Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje[1]

Isabel Escudero
Victoria Sánchez
Universidad de Sevilla

En los últimos años, se ha incrementado notablemente el número de investigaciones que se han ocupado de la relación entre el conocimiento y la práctica del profesor de Matemáticas. Con objetivos muy distintos y enfatizando en ocasiones unos aspectos frente a otros, estos estudios se han enfocado desde muy distintas perspectivas. Algunas de éstas tienen un carácter más cognitivo, centrándose en aspectos tales como la relación entre el conocimiento de Matemáticas de los profesores y aspectos de la planificación y enseñanza de la lección (Stein et al., 1990; Leinhardt et al., 1991), la influencia de las creencias y concepciones en las prácticas instruccionales (Putnam et al., 1992), o en la influencia de diferentes dominios del conocimiento del profesor en relación con la práctica (Ball, 1991; Aubrey, 1996; Escudero y Sánchez, 1999; Llinares, en prensa). En otros trabajos, realizados en un contexto de renovación curricular, se aborda la relación entre concepciones y prácticas de los profesores destacando este último aspecto y tratando de comprender su origen y desarrollo, y la influencia que pueden ejercer factores como las dinámicas colectivas (Ponte y Canavarro, 1994).

Otras perspectivas se apoyan en el análisis empírico de la interacción en el aula y del complejo conjunto de relaciones que se genera entre profesor-alumnos-contenido, estudiando las diferencias en la presentación de la materia por parte de los profesores, colocando el énfasis en la relación profesor-contenido (Bromme y Steinbring, 1994; Steinbring, 1997) o analizando los microprocesos estables y encubiertos ("rutinas" o "patrones de interacción") que tienen lugar en las interacciones profesor-alumnos (Voigt, 1985, 1994). Algunos trabajos adoptan un carácter más sociocultural, partiendo de una perspectiva de la enseñanza que "implica comprender y negociar significados a través de la comunicación". Estos trabajos han tratado de describir e interpretar la actividad de los profesores, buscando regularidades en las interacciones que desarrollan profesores y alumnos en la práctica diaria (Wood, 1995).

Todo lo anteriormente mencionado nos ofrece un marco en el que situar nuestra investigación, que se centra en el estudio de la relación existente entre el conocimiento profesional y la práctica instruccional del profesor de matemáticas de Secundaria, poniendo el énfasis en dicha relación. Además, esta relación la consideramos en contextos específicos, concretamente la enseñanza del tema (unidad didáctica) Semejanza a alumnos de 3º y 4º de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO; 14-16).

Con respecto a la semejanza, éste ha sido uno de los temas poco destacados en los currículum escolares en las últimas décadas. Sin embargo, en la actualidad su importancia ha aumentado en los nuevos diseños curriculares que han surgido a raíz de la Reforma del Sistema Educativo de nuestro país. Por otro lado, un análisis epistemológico del tema de semejanza en general y de la homotecia en particular muestra que hay una evolución del concepto desde una visión intrafigural, que recogían los Elementos de Euclides, hasta la consideración de la homotecia (y de la semejanza) como una transformación geométrica vista como objeto matemático. Un obstáculo en la evolución de este concepto ha sido la relación entre los aspectos figurativo y numérico. La articulación de ambos registros y el peso que tienen cada uno de ellos en el tratamiento del tema (Lemonidis, 1990a, 1990b, 1991) es una de las componentes importantes que se deben tener presentes a la hora de considerar la semejanza como objeto de enseñanza aprendizaje.

Marco teórico

Siguiendo a Simon y Tzur (1999), en nuestro trabajo hemos adoptado una forma de entender el término "práctica de los profesores" considerando

> no sólo todo que los profesores hacen que contribuye a su enseñanza (planificar, valorar, interaccionar con los estudiantes) sino también todo lo que los piensan, conocen y creen sobre lo que ellos hacen. En adición, las intuiciones de los profesores, destrezas, valores y sentimientos sobre lo que hacen son parte de su práctica. De este modo, nosotros vemos la práctica de los profesores como un conglomerado que no puede ser entendido mirando partes separadas del todo (Simon y Tzur, 1999, pp. 253-254).

No obstante, la complejidad del análisis empírico de la interacción en el aula y del complejo conjunto de relaciones que se generan entre Profesor - Alumno - Contenido, hace necesario en ocasiones colocar el énfasis en algún aspecto de la relación. En nuestro caso, sin dejar de tener presentes las demás relaciones, hemos centrado nuestra atención en la relación Profesor - Contenido.

Por otro lado, en nuestra investigación entendemos el conocimiento profesional del profesor de matemáticas que interviene en dicha práctica como "una construcción personal producto de la elaboración cognitiva personal en la acción profesional, que lleva a la integración cognitiva de diferentes dominios de conocimiento" (García, 1997, p. 212). Para esta autora este conocimiento profesional "se informa y se apoya en distintas y variadas áreas: conocimiento de matemáticas, de contenido pedagógico específico de las matemáticas, del curriculum, etc." (p. 50). Esta forma de entender el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas es un marco de referencia en el que situar nuestra investigación en relación a ese aspecto. El trabajo de esta autora, y otros desarrollados dentro de nuestro grupo de investigación (Llinares, 1996; 1997) nos han aportado además información en relación a la integración de las creencias y el contenido de diferentes componentes del conocimiento en la caracterización de la práctica, y la identificación de diferentes dilemas de enseñanza a los que se enfrentan los profesores como una característica de los procesos de cambio, en contextos de innovación curricular. También hemos tenido en cuenta estudios como los desarrollados por Stodolsky (1988) y Leinhardt (1989). Siguiendo a estos autores, consideramos que las lecciones de matemáticas no son homogéneas con respecto a la actividad del profesor o del estudiante, sino que están divididas en partes determinadas (tales como trabajo de casa, presentación, práctica monitorizada, etc.) reconocibles tanto por los estudiantes como por el profesor, en las que se realizan determinadas actividades específicas con un objetivo prefijado, denominadas "segmentos" o estructuras de actividad, entendiendo que "estas partes sirven a diferentes e importantes funciones y cada segmento requiere diferentes formas de acciones de los estudiantes y del profesor" (Leinhardt, 1989, p. 54).

Para nosotros, los trabajos anteriormente mencionados son un punto de partida para la conceptualización y el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Además, nos permiten describir y analizar la relación existente entre los diferentes aspectos del conocimiento profesional, con respecto a la organización de la semejanza del profesor como objeto de enseñanza aprendizaje, y los segmentos de enseñanza que caracterizan su práctica, así como el papel que juega ese conocimiento en las regularidades apreciadas en su enseñanza.

Por otro lado, en nuestro estudio analizamos la organización del contenido matemático en las acciones previamente identificadas en términos de:

A) Forma de considerar la semejanza como:

• *Relación intrafigural*. Es un tratamiento en el que se estudian propiedades concernientes a dos configuraciones, de tal forma que, aunque se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de la otra, está ausente toda idea de transformar una figura en otra.

• *Transformación geométrica vista como útil*. Es decir, la transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se suele utilizar esta visión de la semejanza para resolver algunos problemas geométricos.

• *Transformación geométrica vista como objeto matemático*. En este tratamiento se busca la transformación resultante de la composición de dos o más transformaciones. En particular, la definición de la semejanza que suele darse en esta visión es la transformación resultante de la composición de dos transformaciones (una homotecia y un movimiento). (Lemonidis, 1990a, 1991).

B) Registros de expresión considerados. Es decir, las diferentes posibilidades semióticas de presentar el contenido: lingüístico, simbólico, figurativo, gráfico, etc. (Guzmán, 1990 citado en Lemonidis, 1991). En nuestro caso consideraremos los registros *figurativo* (ligado al sistema perceptivo visual) y *numérico o simbólico* (que conlleva números y letras, además de signos y operaciones).

Método

El episodio que aquí presentamos forma parte de una investigación más amplia de carácter interpretativo. En su diseño se utilizaron grabaciones en vídeo de una unidad didáctica completa (las nueve lecciones que formaban el tema elegido), observaciones del aula y entrevistas semiestructuradas (entrevista de planificación, entrevistas anteriores y posteriores a cada grabación y una entrevista final). Las grabaciones y las entrevistas fueron transcritas en su totalidad. Desde las entrevistas se describió la agenda del profesor. En relación a la estructura general de la lección, a partir de las transcripciones de las grabaciones y de la visión de los videos, identificamos distintos segmentos de enseñanza en el sentido de Leinhardt anteriormente mencionado (Leinhardt, 1989). Para el análisis de las transcripciones obtenidas se siguió un proceso en dos etapas. En la primera de ellas se utilizaron las grabaciones de los videos y las notas tomadas durante las observaciones de clase. A partir de las transcripciones y de la visión de los videos se identificaron segmentos y se caracterizaron atendiendo a: las nociones o tópicos matemáticos que se daban y las acciones concretas que se desarrollaban. El esquema analítico así generado nos permitió caracterizar diferentes conjuntos de acciones en la gestión del profesor del contenido matemático, que nos permitieron apreciar la estructura particular de cada uno de estos segmentos.

Así, por ejemplo, en los segmentos de presentación identificamos, entre otros, lo que denominamos uso de un ejemplo para llegar a una definición, el enunciado de una propiedad, identificación de un teorema, etc., serie de acciones encadenadas caracterizadas por la intervención constante del profesor y alumnos; explicación a través de un ejemplo para llegar a la definición, enunciado de una propiedad, etc., con una intervención mínima o nula de los alumnos; explicación a partir de hipótesis, con las mismas características con respecto a la relación profesor/alumno que el caso anterior, pero en la que en lugar de utilizar un ejemplo concreto se enuncian hipótesis, aunque no se sigue una lógica-deductiva para llegar al resultado buscado; explicación para completar previa al enunciado, definición, teorema, etc., en la que el profesor añade lo que considera que falta para introducir el enunciado, la definición el teorema, etc. La triangularización de datos nos permitió además acceder a las justificaciones/razones que el profesor proporcionaba de sus acciones.

Todo ello nos ha permitido, por un lado, apreciar diferentes regularidades en estructura y contenido, características de este profesor en el tema y contexto considerados y, por otro, describir y analizar el contenido de las distintas componentes del conocimiento profesional que intervienen en los distintos segmentos identificados en la situación estudiada. La forma de presentar en la clase un contenido matemático inicialmente previsto por el profesor y cómo el profesor gestiona ese contenido matemático durante la enseñanza (lo previsto en su planificación y lo no previsto, surgido de la interacción del aula), puede revelarnos el papel desempeñado por las distintas componentes del conocimiento del profesor, y lo consideramos como un espacio adecuado para obtener información sobre la relación entre el conocimiento profesional y la enseñanza de las matemáticas.

A continuación, pasamos a concretar lo anteriormente expuesto en el desarrollo de un caso particular. En concreto, aquí vamos a describir y caracterizar la estructura de un segmento de presentación (introducción de la razón entre volúmenes de cuerpos semejantes), cómo se organiza el contenido matemático dentro de las acciones que configuran la estructura de dicho segmento, la relación existente entre acciones/organización del contenido y las razones/justificaciones aportadas por el profesor.

Un episodio en un aula: El tema: “semejanza de figuras”

El profesor participante en el episodio que a continuación vamos a desarrollar tenía una experiencia docente de once años en los niveles de 14-18 años. El mismo año en que finalizó su licenciatura en Matemáticas empezó a trabajar con alumnos de estos niveles, accediendo dos años después por oposición al cuerpo de profesores numerarios de Enseñanza Secundaria. Estaba muy preocupado por mejorar su propia formación, participando en diferentes cursos para profesores, formando parte de grupos de trabajo y seminarios permanentes. Su predisposición a participar en toda clase de iniciativas que pudiesen aportarle alguna mejora en su labor profesional fue la razón principal por la que se prestó a colaborar en este estudio. El centro en el que se desarrolló este estudio es un Instituto de Enseñanza Secundaria (IES) de los primeros que se crearon en Sevilla para implantar la Reforma de las Enseñanzas Medias. En este centro, ubicado en un barrio periférico con un nivel socioeconómico bajo, llevaba ocho años trabajando y durante tres de ellos impartiendo el nivel donde realizamos la experiencia (4º de ESO). En este nivel, el profesor impartía dos cursos que no tenían ninguna característica especial. Elegimos aquel aula que nos permitía un mejor desarrollo del proceso de recogida de datos (facilidad en la realización de las entrevistas anteriores y posteriores a la grabación). Los estudiantes de ese aula procedían en su mayoría de barrios del entorno del centro y de distintos tipos de enseñanza, por lo que los grupos de alumnos eran bastante heterogéneos tanto en su formación previa como en sus edades (comprendidas entre los 15 y los 18 años).

El contexto general en el que el profesor realizaba su trabajo profesional estaba influido por las indicaciones de la Reforma de las Enseñanzas Medias y por las orientaciones sobre la secuenciación del contenido propuesta por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía (Junta de Andalucía, 1992). El contenido de la enseñanza fue la semejanza. Este tema aparece en las orientaciones para la secuenciación de contenido propuesta por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía tanto en el primer ciclo (12-14) como en el segundo ciclo (14-16) de la ESO (Junta de Andalucía, 1992). En la preparación del tema escogido no existió ninguna intervención por parte de los investigadores, siendo para el profesor una lección más de todas las que van desarrollándose a lo largo del curso.

Acciones del profesor y organización del contenido matemático en un segmento de presentación

La unidad didáctica *Semejanza* estaba situada en la planificación del profesor después de *Figuras en el plano. Perímetros y áreas de figuras planas* y antes de

Trigonometría. En líneas generales, esta planificación se adaptaba a las orientaciones del Diseño Curricular Base de la Junta de Andalucía, y estaba aprobada en el Plan de Centro del Instituto de Enseñanza Secundaria de acuerdo con el Seminario de Matemáticas. El profesor estaba muy interesado en la geometría en general, y encontraba interesante dar la semejanza, ya que una de las cosas que echaba de menos en sus primeros años de formación era una deficiente preparación en geometría sintética .

En la planificación inicial de la unidad didáctica el profesor había secuenciado los contenidos del tema completo. Con ello ha optado por una determinada forma de secuenciar la semejanza, que se puede comparar con un tratamiento de la misma como relación intrafigural (Lemonidis, 1991). La definición de figuras semejantes que se da en este tratamiento es la "clásica" que procede de la geometría euclídea: "Dos polígonos son semejantes si y sólo si tienen sus ángulos homólogos iguales y sus lados correspondientes proporcionales". Además, la razón de semejanza se ha presentado primero como: "número que permite pasar de una figura a otra", y posteriormente como " k= l´/l ".

Comienza la lección. El profesor finalizó el día anterior resaltando que para pasar del perímetro de un polígono al de su semejante hay que multiplicar por k (análogo para las áreas multiplicando por k^2). Con una duración de 50 minutos, la lección que aquí presentamos es la cuarta dedicada al tema de la semejanza. El profesor la inicia colocando una transparencia sobre el retroproyector, con el título "Razón de perímetros de polígonos semejantes y razón de las áreas" (tal y como se muestra en la figura 1).

<u>RAZÓN DE LOS PERÍMETROS DE DOS POLÍGONOS SEMEJANTES</u>

La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.

$$\frac{\text{PERÍMETRO FIGURA 2}}{\text{PERÍMETRO FIGURA 1}} = K$$

<u>RAZÓN DE LAS ÁREAS DE DOS POLÍGONOS SEMEJANTES</u>

La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

$$\frac{\text{ÁREA FIGURA 2}}{\text{ÁREA FIGURA 1}} = K^2$$

Figura 1. Primera Transparencia.

Se dirige a la clase indicando que copien lo presentado en la transparencia. Algunos alumnos comentan en voz alta que eso ya se dijo el otro día, pero el profesor insiste en que "lo hablamos y lo dijimos, hicimos un ejemplo que pasaba ... pero si no lo pongo pues no lo copiáis y no lo tenéis en los apuntes ...". Con el enunciado de la propiedad, el profesor da por terminado un segmento de presentación iniciado el día anterior cuyo objetivo era la introducción de la razón de perímetros y áreas. La identificación del contenido de la transparencia como 'apuntes' se ve como algo habitual por parte del profesor y los alumnos. En el enunciado presentado (ver figura 1) se produce el paso de considerar la razón de semejanza como número por el que se multiplica, que era la forma en la que se había presentado el día anterior a considerarla como cociente. Lo mismo sucederá posteriormente en el caso de los volúmenes. Además, se da un carácter general a la 'fórmula' que expresa el cociente, destacándose el carácter procedimental del contenido matemático que aparece en los "apuntes" (lo que se va a utilizar en las tareas de aplicación).

La lección continúa. Los alumnos copian la transparencia mientras el profesor pasea por el aula. Cuando ve que la mayoría ha terminado se dirige a un grupo de alumnos y pide que construyan, con unos cubos de madera que antes de empezar la clase había colocado sobre una mesa, "una figura espacial" (no queda claro si cualquiera o el profesor le dice algo más). El profesor trata de iniciar así un nuevo segmento de presentación, que tiene como objetivo la introducción de la razón de volúmenes de cuerpos semejantes.

En ese momento interviene un alumno, que refiriéndose a la expresión *Área figura 2 /Área figura 1 = k* ^{2} de la transparencia, pregunta sobre las fórmulas que hay para calcular el *Área*. El profesor inicia una serie de acciones que configuran una explicación/aclaración, con el objetivo de relacionar la fórmula que se utiliza con el tipo de polígono:

> Las fórmulas según el tipo de polígono que sea, ¿no?, tú sabes calcular las áreas de un polígono cualquiera, ¿no? (*Alumno*: Sí, claro.).. Pues entonces tú calculas el área de uno ...imagínate que has de calcular la de éste (señalando dos polígonos irregulares dibujados en la pizarra, procedentes de la clase anterior) ... pues si tú sabes el valor de la constante de proporcionalidad k, si tú calculas el área de uno de ellos, ya no tienes que aplicar la fórmula para éste otro ....

El profesor parece enfatizar más la relación $A_2/A_1=K^2$ que la manera de calcular el área de un polígono, pero los alumnos comentan las dificultades de encontrar la fórmula para el área en el caso de que el polígono sea irregular. Hablan todos al tiempo sobre como dividir los polígonos pintados en la pizarra en otros conocidos. En ese momento el profesor, bien sea porque no ha quedado satisfecho por no haber completado el segmento de presentación del día anterior en su forma prevista en relación con el contenido (lo que bajo su perspectiva puede ser el origen de las dificultades), o por los incidentes que se están desarrollando en el aula, inicia una serie de acciones. Estas acciones, que hemos caracterizado como explicación a través de un ejemplo, tienen como objetivo volver a llegar al enunciado que aparece en la transparencia con lo que, en cierto modo, se produce una vuelta hacia atrás. Dibuja sobre la pizarra dos triángulos rectángulos semejantes, e identifica como 3, 4 y 5 el valor de los lados del triángulo más pequeño de los dibujados, indicando: "... y ahora otro más grande, y la constante es igual a 1,5, ¿vale?, ¿cuánto miden los lados del mayor?". Esta forma de actuar (estilo interactivo centrado en clase entera) es habitual en el profesor.

Hay murmullos en el aula, y no se entienden claramente las respuestas. El profesor comienza en la pizarra a realizar los cálculos necesarios hasta obtener los valores de los dos lados que faltan. A partir de ahí, calcula los perímetros de ambas figuras, y destaca la relación "... guardan esta misma relación ..". Pide a un alumno "multiplica el primero, el 12 por 1,5 ...¿Cuánto te da?". El alumno no contesta. Otro alumno proporciona la respuesta correcta, pero otros siguen planteando preguntas. Después de un intercambio de preguntas y aclaraciones entre profesor y alumnos, el profesor concluye explicitando su objetivo "esto es un ejemplo de aplicación ... de comprobación de que esto (refiriéndose a la fórmula de la transparencia) se verifica", pasando a poner de manifiesto los pasos que ha seguido en esa aplicación:

> Tengo un triángulo, se que voy a ampliarlo a la constante 1,5, construyo otro, le calculo los lados multiplicándolos y después compruebo que el perímetro me sale exactamente multiplicado por 1,5.

Como hemos visto en los párrafos anteriores, el profesor, ante las dificultades de los alumnos, retrocede y vuelve a introducir de nuevo la razón de perímetros con un conjunto de acciones diferentes (explicación a través de un ejemplo). Nos planteamos ahora que cambios hay en relación al contenido matemático (¿qué destaca ahora el profesor?). El profesor en la explicación a través de un ejemplo, para llegar de nuevo al enunciado de la propiedad, pasa de la figura de un polígono irregular cóncavo que había utilizado el día anterior (que es lo que le había originado dificultades con el cálculo del área) a utilizar un triángulo rectángulo. A los lados del triángulo se les da como valores 3, 4 y 5, tomándose como razón un número decimal (1,5). Por otro lado, hace explícito a los alumnos que su objetivo era poner un ejemplo como comprobación de que la fórmula de razón de perímetros se verifica, e indica que lo hecho con perímetros es análogo con áreas.

Se aprecia en lo anterior la visión de la semejanza como relación intrafigural, junto con un tratamiento numérico de perímetros y áreas de figuras semejantes (potenciación del registro numérico en el sentido de que se dibuja la figura, se asignan valores numéricos a los lados y se pasa a trabajar en el campo numérico exclusivamente). Además con la figura y los valores numéricos elegidos el profesor trata de simplificar al máximo los cálculos de perímetros y áreas, pero introduce una razón decimal tratando de que los alumnos vean que la comprobación también es válida con este tipo de números (hasta ahora los más utilizados habían sido números naturales).

La pregunta de otro alumno sigue poniendo de manifiesto las dificultades del paso de la relación de semejanza en los términos expresados anteriormente (número por el que se multiplica) a relación existente entre dos perímetros conocidos ("¿Y si nos dan el perímetro como en el ejercicio qué hay que hacer?"). Esto origina una respuesta del profesor en la que indica que

> Hemos comprobado que si yo multiplico el del pequeño por 1,5 me da el perímetro del grande ... entonces ya no tengo que calcular el segundo (perímetro) sumando sus lados, sino que multiplico directamente por la constante ....

Con esta intervención el profesor trata de resaltar la utilidad de la fórmula.

La interferencia de las dificultades. Los alumnos siguen preguntado. En ese momento, bien sea porque la información que el profesor ha ido incorporando, tanto del día anterior como de la situación actual del aula, le indica que la explicación a través de un ejemplo no ha sido suficiente, o porque ve dificultades en los alumnos en el paso de lo particular (k como número por el que se multiplica dados los lados en un ejemplo) a lo general (k como relación entre dos lados cualesquiera), dirigiéndose a la clase indica que "vamos a pararnos un momentito y vamos a ver lo que hemos visto hasta ahora ..." (con lo que establece un nuevo objetivo). A partir de aquí el profesor dibuja sobre la pizarra dos polígonos irregulares convexos semejantes (nombrados en general sus lados) y comienza una serie de acciones, que hemos caracterizado como una <u>explicación a partir de hipótesis generales</u>. A continuación mostramos esas acciones y el contenido matemático que las caracteriza:

- dibuja una nueva figura
- **Generalización de la figura** a polígonos irregulares convexos semejantes (nombrados en general sus lados).
- repite las condiciones de la semejanza: ángulos homólogos iguales, lados correspondientes proporcionales. Indica que esto último quiere decir que al dividir lados homólogos tiene que dar la misma cantidad, esa es k
- **Condiciones de la semejanza** como relación intrafigural.
- hace notar que se puede pasar de un lado a otro multiplicando por k, y que si se dan los lados se puede calcular la constante k dividiendo estos
- **Variación en la expresión l'/l = K** (datos: l y k, incógnita: l'; datos: l y l', incógnita: k).
- una vez conocidos todos los lados, pasa al cálculo de los dos perímetros
- **Cálculo de perímetros**.
- a partir de los perímetros, indica que se puede comprobar la relación: "el perímetro del grande es k por el otro"
- **Comprobación** de que P'=k·P.
- a continuación, señala las posibilidades que pueden darse al utilizar la fórmula P'/P=k.
- **Variación en la expresión P'/P = K** (datos: P y k, incógnita: P'; datos: P y P', incógnita: k).
- de manera análoga señala que 'el área del grande es k^2 por el área del otro', repitiendo lo anterior para el caso de $A'/A = k^2$.
- **Generalización para áreas**.

Por último, termina la explicación destacando que en las tareas de aplicación no se va a disponer de todos los datos sino "los suficientes para calcular los demás".

Vuelve así a ponerse de manifiesto la misma visión de la semejanza anteriormente mencionada, junto con un paso a la generalización caracterizado por la elección de un polígono de carácter más general y el empleo de variables (potenciación del registro numérico-simbólico). Se enfatiza la utilidad de la fórmula como procedimiento que permite prescindir del cálculo del perímetro de la figura semejante a partir de los lados (o del área de la figura semejante).

La lección finaliza. A continuación, el profesor vuelve a su objetivo inicial (introducción de la razón de volúmenes). Se dirige al resto de los alumnos y muestra el cubo que han construido el grupo de alumnos con cubitos de madera:

> hemos definido que eran figuras semejantes ... pero en el plano. También se puede hacer en el espacio, todo el mundo sabe ... le he dicho a Ana que hiciera una figura espacial y ha hecho un cubo ... ¿de arista cuánto?.

Una alumna del grupo contesta que tres. El profesor pide ahora que construyan un cubo semejante, siendo la constante dos. Dirigiéndose al resto de la clase, indica: "Id calculando el volumen ese". A partir de este momento, mientras que el grupo de alumnos realiza una construcción manipulativa, el resto de la clase inicia los cálculos del volumen del cubo de arista 3.

Mientras el grupo de alumnos está haciendo el cuerpo semejante, el profesor va planteando preguntas para que el resto de la clase vaya calculando el volumen de dicho cuerpo, y el cociente entre ambos volúmenes: "pues hacemos una cosa, id haciendo el cociente entre los volúmenes ... el cociente es la división". Un alumno responde que el cociente da 8. El profesor pregunta por la relación que existe entre 8 y 2. El otro grupo de alumnos sigue un rato más construyendo el cubo semejante al primero construido. Cuando por fin dan por terminada la construcción el profesor interviene de nuevo, señalando a los dos cuerpos: "¿Estáis de acuerdo? ... ¿está bien?, ¿esto es un cubo?". Con ello, da por terminada la parte manipulativa y, a continuación, pide a una alumna que salga a la pizarra y comience a hacer los cálculos de los dos volúmenes y el cociente de ambos. Al final, en la pizarra aparece escrito:

$$V = 3^3 = 27 \text{ cm}^3$$
$$V = 6^3 = 216 \text{ cm}^3 \quad 216{:}\ 27 = 8, \quad K = 2$$

Todas estas acciones han ido configurando lo que hemos señalado anteriormente como <u>uso de un ejemplo para llegar</u> a enunciar una propiedad, dar una definición, etc. En el contenido matemático de estas acciones se aprecia como el profesor trata de buscar coherencia entre la representación con material manipulativo (el uso de cubos para la introducción de volúmenes es una de las recomendaciones explícitas que aparece en las orientaciones de los documentos oficiales) y la basada en los cálculos numéricos correspondientes. Parece como si pretendiese utilizar los dos sistemas de representación, pero no lograse integrar el paso de una representación a otra, vinculándose más bien el material manipulativo a una comprobación figural y como medio de potenciar la visualización espacial de los alumnos, aunque todo esto se asocia a una figura muy concreta (el cubo).

Después de la intervención de la alumna el profesor pasa a dibujar en la pizarra dos cubos de aristas 3 y 6 respectivamente con la razón K = 2, y escribe lo que se muestra en la figura 2.

$$V_2 / V_1 = 216/27 = 8 = 2^3 = K^3$$

$$V_2 = K^3\, V_1$$

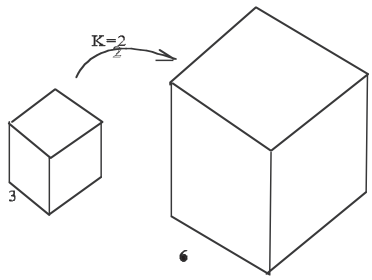

Figura 2. Lo que el profesor escribe en la pizarra.

Al mismo tiempo que inicia una serie de acciones que hemos caracterizado como <u>explicación para completar previa a dar un enunciado,</u> en la que, apoyándose en el dibujo de los dos cubos (figura 2), el profesor repite lo hecho por la alumna pero destacando lo que él considera relevante e iniciando el paso a lo general:

- paso de 3 a 6, multiplicando por k igual a 2
- cálculo de volúmenes, y a partir de ahí, el cociente de los volúmenes,
- el (volumen) grande entre el pequeño (lo que ha hecho la alumna) ha dado 8,
- ocho es dos al cubo, que es k al cubo ($V_2/V_1 = k^3$)

Como en el caso de los perímetros y áreas, termina destacando que otra expresión sería

> que uno de los volúmenes es k al cubo ... por el otro ...luego me pasa lo mismo, yo no tengo que construir la figura, ni calcularla, ni siquiera el volumen, cojo el volumen del chico ... que en la operación y los números son más chicos ... y lo multiplico por la constante al cubo, ¿vale?

A continuación, el profesor coloca una transparencia en el retroproyector con el contenido que se muestra en la figura 3 y, señalando la transparencia, indica que “lo que acabamos de hacer es esto”. En ese momento un alumno pregunta si eso es ya lo que hay que copiar.

RAZÓN DE VOLÚMENES DE DOS CUERPOS SEMEJANTES

La razón de los volúmenes de dos cuerpos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza:

$$\frac{\text{VOLUMEN CUERPO 2}}{\text{VOLUMEN CUERPO 1}} = K^3$$

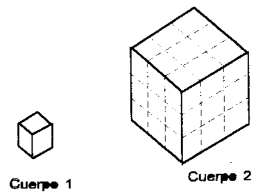

Figura 3. Segunda Transparencia.

Con el contenido matemático de estas acciones el profesor trata de pasar del caso particular utilizado al caso general, potenciando el registro numérico-simbólico, y pasando de considerar la razón de volúmenes como "número por el que se multiplica ($V_2= k^3V_1$)" (figura 2) a su consideración como "cociente ($V_2/V_1 = k^3$)" (figura 3). Además, la presentación numérica coincide con lo realizado en la presentación de perímetros y áreas, volviéndose a resaltar el papel de la fórmula como procedimiento que permite prescindir del cálculo del volumen del cuerpo semejante a partir de sus medidas.

Una visión global de lo sucedido. A lo largo del análisis realizado en este apartado hemos ido caracterizando la estructura del segmento de presentación mostrado. En esta estructura, se aprecian diferentes conjuntos de acciones encadenadas. El contenido matemático de las acciones va configurando la serie de pasos que llevan al enunciado. (Esta característica de este segmento de presentación la hemos encontrado a lo largo de otros segmentos de presentación de la unidad didáctica completa en los que se pretendía la introducción de una definición/ teorema / propiedad etc., por lo que la podemos considerar como una regularidad apreciada en la práctica de este profesor).

Sin embargo, no todas las series de acciones tienen las mismas características, variando en la mayor o menor intervención de los alumnos, la utilización o no de un ejemplo concreto y la explicitación inicial o no de éste, entre otros aspectos (diferentes conjuntos de acciones que hemos identificado como 'uso de un ejemplo para llegar a', 'explicación para llegar a', etc.). También se pueden identificar algunas características asociadas a un conjunto de acciones determinado. Así, en el caso del 'uso de un ejemplo' mostrado en el episodio aparece un segundo conjunto de acciones con el énfasis en hacer procedimental lo validado (explicación para completar previa al enunciado).

Pero además, si consideramos globalmente los conjuntos de acciones, surgen otros aspectos que nos llevan a apreciar otras regularidades, surgidas en la acción del aula. El profesor había desarrollado en la clase anterior el 'uso de un ejemplo' para llegar al enunciado de la razón de áreas y perímetros (mostrado en la transparencia inicial de la figura 1), partiendo de un polígono irregular cóncavo que procedía de una tarea anterior. En la clase que se desarrolla en el episodio aquí mostrado surgen preguntas de los alumnos que el profesor interpreta como problemas con el contenido introducido. El profesor retrocede en la presentación del contenido, pero en la nueva presentación cambia la estructura, realizando 'una explicación a través de un ejemplo', caracterizada por una menor intervención de los alumnos (típica como ya hemos mencionado de aquellas presentaciones que el profesor considera de mayor grado de dificultad para estos). Además, incluye una "representación figural" (el triángulo), diferente a la utilizada el día anterior. El hecho de que continúen las dificultades por parte de los alumnos le lleva a retroceder aún más en el contenido. Inicia de nuevo la presentación partiendo de lo que considera los aspectos claves en la semejanza adoptando una estructura, 'explicación a través de hipótesis', con menos participación por parte del alumno que las anteriores, y más general en relación al contenido matemático. Dicho de otro modo, en el desarrollo de la lección, ante las dificultades de los alumnos, el profesor vuelve hacia atrás y cambia la forma de presentación (se detecta así una regularidad en la práctica de este profesor), adoptando una estructura cíclica, tal y como se muestra en la figura 4.

En relación a la organización del contenido se aprecia una determinada visión de la semejanza vinculada a un carácter intrafigural, destacándose al tratar figuras semejantes la relación entre los elementos de una figura y sus correspondientes en la otra (sin que aparezca la semejanza como una transformación geométrica). Además, la noción de razón de semejanza se caracteriza por el paso de considerar la razón como "número por el que se multiplica" a razón como cociente, sin que se produzca la vinculación entre ambas consideraciones. Se potencia el registro numérico-simbólico y el aspecto procedimental de las fórmulas en todos los casos, junto con el uso de determinadas figuras y cuerpos que considera adecuados para evitar dificultades con el contenido. La introducción de perímetros, áreas o volúmenes de figuras semejantes, se realiza de forma similar, pasándose en los tres casos de considerar la razón de semejanza como número por el que multiplicar a considerarla como cociente, vinculado a la expresión general. Esta regularidad puede estar asociada a la visión del profesor de la semejanza (como objeto de enseñanza-aprendizaje) como relación intrafigural.

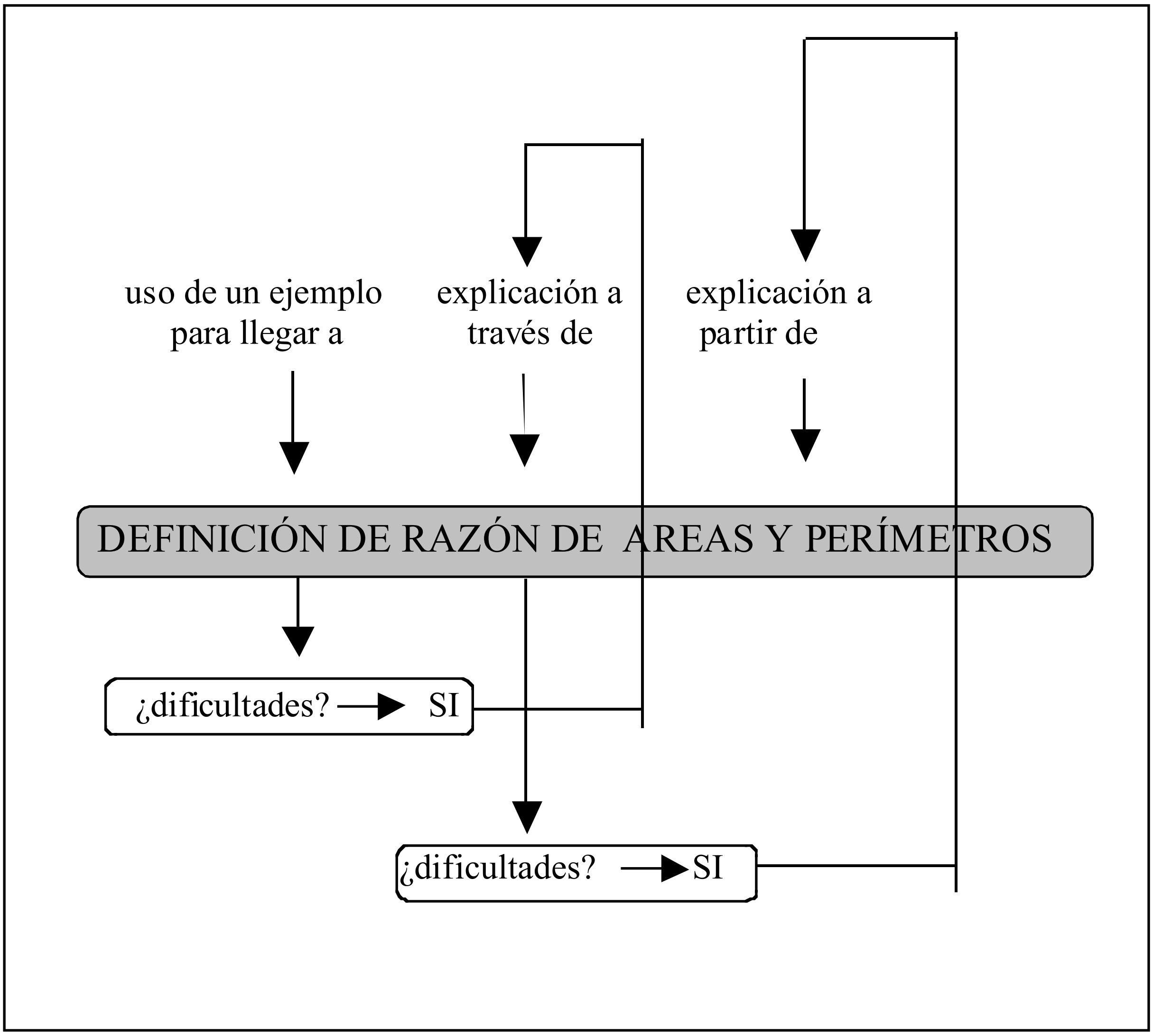

Figura 4. Estructura cíclica adoptada por el profesor.

Las acciones y la organización del contenido matemático: su relación con las intenciones/justificaciones del profesor

Lógicamente, el análisis de un episodio como el descrito se puede realizar de formas muy distintas y desde perspectivas muy diferentes. Nosotros lo analizamos tratando de describir e interpretar algunos de los acontecimientos que reflejan una práctica de enseñanza generada y desarrollada a través de la experiencia de un profesor de Matemáticas, y cómo el conocimiento profesional se relaciona con sus acciones en el aula. Lo aquí presentado forma parte de una secuencia global previamente establecida por el profesor. Lo desarrollado en el protocolo corresponde a la introducción en el aula de la razón de perímetros, áreas y volúmenes. Por tanto, los objetivos del profesor están relacionados con un contenido matemático concreto. El esquema analítico aplicado nos ha permitido identificar segmentos, y las acciones que van configurando la estructura de esos segmentos, en función de dichos objetivos. En la figura 5 se muestra el resultado correspondiente a la aplicación del esquema analítico al episodio considerado.

Se trata ahora de intentar relacionar estas acciones con las intenciones/justificaciones del profesor (lo que dice que va a hacer y por qué dice que lo hace). Así, en el comienzo de la lección, el profesor conecta con lo dado el día anterior, presentando la razón de áreas y perímetros en una transparencia, y explícita la consideración de 'apuntes' de la misma, significado que es compartido por los alumnos. Este procedimiento de colocar en una transparencia lo que se consideran los apuntes, que se repite en la presentación de la razón entre volúmenes, es algo habitual en la forma de actuar del profesor. En relación a ello, en la entrevista anterior a la grabación de lo sucedido en el aula, el profesor indica para este día que:

> mi idea es primero afianzar lo que no hemos terminado hoy. Es decir, poner ya claramente que el perímetro..., la razón entre los perímetros es K, y las áreas K al cuadrado, y el volumen, K al cubo.

Al preguntarle sobre si esta necesidad de afianzar es porque ha detectado algún problema comenta:

> *P.:* Sí, vamos problemas, que primero que todavía no he dado la teoría de perímetros, áreas y volúmenes, la hemos mencionado, la hemos dicho, pero hasta que no les diga yo, perímetro partido por perímetro …
> ***E.:*** Tú crees que si no aparece en la transparencia ellos no lo captan como apuntes.
> ***P.:*** No lo captan como apuntes, ni lo van a utilizar, y yo mi idea es que no tengan que hacer el perímetro de la pequeña y el perímetro de la grande …

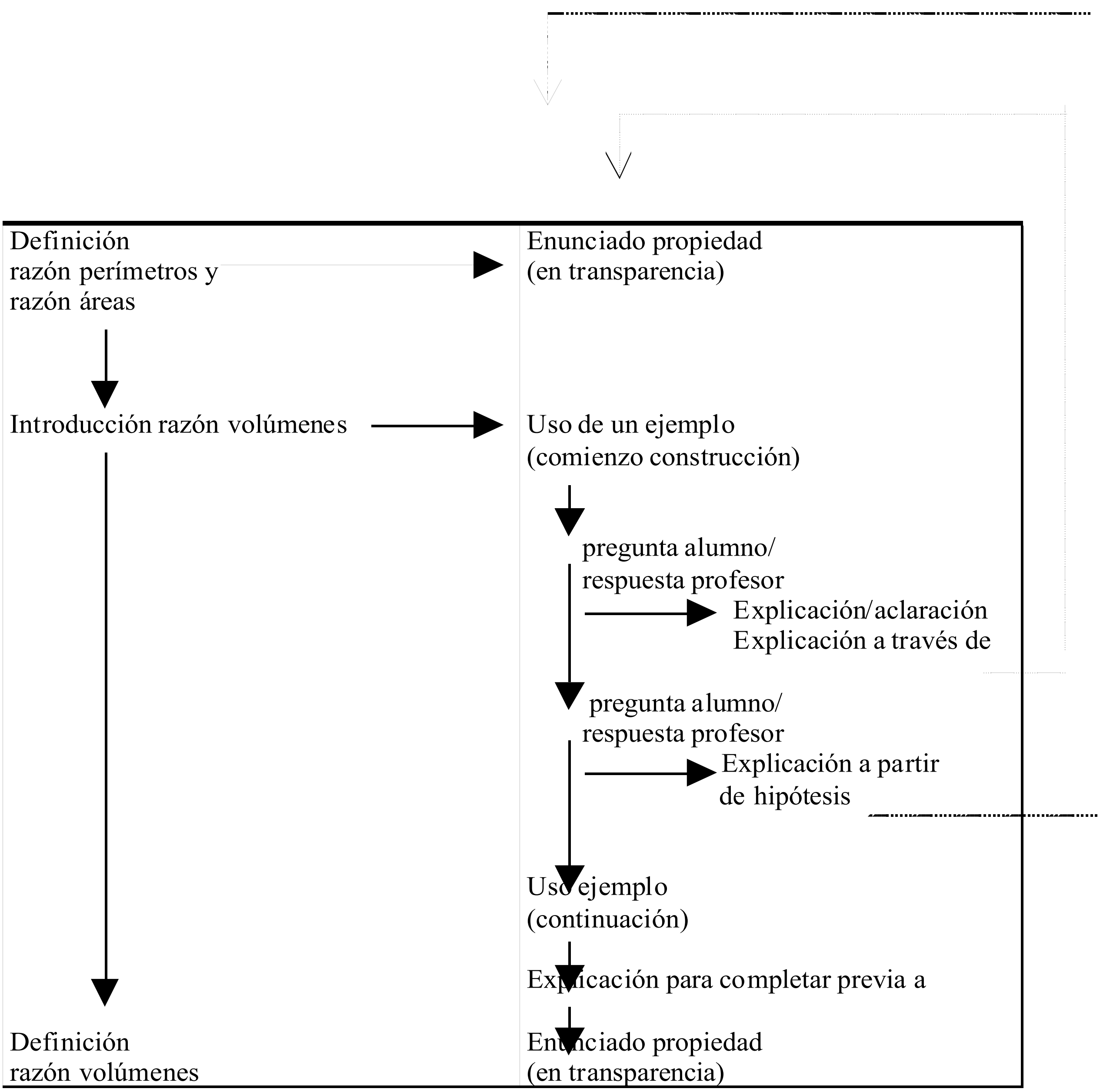

Figura 5. Gráfico correspondiente a la aplicación del esquema analítico.

Luego el uso de la transparencia, como forma de presentar el enunciado de la propiedad, lo ve el profesor como un medio para afianzar lo dado. Además, considera necesario poner en ella lo 'importante' porque "hay que dar apuntes", ya que hasta que no lo diga el profesor explícitamente no "lo captan como apuntes ni lo van a utilizar" .

Por otro lado, en la interacción del aula surgen diversas preguntas de los alumnos que originan respuestas por parte del profesor en las que se aprecian distintas series de acciones (explicación/aclaración, explicación a través de un ejemplo, explicación a través de hipótesis generales). Al surgir en la interacción del aula, no existe ningún comentario en la entrevista previa, pero en la entrevista posterior a la grabación el profesor proporciona información que nos aporta justificaciones a lo sucedido desde su punto de vista.

El profesor trata de iniciar la introducción de la razón de volúmenes, pero surge una pregunta de un alumno, que está copiando lo que aparece en la transparencia, relacionada con la fórmula a aplicar para el cálculo de áreas. Inicialmente, comienza a responder a la pregunta con una aclaración, pero las preguntas surgidas en la interacción le llevan a explicar a través de lo que él mismo considera un ejemplo, volviendo atrás en la secuenciación del contenido, hasta llegar a lo ya explicitado en la transparencia. La explicación a través de un ejemplo es uno de los conjuntos de acciones habituales utilizadas por el profesor en la introducción de conceptos, teoremas etc. previa a la definición (a dar los apuntes). Se caracteriza por una intervención mayoritaria del profesor y se diferencia del uso del ejemplo en que el profesor la utiliza habitualmente cuando considera que los alumnos no tienen la suficiente destreza en los pasos que hay que realizar. Consideradas en conjunto, estas acciones parecen vinculadas a la necesidad del profesor de 'completar' lo dado el día anterior. ¿En que sentido?. El profesor en la entrevista de planificación hace explícito que va a utilizar en la introducción de la razón de perímetros y de áreas figuras propuestas por los propios alumnos que piensa que van a ser 'sencillas' ("triángulos o algo así"). Debido a que en la lección anterior cambia este modo de introducción por un polígono irregular cóncavo (lo que originó dificultades con el cálculo de los perímetros y áreas) vuelve a 'la figura sencilla' que tenía pensada en la planificación inicial, es decir, la representación figural a partir de triángulos, dibujados con base en uno de los catetos.

Ante una nueva pregunta de un alumno (e influido probablemente por las dificultades que las distintas intervenciones de los alumnos han ido poniendo de manifiesto) el profesor inicia un conjunto de acciones (explicación a partir de hipótesis generales) en las que va destacando cada uno de los aspectos de lo ya dado que considera relevantes, llegando a la razón de semejanza como número por el que se multiplica y pasando a la razón como cociente (paso de lo particular a lo general). Es decir, con esta explicación, el profesor hace una síntesis desde la definición de semejanza entre polígonos hasta lo que se acaba de enunciar en la transparencia. Cuando en la entrevista posterior a la grabación el profesor trata de proporcionar explicaciones sobre lo sucedido en el aula señala:

> Hasta hoy yo creo que no lo tenían claro (el papel de la razón), por eso me paré y empecé con aquello, porque vi que no habían estudiado. Y entonces ¿para qué voy a seguir con el volumen e intentar hacer ejercicios si aquello ni se lo habían mirado? Entonces se lo he recordado ….

De esta manera, el profesor interpreta las dificultades percibidas en el sentido de que los alumnos están "perdidos", e intenta de nuevo "volver hacia atrás" situándose en un paso previo en la secuenciación de contenido. A partir de ahí, adopta una estructura (explicación a partir de hipótesis generales) caracterizada, como la anterior, por una mínima intervención de los alumnos, pero con un carácter más general en el contenido matemático de las acciones.

En relación a la estructura 'uso de un ejemplo para llegar a' en el caso de la introducción de volúmenes el profesor, en la entrevista de planificación, señala al comentar la secuencia general que después de introducir la razón de perímetros y áreas pasa al volumen:

> Y entonces ya paso al volumen, pero para el volumen yo no voy a dibujar una figura de tres dimensiones,.... Entonces lo máximo, que ya lo he hecho otras veces, es que voy a sacar los cubitos de madera, que ya hemos repasado el volumen... Hemos visto cuántos cubitos hacen falta para formar un cubo... Porque date cuenta que hemos trabajado en el plano siempre.

Reconoce así una experiencia previa que proporciona a los alumnos el conocimiento suficiente para justificar por su parte el 'uso de un ejemplo', vinculándose el papel de los materiales manipulativos a una comprobación "... ir haciéndolo, con el cubo y ya está. Que se lo crean porque eso no da para más".

Pero la manipulación de material coexiste con una aproximación numérica, en la que se utilizan los valores de la arista y de la razón para calcular el volumen y los lados semejantes (los alumnos también tienen bajo la perspectiva del profesor el conocimiento suficiente para ir realizando estos cálculos, con lo que se mantiene la misma estructura) (ver figura 6). El profesor en la entrevista de planificación había explicitado que:

> Sí, lo que pretendo es que vean que la razón de los perímetros es K, que la de las áreas es K^2 y que la de los volúmenes es K^3. Entonces el perímetro y el área la van hacer ellos directamente, el volumen lo voy hacer yo.

Es decir, a partir de varios ejemplos proporcionados por los propios alumnos piensa introducir la razón de perímetros y áreas, mientras que reconoce una intervención mayor en el volumen. Posteriormente se aprecia que no se utilizan varios ejemplos en perímetros y áreas, partiéndose en cada uno de los casos de un ejemplo común a todos los alumnos.

• grupo alumnos construye un cubo de arista 3 con cubitos dados • finalizada la construcción el profesor indica que se construya uno semejante, siendo la constante dos • alumnos prosiguen construcción • el profesor muestra al resto de la clase el nuevo cubo construído • señala los dos cuerpos e indica que efectivamente duplicando la arista ha salido un cubo	• se pide al resto de la clase que calcule el volumen de un cubo de arista 3 (no hay dibujo en el pizarra) • se pide el cálculo del volumen de la figura semejante siendo la razón entre las aristas dos • se pide que calculen el cociente entre los volúmenes • se pide la relación entre ese cociente y la razón de semejanza; se insiste el la búsqueda de una relación entre ambos números • se pide a una alumna que ponga en la pizarra los cálculos obtenidos • finalizada la intervención de la alumna, el profesor dibuja dos cubos en la pizarra, escribe la expresión en forma general • proporciona una explicación para completar previa a dar el enunciado • enunciado en transparencia

Figura 6. Coexistencia de dos formas de abordar la introducción de la razón de volúmenes de figuras semejantes

Discusión

Lo anteriormente mostrado es un ejemplo de la diversidad de facetas relacionadas con los diferentes dominios del conocimiento profesional de un profesor de Matemáticas que se integran en el desarrollo de un episodio de enseñanza (lo que el profesor hace). Así, en el modo de presentar el enunciado de una propiedad, y el contenido matemático explicitado en ella, se aprecia una determinada forma de entender el papel del profesor como institucionalizador del saber y una determinada visión de las matemáticas escolares, en cuanto a sus objetivos y naturaleza. El uso de la transparencia se entiende como un medio de dar los apuntes, y esos 'apuntes' son lo que tienen que saber los alumnos. Por otro lado, el contenido de la transparencia tiene un doble papel: afianzar lo dado (que quede claro para continuar), y es lo que queda escrito y se aplica en las tareas. En relación a la semejanza, en lo que se debe recordar y utilizar se destaca el papel de la fórmula que expresa la razón entre perímetros (o áreas y volúmenes), y el carácter general de esta expresión.

Para llegar a dicha fórmula el profesor en el transcurso de la lección desarrolla una serie de acciones. ¿De qué depende que adopte un determinado conjunto de acciones?. En su planificación inicial el profesor indica la forma en que piensa presentar el contenido. Para él, cada acción tiene como contenido matemático un paso concreto, y su percepción de que los alumnos poseen un conocimiento previo suficiente para desarrollar ese paso le lleva a adoptar este conjunto de acciones en concreto. Podemos entonces decir que dicho conjunto varia en función del conocimiento del profesor de 'lo que saben' los aprendices del contenido matemático necesario para el desarrollo de esas acciones. Este conocimiento está vinculado más a su experiencia previa, obtenida a lo largo de su práctica, que a las dificultades de esos alumnos concretos. Además, para este profesor este conjunto de acciones (el uso de un ejemplo) en el que se comprueba en un caso particular la propiedad a la que se quiere llegar, está seguido de otros conjuntos de acciones en las que se tiene como objetivo hacerlo procedimental para, finalmente, institucionalizarlo como lo que se va a aplicar. En todo lo anterior se pone de manifiesto la integración de diferentes aspectos relacionados con el conocimiento profesional de este profesor de Matemáticas, como es la visión algorítmica del contenido matemático escolar, una forma particular de presentar ese contenido y un conocimiento, generado en la práctica y validado en años sucesivos con alumnos diferentes, de que esos alumnos no van a tener dificultades con lo que se les va a plantear en los pasos. Este conocimiento ejerce una gran influencia en las decisiones tomadas.

Con respecto a los aspectos surgidos en la interacción en el aula el profesor, para solucionar las dificultades que percibe a través de las preguntas de los alumnos, en las que se pone de manifiesto que tienen problemas con los cálculos a realizar en contra de lo que el profesor había previsto, adopta una estructura cíclica caracterizada por situarse en un punto anterior en la secuencia del contenido, cambiar a un conjunto de acciones percibido como más adecuado a las dificultades que aprecia (en las que su intervención es mayor), variar en cada nuevo conjunto de acciones la representación figural y repetir aspectos clave vinculados con su forma de considerar la semejanza, pasando de ejemplos a caso general. En todo ello, se produce una nueva integración de su visión algorítmica de la forma de presentar el contenido matemático escolar con otros aspectos como su sensibilidad a las dificultades con el contenido que aprecia en los alumnos, que le lleva a ir decidiendo en la situación planteada en el aula el conjunto de acciones a adoptar, y la utilización de determinadas figuras geométricas en la presentación del contenido que él sabe que "funcionan" ante las dificultades planteadas. Así, cuando cambia a un triángulo rectángulo, la decisión está vinculada a que la considera una figura 'fácil' que suelen seleccionar los aprendices y a que es la representación figural típica que él por su parte considera adecuada. En esta forma de abordar las dificultades de los alumnos que surgen en el aula podemos ver una determinada manera de actuar del profesor, que probablemente se refleje en otras situaciones de su práctica (con otros alumnos y tópicos distintos) y que puede ser considerada como una regularidad que va a caracterizar su actuación futura .

Por último, en el conjunto de acciones que desarrolla para la introducción de la razón de volúmenes (uso de un ejemplo) coexiste una determinada visión de la semejanza muy vinculada a una presentación numérico-algebraica, que le lleva a tratar de una forma análoga la razón de semejanza, la de áreas y la de volúmenes, obviando las diferencias debidas al comportamiento dimensional distinto, junto con el intento del profesor de incorporar a su presentación materiales manipulativos, tratando de adaptarse a las nuevas orientaciones curriculares. En lo aquí mostrado se ponen de manifiesto las dificultades con que se encuentra el profesor al integrar en su práctica esas orientaciones. Tanto en la presentación numérica como en la utilización de materiales manipulativos hay un reconocimiento explícito por parte del profesor de un conocimiento previo de los aprendices que le llevan a elegir ese conjunto de acciones.

Conclusiones

Junto con características que podríamos asociar a la arquitectura relacional del aula, como puede ser una determinada manera de establecer la relación profesor/alumnos o la forma de entender el propio papel del profesor, en el trabajo aquí presentado se pone de manifiesto la pertinencia del marco teórico adoptado, al mostrarse la integración de una gran variedad de aspectos vinculados a diferentes dominios de conocimiento en los distintos momentos que configuran el episodio presentado. Entre estos aspectos, destaca el importante papel que juega todo lo relacionado con la facilidad o dificultad que el profesor asocia a determinados contenidos matemáticos escolares, tanto en relación a la toma de decisión previa sobre su actuación como en las regularidades apreciadas en la forma de abordar las dificultades surgidas en el aula. Este conocimiento de 'lo que saben los aprendices' está estrechamente ligado al desarrollo de su práctica profesional, y ha sido generado y validado a través de muchos años de experiencia docente. Podemos decir que determina su acción en el aula y varia con ella. Además, la forma de entender y caracterizar las matemáticas escolares condiciona tanto la estructura de las acciones como su contenido matemático. Por último, la propia forma de presentar la semejanza vinculada a un carácter intrafigural y numérico-algebraico, y el papel que juegan determinadas representaciones como medio de solucionar dificultades, muestra la importancia que tiene la comprensión del profesor del contenido concreto a enseñar. Pero, además de los aspectos relacionados con los diferentes dominios y la forma de integrarlos, lo que realmente se ha puesto de manifiesto con este trabajo son las características que son relevantes dentro de ellos. Estas características nos permiten establecer inferencias sobre la actuación del profesor que pueden permitirnos, de alguna manera, incidir sobre su futura práctica.

En la línea de las investigaciones inicialmente mencionadas, el trabajo realizado nos ha permitido obtener información sobre diferentes aspectos del conocimiento del profesor de Matemáticas que condicionan su práctica profesional. Aunque somos conscientes de la influencia en la interpretación de lo sucedido de las perspectivas teóricas y metodológicas adoptadas, y de las limitaciones que supone un estudio centrado en un aspecto de contenido matemático muy concreto, estudios como el aquí realizado que indaguen en qué extensión los profesores llevan a cabo su plan inicial para la lección, lo que cambia y lo que permanece en la acción del aula, y las razones tanto del plan inicial como de los cambios pueden ayudarnos a establecer núcleos de debate que, complementados con los resultados de otros estudios que adopten perspectivas y tópicos diferentes, puedan ser utilizados para articular procesos de colaboración en la formación permanente, y para identificar aspectos a tener en cuenta en la formación inicial. Queremos terminar destacando que investigaciones de este tipo, imposibles de lograr sin la ayuda de los propios profesores, pueden ayudarnos a profundizar sobre la complejidad de la práctica, aportando información que permita contribuir desde la propia práctica al desarrollo profesional.

Notas

[1] Investigación apoyada por la DGCYT del Ministerio de Educación y Ciencia (Madrid). Proyecto PS94-0099.

Referencias

Aubrey, C. (1996). An Investigation of Teachers' Mathematical Subject Knowledge and the Processes of Instruction in Recepcion Classes. *British Educational Research Journal*, *22*(2), 181-197.

Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject- matter knowledge part of the equation. En Brophy (Ed.), *Advances in Research on teaching: Teachers' knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice*, vol. 2. Greenwich, CT: JAI press.

Bromme, R. y Steinbring, H. (1994). Interactive development of subject matter in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 217-248.

Escudero, I. y Sánchez, V. (1999). The relationship between professional knowledge and teaching practice: the case of similarity. *Proceedings PME 23, Vol II* (pp. 305-312), Haifa, Israel.

García, M.M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Sevilla: KRONOS- GIEM.

Junta de Andalucía (1992). *Decreto de Educación Primaria. Colección de Materiales curriculares para la Educación Primaria. J.A.*, Consejería de Educación y Ciencia.

Leinhardt, G. (1989). Math Lessons: A contrast of novice and expert competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 52-57.

Leinhardt, G., Putnam, R.T., Stein M. & Baxter, J. (1991). Where subject Knowledge matters. En Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching: Teachers' knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice,* vol.2, (pp. 87-113). Greenwich: JAI Press

Lemonidis, C. (1990a). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Lemonidis, C. (1990b). Une analyse de la complexité cognitive de la notion d'homothétie. *Cahiers du Laboratoire de Pédagogie Expérimentale*, *1*,71-79 Louvain-La-Neuve.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *11*(2.3), 295-324.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En Ponte, Monteiro, Maia, Serrazina y Loureiro (Coords.), *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matematica. Que Formaçao?*. Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educaçao.

Llinares, S. (1997). *Aprendizaje del profesor de Matemáticas y Reforma*. Conferencia pronunciada en el congreso PROFMAT 97 (pp. 37-43) Figueira da foz. Lisboa: APM.

Llinares, S. (en prensa). Secondary school mathematics teacher's professional knoledge: a case from the teaching of the concept of function. *Teachers and teaching*. *Theory into Practice*.

Ponte, J. P. y Canavarro, A. P. (1994). A resoluçao de problemas nas concepçoes e práticas de professores. Em D. Fernandes, A. Borralho, G. Amaro (Eds.), *Resoluçao de problemas: Processos cognitivos, concepçoes de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 197-211). Lisboa: IIE.

Putnam, R. T., Heaton, R. M., Prawat, R. S. y Remillard, J. (1992). Teaching mathematics for understanding: Discussing case studies of four fifth-grade teachers'. *The Elementary School Journal*, *93*, 213-228.

Simon, M. y Tzur, R. (1999). Explicating the Teacher's Perspective From the Researchers' Perspectives: Generating Accounts of Mathematics Teachers' Practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(3), 252-264.

Stein, M., Baxter, J. y Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. *American Educational Journal*, *27*(4), 639-663.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interation in elementary mathematics teaching. *Educational studies in Mathematics*, *32*, 49-92.

Stodolsky, S.S. (1988). *The Subject matters. Classroom activity in Math and Social Studies*. Chicago and London: The University of Chicago Press.

Voigt (1985). Patterns and routines in Classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 69-118.

Voigt, J. (1994). Negotiation of Mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 275-298.

Wood, T. (1995). An Emerging Practice of Teaching. En Cobb & Bauersfeld (Eds.), *Mathematical Meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 203-227). NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Isabel Escudero e Victoria Sánchez, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla, España. Endereço electrónico: mvsanche@cica.es

RESUMO. Este artigo é parte de uma investigação sobre a relação entre o conhecimento profissional e as práticas de ensino de professores de Matemática do ensino secundário, quando eles ensinam tópicos específicos de Matemática, no nosso caso, semelhança. Em particular, neste artigo descrevemos e caracterizamos a estrutura de um segmento duma apresentação de um professor (introdução da razão entre volumes de figuras semelhantes), como o conteúdo matemático está organizado nas acções que formam a estrutura deste segmento, e as relações entre a organização das acções/conteúdo e as justificações dadas pelo professor. Os resultados mostram as regularidades nas práticas do professor e a diversidade dos aspectos relacionados com os diferentes domínios do conhecimento profissional que estão envolvidos nas acções que configuram um processo de ensino

Palabras clave: *Conocimiento profesional, Práctica profesional, Profesores de Matemáticas de secundaria, Semejanza.*

ABSTRACT. This is part of a research study about the relationship between professional knowledge and teaching practice for secondary school Mathematics teachers, when they teaches specific mathematical topics, in our case, similarity. In particular, here we are going to describe and characterize the structure of a teacher's presentation segment (introduction of the ratio of volumes for similar figures), how the mathematical content is organized in the actions which shape the structure of this segment, and the relationships between actions/content organization and the justifications given by the teacher. The results show the regularities in the teacher practice, and the diversity of aspects related to the different domains of professional knowledge that are involved in the actions that configure a teaching episode.

Key words: *Professional knowledge, Practice, Secondary mathematics teachers, similarity.*