompanhada por uma suposição. A suspeita do aluno era a de que o alcance aumentaria com a altura do orifício. Vem a propósito referir que a intuição tende a ser enganosa quanto à forma de variação do alcance com a altura do orifício.

O grupo escolheu três valores para a altura do orifício, passando ao cálculo dos correspondentes alcances. Um dos valores coincidia com metade da altura do cilindro (L=0,5) e os outros dois eram equidistantes daquele (L=0,4 e L=0,6). Assim, o que pareceu ser uma escolha mais ou menos acidental acabaria por se mostrar uma escolha muito feliz, nomeadamente porque fez sobressair a coincidência dos alcances quando os furos são equidistantes do meio da altura do cilindro.

Tendo reparado neste detalhe, os alunos dispõem-se imediatamente a averiguar se o mesmo sucede noutros pares de orifícios equidistantes do ponto médio (L=0,2 e L=0,8). Mais ainda, verificam que, para os casos testados, o repuxo com maior alcance é o que tem a sua origem no ponto médio da altura do recipiente.

Repuxos que andam aos pares

Os alunos continuam a debater-se com o problema de identificar o valor máximo do alcance. Entretanto, são despertos pela forma como se distribuem os diversos alcances encontrados, especialmente pela descoberta de alguns pares de repuxos com o mesmo alcance. A interpretação destes resultados condu-los à construção de uma imagem da variação do alcance com a altura do orifício, como se relata na seguinte transcrição do diálogo ocorrido.

[1] *Filipe*: Querem ver que este é o máximo? (O aluno refere-se ao valor A=1, obtido para L=0,5).
[2] *Mário*: Este é o máximo, é o máximo!
[3] *Filipe*: De todos os que a gente viu, foi o que chegou mais longe... mas a gente não

sabe... pode haver outro que chegue ainda mais longe. Para 0,5, o alcance dá 1, e depois para cada dois destes, um antes e outro depois, dá sempre igual, mas nunca chega a 1. (O aluno faz um gesto em que procura ilustrar diferentes pares de níveis equidistantes de L=0,5).
[4] *Gaspar*: Quer dizer, isto parece que é uma coisa assim... (Inicia o esboço de um cilindro com vários orifícios equidistantes do ponto L=0,5, como se reproduz na figura seguinte).

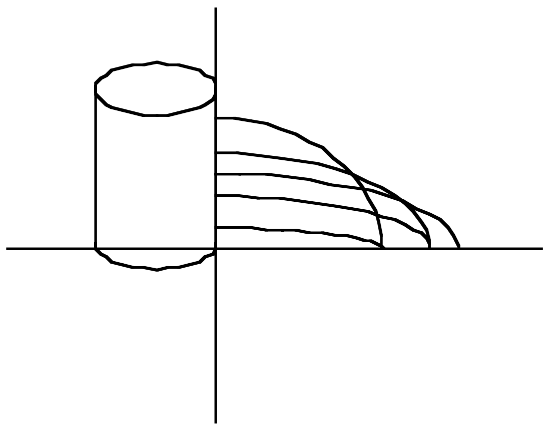


Figura 5. Esquema dos alunos com a representação dos repuxos considerados.

[5] *Gaspar*: Isto é o 0,2 e isto é o 0,8. E estes têm um alcance de 0,8. Temos agora o 0,4 e o 0,6. Dão 0,98. A hipótese do 0,5 vai dar 1.
[6] *Filipe*: O 0,1 é igual ao 0,9; o 0,2 é igual ao 0,8; o 0,3 é igual ao 0,7; o 0,4 é igual ao 0,6... e o 0,5 é o máximo.
[7] *Jorge*: Estão à mesma distância do meio... Andam aos pares, um sobe e o outro desce.
[8] *Filipe*: Ou, então, um fica à mesma distância do topo que o outro fica da base.
[9] *Mário*: Portanto, não tem nada a ver com subir o furo... Mesmo que fizéssemos o furo a 0,99 de altura...
[10] *Filipe*: A essa altura, não havia repuxo. A água era derramada... Não se pode fazer o furo no limite.
[11] *Gaspar*: Claro, se o furo for feito no limite, a água sai toda ao mesmo tempo.
[12] *Mário*: Está bem, eu sei. Mas não é por ser mais alto que o alcance fica maior, estás a ver?
[13] *Gaspar*: Isso é verdade. Há um crescimento até ao 0,5 e depois há um decrescimento daí para cima. E naquele ponto limite deixa de haver repuxo...
[14] *Filipe*: O L não pode chegar mesmo até à altura do cilindro. É o que isso quer dizer.

Os alunos parecem tentados a acreditar que terão encontrado o alcance máximo. Mais cauteloso, porém, o Filipe ressalva que não há garantias para se afirmar que está descoberto o máximo – "... mas a gente não sabe... pode haver outro que chegue ainda mais longe" [3]. Apesar desta prudência, o aluno acaba por denunciar uma certa propensão para admitir a possibilidade de que um orifício a 0,5 metros possa ser o responsável pelo alcance máximo de 1 metro. E aquilo que parece levar o aluno a deixar-se persuadir é o facto de surgirem pares de repuxos, "um antes e outro depois" do ponto médio, com iguais alcances e sempre inferiores ao do repuxo que parte do meio do cilindro [3].

A iniciativa de representar esquematicamente a situação que estão a tentar interpretar, contribui para que os alunos infiram um padrão de comportamento da variação do alcance com a altura do orifício. De facto, a eficácia expressiva da imagem incita os alunos a uma interpretação de carácter metafórico desse comportamento. Cabe ao Filipe fazer uma primeira extrapolação, já investida de uma natureza metafórica. Ao afirmar que "o 0,1 é igual ao 0,9; o 0,2 é igual ao 0,8 (...)" [6], o aluno está a sublinhar uma semelhança inédita entre aqueles pares de valores. Tomada literalmente, a afirmação do aluno é obviamente absurda ou, se preferirmos, ela é impertinente do ponto de vista semântico. A igualdade entre os números quer, porém, significar uma outra igualdade. E é essa outra referência para o signo "igualdade" que faz ruir a impertinência, ao apontar uma semelhança nova. Cada par de números ditos "iguais" constitui um par de orifícios, ou mais exactamente, de alturas de orifícios, cujos repuxos têm alcances iguais. Esta "igualdade" é, pois, uma forma de emparelhar os repuxos, com base numa certa característica que é a igualdade dos seus alcances.

O comportamento da função alcance tem, assim, uma primeira interpretação metafórica. Atribuiremos à construção metafórica aqui referida a designação de *metáfora dos repuxos emparelhados*. Vejamos como se poderá conceber a estrutura conceptual desta metáfora, que faz interagir o campo conceptual do fenómeno dos repuxos com o plano conceptual da matemática, nomeadamente no que diz respeito à função alcance.

- Dois pontos equidistantes do ponto médio do intervalo]0,1[têm imagens iguais por meio da função alcance, A(L);
- Dois orifícios equidistantes do meio da altura do cilindro lançam repuxos com alcances iguais;
- Os pontos do intervalo]0,1[com imagens iguais, por meio de A(L), formam pares;
- Os repuxos com alcances iguais formam pares;
- Os pares de repuxos com alcances iguais correspondem aos pontos da forma $L = 0,5 - r \ \vee \ L = 0,5 + r$, com $0<r<0,5$;

• Não existe outro ponto com imagem igual à do ponto 0,5;
• O repuxo originário do meio do cilindro não tem par;
• A imagem do ponto médio do intervalo]0,1[é a maior;
• O repuxo proveniente do meio do cilindro é o de maior alcance;
• O ponto 0,5 é o repuxo de alcance máximo.

Este esquema metafórico dos repuxos emparelhados pode ainda ser traduzido, em termos esquemáticos, à luz do modelo do trapézio semiótico (figura 6). Neste caso, o signo "iguais" surge conectado a uma dupla de referentes e à correspondente dupla de interpretantes, exaltando o papel mediador da metáfora na interligação de campos conceptuais distintos. Trata-se de um "ver como", aquele que os alunos aqui exibem na sua forma de interpretar a igualdade. A igualdade entre dois pontos equidistantes do ponto médio é aqui uma maneira de ver a igualdade entre os alcances de dois repuxos. Cada par desses pontos é um par de repuxos com o mesmo alcance.

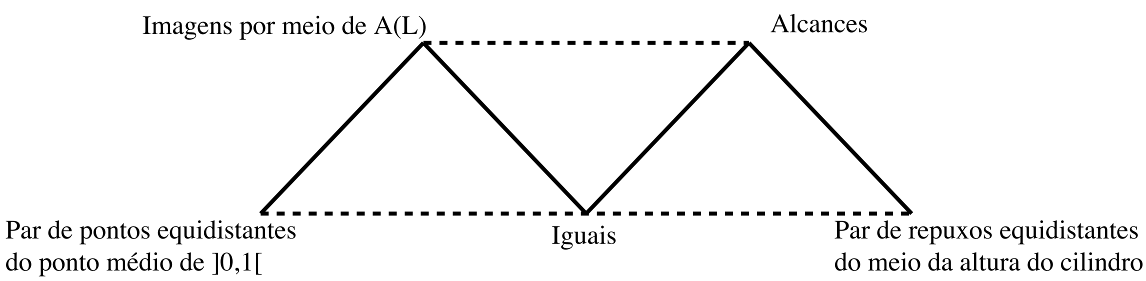


Figura 6. O trapézio semiótico na metáfora dos repuxos emparelhados

O raciocínio metafórico dos alunos não se esgota, contudo, na metáfora descrita. Logo de imediato, o Jorge completa a metáfora do colega com uma outra observação metafórica – "Andam aos pares, um sobe e o outro desce" [7]. O aluno introduz, desta maneira, uma ideia de deslocamento articulado, que obriga os repuxos a obedecer a uma certa forma de posicionamento, para que o seu alcance se mantenha comum. Portanto, haverá sempre um repuxo em cima que emparelha com um repuxo em baixo. Se o de baixo for elevado, o de cima terá de descer para que os dois produzam o mesmo alcance. É notória aqui uma percepção da simetria relativamente ao ponto médio da altura do cilindro. Diremos, pois, que a *metáfora do deslocamento articulado* é regida pelo seguinte esquema inferencial:

• Cada par de pontos equidistantes do 0,5 inclui um elemento maior do que 0,5 e um elemento menor do que 0,5;
• Cada par de repuxos com o mesmo alcance inclui um acima da altura média e um abaixo da altura média;
• A equidistância dos dois pontos ao 0,5 tem de ser mantida para que estes

possam ser emparelhados;

- A equidistância dos orifícios ao meio da altura tem de ser mantida para que os repuxos possam ser emparelhados;
- Se o menor elemento do par de valores aumentar/diminuir, o maior tem que diminuir/aumentar.
- Se o repuxo de baixo subir/descer, o de cima tem de descer/subir.

Eis de novo, esquematicamente, a representação trapezoidal do mecanismo semiótico da metáfora do deslocamento articulado (figura 7). Os alunos vêem a simetria da variação do alcance como um deslocamento articulado dos orifícios. Uma vez mais, a metáfora cria a semelhança onde esta não existia.

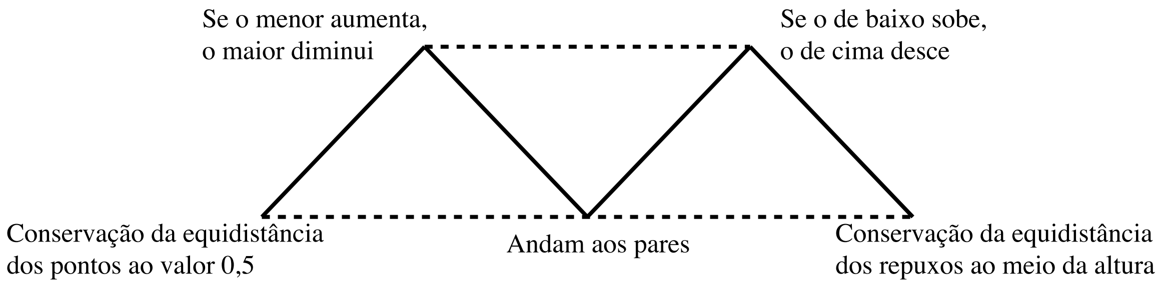


Figura 7. O trapézio semiótico na *metáfora do deslocamento articulado.*

As duas metáforas – *a igualdade emparelhada e o deslocamento articulado* – complementam-se e harmonizam-se. Em conjunto, funcionam como uma dupla metaforização da forma como o alcance varia com a altura do furo. O esquema dos repuxos feito pelos alunos opera como um filtro conceptual através do qual os alunos vêem a função alcance. É através deste filtro que, metaforicamente, se apercebem da monotonia da função e da simetria da sua variação relativamente ao ponto $L=0,5$.

O Filipe acrescenta ainda uma outra interpretação para o posicionamento articulado dos orifícios, também esta reveladora de um padrão de simetria que os alunos vão, a pouco e pouco, esquadrinhando. De facto, a equidistância do meio da altura do cilindro é aqui sinónimo de um dos repuxos estar à mesma distância do topo que o outro está da base [8]. O que os alunos estão a descobrir, no decurso destes seus processos interpretativos, são de resto características interessantes da função $A(L)$. Tais características acabam por ser desvendadas no esquema que fizeram e não chegam a ser traduzidas para outro tipo de linguagem simbólica. Todavia, é notório que os alunos estão vigilantes quanto ao comportamento simétrico da função $A(L)$ e conscientes de que esta satisfaz as condições: $A(0,5+r)=A(0,5-r)$, para $0<r<0,5$ e $A(1-s)=A(s)$, para $0<s<1$.

Entretanto, para o Mário, parece haver outra conclusão a retirar da simetria da função alcance. Tal simetria prova que o alcance não cresce sempre com a altura do orifício, como havia sido alvitrado pelo Filipe. Nas palavras do Mário, "não tem nada a ver com subir o furo..." [9]. E, para dar maior ênfase à sua conclusão, acrescenta que de nada valeria fazer um furo a 0,99 de altura [9], quer dizer, quase a chegar ao topo do cilindro.

O Filipe parece compreender a afirmação do colega, mas não deixa de lhe fazer reparar que um furo demasiado próximo do bordo superior do cilindro corresponderia a uma situação de "não-repuxo". "A água era derramada... Não se pode fazer o furo no limite" [10]. Trata-se da percepção de que o valor de L tem de ser *suficientemente* distante do valor de H. Este é um pormenor com interesse na discussão dos alunos, particularmente, porque espelha uma actividade interpretativa que reverte em acréscimo de significados. Falar de um repuxo na parede do cilindro é falar, portanto, de um valor de L (altura do furo) diferente do valor de H (altura do cilindro). Dito de outro modo, trata-se de considerar a função alcance definida no intervalo aberto]0,1[.

Esta ideia fica bem expressa nas palavras dos alunos [10-11] ao afirmarem que há um limite a partir do qual deixa de haver repuxo e que o valor de L não pode atingir exactamente o valor da altura do cilindro [14].

Enquanto estas considerações ocupam o diálogo entre o Filipe e o Gaspar, a variação do alcance com a altura do furo parece ser o facto mais importante para o Mário. Aquiescendo às explicações dos dois colegas sobre a inviabilidade de um repuxo no topo, o Mário pretende sobretudo acentuar, que "não é por ser mais alto que o alcance fica maior" [12]. Quanto a isso, os alunos parecem agora não ter dúvidas. De uma forma muito directa, o Gaspar sintetiza o tipo de monotonia da função alcance. "Há um crescimento até ao 0,5 e depois há um decrescimento daí para cima" [13].

Semelhante descrição faz acreditar que os alunos estarão convencidos de que o alcance máximo será o do repuxo localizado a 0,5 metros de altura. Porém, este é ainda um convencimento de natureza informal, baseado em elementos concretos que indiciam um certo comportamento do modelo matemático em análise. Ele obedece, sobretudo, à percepção de um certo padrão de comportamento da função, o qual veio a merecer, numa fase posterior, uma confirmação formal, nomeadamente, com um estudo mais detalhado da função alcance.

Conclusão

É controversa a questão da relevância das metáforas no contexto educacional. As posições teóricas mostram-se frequentemente divididas entre a quase abominação, a rejeição, o cepticismo, a tolerância cautelosa e a valorização, a aprovação e quase exaltação.

Os resultados alcançados neste estudo (Carreira, 1998) – que envolveu um maior número de actividades analisadas, além de incluir a observação de um outro grupo de alunos – permitem enunciar duas conclusões seguras acerca da importância das metáforas no cenário escolar e, particularmente, no ensino da matemática. A primeira consiste em reafirmar o papel das metáforas como recurso cognitivo inerente ao desenvolvimento dos sistemas conceptuais humanos – uma forma peculiar de compreensão que é, todavia, familiar à nossa experiência de aprender seja o que for. A análise dos dados recolhidos revelou a emergência do pensamento metafórico dos alunos. Não lhes foram dadas quaisquer instruções para que fabricassem e utilizassem raciocínios metafóricos. Eles surgiram como parte essencial dos esforços de racionalização e de interpretação desenvolvidos pelos alunos perante problemas de aplicação a fenómenos reais. Neste sentido, portanto, negar a entrada do raciocínio metafórico no pensamento dos alunos ou suprimir a natureza metafórica do pensar é uma batalha perdida. Os alunos observados, não só foram capazes de se apropriar de metáforas fundamentais, sustentadas por modelos matemáticos do real, como criaram e exploraram as suas próprias metáforas, de uma forma crítica e criativa. Quando os alunos dizem que "os repuxos andam aos pares" a impertinência semântica da sua afirmação é, por eles, nitidamente reconhecida como tal. Assim, o conflito semântico é consciente e o sentido literal das palavras é recriado para dar lugar a um novo sentido, agora metafórico.

Uma segunda conclusão a tirar acerca do papel das metáforas diz respeito ao seu valor cognitivo na compreensão e na significação de conceitos, nomeadamente, de conceitos matemáticos. A metáfora representa um importante mecanismo de mediação semiótica, ao colocar em interacção diferentes domínios conceptuais. Por outro lado, o facto de a metáfora aproximar espaços de significação que, à partida, se considerariam distantes, traz a virtualidade de suscitar a compreensão de conceitos abstractos em termos de conceitos familiares e mais directamente ligados à experiência concreta.

Tomando o triângulo semiótico como esquema básico do processo de significação, propusemos um modelo teórico característico da significação metafórica, designado por trapézio semiótico. Este utensílio teórico foi utilizado na análise dos dados e os resultados produzidos apontam para a solidez e potencialidade explicativa do trapézio semiótico como instrumento analítico.

Na base da concepção do trapézio semiótico está a ideia sugerida por Ricoeur (1983) de que pensar metaforicamente é pensar em termos duplamente referenciais. Diversos signos metafóricos utilizados pelos alunos mostraram poder ser examinados à luz deste esquema.

A argumentação de Paul Ricoeur, além de contribuir para o aprofundamento do mecanismo de significação metafórica serve para explicar o papel das metáforas na compreensão de conceitos e na construção de significados. No episódio analisado, foi possível identificar e discutir a duplicação de referências e a correspondente duplicação de interpretantes. Que vantagens poderão resultar deste tipo de processos? Como diz Black (1993), o facto de os nossos sistemas conceptuais não serem herméticos, mas permeáveis, é, desde logo, um ponto a favor da duplicação de referências. Para além disso, o trapézio semiótico revela a possibilidade de ampliação do significado. Num mesmo acto cognitivo – aquilo a que Ricoeur chama de momento icónico da metáfora – os alunos puderam encontrar duplos interpretantes que se complementaram e explicaram mutuamente. É neste sentido que a metáfora constitui um acto criativo de compreensão. O significado metafórico é um significado duplamente ancorado. Nos problemas de aplicação da matemática, há uma dupla ancoragem para os significados matemáticos e uma dupla ancoragem para os significados das situações reais em estudo.

Eis, assim, uma forma de entender o papel dos problemas de aplicação no desenvolvimento do significado. Porque os problemas aplicados envolvem modelos, porque um modelo matemático impele ao descerramento de metáforas conceptuais e ao seu desdobramento e exploração, porque este processo de produção de metáforas requer a busca permanente de interpretantes para os conceitos em análise, porque essa busca não se confina a um único sistema referencial, mas antes, envolve elementos de naturezas conceptuais distintas, porque a duplicação de referências resulta numa duplicação de interpretantes, este tipo de problemas contribui decisivamente para a construção de significados. O ver metafórico, ao projectar inferências de um domínio sobre outro revela o conhecido no desconhecido e ideias novas em ideias anteriores.

Em suma, o processo de metaforização detém um papel crucial na produção de significados e os problemas de aplicação da matemática, em particular, constituem um meio privilegiado para estimular e alimentar o pensamento metafórico.

Referências

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do Projecto MAT789*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: APM.

Amorim, I. (1997). *Actividade matemática escolar: Modelação e ferramentas computacionais*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Black, M. (1962). *Models and metaphors*. Ithaca: Cornell University Press.

Black, M. (1993). More about metaphor. Em A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (pp. 19-41). Cambridge: Cambridge University Press.

Carreira, S. (1995). A matematização na natureza e na sociedade: Uma forma de encarar a relação matemática-realidade. Em J. F. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota e M. Santos (Eds.), *Matemática e realidade: Que papel na educação e no currículo?* (pp. 25-70). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Carreira, S. (1996a). Matemática e realidade: A procura de significados na actividade de modelação dos alunos. Em *VI Seminário de Investigação em Educação Matemática – Actas* (pp. 323-340). Lisboa: APM.

Carreira, S. (1996b). Problemas e situações reais em matemática: Utilidade, relevância ou significado?. Em A. Roque e M. J. Lagarto (Eds.), *Profmat 96 – Actas* (pp. 55-66). Lisboa: APM.

Carreira, S. (1997a). Metáforas conceptuais e construção de significados em problemas de aplicação da matemática. Em G. Ramalho, A. C. Silva e I. Oliveira (Eds.), *VII Seminário de Investigação em Educação Matemática – Actas* (pp. 173-196). Lisboa: APM.

Carreira, S. (1997b). Metaphorical thinking and applied problem solving: Implications for mathematics learning. Em E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol 2* (pp. 129-136). Helsínquia: Universidade de Helsínquia.

Carreira, S. (1998). *Significado e aprendizagem da matemática – Dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Deledalle, G. (Ed.), (1978). *Écrits sur le signe*. Paris: Éditions du Seuil.

Eco, U. (1973/81). *O signo*. Lisboa: Editorial Presença.

Eco, U. (1988). On truth. A fiction. Em U. Eco, M. Santambrogio e P. Violi (Eds.), *Meaning and mental representations* (pp. 41-59). Bloomington: Indiana University Press.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Galbraith, P. (1995). Modelling, teaching, reflecting – What I have learned. Em C. Sloyer, W. Blum e I. Huntley (Eds.), *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 21-45). Yorklin: Water Street Mathematics.

Houston, S. K., Blum, W., Huntley, I. e Neill, N. (Eds.), (1997). *Teaching and learning mathematical modelling*. Chichester: Albion Publishing.

Lakkof, G. (1987). *Fire, women and dangerous things: What categories reveal about the mind*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. (1993). The contemporary theory of metaphor. Em A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (pp. 202-251). Cambridge: Cambridge University Press.

Lakoff, G. (1995). Embodied minds and meanings. Em P. Baumgartner e S. Payr (Eds.), *Speaking minds: Interviews with twenty eminent cognitive scientists* (pp. 115-129). New Jersey: Princeton University Press.

Lakoff, G. e Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Londres: The University of Chicago Press.
Lakoff, G. e Nuñez, R. (1997). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. Em L. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.
Matos, J. F. e Carreira, S. (1997). The quest for meaning in students' mathematical modelling activity. Em S. Houston, W. Blum, I. Huntley e N. Neill (Eds.), *Teaching and learning mathematical modelling* (pp. 63-75). Chichester: Albion Publishing.
Monegal, A. (1994). La metáfora en teoría. *Eutopías, 2ª época, Documentos de trabajo, vol. 69*. Valência: Ediciones Episteme.
Moreira, L. (1996). Mais matemática ou mais oportunidades de matematização? Um trabalho em desenvolvimento curricular. Em A. Roque e M. J. Lagarto (Eds.), *Profmat 96 – Actas* (pp. 67-77). Lisboa: APM.
Peirce, C. S. (1978). *Écrits sur le signe*. Ed. G. Deledalle. Paris: Éditions du Seuil.
Petrie, H. e Oshlag, R. (1993). Metaphor and learning. Em A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (pp. 579-609). Cambridge: Cambridge University Press.
Ricoeur, P. (1983). *A metáfora viva*. Porto: Rés-Editora.
Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Londres: The Falmer Press.
Sloyer, C., Blum, W. e Huntley, I. (Eds.), (1995). *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications*. Yorklin: Water Street Mathematics.
Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 32* (1), 49-92.

Susana Carreira, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Quinta da Torre, 2825 Monte da Caparica. Endereço electrónico: sc@mail.fct.unl.pt.

RESUMO. A questão central do artigo reside na procura de uma fundamentação teórica e empírica para o argumento, cada vez mais difundido, de que as actividades de aplicação e modelação matemática constituem contextos propícios a uma aprendizagem significativa *da matemática. O enquadramento adoptado no tratamento da questão passa pela consideração do papel do pensamento metafórico na cognição humana e pela sua articulação com o fenómeno da produção de significado, à luz da perspectiva peirciana de semiose. O triângulo semiótico proposto por Peirce é utilizado na concepção de um novo modelo semiótico para a significação metafórica – o trapézio semiótico. A duplicação de domínios referenciais assume-se como um conceito chave na produção e interpretação de metáforas. A utilização do esquema semiótico trapezoidal é ilustrada na análise de um protocolo, extraído de um conjunto de dados empíricos relativos à resolução de um problema de aplicação por um grupo de alunos de uma disciplina de Análise Matemática do 1º ano do ensino superior. A análise dos dados possibilita a formulação de conclusões quer acerca da viabilidade e proficuidade do modelo teórico proposto quer acerca da compreensão dos processos de metaforização envolvidos na resolução de problemas aplicados. Tais processos de metaforização são entendidos como determinantes na produção de significado para modelos e conceitos matemáticos.*

ABSTRACT. The main question of this article concerns the search for a theoretical and empirical foundation to the argument, increasingly reaffirmed, according to which modelling and applications provide adequate contexts for meaningful *mathematics learning. The framework adopted to address the question brings in the role of metaphorical thinking in human cognition and its articulation with the phenomenon of meaning making in light of the peircean theory of semiosis. The semiotic triangle suggested by Peirce is used to envision a new semiotic model of metaphorical meaning – the semiotic trapezoid. The duplication of referential domains is seen as a key concept in the production and interpretation of metaphors. The application of the trapezoidal semiotic model is illustrated in the analysis of a protocol extracted from a set of data regarding the work of a group of students on an applied problem during an introductory calculus course. Data analysis leads to the formulation of conclusions both related to the viability and usefulness of the proposed theoretical model and to the understanding of the production of metaphors within the processes of solving applied problems. The instances of metaphorical thinking are found to be determinant in the generation of meaning for mathematical models and concepts.*