

---

## O trabalho do professor numa aula de investigação matemática<sup>1</sup>

João Pedro da Ponte  
Hélia Oliveira  
Lina Brunheira  
José Manuel Varandas  
Universidade de Lisboa

Catarina Ferreira  
Escola Secundária Bramcaamp Freire

Para além da sua faceta lógica e demonstrativa, a Matemática envolve outros aspectos, que se revelam cruciais no processo criativo: a observação, a experimentação, a indução, a analogia, o raciocínio plausível (Caraça, 1958; Kline, 1970; Poincaré, 1996; Pólya, 1945). Em lugar de estabelecer uma oposição entre estas duas facetas, é importante perceber como se complementam, sendo a segunda essencial para a criação do conhecimento e a primeira indispensável para o organizar e lhe dar a necessária solidez. Tanto o matemático profissional como o jovem aluno podem exercer a sua curiosidade colocando questões a si próprios sobre as propriedades dos objectos matemáticos. Na verdade, toda a actividade matemática rica envolve necessariamente trabalho investigativo, com o reconhecimento da situação, a formulação de questões, a formulação de conjecturas, o seu teste e refinamento e a argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado (Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira e Oliveira, 1999).

A terminologia usada pelos educadores, para se referirem ao trabalho de natureza investigativa, varia muito de época para época, de país para país e até de autor para autor (Pehkonen, 1997). Mas com esta ou aquela designação, o facto é que as

situações abertas, cujas questões não estão completamente formuladas, permitem ao aluno envolver-se na actividade desde o seu primeiro momento. De igual modo, na elaboração de estratégias, na generalização de resultados, no estabelecimento de relações entre conceitos e áreas da Matemática, na sistematização de ideias e resultados, são múltiplas as oportunidades de trabalho criativo, significativo para quem o empreende. O grande desafio que se coloca aos sistemas educativos actuais é tornar acessível este tipo de experiências, não apenas a uma minoria privilegiada, mas à generalidade dos alunos.

Na verdade, o trabalho investigativo recolhe uma atenção significativa nos currículos de Matemática de diversos países como Inglaterra, França e Portugal e também nos documentos curriculares norte-americanos, em alguns casos de modo mais explícito e noutros de modo mais difuso (Ponte et al., 1999). Assim, o programa francês, sublinha a importância de habituar os alunos à actividade científica, com referência clara ao processo de descoberta. O currículo inglês inclui aspectos directamente relacionados com o trabalho investigativo numa das suas grandes áreas de objectivos (*using and applying mathematics*). O programa português do ensino básico contempla esta perspectiva quando se refere à realização de actividades de exploração e pesquisa ou à elaboração de conjecturas pelos alunos. Por seu lado, o do ensino secundário inclui mesmo sugestões concretas para a realização deste tipo de trabalho.

Numa aula de trabalho investigativo, distinguem-se, de um modo geral, três etapas fundamentais: a formulação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e o momento de síntese e conclusão final (Chapman, 1997; Christiansen e Walther, 1986; Mason, 1996). No arranque da actividade, o professor procura envolver os alunos no trabalho, propondo-lhes a realização de uma tarefa. Durante a actividade, verifica se eles estão a trabalhar de modo produtivo, formulando questões, representado a informação dada, ensaiando e testando conjecturas e procurando justificá-las. Na fase final, o professor procura saber quais as conclusões a que os alunos chegaram, como as justificam e se tiram implicações interessantes. O professor tem de manter um diálogo com os alunos enquanto eles vão trabalhando na tarefa proposta, e no final cabe-lhe conduzir a discussão colectiva. Ao longo de todo este processo, precisa criar um ambiente propício à aprendizagem, estimular a comunicação entre os alunos e assumir uma variedade de papéis que favoreçam a sua aprendizagem.

É hoje consensualmente reconhecido que o professor tem um papel decisivo no processo de ensino-aprendizagem. Ele tem de ser capaz de propor aos alunos uma diversidade de tarefas de modo a atingir os diversos objectivos curriculares. Tem de se preocupar tanto com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos propriamente

---

ditos como com o desenvolvimento da capacidade geral de aprender (dimensões 1 e 2 da aprendizagem de Christiansen e Walther, 1986). Tem de ser capaz de equilibrar os momentos de acção com os momentos de reflexão, ajudando os alunos a construir os conceitos matemáticos (Bishop e Goffree, 1986). No entanto, embora haja um interesse crescente acerca do trabalho investigativo em Matemática, o papel do professor neste tipo de actividade tem merecido reduzida atenção. Deste modo, o presente artigo tem por base um estudo empírico cujo objectivo era caracterizar os papéis do professor em aulas onde os alunos realizam investigações matemáticas, relacionando-os com o seu conhecimento profissional.

## **O conhecimento profissional do professor**

Os diversos tipos de conhecimento — académico, profissional e senso comum — correspondem a práticas sociais diferenciadas. O conhecimento académico, que se apresenta sob a forma declarativa, respeita à criação e validação de conhecimento científico, humanístico ou filosófico. O senso comum, que envolve tanto aspectos declarativos como processuais, regula a condução da vida quotidiana. Finalmente, o conhecimento profissional, que partilha algumas das características dos anteriores, refere-se à resolução de problemas concretos num domínio de prática bem definido e especializado (Ponte, 1994).

### **Natureza e estrutura do conhecimento profissional**

Uma actividade profissional envolve uma forte acumulação de experiência num domínio bem definido, sendo todo o grupo profissional que define (e constantemente redefine) o valor das soluções encontradas para os problemas que surgem no dia-a-dia. As situações de prática profissional são marcadas pela complexidade, especificidade, instabilidade, desordem e indeterminação (Schön, 1983). Essencial, na actividade profissional, é a capacidade de tomar decisões acertadas e de resolver problemas práticos e, no caso dos professores, a capacidade de o fazer em interacção com outros actores — principalmente os alunos, mas também os colegas e outros elementos da comunidade. O professor tem de ser capaz de apreender intuitivamente as situações, articulando pensamento e acção e gerindo dinamicamente relações sociais; tem de ter autoconfiança e capacidade de improvisação perante situações novas.

O conhecimento profissional está, portanto, estreitamente ligado à acção. Este conhecimento tem, necessariamente, uma forte relação com o senso comum e ganha consistência quando se articula com o conhecimento académico, mas tem uma

natureza própria. O critério fundamental de validade do conhecimento acadêmico é a sua estrutura lógica. É aceite como senso comum tudo o que é, de algum modo, compatível com a vida diária. Pelo seu lado, o valor do conhecimento profissional resulta da sua eficácia na resolução de problemas práticos, tendo em conta os recursos existentes.

O conhecimento profissional baseia-se sobretudo na experiência e na reflexão sobre a experiência, não só individual, mas de todo o corpo profissional. Schön (1983) descreve o conhecimento profissional como conhecimento-na-acção. Elbaz (1983) refere-se-lhe como conhecimento prático e Clandinin (1986) como conhecimento prático pessoal. No entanto, ele pode apoiar-se em conhecimento teórico, de cunho acadêmico. Por exemplo, para Elbaz (1983), o conhecimento profissional resulta da integração da experiência com conhecimento teórico, sendo a experiência o factor determinante.

No conhecimento profissional podemos distinguir entre conhecimento processual, ou saber-fazer, que diz respeito à capacidade de executar acções que requerem reconhecidamente uma grande habilidade e experiência e o conhecimento estratégico, que tem uma função reguladora de toda a actividade, intervindo na tomada de decisões (Shulman, 1986). Nas discussões sobre os diferentes tipos de conhecimento é frequente olhar-se o conhecimento processual numa perspectiva restrita, sendo assimilado ao simples domínio de técnicas ou métodos de trabalho. No entanto, podemos encarar diversos graus de complexidade neste tipo de conhecimento, desde a capacidade de executar acções relativamente simples da vida quotidiana e na actividade profissional, até às capacidades que requerem um elevado grau de perícia e de experiência.

A investigação tem proporcionado exemplos interessantes de tomada de consciência, por parte dos professores, das limitações do seu conhecimento processual. Um caso mencionado em Ponte (1994) refere-se a uma jovem professora, que a certa altura considera o interesse de proporcionar aos seus alunos actividades de resolução de problemas. As tentativas que faz para incluir uma vertente explícita de resolução de problemas nas suas aulas não se revelam encorajadoras, devido, em particular, às dificuldades que sente na discussão dos processos de resolução. Ela sabe, por exemplo, que as discussões são fundamentais para que os alunos se apercebam do contraste entre diferentes formas de resolução, mas sente-se impreparada para as conduzir.

Elbaz (1983), sugere que o conhecimento profissional dos professores está estruturado em três níveis: imagens, princípios práticos e regras de prática. As imagens acerca do ensino constituem o nível mais geral e menos explícito do conhecimento profissional do professor. São afirmações amplas e metafóricas que

---

exprimem um certo propósito e resultam de uma combinação de sentimentos, valores, necessidades e crenças. As imagens organizam o conhecimento do professor em diferentes áreas, capturando aspectos essenciais das suas percepções de si mesmo, do seu ensino, da sua situação na sala de aula e da sua disciplina. Sintetizando as suas conclusões do estudo de caso de uma professora, esta autora escreve:

o conhecimento prático de Sarah está estruturado em torno de um pequeno número de imagens que reflectem o corpo total do seu conhecimento e servem para manter ligados os princípios e regras que ela usa quando faz o seu conhecimento intervir na prática (p. 144-5).

A ideia de esquema, muito usada em psicologia cognitiva, ajuda a estabelecer a necessária interligação entre os diferentes níveis propostos por Elbaz. Os esquemas podem ser locais ou globais conforme dizem respeito à execução de uma tarefa elementar ou de uma tarefa complexa (Gimeno, 1991). Um esquema de acção associa diversas regras de prática a um mesmo princípio e/ou associa vários princípios a uma mesma imagem, de acordo com o contexto em que se desenvolve a acção. Deste modo, as diversas imagens, princípios e regras práticas que servem de base ao conhecimento-na-acção organizam-se em esquemas muito diversos, que são chamados a intervir conforme a situação. O professor conhece, de facto, muito: tem conhecimentos mais ou menos extensos sobre a sua disciplina de ensino; tem experiência de interacções sociais; tem expectativas em relação aos alunos, em relação a si próprio, em relação à escola, etc. Nem tudo isso intervém de forma explícita e imediata no conhecimento-na-acção, mas pode ser usado como recurso de acordo com as circunstâncias.

Shulman (1986) identifica diversas grandes áreas do conhecimento profissional do professor, incluindo o conhecimento da sua disciplina de ensino, conhecimento pedagógico, e conhecimento do currículo. Chama a atenção, sobretudo, para o conhecimento didáctico<sup>2</sup>, que faz a síntese entre a pedagogia e o conteúdo, e que constitui, na sua perspectiva, o traço mais distintivo do conhecimento profissional do professor. Este não só conhece a sua disciplina e princípios pedagógicos gerais, como os conhece de um modo integrado, em função das necessidades da sua prática profissional.

### **Agenda, monitorização e avaliação da actividade da aula**

A passagem à acção implica a activação de um ou mais esquemas do conhecimento, com a produção de novas entidades conceptuais ou, mais propriamente, de novos esquemas, agora com carácter temporário. As imagens, princípios práticos e regras

de prática, organizados em esquemas, dão lugar à agenda, monitorização e avaliação, que presidem às decisões e acções que se realizam em função de cada actividade concreta. Uma vez esgotada essa actividade, desaparecem, restando apenas a respectiva memória que se torna parte integrante da avaliação final dessa actividade (Ponte et al., 1997).

A agenda indica o que o professor deseja conseguir na sua aula (Leinhardt e outros, 1991). Contém um conjunto de objectivos e planos acerca das acções a realizar, para promover a aprendizagem e para fazer a avaliação dos alunos. A combinação das diversas acções programadas constitui a estratégia do professor para aquela aula. A agenda especifica ainda os indicadores que serão usados para avaliar o respectivo desenvolvimento. A agenda começa a desenvolver-se num momento anterior à acção propriamente dita, tornando-se progressivamente mais especificada. Pode, eventualmente, ser refeita uma ou várias vezes. Uma vez iniciada a acção, a agenda continua a sofrer alterações, mais ou menos significativas, ditadas pela avaliação que o professor faz do próprio curso da acção.

A agenda corresponde assim ao plano mental de aula idealizado pelo professor. Trata-se de um plano dinâmico, que vai evoluindo durante a preparação da aula e mesmo durante a própria aula quando o professor decide deixar certas coisas por fazer ou resolve introduzir acções ou tarefas inicialmente não previstas. A agenda esgota-se com a aula — a partir daí pode ser objecto de análise mas já não é mais um plano de acção.

A monitorização corresponde à avaliação contínua realizada em tempo real no decurso da acção (Ponte, 1995). O professor vai recolhendo informação diversa dos alunos (as suas respostas, a atenção por eles manifestada, etc.). O próprio facto do professor se ouvir a si próprio traz-lhe nova informação, levando-o muitas vezes a ver algumas ideias sob novos prismas. O professor processa toda esta informação procurando verificar se existe um progresso satisfatório em relação aos objectivos pretendidos. Na monitorização diversos sub-esquemas estão particularmente activos. Ela envolve a leitura de indicadores diversos, chama aspectos da base de conhecimentos que o professor dispõe e faz intervir as suas expectativas, intenções e objectivos mais gerais. Como resultado, o professor equaciona rapidamente alternativas e produz constantemente decisões.

A monitorização implica a realização de “testes” (perguntas aos alunos, observações do seu trabalho) que, em certos momentos, permitem ao professor decidir, em função de determinados critérios, como prosseguir. Ela tem por base a agenda previamente estabelecida, mas recorre igualmente “em tempo real” a muitos aspectos da base de conhecimentos. A monitorização reflecte-se no discurso do professor (as perguntas que ele faz) e também na sua acção observadora (do trabalho

---

dos alunos). A importância deste processo de monitorização é reconhecida, por exemplo, por autores como Brown e McIntyre (1993) que indicam que um dos traços mais marcantes da acção do professor na sala de aula é a tensão constante que se estabelece entre os objectivos definidos (agenda) e a percepção que ele vai tendo da actividade dos alunos (avaliação).

A avaliação final indica o modo como o professor encara a acção, depois da aula concluída. Ela traduz-se num balanço positivo ou negativo, conforme a concordância entre a agenda inicial e a leitura que o professor faz dos resultados alcançados e envolve sobretudo dois aspectos: as reacções dos alunos em face das expectativas e os resultados dos objectivos e acções do professor. Esta avaliação pode existir em estado apenas implícito, como acontece muitas vezes quando tudo decorre de acordo com o previsto. Mas a avaliação também pode tomar um cunho mais explícito, especialmente quando o professor considera útil reflectir sobre os acontecimentos e seus resultados.

Deste modo, para a condução das actividades da aula, os professores precisam de mobilizar os seus recursos de conhecimento, saber fazer e experiência (onde se incluem rotinas da vida quotidiana, rotinas profissionais e estratégias heurísticas). A realização, na sala de aula, de novos tipos de tarefas (para eles e para os alunos) exige-lhes a construção pessoal de novos princípios e rotinas que os apoiem na exploração dessas tarefas e da actividade delas decorrente.

### **Estudos sobre a actividade do professor em aulas de exploração e investigação**

Importa considerar o que tem de fazer o professor quando os alunos realizam actividades de exploração ou investigação matemática. Que factores se evidenciam como mais importantes para facilitar a sua actuação? Como é que ele pode gerir a situação didáctica, estabelecendo as normas de funcionamento da aula, determinando expectativas, indicando o que é ou não desejável, o que é ou não permitido aos alunos e a si próprio?

Para promover o envolvimento dos alunos nas tarefas, o professor tem de criar um ambiente em que todos os alunos se sintam à vontade para apresentar as suas conjecturas, argumentar contra ou a favor das ideias dos outros, sabendo que o seu raciocínio será valorizado. Wood (1996), aponta a necessidade de que a Matemática desenvolvida na sala de aula constitua uma actividade com significado para os alunos, considerando que, para isso, é essencial que se crie um ambiente em que eles interajam uns com os outros, em que possam exprimir os seus pensamentos e em que questionem as ideias apresentadas pelos colegas. Para que seja possível e proveitosa esta nova “maneira de viver” na sala de aula é necessário a negociação e estabele-

cimento de um conjunto de normas de relacionamento entre os alunos e o professor, que indiquem, com clareza, o que se espera de cada um e o que é e não é permitido.

A necessidade destas normas é, em particular, evidenciada num estudo conduzido por Lampert (1990), com uma turma do 5º ano e que envolvia a realização de tarefas de investigação. Esta autora, que desempenhou também o papel de professora, refere que enquanto professora era sua responsabilidade escolher os problemas a trabalhar, tendo a preocupação de encontrar aqueles que pudessem envolver todos os alunos na formulação e teste de hipóteses, bem como na sua discussão. Por outro lado, os alunos tinham como responsabilidades expressar os seus interesses, questões e compreensão no domínio do problema. Deveriam também explicar as suas estratégias e responder acerca da sua legitimidade, evidenciando deste modo as suas concepções sobre a Matemática.

A criação de um ambiente favorável à actividade de investigação é apenas um dos aspectos do trabalho do professor. Outro aspecto, não menos importante, é servir de modelo aos alunos no que se refere ao modo de trabalhar em Matemática. Para Mason (1996), o professor deve ter presente que na sala de aula ele é um representante da comunidade dos matemáticos e que, conseqüentemente, a forma como se envolve nos problemas constitui um modelo para os alunos. Ao observar o professor a raciocinar matematicamente, os alunos poderão focar a sua atenção na formulação e reformulação de problemas, na especialização, na generalização, na elaboração de conjecturas e na argumentação. Assim, reforça-se a importância do professor ser matematicamente confiante:

Essa confiança reside, não em saber as respostas, ou mesmo as técnicas correctas, mas antes em ser capaz de obter uma conjectura plausível, de saber especializar, generalizar e explorar em torno da questão, talvez alterando-a um pouco, ou mesmo drasticamente, até que se possam realizar alguns progressos (Mason, 1996, p. 80).

Lampert (1990), no estudo atrás referido, aponta a mesma ideia, indicando que o seu papel de perita lhe servia para demonstrar aos seus alunos o que significa saber Matemática. Para isso, envolvia-se no raciocínio dos alunos, ao mesmo tempo que modelava o comportamento deles perante a actividade:

Para que os alunos vejam que tipo de conhecimento a Matemática envolve, a professora tem de tornar explícito o conhecimento que está a usar para argumentar com eles sobre a legitimidade ou utilidade de uma estratégia de resolução. Ela precisa de seguir os argumentos dos alunos enquanto eles vagueiam em vários terrenos e reunir evidência própria para suportar ou desafiar as suas conjecturas, e apoiar os alunos quando eles tentam fazer o mesmo uns com os outros (p. 41).

---

É claro que o professor continua a ter de apresentar, aos alunos, informação sobre os conceitos, procedimentos e notações matemáticas. No entanto, em vez de isso ser feito de forma abrupta e descontextualizada, pode ser feito, como refere Lampert, à medida que se ensina os alunos como fazer Matemática, integrando, quando a propósito, algumas informações sobre ferramentas e convenções matemáticas.

Uma das questões mais complexas que envolve o papel do professor é a sua intervenção na construção e validação do conhecimento dos alunos. Balacheff (1991), descreve uma experiência que decorreu em aulas do 8º ano, onde se salientam algumas dificuldades manifestadas pela professora da turma em cumprir a agenda inicial. Uma dessas dificuldades diz respeito à sua intervenção junto dos alunos. Foi acordado, numa fase inicial, que a professora (que fazia parte da equipa do projecto) deveria apenas apresentar a situação e não intervir até que todos os grupos tivessem proposto uma solução e, posteriormente, deveria regular o debate entre os grupos. No entanto, com o decorrer das aulas, houve dois aspectos que vieram a influenciar, de uma forma fundamental, as suas decisões: em primeiro lugar, o constrangimento do tempo, que a levou a intervir de modo a assegurar o cumprimento do plano previsto e, em segundo lugar, a vontade de garantir resultados aceitáveis aos seus próprios olhos. Estes constrangimentos fizeram com que a professora, sem se aperceber, acelerasse as conclusões dos alunos ao mesmo tempo que fazia intervenções matemáticas (por exemplo, chamando a sua atenção para a palavra “qualquer” na expressão “qualquer triângulo”). Segundo o autor, “os comportamentos dos alunos foram profundamente alterados por estas intervenções” (p. 184). Curiosamente,

a professora pensou ter mantido o espírito da sequência... no entanto, apenas os aspectos superficiais se tinham mantido, o significado para os alunos fora inteiramente diferente. Eles não se envolveram em verdadeira actividade matemática, como esperado, mas apenas num novo jogo escolar (p. 184).

Balacheff recorda que a prova tem sido considerada pelos professores como um dos processos em que os alunos manifestam bastante dificuldade, sendo dois os motivos habitualmente sugeridos. O primeiro é o facto dos alunos não sentirem a necessidade de provar; o segundo é a falta de maturidade lógica. Porém, este autor acha estas explicações inadequadas, já que há evidência de que os alunos se comportam de forma diferente fora da aula de Matemática. Uma das explicações para essa dificuldade parece residir antes no papel do professor na sala de aula: “enquanto os alunos esperarem que seja o professor a decidir sobre a validade de um resultado da sua actividade, a palavra ‘prova’ não fará para eles o sentido que nós esperamos” (p. 179). Deste modo recomenda que se estude melhor a negociação do contrato

didáctico para que seja possível “a devolução da responsabilidade de aprender aos alunos” (p. 190).

Também Schoenfeld (1992) refere a investigação realizada por Lampert para falar da autoridade científica, salientando que a investigadora não “revelava a verdade” mas antes dialogava com os alunos como alguém que detinha um grande conhecimento mas não assumia uma posição totalitária. Na mesma perspectiva, Wood (1995) sugere que o professor deve enfatizar que é mais importante a maneira como os alunos resolvem as situações que lhe são apresentadas do que obter as respostas certas. Durante a discussão em grande grupo “o professor tem oportunidade de ver as coisas sob a perspectiva dos alunos e pode compreender os métodos individuais usados por eles” (p. 9). Perante conflitos, fruto das diferentes posições dos alunos (por exemplo, em situações de discussão em grande grupo), o seu papel é o de gerir essas discussões e fomentar uma resolução desses conflitos pelos próprios alunos.

## **Metodologia**

Este estudo, realizado por uma equipa colaborativa integrando professores e investigadores, utilizou uma metodologia qualitativa baseada, sobretudo, na observação de situações de aula em que foi proposta uma tarefa de investigação. Destas situações foram seleccionados e analisados um conjunto de episódios relativos às fases de arranque, onde o professor apresenta uma tarefa a toda a turma, de desenvolvimento da investigação, em que os alunos trabalham em pequenos grupos, e à fase de discussão final em que os alunos apresentam os seus resultados e toda a turma faz, em conjunto com o professor, um balanço geral do trabalho realizado.

O trabalho colaborativo da equipa envolveu a definição e posterior reformulação dos objectivos do estudo, o desenvolvimento de instrumentos e métodos de análise, a planificação e calendarização das actividades a desenvolver, a selecção e análise preliminar dos episódios, bem como a discussão final dos resultados e conclusões do estudo. Para além destas actividades, em que intervieram todos os elementos da equipa, realizou-se uma divisão de tarefas tirando partido da experiência, interesses e possibilidades dos diversos membros.

A tarefa proposta intitula-se “Explorações com números” (ver figura 1), que se presta a ser realizada por alunos do 5º ao 10º ano de escolaridade, e que tem a particularidade de poder ser abordada de diversas perspectivas e com diversos graus de sofisticação matemática. Decidiu-se usar uma única tarefa neste estudo de modo a não se introduzir como factor perturbador da análise a maior ou menor dificuldade

das questões propostas e o seu conteúdo matemático.

Procura descobrir relações entre os números da figura:			
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...	...	...	...
Como sempre, regista as conclusões que fores obtendo.			

Figura 1. Tarefa proposta aos alunos.

Todas as aulas foram conduzidas por professoras que integravam a equipa do projecto MPT e que possuíam já alguma experiência com as actividades de investigação. Cada uma das três professoras, leccionando em escolas diferentes, seleccionou uma turma para realizar esta tarefa: uma do 7º ano e duas do 9º ano. Foram dedicadas duas aulas à realização da tarefa — cerca de uma aula e meia foi usada para o trabalho em pequeno grupo e o tempo restante para a apresentação oral dos resultados dos grupos.

A recolha de dados foi realizada através de registos vídeo e audio e notas de observação. Nas diversas aulas estiveram, quase sempre, presentes, para além da professora, um ou dois elementos da equipa de investigação que observaram a actividade e recolheram imagem e som.

Como suporte para o trabalho de análise de dados foi desenvolvido um sistema de categorias incidindo num nível intermédio — nem demasiado “micro” descrevendo apenas as acções, nem demasiado “macro”, descrevendo apenas aspectos muito gerais da vivência da aula. O ponto de partida deste sistema é a consideração de três dimensões: (a) aluno e professor; (b) raciocínio matemático e raciocínio didáctico, (c) os respectivos papéis. Este sistema de categorias foi desenvolvido, por aproximações sucessivas, a partir da experiência de análise obtida num trabalho anterior (Ponte et al., 1998) sendo progressivamente refinado através da sua aplicação a novos episódios.

A análise de dados envolveu as seguintes etapas:

- (a) Transcrição do registo vídeo e audio relativo às aulas em que se realizaram investigações matemáticas;

- (b) Selecção dos episódios a estudar, a partir das transcrições (atendendo aos objectivos definidos, os episódios deviam envolver diversos tipos de interacção professor-aluno quando estes realizam tarefas de investigação);
- (c) Aplicação do sistema de categorias às transcrições, recorrendo por vezes ao visionamento dos registos vídeo relativos ao episódio; esta fase envolveu a produção de um documento escrito com uma análise preliminar onde se identificam os diversos segmentos do episódio, o raciocínio e o papel do professor e a interacção entre professor e alunos;
- (d) Refinamento da análise, através de uma discussão do documento produzido na etapa anterior;
- (e) Análise cruzada das diversas análises obtidas na etapa anterior para os diversos episódios;
- (f) Análise dos itens obtidos no passo anterior, com vista à identificação e caracterização dos papéis do professor.

### **Os papéis do professor**

De seguida apresentamos diversos tipos de papéis desempenhados pelo professor no decurso da realização de trabalho investigativo na aula de Matemática. A relação que estes papéis têm com os aspectos mais marcantes do processo de aprendizagem no contexto investigativo e com o conhecimento profissional necessário a este tipo de actividade será discutida no ponto seguinte, dedicado às conclusões desta investigação.

#### **Desafiar os alunos**

O trabalho investigativo começa com a formulação de uma questão que nos intriga e para a qual não encontramos resposta imediata. Formular questões desafiantes para um grupo de alunos não é tão simples como parece à primeira vista. Se a questão for considerada por eles como demasiado difícil, é natural que se sintam intimidados e não se disponham a trabalhar nela. Se for por eles considerada como demasiado fácil, é encarada como maçadora e desinteressante. Se o professor der informação a menos, os alunos podem sentir-se “perdidos” e sem saber por onde começar. Se der informação a mais, pode proporcionar pistas desnecessárias, que distraem os alunos do que realmente interessa. Se der a informação estritamente necessária, sem qualquer ambiguidade, dá indirectamente pistas para a resolução da tarefa. Além disso, o que é excessivo para uns pode ser pouco para outros. São múltiplos os

dilemas que o professor enfrenta neste domínio e a solução pode ter de variar de momento para momento, de turma para turma e de aluno para aluno.

A fase de introdução da tarefa constitui um dos principais momentos onde o professor tem de evidenciar a sua capacidade de colocar boas questões. Isso pode ser feito usando uma variedade de linguagens, incluindo a escrita e a oral. Um enunciado escrito tem a vantagem de fixar a situação de partida, permitindo aos alunos regressar a ela sempre que o entenderem. O enunciado da tarefa considerada neste artigo pede para que os alunos encontrem “relações” entre os números da figura, relações essas que podem ser da mais diversa natureza. Estamos perante uma situação que permite a exploração numa variedade de direcções.

Uma vez que os alunos já têm alguma experiência deste tipo de trabalho, a professora opta por não se referir oralmente ao conteúdo da tarefa proposta, dando sobretudo indicações acerca do modo como eles devem trabalhar e dos produtos esperados:

*Professora:* Então hoje vamos prosseguir com mais uma das nossas investigações. Eu vou dar-vos uma nova proposta, vocês vão trabalhar em grupo e vão, como sempre — que é muito importante e não se podem esquecer — escrever todas as vossas conclusões. No fim da aula, cada grupo entrega uma folha para eu levar para casa e fazer algumas observações. Amanhã, na primeira parte da aula, vamos acabar este trabalho com algumas questões que vocês deixarem pendentes. Depois, cada grupo irá apresentar algumas conclusões que tirou, está bem?... Vou agora distribuir então a ficha.

No entanto, a professora não deixa de marcar, através de algumas palavras-chave (*investigações, escrever conclusões, questões pendentes*), o sentido geral da actividade que lhes propõe, incentivando-os ao trabalho. As linguagens escrita e oral são utilizadas para, em conjunto, criar uma situação desafiante para os alunos, proporcionando ao mesmo tempo as pistas necessárias para eles compreenderem o que há para fazer.

A possibilidade de desafiar os alunos não se restringe ao momento de arranque da actividade. Ela prolonga-se durante todo o trabalho. Por exemplo, no seguinte diálogo, a professora faz a síntese de uma conjectura formulada em conjunto por si e por um grupo de alunos relativamente à localização das potências de 2 na tabela. Ela refere possíveis investigações que os alunos podem ainda efectuar, nomeadamente, procurando a localização das potências de 3 ou 4:

*Ilda:* Sim. São as potências de 2.

*Professora:* ... Isso mesmo!

...

Até é uma coisa curiosa... que as potências de 2 têm este caminho. E qual é o salto que elas fazem em termos de linhas? São as próprias potências de 2, já viram?!

Bom, claro que agora podíamos, assim como para os múltiplos, pensar em procurar as potências de 3, as potências de 4...

Uma questão que não está completamente formulada, ou seja, uma questão aberta, pode ser interpretada e concretizada de diversas maneiras e, com isso, aumentam as possibilidades de envolvimento dos alunos. O facto de as ideias matemáticas se desenvolvem como fruto das tentativas de compreensão, como resposta a problemas e necessidades experimentadas pelo próprio aluno, e não como simples assimilação de ideias pré-existentes, confere grande importância à formulação de boas questões. Ao mostrar aos alunos que é possível olhar para as ideias matemáticas de modo interrogativo, colocando questões que podem ser investigadas — e promovendo a investigação, de facto, de algumas delas — o professor está a exercer um importante papel na educação não só do raciocínio matemático dos alunos, mas também do modo de eles se relacionarem com o mundo.

### **Avaliar o progresso dos alunos**

No decorrer do trabalho dos alunos, o professor tem de saber se eles compreendem a tarefa proposta, se estão a formular questões e conjecturas, se já as testaram, se são capazes de justificar os seus resultados. Precisa de saber se os alunos estão a ter dificuldades por não compreenderem algum conceito importante, porque não relacionam ideias, em princípio, já suas conhecidas, ou porque não encontram uma forma de representação funcional para a informação que lhes é dada. Para isso, necessita de recolher informações e de as interpretar — à luz da sua perspectiva de aprendizagem e do seu conhecimento matemático, em especial no que se refere à tarefa em causa.

Quando os alunos estão a trabalhar em grupo e o professor percorre os vários grupos, procurando observar o seu trabalho, em regra, a sua primeira acção é precisamente a recolha de informações:

*Professora:* E vocês?

*Manuel:* Estamos a ver aqui nas diagonais.

*Carla:* Também dá.

*Manuel:* 0, 5, 10, 15, 20. Depois 3, 6, 9, 12, e mais três, 15.

*Professora:* E então o que é que isso quer dizer?

*Manuel:* Que as diagonais...

*Carla:* São múltiplos do primeiro número da diagonal.

---

A professora não se satisfaz com a resposta dos alunos, que não permite perceber o que, realmente, tinham feito e qual a sua conjectura, e interroga-os então sobre o significado da sua observação.

A recolha de informações por parte do professor envolve o acompanhamento do progresso dos diversos grupos e, tanto quanto possível, dos diversos alunos. Por exemplo, no seguinte episódio, os alunos pedem ajuda para escrever a conjectura que acabam de discutir e a professora procura compreendê-los:

*Hugo:* Stora, como é que “a gente” vai escrever assim que...?

*Professora:* Ah! Está bem, está bem! Deixa cá ver, isso é interessante...

*Luís:* Tá aqui Stora!

*Hugo:* Se imaginarmos que isto continua, corresponde sempre a um número abaixo da...

Mesmo sem perceber completamente a ideia dos alunos, a professora acha interessante a sua tentativa de encontrar uma relação e estimula-os a explicar o padrão que pensam ter encontrado.

Fazer boas perguntas é essencial para saber o que os alunos estão a pensar. Com base nas informações que recolhe, o professor pode adoptar diversas estratégias — não interferir no trabalho dos alunos, interferir de forma discreta e ligeira, ou dedicar uma atenção considerável a um dado aluno ou grupo de alunos. A avaliação do trabalho já realizado pelos alunos e a identificação das suas dificuldades, pode, em certos momentos, dar origem a uma transição para outro momento da aula, ou a uma decisão no sentido de prolongar por mais tempo o trabalho que está a ser realizado.

### **Raciocinar matematicamente**

Por muito bem que o professor tenha preparado a aula, podem sempre surgir novas questões matemáticas em que ele ainda não pensou, especialmente se a situação é verdadeiramente aberta e estimulante. Neste caso, pode acabar por se envolver, em frente dos seus alunos, em raciocínio matemático.

É o que se passa na seguinte situação, onde a professora, ao dialogar com os alunos de um grupo, começa a suspeitar que pode haver uma regularidade interessante nas somas dos elementos de cada linha, por eles consideradas. Conduz então, em conjunto com eles, um processo de recolha de dados, com vista à sua identificação:

*Hugo:* Se imaginarmos que isto continua, corresponde sempre a um número abaixo da...

*Professora:* Uma casa abaixo?... Portanto...

*Luís:* Menos no primeiro.

*Professora:* Menos no primeiro. Aqui é uma casa abaixo... Mas aqui não é uma!

*Hugo:* Não porque há sempre um espaço!

(silêncio)

*Professora:* Hum... Então essa história de ser uma casa abaixo não funciona sempre ...

(silêncio)

*Luís:* Só às vezes...

*Hugo:* Mas deixa sempre um número.

*Professora:* Deixa ver se há aqui alguma regularidade... Isso é verdade – este mais este dá este, este mais este dá este... Este mais este, agora saltam duas, não é?...E agora vamos ver quantos saltam... Este mais este [13+14] dá...

*Hugo:* 27.

Neste caso, a forma como a professora ilustra o raciocínio matemático — testando uma conjectura, reformulando-a e procurando regularidades — revela-se suficiente para que os alunos ultrapassem as suas dificuldades iniciais. Na verdade, eles continuam a trabalhar na tarefa e, mais tarde, na discussão final apresentam conjecturas da sua autoria que mais nenhum grupo tinha obtido.

O facto de os alunos observarem directamente o professor a investigar é extremamente importante para aprenderem, eles próprios, o modo de conduzir uma investigação. Esta aprendizagem é necessária: à partida, os alunos não sabem muito bem o que se pretende numa investigação, o que é preciso fazer e como. Não dão, muitas vezes, a importância necessária à formulação de questões nem realizam uma boa organização dos dados. Outras vezes, consideram que as conjecturas que vão formulando devem ser rapidamente apresentadas à professora (para assegurarem prioridade na descoberta) e não precisam de ser por eles testadas. Ver alguém a pensar matematicamente é uma boa maneira de ganhar uma noção daquilo em que consiste, de facto, esta actividade.

Uma situação também nova para a professora ocorre noutra episódio, na fase de discussão, quando um aluno vai junto do retroprojector e apresenta uma conjectura sobre o valor da soma dos números situados nos vértices de qualquer polígono construído na tabela. Nesta situação, porém, a professora opta por raciocinar sobre a validade da conjectura do aluno sem exteriorizar o seu pensamento:

*Rodrigo:* Para além de um quadrado dá sempre para qualquer polígono que caiba dentro desta tabela, por exemplo, vou fazer o maior polígono possível. Vou fazer o maior possível, esperem aí.

*Raul:* Desenha um hexágono ou um octógono.

*Professora:* Samuel, queres dizer alguma coisa?

*Samuel:* Um triângulo também dá!

*Professora:* Alguém quer fazer mais algum comentário? (o aluno desenha no acetato) ... Então, ele vai explicar de novo.

*Rodrigo:* Tenho aqui outros polígonos, hexágono, octógono, etc. Seguindo as setas,

como no quadrado, vai dar uma soma. Por exemplo, aqui no octógono. Se somar 8 números, terá que diminuir 8. Se aqui soma 1, aqui diminui 1. Isso é para qualquer polígono.

*Rogério:* A soma disso vai dar sempre zero. Não é? É aí que queres chegar? Vai sempre dar...

*Professora:* “A soma das somas” dá zero?

Neste caso, a dinâmica da aula estava essencialmente suportada pelo aluno que apresenta a sua conjectura e a professora não vê vantagem em chamar sobre si as atenções.

Por muito que uma aula esteja bem preparada, se as questões forem realmente interessantes e o modo de as abordar encorajador da diversidade de estratégias e do cruzamento de argumentos, tenderão a surgir com frequência situações novas para o professor. Ser capaz de raciocinar matematicamente, à vista dos alunos, constitui neste tipo de trabalho, uma competência importante da sua parte.

Durante a realização da actividade surgem, além disso, ocasiões para estabelecer conexões com outros conceitos matemáticos ou extra-matemáticos. Muitas vezes, será oportuno estabelecer essas conexões ou levar os alunos a reflectir sobre elas. Trata-se de um aspecto do trabalho do professor que requer uma boa cultura matemática e capacidade de decidir, em cada momento, se será de prosseguir o trabalho ou olhar mais atentamente para aspectos que com ele se ligam directamente.

### **Apoiar o trabalho dos alunos**

Durante a realização de uma investigação, o professor procura apoiar os alunos a progredir seu trabalho. Para isso tem de considerar dois aspectos: (a) a exploração matemática da tarefa proposta e (b) a gestão da situação didáctica, promovendo a participação equilibrada dos alunos na actividade da aula.

Uma das maneiras de apoiar o progresso dos alunos na sua actividade é através de perguntas adequadas. No seguinte diálogo, por exemplo, as três primeiras interpelações da professora têm esse objectivo:

*Teresa:* Isto assim é possível? Aqui, por exemplo, o 1, depois o 4, o 9, o 16, o 25, depois o 36. Só que depois não segue nenhuma ordem... por aqui. Aqui dá mas...

*Professora:* Será que não segue uma ordem?

*Rita:* Depois alterna.

*Professora:* Alterna, não é?

*Amélia:* Os primeiros alternam.

*Ana:* A primeira com a segunda, só que aqui é seguidos e depois aqui. E depois passa 2.

*Professora:* Pois. E será que não há aí uma...[regularidade]?

*Teresa:* E depois passa para o 49. Olha 1, 2...

*Professora:* Bom não quer dizer que seja assim tão aleatoriamente, se calhar há aí uma maneira de descobrir de quantos em quantos é que se saltam. Mas assim como está é difícil...

*Alunos:* (silêncio)

*Professora:* Vocês separaram a tabela e assim é mais complicado de ver... Se tiverem tudo para baixo...

As perguntas da professora por vezes são mais abertas (*será que não há aí uma...?*), noutras casos são mais específicas (*será que não segue uma ordem?*) e, algumas vezes, são essencialmente retóricas (*alterna, não é?*). Mas mesmo estas não deixam de ser necessárias para manter o fluxo do diálogo entre os alunos e a professora.

Esgotado o poder de avançar através de questões, a professora começa a dar algumas sugestões que orientem os alunos na sua actividade. Primeiro, chama-lhes a atenção para o facto de ser mais fácil encontrar alguma regularidade se organizarem os dados de outra maneira. Depois, constatando que essa sugestão não produz os efeitos desejados, sugere, de forma mais directa, um modo de organização da tabela que pode facilitar a sua exploração. De modo semelhante, no diálogo seguinte, a professora depois de ter conseguido que os alunos se apercebessem que a conjectura que tinham formulado não era válida, continua a apoiá-los na investigação dando indicações explícitas sobre a necessidade de gerarem um maior número de dados:

*Professora:* Foi isso que disseste? Percebi bem?

*Manuel:* Só que há algumas excepções.

*Professora:* Ah! Mas pareceu-me que me estavas a dizer era estes.

*Carla:* Era e estes.

*Professora:* Então continua a ver estes, prolonguem a tabela e vejam estes, tudo bem. Mas isso parece que não, não é.

*Manuel:* Não.

*Professora:* Isso que estavas a dizer, não, mas continuem a ver o que é que se passa nas diagonais, como estavam a ver...

A realização, com êxito, de um trabalho em grupo ou em colectivo depende do estabelecimento de um propósito comum. É preciso que todos os elementos desse grupo ou dessa turma estejam sintonizados em relação ao que se está a fazer. Para o conseguir, o professor pode fazer perguntas com um objectivo essencialmente clarificador relativamente às questões propostas ou às afirmações dos alunos.

Durante o decorrer da aula o professor está constantemente a fazer a gestão da situação didáctica. Essa gestão assume uma forma mais visível em certas situações.

É o que se evidencia no seguinte episódio, quando a professora abre espaço para a intervenção de um aluno (Samuel) que aparentava querer intervir mas tinha dificuldade em assumir a palavra, ou quando encoraja a possibilidade de mais intervenções por parte da generalidade dos alunos:

*Rodrigo:* Para além de um quadrado dá sempre para qualquer polígono, que caiba dentro desta tabela, por exemplo, vou fazer o maior polígono possível. Vou fazer o maior possível, esperem aí.

*Raul:* Desenha um hexágono ou um octógono.

*Professora:* Samuel, queres dizer alguma coisa?

*Samuel:* Um triângulo também dá!

*Professora:* Alguém quer fazer mais algum comentário? (o aluno desenha no acetato). Então, ele vai explicar de novo.

Os alunos fazem muitas vezes perguntas ao professor. Este pode responder directamente mas também pode evitar fazê-lo e devolver as questões que lhe são postas ao grupo ou à turma. Temos um exemplo no seguinte diálogo, em que a professora em vez de responder ao aluno, envolve todos na discussão:

*Rogério:* Isso está bem visto! Mas qual é a lógica desse quadrado para complementar aquelas que nós dissemos e aquele grupo também. Complementar aquilo que já foi dito que para baixo é sempre... O que é que isso vai acrescentar?

*Professora:* Quem quer responder ao Rogério?

Ao devolver a questão a toda a turma, a professora evidencia a sua expectativa de que os alunos possam dar uma contribuição importante sobre a questão proposta. A constante (re)definição das margens de actuação dos alunos, à medida que a aula decorre, constitui também uma forma de gerir a situação didáctica vivida na aula.

As perguntas abertas constituem um importante meio que o professor pode usar para apoiar os alunos na exploração matemática da situação. Mas, por vezes, ele tem de recorrer a perguntas mais específicas, a perguntas meramente retóricas, ou de dar sugestões aos alunos acerca do modo como podem avançar. Muitas vezes, o professor pode responder às perguntas dos alunos devolvendo-lhes essas mesmas perguntas, de modo a suscitar o seu pensamento matemático. Um diálogo frutuoso requer uma permanente compreensão das ideias avançadas por todos os participantes e muitas das questões do professor têm um objectivo essencialmente clarificador.

O professor tem de ter igualmente sempre em atenção a gestão da situação didáctica, procurando que todos os alunos participem no trabalho e vejam valorizados os seus contributos. Isto implica uma acção selectiva por parte do professor,

dando em determinado momento mais atenção a uns do que a outros, e reforçando o cumprimento de normas adequadas de comportamento, tanto no trabalho de grupo como nos momentos de trabalho colectivo com toda a turma.

### **Fornecer e recordar informação**

Outro aspecto do trabalho do professor é proporcionar informação útil aos alunos, ajudando-os a recordar ou compreender conceitos matemáticos e formas de representação importantes. Trata-se de uma faceta bem conhecida do trabalho do professor — que, muitas vezes, como sabemos, assume mesmo um lugar dominante. Na actividade investigativa esta faceta também existe, embora não assuma uma proeminência tão grande como noutras formas de trabalho.

Este facto é ilustrado, em particular, por um episódio ocorrido quando da discussão final de apresentação de resultados. A certa altura, uma aluna refere uma conjectura envolvendo números primos. Antes de dar continuidade à discussão, a professora entende que é necessário recordar este conceito, pois pensa que ele pode não estar muito presente para alguns alunos. Em vez de o fazer directamente, introduz a questão “o que são números primos?” dando oportunidade aos alunos de serem eles próprios a recordar este conceito.

*Sofia:* É sobre os números primos. Eles disseram que os números primos seguem uma certa sequência, isso é mentira.

*David:* Vai lá fazer o desenho.

*Professora:* Vocês não descobriram nenhuma sequência para os números primos? Sabem o que são números primos?

*Alunos:* Os que são divisíveis por 1 e por si próprios.

*Professora + alunos:* Falta 3, 7, 11, o 23 também é.

Também no decurso do trabalho dos grupos surgem situações em que o professor pode considerar oportuno introduzir nova informação ou ajudar a recordar um conceito. É o que se passa no seguinte exemplo relativamente à noção de quadrado perfeito:

*Rute:* Marco o que é que são quadrados perfeitos? (pergunta a um colega de outro grupo)

*Marco:* Não sei, pergunta à stôra.

*Rute:* Stôra, pode chegar aqui?... Vou perguntar, qual é o mal? (comentando com os seus colegas)

Stôra nós temos uma dúvida: não nos lembramos muito bem o que são quadrados perfeitos.

*Professora:* Então os quadrados perfeitos são os quadrados dos números naturais.  $1^2$ ,  $1$ ,

---

portanto 1 é um quadrado perfeito.  $2^2$ , 4, é um quadrado perfeito. Certo?

*Sílvia:* 9 é um quadrado perfeito.

*Professora:* Agora, se for o quadrado de um número não inteiro, por exemplo o quadrado de 2.2, já não é um quadrado perfeito.

*André:* A gente até fez com bolinhas, stôra.

*Professora:* Claro. O quadrado de 0.2, dá 0.04 mas este não é um quadrado perfeito...

Numa discussão, não faz sentido manter um diálogo do qual estão necessariamente afastados muitos alunos por não compreenderem os conceitos-chave que estão a ser utilizados. Por isso, recordar conceitos anteriormente estudados, quando necessário, é uma preocupação importante do professor. Pode ser ele a apresentar directamente a informação ou pode atingir esse objectivo, indirectamente, através de perguntas colocadas aos alunos. A segunda via, desde que possível, envolve mais os alunos na actividade e dá mais informação ao professor sobre os seus conhecimentos e eventuais dificuldades.

A introdução de novas ideias, novas formas de representação, novas conexões, é um dos papéis essenciais do professor que pode também ser exercido no decurso do trabalho investigativo. Ao proporcionar actividades que promovem a frequente reutilização dos conceitos e conhecimentos básicos (aritméticos, geométricos, algébricos), o professor está a promover a sua consolidação e melhor compreensão por parte dos alunos. Ao chamar a atenção para a densa rede de ligações entre as ideias matemáticas, o professor está a contrariar a tendência dos alunos para as arrumarem em compartimentos isolados, ajudando-os a desenvolver um conhecimento matemático muito mais rico e completo.

### **Promover a reflexão dos alunos**

No decurso da realização de uma actividade de investigação é importante que os alunos relacionem o trabalho que estão a fazer com ideias já suas conhecidas e possam desenvolver a sua compreensão do que é a Matemática. A discussão final é, em geral, um bom momento para promover uma visão geral dos vários aspectos da situação e das diversas estratégias que podem ser usadas para a explorar. Desenvolver uma apreciação correcta da Matemática e do pensamento matemático é um importante objectivo educacional e o professor precisa de estar atento às oportunidades que possam surgir nesse sentido.

Os alunos precisam de desenvolver uma apreciação da importância e do valor dos processos em que estão envolvidos e dos resultados que vão obtendo. Para isso, uma das estratégias mais usadas pelo professor é o comentário directo à pertinência das suas afirmações. É o que se ilustra no seguinte diálogo:

*Professora:* Então, mas aqui não estamos a falar também de potências? Exactamente. Já repararam?

*Ilda:* Sim. São as potências de 2.

*Professora:* ... Isso mesmo!

Neste caso o comentário da professora é directo e positivo. Noutros casos, pode ser mais ambíguo. É o que acontece no diálogo seguinte, em que a professora comenta a questão em que os alunos estão a trabalhar:

*Professora:* Foi isso que disseste? Percebi bem?

*Manuel:* Só que há algumas excepções.

*Professora:* Ah! Mas pareceu-me que me estavas a dizer era estes.

*Carla:* Era e estes.

*Professora:* Então continua a ver estes, prolonguem a tabela e vejam estes, tudo bem.

Mas isso parece que não, não é.

*Manuel:* Não.

*Professora:* Isso que estavas a dizer, não. Mas continuem a ver o que é que se passa nas diagonais como estavam a ver. Depois parece que há aí umas diagonais especiais, parece, mas... (abandona o grupo)

Habitualmente, os alunos pressionam muito o professor para que este valide as conjecturas e os raciocínios que fazem. Comentar o valor das suas afirmações pode reforçar ainda mais esta tendência. Por isso, é importante que o professor seja capaz de criar situações de discussão dos conceitos, de reflexão e de avaliação do trabalho realizado em que os alunos tenham uma participação importante. É o que pretende a professora, no seguinte diálogo, quando coloca uma questão no momento da síntese final, ajudando os alunos a reflectir sobre o seu conceito de conjectura, que neste caso designam por *conclusão*:

*Sofia:* É uma conclusão: a de que os números primos não seguem sempre a mesma ordem.

*Professora:* Descobrir que não há uma regra não é uma conclusão?

No exemplo seguinte, já referido num ponto anterior, um aluno coloca uma questão, pondo em causa o valor de uma conjectura enunciada por um seu colega. Trata-se de uma questão muito interessante, que envolve a avaliação do valor de uma ideia matemática. A professora, não responde directamente e põe a questão à consideração de toda a turma, conferindo-lhe assim uma importância acrescida:

*Rogério:* Isso está bem visto! Mas qual é a lógica desse quadrado para complementar

aquelas que nós dissemos e aquele grupo também. Complementar aquilo que já foi dito que para baixo é sempre... O que é que isso vai acrescentar?

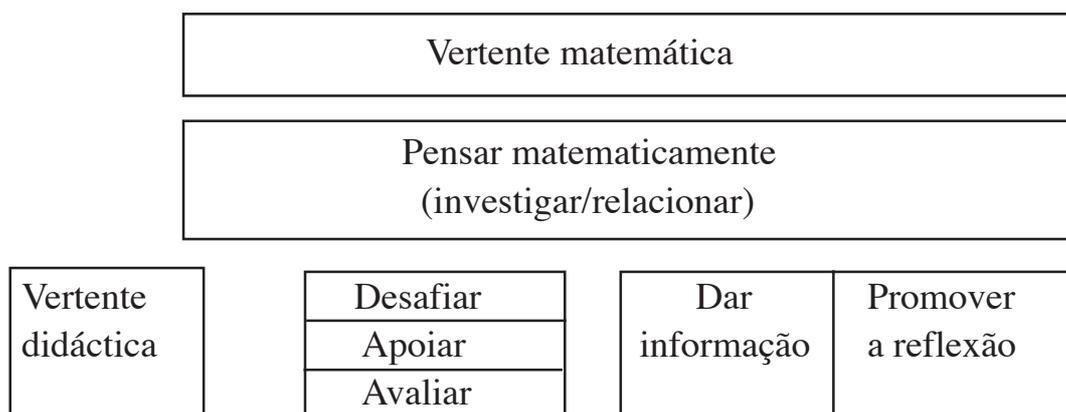
*Professora:* Quem quer responder ao Rogério?

Os momentos de reflexão e apreciação do trabalho realizado desempenham um papel importante no processo de ensino-aprendizagem e também nas actividades de investigação. Esses momentos podem incidir tanto em questões específicas relativas ao que se vai fazendo em cada instante, como referir-se a questões gerais relativas à natureza do trabalho ou à sua relação com outros aspectos da Matemática. Para que os alunos assumam a sua participação e responsabilidade neste processo é necessário que o professor lhes proporcione as oportunidades adequadas, colocando-lhes questões e fomentando a sua capacidade de argumentação e reflexão, como mostram os dois últimos exemplos apresentados.

## Conclusão

Este estudo procura caracterizar diversos papéis fundamentais do professor no decorrer de aulas em que os alunos realizam actividade matemática investigativa. Estes papéis têm um cunho essencialmente didáctico, mas a vertente matemática marca igualmente a sua presença, pois neste tipo de actividade surgem oportunidades para que o professor se envolva em raciocínio matemático perante os seus alunos (ver quadro 1). Os papéis remetem para diversos aspectos do conhecimento profissional do professor, nomeadamente para o seu conhecimento matemático, em especial relativo à tarefa de investigação em causa, e para o seu conhecimento didáctico relacionado com a organização do trabalho e a condução da actividade dos alunos.

**Quadro 1.** Papéis do professor no decurso da realização de actividade investigativa na aula de Matemática.



Vejam os em primeiro lugar a vertente matemática. No momento em que selecciona, adapta ou elabora a tarefa de investigação a propor aos alunos, o professor pensa matematicamente sobre ela. Deste modo, o raciocínio matemático do professor (prévio à aula) assume uma importância fundamental. Durante a aula, questões, conjecturas e argumentos propostos pelos alunos podem levá-lo a considerar novos aspectos da tarefa, envolvendo-se em raciocínio matemático adicional. Ao prosseguir a investigação, o seu raciocínio matemático desenvolve-se de forma análoga ao raciocínio matemático dos alunos — colocando questões, formulando conjecturas, fazendo testes e validando resultados, processos característicos de uma actividade de investigação. Além disso, durante a aula, surgem também com frequência oportunidades de estabelecer relações entre o trabalho que se está a fazer e outros conceitos matemáticos ou extra-matemáticos — o que requer do professor cultura matemática e capacidade de decidir quais as ligações a estabelecer. É no decurso da realização de actividade investigativa na sala de aula que o professor pode constituir um modelo matemático para os seus alunos de modo mais genuíno (Lampert, 1990; Mason, 1996).

Observemos, em segundo lugar, a vertente didáctica. Antes da aula se iniciar, o professor estabelece a sua agenda, toma decisões relativamente ao que vai considerar como prioridades curriculares, à formulação concreta da tarefa e à forma de a apresentar aos alunos, bem como ao tipo de organização para a realização do trabalho. Com o início da aula, o professor passa a mover-se enquadrado por dois pólos, a que tem de dar uma atenção permanente: o currículo, que fixa os objectivos (fins) a atingir e a actividade, que respeita às acções (meios) a realizar para alcançar esses objectivos.

Os objectivos da aprendizagem envolvem duas dimensões (Christiansen e Walther, 1986) que estão sempre presentes, de modo explícito ou implícito. A primeira remete para o nível dos conteúdos matemáticos, cabendo ao professor explicar um conceito, recordar uma noção, ou estabelecer relações directas com outras ideias ou representações matemáticas ou extra-matemáticas. Reencontramos aqui um dos papéis “clássicos” do professor mas que, como indica Lampert (1990), pode ser desempenhado de uma maneira substancialmente diferente, contextualizado e integrado na realização de uma actividade significativa. Em vez de assumir sozinho este trabalho, o professor pode tentar que os alunos participem activamente, ajudando a explicar o conceito aos seus colegas, recordando ideias, representações e procedimentos já aprendidos. A segunda dimensão remete para o nível das compreensões sobre o que é aprender, sobre o que é a Matemática e o que é pensar matematicamente. Esta dimensão introduz um outro nível de actividade, avaliando, comentando ou suscitando o comentário dos alunos relativamente ao trabalho

---

realizado e às novas ideias que vão surgindo. Reencontramos aqui outro papel fundamental do professor, o de promover a capacidade crítica dos alunos, evidenciado, por exemplo, por Bishop e Goffree (1986).

As acções de ensino ao alcance do professor, ou seja, os meios que pode usar para atingir os objectivos pretendidos, traduzem-se essencialmente em três papéis fundamentais: desafiar, apoiar e avaliar. Estes papéis decorrem da lógica do desenvolvimento de qualquer actividade. O professor desafia os alunos com situações e questões de modo a envolvê-los em trabalho investigativo. Apoia-os, fazendo perguntas, comentários ou sugestões. Procura avaliar os progressos já realizados e eventuais dificuldades, recolhendo informação e, com base nisso, toma a sua decisão de prosseguir, alterar um ou outro aspecto do que se está a fazer, ou mudar para outra fase do trabalho.

As duas vertentes, matemática e didáctica, não são independentes entre si. Pelo contrário, cruzam-se, como se procura sugerir no quadro 1 e como, de resto, sublinha Shulman (1986). Todo o trabalho didáctico realizado pelo professor, requer uma compreensão da tarefa e das suas ligações matemáticas. O aspecto mais específico da sua actividade como professor da sua disciplina é o facto de se apoiar no pensamento matemático, antes, durante e depois da aula. No entanto, os papéis educativos do professor não se esgotam na Matemática — dependem igualmente de forma decisiva do modo como ele encara a educação, o currículo e a aprendizagem. Cinco dos papéis (desafiar, apoiar, avaliar, dar informação e promover a reflexão) situam-se nesta interligação, enquanto que o pensar matematicamente, embora possa ser despoletado por questões, comentários ou afirmações dos alunos, remete sobretudo para a esfera do ser matemático do professor.

Ao mesmo tempo que desempenha estes papéis, o professor necessita de criar um ambiente de trabalho onde os alunos se sintam à vontade a pensar, a argumentar e a expor as suas ideias sem medo de serem de imediato avaliados negativamente pelos seus colegas ou pelo professor. Precisa também de encontrar o modo certo de apoiar os alunos, procurando que não desistam perante as dificuldades mas não lhes dando indicações que esvaziem a tarefa de desafio. Tem igualmente de criar um conjunto de normas e rotinas de trabalho que estimulem a capacidade dos alunos cooperarem no seio do grupo — contribuindo e aproveitando as contribuições dos outros — e participarem em discussões colectivas — argumentando e prestando atenção aos argumentos dos outros. Necessita ainda que os alunos compreendam que também podem formular as suas próprias questões e conjecturas, testá-las e justificá-las, assumindo-se como autoridade matemática. A realização de aulas em que os alunos se envolvem em actividade investigativa mobiliza, por isso, importantes aspectos de conhecimento profissional do professor. Em especial, requer um conhecimento

matemático atento aos processos implicados numa investigação e multifacetado, integrando conceitos e áreas muito diversas. Requer, igualmente, um conhecimento didáctico capaz de desencadear e gerir a actividade dos alunos, proporcionando aprendizagens significativas tanto no plano dos conceitos e técnicas, como das capacidades, valores e atitudes.

A presente investigação, para além de caracterizar alguns aspectos dos papéis e do conhecimento profissional do professor, permite também colocar novas questões que poderá ser interessante tentar explorar. Consideramo-las agrupadas segundo quatro áreas.

A primeira delas prende-se com a realização de tarefas (a) de investigação de natureza diferente — por exemplo, de cunho acentuadamente geométrico, (b) onde se dê maior expressão à fase de justificação e validação de resultados, (c) que, sem ser propriamente de investigação, partilhem com estas muitas das suas características — como a modelação de situações extra-matemáticas, ou (d) explicitamente orientadas para a avaliação dos alunos relativamente ao seu desempenho na actividade investigativa. Em todas estas situações cabe perguntar se os papéis desempenhados pelos professores são essencialmente os mesmos ou se encontramos alterações significativas.

Uma segunda ordem de questões remete para a possibilidade de caracterizar estilos diversos relativamente ao modo de conduzir na aula actividades de investigação por professores com experiência neste tipo de trabalho. Será possível relacionar esses estilos com as suas concepções em relação à Matemática, ao currículo, à aprendizagem e à instrução? Para professores já em serviço mas com menos experiência de trabalho investigativo, quais as dificuldades mais salientes em assumir os papéis aqui referidos? Como se relacionam essas dificuldades com as suas concepções? E para candidatos a professores dos cursos de formação inicial, quais as suas dificuldades em assumir estes papéis? Como é que essas dificuldades podem ser ultrapassadas por candidatos a professores e por professores já em serviço?

Um terceiro grupo de questões que também se podem colocar referem-se a aulas de alunos de outros níveis etários (1º e 2º ciclos e ensinos secundário e superior) ou com características especiais. Que alterações se verificam na dinâmica da aula quando os alunos demonstram pouca adesão ao trabalho investigativo em Matemática? Que estratégias pode o professor adoptar para enfrentar esse tipo de situações? É natural que novas questões surjam à medida que progrida a investigação sobre os processos de raciocínio, as dificuldades e as atitudes dos alunos na realização de trabalho investigativo, um domínio também pouco desenvolvido.

As tarefas de investigação podem ser propostas pelo professor, depois de as ter devidamente preparado em casa. Mas a actividade investigativa também pode surgir

---

espontaneamente na aula, a partir de situações de trabalho prático e de discussões amplamente participadas pelos alunos. Isto remete, finalmente, para um quarto tipo de questões. O que é necessário para que isso aconteça? Em cada nível de ensino, de que modo se podem articular momentos de trabalho investigativo com outros momentos, de forma a concretizar equilibradamente os diversos objectivos curriculares?

Nesta investigação demos sobretudo atenção aos papéis desempenhados pelo professor no decorrer da aula. Não convém esquecer, no entanto, que o seu trabalho se inicia muito antes, no estabelecimento das prioridades curriculares, na exploração e selecção das tarefas, no diagnóstico das capacidades e interesses dos alunos e na análise do caminho já percorrido e que esse trabalho continua depois da aula, na avaliação da actividade realizada, conduzindo-o a definir novas prioridades, tarefas e modos de trabalho com os alunos. No seu conjunto, a investigação realizada confirma mais uma vez a pertinência da actividade investigativa na aula de Matemática salientando, contudo, a complexidade do papel do professor. Evidencia, igualmente, as potencialidades do trabalho colaborativo, envolvendo professores em exercício e investigadores no estudo dos fenómenos da sala de aula decisivos para a aprendizagem desta disciplina.

## Notas

<sup>1</sup> Este trabalho foi realizado no âmbito do Projecto Matemática para Todos: Investigações na sala de aula (1995-1999), do Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

<sup>2</sup> Em inglês, *pedagogical content knowledge*, expressão que é, por vezes, traduzida por “conhecimento pedagógico do conteúdo”. Notamos, no entanto, que a noção de didáctico aponta precisamente para esta interligação entre a matéria e o processo de ensino.

## Referências

- Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. Em A. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. von Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer.
- Bishop, A. e Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. Em B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Brown, S. e McIntyre, D. (1993). *Making sense of teaching*. Buckingham: Open University Press.
- Caraça, B. (1958). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa.

- Chapman, O. (1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 32(3), 201-228.
- Christiansen, B. e Walther, G. (1986). Task and activity. Em B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Clandinin, D. J. (1986). *Classroom practice: Teacher images in action*. Londres: The Falmer Press.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Londres: Croom Helm.
- Gimeno-Sacristán, J. (1991). Consciência e acção sobre a prática como libertação profissional dos professores. Em A. Nóvoa (Ed.), *Profissão professor* (pp. 61-92). Porto: Porto Editora.
- Kline, M. (1970). Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*, 77, 264-282.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.
- Leinhardt, G., Putnam, R. T., Stein, M. K. e Baxter, J. (1991). Where subject knowledge matters. Em J. Brophy (Ed.), *Advances in Research on Teaching* (pp. 87-113). Greenwich: JAI Press.
- Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. Em P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Eds.) *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 15-24). Lisboa: Projecto MPT e APM. (publicado originalmente em inglês em 1991).
- Pehkonen, E. (Ed.). (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. Helsínquia: DTE, Universidade de Helsínquia.
- Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. Em P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projecto MPT e APM. (publicado originalmente em francês em 1908)
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.
- Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. Em J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII* (Vol. I, pp. 195-210). Lisboa, Portugal.
- Ponte, J. P. (1995). Saberes profissionais, renovação curricular e prática lectiva. Em L. Blanco e V. Mellado (Eds.), *La formación del profesorado de ciencias y matemática en España y Portugal* (pp. 187-202). Badajoz: Universidade de Extremadura.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. e Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. Em P. Abrantes, J. Porfirio e M. Baía (Eds.), *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L., Oliveira, H. (1999). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Guimarães, H., Leal, L. C., Canavarró, P. e Abrantes, P. (1997). *O conhecimento profissional dos professores de matemática: Relatório final do projecto "O saber dos professores – concepções e práticas"*. Lisboa: DEFCUL.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Em D. A. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). Nova Iorque: Macmillan.
- Schön, D. A. (1983). *The reflective practioner: How professionals think in action*. Aldershot Hants: Avebury.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

- Wood, T. (1995). *Whole class interactions as the negotiation of social contexts withing which to construct mathematical knowledge*. Manuscrito não publicado.
- Wood, T. (1996). Events in learning mathematics: Insights from reaserch in classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 30(1), 85-105.

---

*João Pedro da Ponte, Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Endereço electrónico: jponte@fc.ul.pt.*

*Hélia Oliveira, Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Endereço electrónico: helia.oliveira@fc.ul.pt.*

*Lina Brunheira, Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Endereço electrónico: lbrunheira@fc.ul.pt.*

*José Manuel Varandas, Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Endereço electrónico: jose.varandas@fc.ul.pt.*

*Catarina Ferreira, Escola Secundária Bramcaamp Freire, Pontinha. Endereço electrónico: catarina.ferreira@mail.telepac.pt.*

*RESUMO. Este estudo, realizado por uma equipa colaborativa integrando professores e investigadores, tem por objectivo caracterizar os papéis do professor em aulas onde os alunos realizam investigações matemáticas, e indicar os aspectos do conhecimento profissional mais relevantes. A metodologia é qualitativa, baseada na observação de situações de aula na realização de uma tarefa que se presta a ser abordada de diversas perspectivas e com diversos graus de sofisticação matemática. A recolha de dados foi realizada através de registos vídeo e audio e notas de observação, a partir dos quais foram seleccionados diversos episódios para uma análise aprofundada. O estudo evidencia seis papéis fundamentais do professor no decorrer de uma aula em que os alunos realizam este tipo de trabalho. Um deles é pensar matematicamente em frente dos seus alunos, e decorre da própria natureza aberta da tarefa. Dois outros papéis, dar informação e promover a reflexão, decorrem de duas dimensões do currículo, a dos objectivos gerais e a dos conteúdos particulares. E, finalmente, três outros papéis, desafiar, apoiar e avaliar, decorrem da lógica do desenvolvimento de qualquer actividade. O estudo evidencia ainda diversos aspectos do conhecimento profissional do professor, nomeadamente o conhecimento matemático, em especial relativo à tarefa de investigação, e o conhecimento didáctico, relativo à organização do trabalho e à condução da actividade dos alunos.*

*ABSTRACT. This study, undertaken by a collaborative team of teachers and researchers, aimed to characterize the roles of the teacher in classes in which students are involved in doing mathematical investigations and to point out the most relevant aspects of the required professional knowledge. The methodology is qualitative, based in the observation of classroom situations concerning a task that may be approached from different perspectives and with several degrees of mathematical sophistication. Data collection was carried through video and audio recordings and observation notes. Several episodes were selected for an in-depth analysis. The study stresses six fundamental roles of the teacher in a class when students are doing this kind of work. One, is*

*thinking mathematically in front of the students, and follows from the open nature of the task. Two other roles, to provide information and to promote reflection, are related to two dimensions of the curriculum, the general objectives and the specific content topics and procedures. And, finally, three other roles, challenge, support, and evaluate, follow from the logic of the development of any activity. The study also points to several aspects of the teacher's professional knowledge, namely mathematical knowledge, in special related to the task, and didactical knowledge, concerning the organization of the work and the direction of the students' activity.*