Interpretación cognitiva de los enunciados de los teoremas[1]

Marcelino J. Ibañes
Instituto "Vega del Prado"
Valladolid.

Tomás Ortega
Facultad de Educación
Universidad de Valladolid

Introducción

La demostración matemática ha sido ampliamente tratada en el último cuarto de siglo del último milenio, y en Ibañes (2001) se hace una síntesis muy completa de la literatura más relevante, clasificándola en cuatro grandes bloques:

- Trabajos generales sobre el aprendizaje de la demostración: Lakatos (1978), Kitcher (1983), Arsac (1988), Hanna (1989 a-b), Alibert y Thomas (1991), …
- Trabajos sobre las funciones de la demostración: Bell (1976), de Villiers (1993), Hersh (1993), Reid (1996), …
- Trabajos sobre niveles de demostración: Bell (1979), Van Dormolen (1977), Usiskin (1982), Balacheff (1987), Van Asch (1993), Ibañes y Ortega (1997 a-b), Harel y Sowder (1998), Miyazaki (2000), ...
- Trabajos sobre la demostración en el aula: Bell (1976), Galbraith (1981) Fischbein (1982), Martin y Harel (1989), Hanna (1990), Bero (1997), …

Harel y Sowder, por una parte, y de Villiers, por otra, han sido los autores que más han influido en nuestra investigación: los primeros tratan de explicar el comportamiento de los alumnos frente a las demostraciones y dan una clasificación de las mismas según lo que significa demostrar para los alumnos, mientras que de Villiers se fija en las funciones de la demostración. Sin embargo, ninguno de estos autores se pregunta por las posibles conexiones entre las demostraciones y la interpretación cognitiva de los enunciados de los teoremas y por su influencia en los esquemas de prueba de los alumnos. Nuestra investigación, que es mucho más amplia que la que aquí se describe, se ha desarrollado en el marco teórico que surge de los trabajos de estos autores y, entre otras cuestiones, en ella se han analizado los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato y su evolución, Ibañes y Ortega (2001)[2].

Al llevar a cabo esta investigación, nos dimos cuenta que los esquemas de prueba de los alumnos estaban íntimamente ligados tanto con el reconocimiento de procesos como con la interpretación de los enunciados (se analizaron las dificultades que tienen los alumnos para interpretar enunciados de teoremas con expresiones tales como *un*, *uno cualquiera*, o *todo*), y que estos extremos no habían sido considerados en la literatura revisada. Así, en primer lugar, se analizaron las dificultades que tienen los alumnos en el reconocimiento y distinción de procesos matemáticos, (Ibañes y Ortega , 2002)[3], y, en segundo lugar, la interpretación que hacen de los enunciados de los teoremas. En este artículo se presenta la investigación llevada a cabo para ver cómo influye la utilización de algunas *expresiones* en la interpretación de los enunciados de los teoremas. La elección de las expresiones a tener en cuenta se hizo en relación con otro de los aspectos antes señalados: "*adquirir una idea global del proceso*", y, en particular, conocer de dónde se parte (*hipótesis*) y dónde se quiere llegar (*tesis* o *conclusión*). Como se sabe, los matemáticos diferenciamos entre la hipótesis y la tesis de un teorema, y los profesores utilizamos estas expresiones al enunciarlos o al demostrarlos. Sin embargo, en las ciencias experimentales el término hipótesis tiene otro significado, y los profesores de estas materias lo emplean también en sus clases. El resultado es que, en torno a este término, los alumnos tienen unas ideas mezcladas, cuya consecuencia es que, probablemente, no entienden al profesor de matemáticas cuando lo emplea al explicar un teorema. Además, Ibañes y Ortega (1997a-b) consideran diferentes *tipos* de enunciados de teoremas matemáticos: *de condición necesaria*, *de condición suficiente*, *de condición necesaria y suficiente*, etcétera, y esos enunciados pueden contener o no expresiones más o menos específicas del lenguaje matemático. Así, los de los dos primeros tipos se enuncian utilizando la expresión más usual *si… , entonces*, o bien, incluyendo las expresiones una *condición necesaria* o una *condición suficiente*; y, los del tercer tipo podrían enunciarse en la forma: *si… , y recíprocamente…* , o con las expresiones más específicas *una condición necesaria y suficiente* o *si, y sólo si,* … Estas expresiones son de uso frecuente en las clases y en los libros de texto.

En consecuencia, pretendemos descubrir las dificultades que tienen los alumnos en la determinación de la hipótesis y de la tesis de los teoremas en distintas clases de enunciados, y, especialmente, cuando éstos contienen expresiones específicas del lenguaje matemático, pero no desde el punto de vista de la lingüística, sino desde el enfoque de la demostración matemática, de los esquemas de prueba de los propios alumnos lo que implica que este artículo esté intimamente citado a los otros dos que componen la trilogía. La investigación se estructura en tres ciclos de *investigación-acción* en los que el director de la investigación ocupa uno de los vértices de la triangulación e interpreta el papel de observador externo a la hora de analizar los documentos de trabajo, sobre todo las producciones de los alumnos y las grabaciones de audio, tratando de descubrir las características de las interacciones entre profesor y alumnos, y ejerciendo una labor crítica y de control, Elliot (1990, pp. 146–175). En cada uno de los ciclos se describen las fases que los conforman: *planificación*, *implementación*, *análisis* y *reflexión*, y en este artículo se aprovecha esta estructura para dar cuenta de la investigación realizada. La experimentación se ha llevado a cabo en el IES Vega de Prado, de Valladolid, con un grupo experimental (GE) de 22 alumnos de primer curso de bachillerato (16–17 años) y, cuando la situación lo ha requerido se ha contado con un grupo de control (GC) de 21 alumnos. Para tener una idea más precisa del tipo de alumnos, digamos que, después de los 4 cursos de Educación Secundaria Obligatoria, el Currículo Español tiene 2 cursos de bachillerato, cuya superación dan acceso a la Universidad. Asimismo, los ciclos de investigación se complementan con un debate y entrevistas semiestructuradas con los alumnos del GE.

Primer ciclo

Exploración previa

Para comenzar este estudio, y con el fin de recabar información sobre las creencias de los alumnos se formuló la siguiente cuestión previa al grupo experimental (GE): *¿Sabes lo que significan los términos hipótesis y tesis referidos al enunciado de un teorema?* El análisis de las respuestas puede resumirse en los siguientes puntos:

1. Para ordenar las distintas interpretaciones se consideran las siguientes categorías, que surgen de manera natural de las respuestas de los alumnos, como ponen de manifiesto las transcripciones que se muestran en los comentarios que siguen:

— Interpretación desde la metodología científica (MeCi).

— Interpretación en el sentido lógico matemático del término (LoMa).

— Interpretación en el sentido del lenguaje usual (LeUs).

— Interpretación en el sentido académico (Ac).

2. Por lo que respecta al término *hipótesis*, el 95% de los alumnos contestan de acuerdo con su significado en la metodología científica (MeCi). Aunque todas estas respuestas se enmarcan dentro de la mencionada categoría, se observan distintas formas de expresarlo, por lo que a continuación se transcriben varias de ellas:

> "Es un enunciado donde se expresa una idea, todavía no comprobada, que puede ser verdadera o falsa".

> "Es una teoría posible que puede dar solución a un problema, pero que no ha sido contrastada".

> "Creo que una hipótesis es lo que uno cree que puede salir en el problema, pero sin estar seguro, por lo que hay que comprobarlo".

> "Es una idea sobre un problema que se puede comprobar. Puede ser cierta o no".

> "Es lo que se prevé que puede ocurrir antes de probarlo".

3. Sólo una respuesta (5%) podría encajar en el punto de vista lógico matemático (LoMa), aunque la explicación no es del todo clara:

> "Es cada uno de los apartados que se utilizan para comprobar el teorema".

4. En lo que se refiere al término *tesis*, vuelve a ser dominante el punto de vista desde la metodología científica, aunque hay más diversidad de respuestas que en el caso de la *hipótesis*. El 67% pueden considerarse de la categoría *MeCi*. Por ejemplo:

> "Es una hipótesis que se ha contrastado y se ha comprobado que es cierta".

5. Dos respuestas (10%) podrían encajar en el punto de vista lógico matemático:

> "Lo que se pretende demostrar mediante la hipótesis".

6. También hay dos respuestas en el sentido del lenguaje usual (LeUs):

> "Una afirmación que hace una persona".

7. Un alumno (5%) responde en un sentido que podría identificarse con el académico (Ac); he aquí su respuesta:

> “La tesis es la idea fundamental en la cual se basa un trabajo y es defendida en él".

8. Las interpretaciones por parte de los alumnos de ambos términos–*hipótesis* y *tesis*–son bastante congruentes. En efecto, el único caso *LoMa* en la hipótesis, también interpreta en el mismo sentido la tesis; además, el 70% de las respuestas *MeCi* en la hipótesis interpretan desde la misma perspectiva el término tesis.

Reflexiones iniciales. De esta cuestión previa se siguen las siguientes reflexiones:

1. Se puede decir que estos alumnos entienden los términos hipótesis y tesis influenciados por el punto de vista de la metodología científica, ya que esta tendencia se ha observado en la práctica totalidad de aquellos.

2. Por otra parte, se puede ver que el punto de vista de la metodología científica está presente no solamente en las obras de carácter general, sino también en los tratados de contenido matemático, y este hecho se ratifica en la cotidiana experiencia docente, puesto que los profesores de Matemáticas también lo emplean.

3. De lo dicho en los dos párrafos anteriores, se deduce la necesidad de instruir a los alumnos en el uso de los términos hipótesis y tesis en el sentido específico que se utilizan cuando se refieren al enunciado de un teorema, es decir, lo que aquí se ha llamado el sentido lógico matemático de esos términos.

Actividades de formación

Así pues, teniendo en cuenta estas reflexiones, el equipo investigador elaboró un material didáctico para explicar esta acepción y entrenar a los estudiantes en la determinación práctica de la *hipótesis* y de la *tesis* de los enunciados de los teoremas. Este material fue expuesto por el profesor en el GE durante un período lectivo de 50 minutos y los alumnos intervinieron en forma de debate para responder a las preguntas: *¿cuál es la hipótesis?*, *¿cuál es la tesis?*, siempre referidas a los enunciados que contenían las transparencias que se iban proyectando, y que incluían enunciados de distintos tipos, comenzando por el más usual: el de la forma *si … , entonces*, y recorriendo otros que suelen utilizarse en la práctica docente. Los enunciados y los ejemplos con los que fueron instruidos los alumnos del GE fueron éstos:

1. *Enunciado* "*si … , entonces*" (E1). Ejemplo: "*Si* dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente congruentes, *entonces* los ángulos restantes son también congruentes".

2. *Hipótesis y tesis mezcladas* (E2). Ejemplo: "Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares".

3. *Hipótesis implícita* (E3). Ejemplo: "$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$".

4. *Cuantificador universal explícito* (E4). Ejemplo: "*Para todo* triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

5. *Enunciado de "condición suficiente* (E5). Ejemplo: "Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos respectivamente iguales".

6. *Enunciado de "condición necesaria y suficiente*. Ejemplo: Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces forman ángulos correspondientes congruentes y, recíprocamente, si dos rectas forman ángulos correspondientes congruentes al ser cortadas por una transversal, entonces son paralelas.

Recogida de datos

Una vez que se abordó el problema de distinguir la *hipótesis* y la *tesis* en los enunciados del primer tipo, el profesor sugería traducir los otros a la forma *si … , entonces …* . Una semana después se propuso al GE y al GC la cuestión 1 y al cabo de otra semana al GC se le formuló la cuestión 2. A continuación se describen estas cuestiones con sus objetivos:

Cuestión 1 (Para identificar ambas componentes en los 6 tipos de enunciados tratados)

En el enunciado de un teorema se llama *hipótesis* a aquello de lo que partimos, es decir, lo que suponemos cierto, y tesis a lo que queremos demostrar. Indica la hipótesis (H) y la (T) de cada uno de los siguientes teoremas:

1. *Si un triángulo es rectángulo, entonces su área es la mitad del producto de sus catetos*.
   H:
   T:

2. *Los ángulos correspondientes de triángulos congruentes son congruentes*.
   H:
   T:

3. $\tan(x) = \mathrm{sen}(x)/\cos(x)$.
   H:
   T:

4. *En todo triángulo, la bisectriz de cualquiera de sus ángulos contiene un punto del lado opuesto*.
   H:
   T:

5. *El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo es el doble del radio de la circunferencia inscrita, si el triángulo es equilátero.*
   H:
   T:

6. *Si un triángulo es isósceles, los ángulos de la base son iguales, y recíprocamente, si en un triángulo los ángulos de la base con iguales, dicho triángulo es isósceles*.
Explicación:

Objetivo: Observar si los alumnos identifican la *hipótesis* y la *tesis* en distintos enunciados de teoremas (5 primeros), estudiar cómo influye el *tipo* de enunciado en la mencionada identificación y comprobar si las instrucciones recibidas por los alumnos del GE fueron eficaces o no.

Cuestión 2 En el último cuestionario se te pedía identificar la *hipótesis* en algunos teoremas.

¿En qué te basaste para hacer la elección?

1. En el concepto de hipótesis que nos explicaron en clase de Física y Química, según el cual, hipótesis es sinónimo de conjetura; es decir, la explicación de un fenómeno que admitimos provisionalmente como cierta, para después ratificarla o rechazarla a la vista de los resultados de nuevos experimentos.

2. Consideré el teorema enunciado de la forma "Si P, entonces Q" y llamé hipótesis a P.

3. Otras posibilidades (indicarlas):

Análisis de datos

Las respuestas de los alumnos, 21 en cada grupo, fueron muy variadas y su análisis se resume en los siguientes puntos:

1. La tabla 1 recoge los porcentajes de respuestas correctas a los cinco primeros enunciados (E1, … , E5), tanto en lo que se refiere a la hipótesis (H) como a la tesis

(T), en dos grupos: el experimental (G.E.) y el de control (G.C.).

	E1		*E2*		*E3*		*E4*		*E5*	
	H	*T*	*H*	*T*	*H*	*T*	*H*	*T*	*H*	*T*
GE	86	90	67	81	62	62	81	90	71	100
GC	38	71	0	24	0	33	14	62	24	38

Tabla 1. Porcentajes de respuestas correctas en los cinco enunciados, en ambos grupos.

Los dos siguientes apartados explican estos datos para el GE, mientras que en los puntos 4 a 6 se comparan con los del GC.

2. En el GE, el mayor porcentaje de identificación de la hipótesis se ha obtenido en el primer enunciado—*si … , entonces … ,*—lo cual parece natural porque, por una parte, es en el que aparecen más claramente separados los dos términos, y, por otra, porque en las instrucciones previas se tradujeron los otros enunciados a esta forma. En cierto modo, resulta lógico que los menores porcentajes de respuestas correctas se hayan dado en los enunciados segundo–hipótesis y tesis mezcladas—y tercero–hipótesis implícita,—ya que en ellos, o bien, los términos se encuentran enmascarados, o bien, no aparece la hipótesis.

3. En lo que atañe a la tesis, la práctica totalidad de las respuestas han sido correctas en los enunciados: primero, cuarto (cuantificador universal explícito) y quinto (condición suficiente). Ha habido más dificultades en el segundo enunciado, y el menor porcentaje de respuestas correctas, igual que para la hipótesis, ha tenido lugar en el tercer enunciado.

4. Comparando los resultados de ambos grupos, y en lo que se refiere a la hipótesis, los porcentajes de respuestas correctas son muy superiores, en todos los enunciados, en GE que en el de control. Las diferencias son especialmente grandes en los enunciados segundo, tercero y cuarto. Llama la atención que mientras en el grupo de control ningún alumno (0%) identificó correctamente las hipótesis de los enunciados segundo y tercero, en el grupo experimental lo hicieron el 67% y el 62%, respectivamente.

5. En la tesis las diferencias también son muy importantes. En efecto, los porcentajes de respuestas correctas son mayores en el GE que en el GC en todos los enunciados. Las diferencias son especialmente grandes en los enunciados segundo y quinto. Resulta llamativo que mientras el 100% de los alumnos del GE escribieron correctamente la tesis del quinto enunciado, en el GC tan sólo lo hicieron el 38%.

6. Para los alumnos de ambos grupos resulta más difícil determinar la hipótesis que la tesis, y, de hecho, no se da ningún caso en el que se enuncie correctamente la hipótesis y no hacer lo propio con la tesis.

7. En las respuestas de los alumnos se han advertido una serie de errores que, para su estudio, se han clasificado atendiendo a las siguientes categorías:

— *Identifica* el *enunciado* con su *recíproco* (*IER*).

— *Confunde* e intercambia los términos *hipótesis* y *tesis* (CHT).

— *Identifica* la *hipótesis* con el *enunciado* completo (IHE).

— *Identifica* uno de los *términos* con el *objetivo* o finalidad del enunciado (ITO).

— *Influencia externa* (InEx). El alumno responde influenciado por algún aspecto externo al enunciado, como por ejemplo, cuestiones de forma, del simbolismo, etcétera.

8. Hay una mayor incidencia de errores en el GC que en el GE, lo que, por ejemplo, puede observarse considerando las medias aritméticas de los porcentajes de aparición de cada error en cada uno de los enunciados. La tabla 2 ofrece esta información:

	IER	*CHT*	*IHE*	*ITO*	*InEx*	*Total*
GE	3	1	3	3	14	24
GC	0	11	35	4	29	79

Tabla 2. Medias de los porcentajes de aparición de cada error en ambos grupos.

En el GE el error más extendido es el de la influencia externa. En el GC está aún más extendido este error, pero el que mayor incidencia tiene es el de identificar la hipótesis con el enunciado completo. Además, la última columna muestra la suma de esas medias, que indica el porcentaje medio—por enunciado—de alumnos que cometen errores, en ambos grupos.

9. En relación con los enunciados, la tabla 3 muestra los porcentajes de toda clase de errores cometidos, en cada enunciado, tanto en el GE como en el GC, lo que pone de manifiesto que muchos alumnos cometen más de un tipo de error, destacando en el GE los que corresponden a los enunciados E3 y E5 y en el GC E2, E3 y E4.

	E1	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*
GE	15	19	38	15	29
GC	62	96	96	85	57

Tabla 3. Porcentajes de errores cometidos, en cada enunciado, en los grupos experimental y de control.

Los datos expresados en la tabla 3 se visualizan en el diagrama de barras de la figura 1, lo que permite una comparación más inmediata de los errores cometidos por el GE y por el GC.

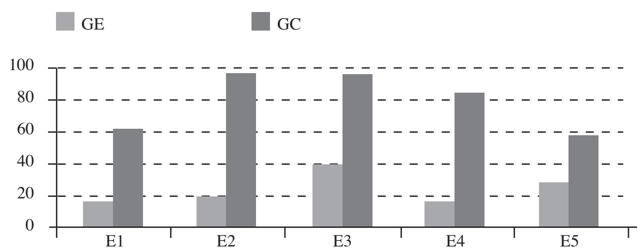

Figura 1. Diagrama comparativo de los errores cometidos por el GE y GC.

En todos los enunciados los alumnos del GC han cometido muchos más errores que los del GE, y las diferencias mayores se advierten en los enunciados segundo, tercero y cuarto.

Respecto al sexto enunciado decir que el porcentaje de respuestas correctas del GE fue muy superior al del GC, 62% frente al 38%.

En lo referente a la cuestión 2, el 94% de las respuestas eligieron la opción 1, y, por tanto, las respuestas a la cuestión 1 se habían basado en la concepción de hipótesis de la metodología científica. Sólo un alumno (6%) manifestó haberse basado en la concepción lógico matemática de hipótesis. Este alumno contestó a los distintos enunciados de la cuestión 1, o bien satisfactoriamente, o bien con el error de influencia externa, pero no cometió el error de identificar la hipótesis con el enunciado entero. Ningún alumno expresó haberse basado en otras posibilidades distintas de las dos anteriores para identificar la hipótesis en los enunciados propuestos en la cuestión 1.

Reflexiones

El análisis de las respuestas de los alumnos llevó al equipo investigador a formular las siguientes reflexiones:

1. Los buenos resultados del GE, junto con las grandes dificultades observadas en el GC, ponen de manifiesto la conveniencia de instruir a los alumnos en la distinción de estos dos términos en los enunciados de los teoremas matemáticos, al tiempo que, si la instrucción es adecuada, los alumnos pueden evolucionar favorablemente, asimilando con relativa facilidad estos conceptos.

2. El gran número de estudiantes del GC que cometen el error consistente en identificar la hipótesis con el enunciado completo (IHE), los comentarios de algunos de ellos, y la escasa incidencia de este error en el GE, hicieron afianzarse al equipo investigador en su pensamiento inicial de que su origen debía ser la consideración del término hipótesis desde la metodología científica.

3. La mayor parte de los alumnos tienen una concepción de hipótesis que procede exclusivamente de la metodología científica, lo que constituye una fuente de errores a la hora de identificar la hipótesis de un teorema.

4. Una vez que los alumnos conocen la concepción lógico matemática de hipótesis, necesitan estar familiarizados con determinadas expresiones que suelen utilizarse al enunciar los teoremas: *la condición necesaria; la condición suficiente; si, y sólo si; …*

Segundo ciclo

Planificación y recogida de datos

En este segundo ciclo se quiere precisar cómo entienden los estudiantes los enunciados de los teoremas. Para ello, 20 días más tarde, y sin que ninguno de los grupos hubiesen recibido ninguna otra instrucción específica, se propuso una primera cuestión para determinar si los alumnos entienden o no diversos enunciados de teoremas en los que se utilizan las expresiones: *si…, y recíprocamente; la condición necesaria y suficiente; y si, y sólo si.*

Cuestión 1: Todos los enunciados siguientes quieren decir lo mismo. Di si entiendes o no cada uno de ellos e indica lo que no entiendas. Rodea con un círculo el número del enunciado que mejor entiendas y explica por qué.

1. *Si un triángulo es isósceles, los ángulos de la base son iguales, y recíprocamente, si en un triángulo los ángulos de la base con iguales, dicho*

triángulo es isósceles.
Respuesta:

2. *La condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles es que los ángulos de la base sean iguales.*
Respuesta:

3. *Un triángulo es isósceles si, y sólo si, los ángulos de la base son iguales.*
Respuesta:

Por qué entiendo mejor el enunciado elegido que los otros dos:

Aunque no se describe aquí el análisis realizado sobre las respuestas de los alumnos, para el equipo investigador resultó sorprendente que, mientras que en el GE el 38% de los alumnos declara no entender algún enunciado, la práctica totalidad de los alumnos del GC declararan entender todos los enunciados con expresiones ajenas al lenguaje usual, y se propuso comprobar hasta qué punto esto era verdad. Para ello, se pensó en cómo se podría descubrir si un alumno entiende o no un enunciado y pareció evidente que si un alumno en cuestión entiende el enunciado, debe conocer de dónde se debe partir y adónde hay que llegar para demostrarlo; y, recíprocamente, si sabe qué camino elegir para demostrar ese enunciado, es porque lo entiende.

Con estas ideas se diseñó la segunda cuestión, que se formuló una semana después, en la que se enuncian cuatro teoremas con el mismo significado empleando las expresiones: *si ..., y, recíprocamente ...; una condición necesaria; una condición suficiente; y si, y sólo si, respectivamente.*

Cuestión 2: A continuación se enuncian cuatro teoremas. Si quisiéramos demostrarlos, ¿qué tendríamos que hacer? Después de cada enunciado se sugieren varias posibilidades, de las que tienes que elegir una. (Para evitar repeticiones, aquí se reproducen las distintas posibilidades, una sola vez, a continuación del último enunciado).

Teorema 1. *Si $ABCD$ es un paralelogramo, las diagonales AC y BD se dividen mutuamente en segmentos iguales. Y, recíprocamente, si en un cuadrilátero, $ABCD$, las diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales, dicho cuadrilátero es un paralelogramo.*

Teorema 2. *Una condición necesaria para que un cuadrilátero sea un paralelogramo es que sus diagonales se dividan mutuamente en segmentos iguales.*

Teorema 3. *Una condición suficiente para que un cuadrilátero sea un paralelogramo es que sus diagonales se dividan mutuamente en segmentos iguales.*

Teorema 4. *Un cuadrilátero es un paralelogramo si, y sólo si, sus diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales.*

Posibilidades:

1. *Considerar un paralelogramo cualquiera y demostrar que sus diagonales se cortan mutuamente en segmentos iguales.*
2. *Considerar un cuadrilátero en el que las diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales y demostrar que se trata de un paralelogramo.*
3. *En primer lugar, considerar un paralelogramo cualquiera y demostrar que sus diagonales se cortan mutuamente en segmentos iguales. Y después, considerar un cuadrilátero en el que las diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales y demostrar que se trata de un paralelogramo.*
4. *Considerar un cuadrilátero y un paralelogramo y ver en cuál de los dos sus diagonales se cortan mutuamente en segmentos iguales.*

Análisis de datos

A continuación se presenta una síntesis del análisis de sus respuestas realizado, para ese fin se han considerado las siguientes categorías, que al igual que antes surgen de las respuestas de los alumnos de forma natural:

- El alumno elige la opción *correcta* para demostrar el teorema (*C*).
- Propone demostrar *solamente* la condición *necesaria*—cuando el teorema es de condición necesaria y suficiente—(*SoNe*).
- Propone demostrar *solamente* la condición *suficiente*—cuando el teorema es de condición necesaria y suficiente—(*SoSu*).
- *Identifica* la proposición con su *recíproca*—cuando el teorema es de un solo sentido—(*IdRe*).
- *Duplica* la *condición* al elegir la opción que propone demostrar ambas condiciones: la necesaria y la suficiente—cuando el teorema es de un solo sentido—(*DuCo*).
- Elige una opción *disparatada* (*Dis*).

La tabla 4 muestra los porcentajes de alumnos que eligen cada opción (*1, 2, 3, 4*), en los distintos teoremas (*T1, T2, T3, T4*). En cada caso, el porcentaje correspondiente a la opción correcta se presenta con doble recuadro.

	T1		T2		T3		T4	
	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
1	0	0	14	0	29	19	10	19
2	0	14	52	71	52	33	43	57
3	100	76	29	19	19	19	38	24
4	0	10	5	10	0	29	10	0

Tabla 4. Porcentajes de alumnos que eligen cada opción, en los distintos teoremas, en ambos grupos.

1. El análisis de las respuestas de ambos grupos, indica un mejor comportamiento del GE, aunque se observa cierta similitud con el GC.

2. En el teorema 1 — de *condición necesaria y suficiente* utilizando la expresión *si … , y recíprocamente* —, la totalidad de los alumnos del GC y buena parte del GC proponen la opción correcta para demostrarlo.

3. En el teorema 2 — de *condición necesaria* —, son muy pocos los alumnos que eligen la opción correcta. La mayoría de ellos incurren en una identificación con la proposición recíproca (IdRe). Bastantes cometen el error de duplicar la condición (DuCo), y alguno elige la opción disparatada (Dis).

4. En el teorema 3 — de *condición suficiente* —, casi la mitad de los alumnos (52% y 33%) eligen la opción correcta (C). Bastantes (29% y 19%) incurren en una identificación con la proposición recíproca (IdRe). También es notorio el número de alumnos (19% y 19%) que duplica la condición (DuCo). Se produce la mayor diferencia entre los dos grupos (29%) en la elección de la opción disparatada (Dis).

5. En el teorema 4 — de condición *necesaria y suficiente* utilizando la expresión *si, y sólo si*, —, no son muchos los alumnos que eligen la opción correcta (C). La opción más elegida es la 2, lo que supone considerar sólo la condición suficiente (SoSu). Varios consideran sólo la condición necesaria (SoNe) y algunos optan por la opción disparatada (Dis).

Reflexiones

De todo lo anterior se deducen las siguientes reflexiones:

1. Los estudiantes tienen grandes y generalizadas dificultades en la interpretación de esos enunciados, sobre todo los de condición necesaria.

2 Los alumnos interpretan correctamente la expresión *si …, y recíprocamente*, pero tienen muchas dificultades en la interpretación de las otras expresiones utilizadas, por lo que incurren en diversos errores. Se sigue la importancia de instruirlos en la interpretación de enunciados que incluyan esta clase de expresiones.

3. Los enunciados de condición necesaria y suficiente son entendidos por los alumnos mucho mejor cuando emplean la expresión *si ..., y recíprocamente* (teorema 1), que cuando incluyen la expresión *si, y sólo si* (teorema 4), de donde se deduce la importancia de elegir las expresiones más adecuadas, y, al mismo tiempo, de informarlos del significado de las expresiones que comprenden peor.

4. Se observa cierta tendencia a interpretar los enunciados como de *condición suficiente*. En efecto, en el teorema 2, la mitad comete el error de identificar el enunciado con la proposición recíproca, que es, precisamente, la condición suficiente. Además, en el teorema 4, la opción más elegida es la que supone reducir el enunciado a la condición suficiente. Por otra parte, parece que entienden mejor esta condición que la necesaria, dada la diferencia entre los que eligen la opción correcta en los teoremas 2 y 3. Se sigue la necesidad de instruir a los alumnos en la distinción de los dos sentidos de las proposiciones *condicionales* y *bicondicionales*.

Tercer ciclo

Planificación y recogida de datos

Con el fin de poner en práctica las anteriores reflexiones, el equipo investigador diseñó unas instrucciones para explicar a los alumnos el significado de las expresiones que se están considerando. En el ANEXO se describen las que se impartieron al GE y la metodología seguida. Éstas se basan en transformaciones graduales de los enunciados de teoremas que incluyen otras formulaciones en las que se hace más evidente lo que es dado y lo que se pretende demostrar.

Pasadas dos semanas, se propuso un tercer cuestionario a los alumnos de ambos grupos. En él se enuncian tres teoremas que, respectivamente, utilizan las expresiones: *una condición necesaria*; *una condición suficiente*; y *si, y sólo si*, (obsérvese que estos tres teoremas se corresponden, en este orden, con los teoremas 2, 3 y 4 del segundo ciclo; el teorema 1 de este último no tiene su equivalente porque no supuso ninguna dificultad, y, por tanto, los alumnos del GE no pueden mejorar sus respuestas en enunciados con la expresión *necesaria y suficiente*). Después de cada enunciado se sugieren cuatro posibles caminos para demostrarlo, y de ellos los alumnos debían elegir el correcto. La finalidad de esta cuestión consiste en observar la evolución de los alumnos en la interpretación de enunciados que contienen las expresiones *una condición necesaria*, *una condición suficiente* y *si, y sólo si*, después de recibir las instrucciones anteriormente descritas.

Cuestión 1: A continuación se enuncian tres teoremas. Si quisiéramos demostrarlos, ¿qué tendríamos que hacer? Después de cada enunciado se sugieren varias posibilidades, de las que tienes que elegir una. (Para evitar repeticiones, aquí se reproducen las distintas posibilidades, una sola vez, a continuación del último enunciado).

> Teorema 1. *Una condición necesaria para que un trapecio sea isósceles es que sus diagonales sean iguales.*
>
> Teorema 2. *Una condición suficiente para que un trapecio sea isósceles es que sus diagonales sean iguales.*
>
> Teorema 3. *Un trapecio es isósceles si, y sólo si, sus diagonales son iguales.*

Posibilidades:

1. *Considerar un cuadrado con lado el igual del trapecio isósceles y ver que sus diagonales son iguales.*

2. *Considerar un trapecio isósceles cualquiera y demostrar que sus diagonales son iguales.*

3. *Considerar un trapecio en el que las diagonales sean iguales y demostrar que se trata de un trapecio isósceles. 4. En primer lugar, considerar un trapecio isósceles cualquiera y demostrar que sus diagonales son iguales. Y después, considerar un trapecio en el que las diagonales sean iguales y demostrar que se trata de un trapecio isósceles.*

Análisis de datos

Para analizar sus respuestas se consideran las mismas categorías que en el segundo ciclo, y de este análisis sólo se destacan aquí dos aspectos: la evolución de los alumnos del GE y los niveles alcanzados por ambos grupos.

En primer lugar se considera la evolución de los porcentajes de respuestas correctas del segundo al tercer ciclo en el GE, por ser este grupo el que ha recibido instrucción con una metodología específica. En la tabla 5 se muestra la evolución de las respuestas correctas en este grupo sobre los teoremas de *condición necesaria*, de *condición suficiente*, y de *condición necesaria y suficiente* (con la expresión *si, y sólo si*,):

	CN	*CS*	*CNS*
Ciclo 2	14	52	38
Ciclo 3	68	82	86

Tabla 5. Evolución de los porcentajes de respuestas correctas en los distintos teoremas.

Estos datos se visualizan en la figura 2.

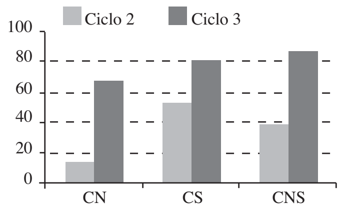

Figura 2. Diagrama que representa la evolución de respuestas correctas.

Se observa un fuerte aumento de las respuestas correctas en los tres teoremas. Como consecuencia, retroceden y casi desaparecen los errores comentados en el ciclo anterior.

Para apreciar mejor el nivel de esta evolución en el GE, en la tabla 6 se muestran los porcentajes de alumnos que eligen cada opción (1, 2, 3, 4), en los distintos teoremas (T1, T2, T3), en ambos grupos. En cada caso, los porcentajes correspondientes a la opción correcta (C) se presentan con doble recuadro.

	T1:CN		*T2:CS*		*T3:CNs*	
	GE	*GC*	*GE*	*GC*	*GE*	*GC*
1	0	0	0	5	9	10
2	68	25	14	55	0	10
3	14	60	82	40	5	25
4	18	15	5	0	86	55

Tabla 6. Porcentajes de alumnos que eligen cada opción, en los distintos teoremas, en ambos grupos.

Estos últimos se visualizan en la figura 3:

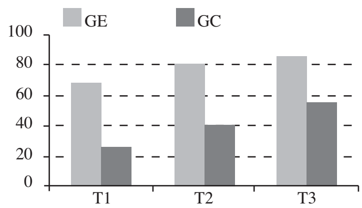

Figura 3. Diagrama comparativo del nivel alcanzado en ambos grupos.

Se aprecian porcentajes de respuestas correctas muy superiores en el GE que en el GC en los tres teoremas. Además, mientras que en aquel la mayoría de los alumnos elige la opción correcta en todos los teoremas, en el GC sólo ocurre esto en el tercer teorema—de *condición necesaria y suficiente*—, siendo mayoritarias las opciones que suponen una identificación de la proposición con su recíproca (IdRe) en los teoremas de *condición necesaria* y de *condición suficiente*.

Reflexiones

De todo lo anterior se deducen las siguientes reflexiones:

1. La interpretación de los distintos enunciados ha evolucionado de manera muy favorable con la instrucción recibida. Esto se ha podido constatar tanto en la variación de las respuestas de los alumnos del GE del segundo al tercer ciclos, como en la comparación de estos resultados con los del GC.

2. Paralelamente, los errores observados en el ciclo anterior se han reducido hasta casi desaparecer en el grupo experimental.

Debate y entrevistas

Con el fin de esclarecer las respuestas de los alumnos e indagar en sus dificultades de interpretación se diseñaron dos debates, procurando que se contrastaran las diferentes ideas que tenían unos alumnos frente a otros. Para ello se eligieron a 8 alumnos del GE, éstos aceptaron participar, y se diseñaron los debates: los alumnos debían exponer y defender ante toda la clase las respuestas que habían emitido en sus cuestionarios de los tres ciclos de Investigación-Acción (previamente se les habían dado copias de sus respuestas para que recordaran lo que en su día habían contestado), y a continuación, interviniendo toda la clase, tenía lugar el propio debate en el que se contrastaban sus interpretaciones. En él intervendrían todos los alumnos del GE y el Profesor-Investigador actuaría de moderador con la función de reconducir el debate para posibilitar la indagación. Estos alumnos se eligieron para que estuvieran representados los cuatro *esquemas de prueba iniciales detectados* en los alumnos (Ibañes y Ortega (2001), y que tienen que ver con la interpretación de los enunciados), y que tuvieran facilidad de expresión y de comunicación.

Los debates se llevaron a cabo casi dos meses después de que los alumnos hubieran realizado los cuestionarios del tercer ciclo, el primero, que versó sobre las interpretaciones de hipótesis y tesis, discurrió con la estructura indicada, con abundantes intervenciones del profesor, pero en el segundo los alumnos comenzaron a intervenir con espontaneidad desde la exposición de sus compañeros, produciéndose encadenamientos de intervenciones de los estudiantes más prolongados, hasta el punto de haberse producido varios ciclos constituidos por numerosas réplicas y contrarréplicas, afectando a bastantes alumnos, con un final esclarecedor.

Para seguir profundizando en las indagaciones se diseñaron cinco entrevistas a cinco parejas de alumnos: los ocho de los debates y otros dos que habían tenido intervenciones muy destacadas en los mismos. Los alumnos se distribuyeron pensando en la fluidez de los diálogos y se llevaron a cabo a continuación de los debates. Unos y otras se han grabado integramente en audio y se han hecho las transcripciones completas para analizarlas con rigor, pero por razones de extensión aquí no se reproducen y sólo se describen las reflexiones más importantes de las mismas:

– Se producen rectificaciones de las posturas erróneas mantenidas por los alumnos, lo que evidencia una dimensión social del aprendizaje.

– Todos los alumnos entrevistados destacan la dificultad que supone utilizar las expresiones objeto de estudio, incluso aquellos que las interpretan y emplean perfectamente.

– Se han propuesto expresiones equivalentes a las utilizadas por el profesor para los enunciados de *condición necesaria* (*para que … , se tiene que … ; para que … , es imprescindible que …*) y de *condición suficiente* (*para que … , bastaría que …*), que según los propios alumnos facilitan su comprensión. Esto es de valorar doblemente: en primer lugar, por ser propuestas de los alumnos y, por tanto, más próximas a su lenguaje, y, en segundo lugar, porque este tipo de enunciados, los de condición necesaria, fueron los que supusieron mayores dificultades para los alumnos lo que refuerza el valor didáctico de esas propuestas.

Conclusiones

Una revisión global de los tres ciclos que se han descrito, junto con las reflexiones de los debates y entrevistas, nos permite enunciar las siguientes conclusiones:

1. La utilización de determinadas expresiones en el enunciado de un teorema influye en la comprensión por parte de los alumnos de dicho enunciado, y, en particular, en la determinación de la hipótesis y de la conclusión.

2. Nuestros alumnos entienden el término "hipótesis" influenciados por el punto de vista de la metodología científica, lo que constituye un obstáculo para la interpretación de los enunciados.

3. Las dificultades que tienen los alumnos a la hora de interpretar los enunciados de los teoremas son tan importantes que los impiden saber lo que se tendría que hacer para establecer el enunciado.

4. Son particularmente difíciles para ellos los enunciados que contienen la expresión "*condición necesaria*" y les siguen en dificultad los que contienen los vocablos "*condición suficiente*".

5. El error más frecuente consiste en identificar una proposición con su recíproca, y también se observa cierta tendencia de los alumnos a interpretar los enunciados como de *condición suficiente*.

6. Con las instrucciones adecuadas los estudiantes pueden evolucionar favorablemente en la utilización e interpretación de las expresiones consideradas.

7. Los alumnos afirman que cuando las expresiones específicas se sustituyen por otras más habituales en el lenguaje usual, como las que han propuesto ellos, las dificultades de interpretación de los enunciados de los teoremas se suavizan en gran medida.

Todo lo anterior indica con absoluta claridad que la interpretación de los enunciados de los teoremas por parte de los alumnos influye de forma directa en los esquemas de prueba que tienen los propios alumnos y, por tanto, en la comprensión de las demostraciones.

Notas.

[1] Este trabajo es parte de un proyecto de investigación subvencionado por la D.G. de Enseñanza Superior BXX2000-0069

[2] Primer artículo de la trilogía ya publicado.

[3] Segundo artículo de la trilogía, en proceso de publicación.

Referencias bibliográficas

Alibert, D. y Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215–230). Dordrecht: Kluwer.

Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 247–280.

van Ash, A.G. (1993). To prove, why and how?. *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, *2*, 301–313.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 147–176.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*, 23-40.

Bell, A. W. (1979). The learning of process aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 361-387.

Bero, P. (1994). Pupil's understanding of mathematical proof. En L. Bazzini (Ed.), Theory and practice in Mathematics Education. *Proceedings of the Fifth international conference on systematic cooperation between theory and practice in Mathematics Education* (pp. 27–33). Grado, Italia.

van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, *8*, 27–34.

Elliot, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Morata. Madrid.

Fishbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*. *3* (2), 9-18 y 24.

Galbraith, P. L. (1981). Aspects of proving: a clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 1–28.

Hanna, G. (1989a). More than Formal Proof. *For the Learning of Mathematics*, *9*(1), 20–23.

Hanna, G. (1989b). Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (45–51). París.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21, 6–13.

Harel, G. y Sowder, R, L. (1998). "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III (pp. 234–283). Providence: American Mathematical Society.

Hersh, R. (1993). Proving is convencing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 389–399.

Ibañes, M. (2001). Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Dirigida por Tomás Ortega.

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997a). Mathematical Proofs: Classification and Exemples for Use in Secondary Education. En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* (pp. 109–155). Centrahil: The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA).

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997b). La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria. *Educación Matemática*, *9*(2), 65–104. México.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO*, *28*, 39–59.

Ibañes, M. y Ortega, T. (a publicar). *Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato*. Enseñanza de las Ciencias; Barcelona.

Kitcher, P. (1983). *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza Editorial. (El original es de 1963–1964).

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*. *20*(1), 41–51.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 47–68.

Reid, D.A. (1996). The role of proving: studens and mathematicians. En M. de Villiers (Coord.), *Proofs and Proving: Why, when and how?* (pp. 185–199). Centrahil: The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA).

Usiskin, Z. (1980): What should not be in the algebra and geometry curricula of average college-bound students. Was sollte aus den Algebra- u. Geometrielehrplaenen fuer Colleges gestrichen werden. *Math. Teacher*, *73*(6), 413–424.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, *26*, 15–30.

Marcelino J. Ibañes Jalón. Instituto "Vega del Prado". Valladolid.
E-mail: marcel33@terra.es
Línea de trabajo: Demostración y pruebas en secundaria.

Tomás Ortega del Rincón. Facultad de Educación. Universidad de Valladolid.
E-mail: ortega@am.uva.es
Líneas de trabajo: Desarrollo Curricular, Didáctica del Análisis y Pensamiento Numérico y Algebraico. Interpretación cognitiva de los enunciados de los teoremas

RESUMEN. Este artículo es el tercero de una trilogía, que forma parte de una investigación mucho más amplia que, desde hace unos años, se viene desarrollando en el Área de Didáctica de la Matemática de nuestra Universidad sobre la demostración matemática. La investigación que aquí se presenta surge de manera natural al analizar los esquemas de prueba de los alumnos de primer curso de bachillerato (16-17 años), ya que éstos tienen serias dificultades para reconocer y distinguir la hipótesis y la conclusión de los teoremas en distintas clases de enunciados, y, especialmente, cuando éstos contienen expresiones específicas del lenguaje matemático. Asimismo, se describe cómo los alumnos pueden mejorar la comprensión de los enunciados matemáticos con una instrucción adecuada.

ABSTRACT. This is the third paper of a trilogy which, at the same time, is part of a much larger research project on demonstrations in Mathematics that is being carried out in the Department of Math Teaching of the University of Valladolid. The problem to be dealt with in this article came to light while analyzing the proof schemes of sixteen- and seventeen-year-old students, who had serious difficulties differentiating the hypothesis of a theorem from the conclusion in different types of mathematical formulations. This became even more problematic when the expressions contained mathematical terms. Students can be aided in learning to comprehend mathematical statements through adequate teaching methods.

ANEXO. Instrucciones del tercer ciclo

Estas explicaciones se hicieron, tanto en el GE como en el de control, de forma magistral y en **un período lectivo de 50 minutos, pero con orientaciones distintas**:

> En el GC la profesora explicó el significado de las expresiones objeto de estudio de la forma habitual, es decir, indicando lo que hay que hacer para demostrar el enunciado considerado. Y lo hizo, primero, comentando los ejemplos del cuestionario 2 que sus alumnos habían contestado unas semanas antes, y, después, poniendo nuevos ejemplos. En el GE el profesor investigador proyectó una serie de varias transparencias en las que se abordaba la cuestión desde distintos puntos de vista complementarios como se describen:

Expresiones usuales
1. Condición necesaria o suficiente

$$P \Rightarrow Q$$

Es equivalente a:

– P es condición suficiente para que se verifique Q.

– Q es condición necesaria para que se verifique P.

2. Condición necesaria y suficiente

$$P \Leftrightarrow Q$$

Es equivalente a:

– P es condición necesaria y suficiente para que se verifique Q.

– Q es condición necesaria y suficiente para que se verifique P.

3. Condición necesaria

> *Teorema: Una* ***condición necesaria*** *para que un cuadrilátero sea un paralelogramo es que sus diagonales se dividan mutuamente en segmentos iguales.*

Dicho de otra forma: *Si un cuadrilátero es un paralelogramo,* ***necesariamente*** *sus diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales.*

Escrito en la forma "Si ... , entonces": ***Si*** *un cuadrilátero es un paralelogramo,* ***entonces*** *sus diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales.*

Lo que hay que hacer para demostrarlo: ***Considerar*** *un paralelogramo cualquiera y* ***demostrar*** *que sus diagonales se cortan mutuamente en segmentos iguales.*

4. *Condición suficiente*

Teorema: Una ***condición suficiente*** *para que un cuadrilátero sea un paralelogramo es que sus diagonales se dividan mutuamente en segmentos iguales.*

Dicho de otra forma: ***Para que*** *un cuadrilátero sea un paralelogramo,* ***basta que*** *sus diagonales se dividan mutuamente en segmentos iguales.*

Escrito en la forma "Si ... , entonces": ***Si*** *las diagonales de un cuadrilátero se dividen mutuamente en segmentos iguales,* ***entonces*** *el cuadrilátero es un paralelogramo.*

Lo que hay que hacer para demostrarlo: ***Considerar*** *un cuadrilátero cuyas diagonales se dividan mutuamente en segmentos iguales y* ***demostrar*** *que es un paralelogramo.*

5. *Sí, y sólo sí*

Teorema: Un cuadrilátero es un paralelogramo ***si, y sólo si****, sus diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales.*

Dicho de otra forma: ***Si*** *las diagonales de un cuadrilátero se dividen mutuamente en segmentos iguales, dicho cuadrilátero es un paralelogramo* ***y sólo en ese caso****.* (Observar que se trata de las condiciones suficiente y necesaria, en este orden).

Escrito en la forma "Si ... , entonces": ***Si*** *las diagonales de un cuadrilátero se dividen mutuamente en segmentos iguales, dicho cuadrilátero es un paralelogramo.* ***Y recíprocamente****, si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces sus diagonales se dividan mutuamente en segmentos iguales.*

Lo que hay que hacer para demostrarlo: *Primero,* ***considerar*** *un paralelogramo cualquiera y* ***demostrar*** *que sus diagonales se dividen* *mutuamente en segmentos iguales. Y a continuación,* ***considerar*** *un cuadrilátero cuyas diagonales se dividan mutuamente en segmentos iguales y* ***demostrar*** *que es un paralelogramo.* (Observar que así se propone probar, primero, la condición necesaria y, a continuación, la suficiente; aunque podría hacerse en el otro orden).

Traducciones 1. *Teorema: Una condición necesaria para que un triángulo sea isósceles es que tenga dos ángulos iguales.*

Escribe el enunciado anterior utilizando,

- Dicho de otra forma.
- Escrito en la forma "Si ... , entonces".
- Lo que hay que hacer para demostrarlo.

2. *Teorema: Si un paralelogramo es un rombo, entonces sus diagonales coinciden con las bisectrices de sus ángulos.*

Escribe el enunciado anterior utilizando la expresión *una condición necesaria* :

3. *Teorema: Una condición suficiente para que un triángulo sea isósceles es que tenga dos ángulos iguales.*

Escribe el enunciado anterior utilizando,

- Dicho de otra forma.
- Escrito en la forma "Si ... , entonces".
- Lo que hay que hacer para demostrarlo.

4. *Teorema: Si un paralelogramo es un rombo, entonces sus diagonales coinciden con las bisectrices de sus ángulos.*

Escribe el enunciado anterior utilizando la expresión *una condición suficiente*:

5. *Teorema: Un triángulo es isósceles si, y solo si, tiene dos ángulos iguales.*

Escribe el enunciado anterior utilizando:

- Dicho de otra forma.
- Escrito en la forma "Si ..., entonces".
- Lo que hay que hacer para demostrarlo.

6. *Teorema: Si un paralelogramo es un rombo, entonces sus diagonales coinciden con las bisectrices de sus ángulos. Y recíprocamente, si en un paralelogramo las diagonales coinciden con las bisectrices de sus ángulos, entonces dicho paralelogramo es un rombo*.

Escribe el enunciado anterior utilizando la expresión si, y solo si:

Metodología: Una vez que en una transparencia se muestran los dos primeros contenidos, el resto se va pasando de unas formulaciones a otras de forma gradual y comprensiva, en las que se hace más evidente lo que es dado y lo que se pretende demostrar, empleando para ello tres estadios:

– Modificando ligeramente la expresión para que sea más intuitiva (Dicho de otra forma).

– Escribiendo el enunciado resultante en la forma si ..., entonces.

– Indicando la estrategia a seguir para demostrar (Lo que hay que hacer para demostrarlo).