Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria[1]

Josep Gascón
Departamento de Matemáticas
Universitat Autònoma de Barcelona

Introducción: Elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

El Programa Epistemológico[2] de Investigación en Didácticas de las Matemáticas surgió de la convicción de que el *origen del problema* de la Educación Matemática está en las propias matemáticas. El nacimiento de este Programa de Investigación[3] constituye una respuesta a la insuficiencia manifiesta de los modelos epistemológicos de las matemáticas, incluyendo los modelos elaborados por los epistemólogos de las matemáticas, para abordar el Problema de la Educación Matemática. El cuestionamiento de la transparencia de lo "matemático" y la asunción inequívoca de que *el misterio está en las propias matemáticas*, comporta que se tome la *actividad matemática* como objeto primario de estudio, como nueva "puerta de entrada" del análisis didáctico.

Para analizar la actividad matemática institucionalizada la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), situada dentro del Programa Epistemológico, empieza proponiendo un modelo epistemológico general de las matemáticas que describe el saber matemático en términos de *organizaciones matemáticas institucionales* (Chevallard, 1997 y 1999). Una organización matemática (en adelante OM) surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. No se dice lo que *es* una OM, pero se da un esbozo de su estructura postulando que está constituida por cuatro componentes principales: *tipos de problemas, técnicas, tecnologías y teorías*. Si ponemos el énfasis en las relaciones dinámicas que se establecen entre dichos componentes a fin de llevar a cabo la actividad matemática necesaria para responder a las cuestiones problemáticas iniciales, entonces aparecen dos caras inseparables: la práctica matemática o "*praxis*", $[\mathrm{T}/\tau]$, formada por las *tareas*, T, y las *técnicas* matemáticas, τ; y el "*logos*", $[\theta/\Theta]$, constituido por el *discurso matemático* que justifica e interpreta dicha práctica y que estructuramos en dos niveles: la *tecnología*, θ, que hace referencia directa a la práctica y la *teoría*, Θ, que constituye un segundo nivel de justificación de la práctica (o tecnología de la tecnología). Al unir las dos caras de la actividad matemática se obtiene la noción de *praxeología matemática*.

Las organizaciones (o praxeologías) matemáticas más elementales se llaman *puntuales* y están constituidas alrededor de lo que en determinada institución es considerado como un único tipo de tareas. Cuando una OM se obtiene por integración de cierto conjunto de OM *puntuales*, tales que todas ellas aceptan un mismo discurso tecnológico θ, diremos que tenemos una OM *local* caracterizada por dicha tecnología θ y la designamos mediante $\mathrm{OM}_\theta = [\mathrm{T}/\tau/\theta/\Theta]$. Aunque en la TAD se habla también de OM "regionales" y "globales", en este trabajo no iremos más allá del análisis de una OM "local" que vive en la Enseñanza Secundaria: la que se estructura en torno a la divisibilidad.

Pero, ¿qué se necesita para elaborar una OM? Esto es, ¿cuáles son las condiciones que posibilitan el desarrollo de las actividades matemáticas institucionalizadas? O, en otros términos, ¿cuáles son los medios de que dispone el matemático investigador o el alumno de matemáticas para llevar a cabo una actividad matemática que cristalice en una OM que responda a ciertas cuestiones?

Ante todo hay que decir que, tanto el investigador como el alumno, cada uno en su nivel, utilizan *técnicas didácticas*, esto es, *técnicas de estudio*, cuya eficacia depende de su integración en un proceso, el *proceso de estudio* de una OM en el seno de una institución. La TAD completa entonces el modelo epistemológico del saber matemático antes descrito con un modelo de la *actividad didáctica* o *actividad de estudio* (de las matemáticas). Se trata de la *teoría de los momentos didácticos*[4] que puede considerarse como un modelo funcional del proceso de estudio de las OM. Paralelamente a la noción de OM surge así la noción de *organización* (o *praxeología*) *didáctica*, con sus dos caras: "praxis"—formada por *tareas* y *técnicas didácticas*—y discurso razonado o "logos" sobre dicha práctica—formado por *tecnologías* y *teorías didácticas*—[5]. Denotaremos mediante $\mathrm{OD}_\theta = \partial\mathrm{OM}_\theta$ a la organización didáctica asociada a la OM_θ.

Resulta, en definitiva, que para elaborar una OM_θ debemos utilizar una organización didáctica $\partial\mathrm{OM}_\theta = \mathrm{OD}_\theta$. Aunque, en realidad, la frontera entre lo matemático y lo didáctico no está establecida de una vez por todas, puesto que históricamente se ha producido una matematización creciente de lo didáctico y, muy en particular, de las técnicas de estudio de las matemáticas. Si, en principio, la actividad de estudio puede ser considerada como *emergente de una* OM (en tanto que actividad dirigida a responder las cuestiones problemáticas que la OM permite plantear), también debe considerarse como *productora de saber matemático* y, por tanto, de ciertas OM. Lo matemático y lo didáctico aparecen así como dos dimensiones de la realidad doblemente interdependientes. Lo didáctico, esto es, lo relativo al estudio de las matemáticas, supone la existencia de las OM, pero contribuye a su producción. Las OM son, a la vez, el *objeto* y el *producto* de la actividad de estudio.

En este trabajo utilizaremos los instrumentos que proporciona la TAD para analizar, en primera instancia, la OM escolar (empírica) en torno a la divisibilidad tal como aparece en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.) Española (12–16 años). Mostraremos que se reduce a unas pocas clases de problemas de divisibilidad de los números naturales; que estas clases de problemas se estudian por separado y fragmentadamente con técnicas prealgebraicas y bastante algorítmicas; y que los elementos tecnológicos que justifican dichas técnicas están casi completamente ausentes y tienen muy poca incidencia sobre la flexibilización y consiguiente desarrollo de la actividad matemática. Por todo ello será preciso construir una OM "minimal" que denominaremos $\mathrm{OM}_{\mathrm{DN}}$ que contenga todas las clases de problemas de divisibilidad que aparecen efectivamente en la E.S.O. junto a las ampliaciones de éstas que se obtienen mediante ligeras variaciones de las técnicas prealgebraicas existentes y junto a la explicitación de los elementos tecnológico-teóricos que sustentan dichas técnicas (sección 2). En la sección 3 mostraremos la incompletitud relativa y el carácter prealgebraico de $\mathrm{OM}_{\mathrm{DN}}$. En la sección 4 tomaremos $\mathrm{OM}_{\mathrm{DN}}$ como punto de partida de un proceso de *modelización algebraica*, μ , que permitirá construir $\mathrm{OM}_{\mathrm{DZ}}$, modelo algebraico de $\mathrm{OM}_{\mathrm{DN}}$, como organización mucho más amplia y completa.

$$\mathrm{OM}_{\mathrm{DN}} \xrightarrow{\mu} \mathrm{OM}_{\mathrm{DZ}}$$

En la sección 5, por fin, se muestran los efectos matemáticos y didácticos de esta algebrización. Se muestra, en especial, que la *modelización algebraica* de $\mathrm{OM}_{\mathrm{DN}}$ que provoca su extensión a los enteros, puede ser considerada como una *técnica didáctica* (de "ayuda al estudio"), esto es, un instrumento imprescindible para llevar a cabo un proceso de estudio relativamente "*integrado*" y "*completo*" de la divisibilidad. La utilización escolar de esta técnica didáctica choca con muchas restricciones porque su puesta en marcha modificaría profundamente el *contrato didáctico institucional* vigente en la E.S.O.

Las organizaciones matemáticas “empíricas” en el proceso de estudio

Supongamos que en una determinada institución docente, I, digamos la *Enseñanza Secundaria Obligatoria* (E.S.O.), queremos estudiar un “tema” matemático particular como, por ejemplo, la *divisibilidad*. Es previsible que en I, existan varias OM que contendrán nociones y actividades matemáticas relacionadas con la divisibilidad. Dichas OM aparecerán, probablemente, más o menos *aisladas* e *incompletas* y, además, estarán entremezcladas con elementos de otras OM de manera que no se podrán discernir a simple vista los contornos de las diferentes OM que están ahí presentes, ni las intrincadas relaciones que se han establecido entre ellas. Ésta es, de hecho, una característica habitual de las OM “*empíricas*”, esto es, de las que existen efectivamente en las instituciones escolares actuales y que podemos rastrear en los libros de texto, en los documentos curriculares, en los apuntes de los alumnos y en las prácticas docentes que el profesor lleva a cabo efectivamente en el aula. Estas OM empíricas podrían considerarse como la *reconstrucción escolar espontánea* (fruto, en gran parte, de los fenómenos de transposición didáctica) de cierta OM_θ que se pretende sea estudiada en I.

Partimos, provisionalmente, de la siguiente hipótesis que deberá ser modificada progresivamente a medida que vaya siendo contrastada empíricamente:

Hipótesis: *Estudiar* una organización matemática OM_θ en una institución docente I, consiste en *reconstruir artificialmente* dicha organización en I como el resultado final de un proceso de *ampliaciones y completaciones* progresivas que, partiendo de OM elementales (*puntuales*), pasa por una serie de OM *intermedias*. Este proceso de estudio (o reconstrucción) de OM_θ en I estará guiado por la actividad matemática que pueda llevarse a cabo en cada una de esas OM intermedias, según las restricciones específicas que irán evolucionando a medida que avanza el proceso de ampliación.

La hipótesis anterior permite plantear diferentes tipos de problemas didácticos (Gascón, 2001) en función de la naturaleza de la OM que se quiera estudiar. Enunciaremos uno de dichos tipos de problemas en forma genérica y lo abordaremos a continuación en el caso particular de la divisibilidad:

Problema inicial: ¿Cómo pueden utilizarse las OM "empíricas" para llevar a cabo un proceso de estudio en I? Si empezamos recomponiendo una OM "minimal" que integre las organizaciones matemáticas empíricas que aparecen en I, ¿cómo se puede avanzar en el proceso de *ampliaciones y completaciones* progresivas que se requieren para reconstruir OM_θ en I?

Dado que es ilusorio pretender dar una respuesta general a estas cuestiones, vamos a contestar en el caso particular de la OM en torno a la *divisibilidad*, tal como aparece en la *Enseñanza Secundaria Obligatoria española* (E.S.O.).

Reconstrucción de una organización aritmética escolar OM_{DN} en torno a la divisibilidad de los números naturales

Mostraremos que los problemas escolares de *divisibilidad de números naturales* que aparecen en la E.S.O. forman clases bastantes aisladas entre sí, hasta el punto que generan OM *puntuales* relativamente *algorítmicas* e *independientes* entre sí y, además, muy *incompletas*. Será preciso, por tanto, empezar recomponiendo la OM "*minimal*", que designamos mediante OM_{DN}, que integre algunas de estas OM *empíricas y puntuales* que aparecen efectivamente en la E.S.O.

Dado que la OM_{DN} así reconstruida continuará siendo muy "incompleta" y "poco algebrizada", requerirá *ampliaciones* y *completaciones* progresivas que se llevarán a cabo mediante la *modelización matemática* de OM_{DN}. Mostraremos, en este caso concreto, que en la actividad de modelización matemática no sólo debe construirse el *modelo*, también debe ser construido el *sistema a modelizar* puesto que éste no está dado de antemano.

Para describir los componentes principales de la organización matemática OM_{DN} seguiremos las siguientes etapas:

1. *Reconstruiremos algunas clases de problemas* de divisibilidad de los naturales estudiadas fragmentariamente en la primera etapa de la E.S.O. (12–14 años) y, correlativamente, *describiremos las técnicas prealgebraicas*[6] que se utilizan en los libros de texto de forma más o menos explícita para resolver dichos problemas.

2. *Describiremos de forma explícita los elementos tecnológico-teóricos* que, de forma bastante implícita, sirven para justificar e interpretar dichas técnicas en la E.S.O. Nos concentraremos en el primer nivel de descripción-justificación-interpretación de las técnicas, esto es, en el nivel de la *tecnología*. El segundo nivel de justificación, el nivel que denominamos de la

teoría, queda siempre en el horizonte de la actividad matemática; raramente se utiliza la teoría para modificar la práctica matemática escolar y, mucho menos, en el caso de la E.S.O.

Clases de problemas de divisibilidad y técnicas "prealgebraicas"

Partimos de una muestra de problemas de *divisibilidad de números naturales* tal como aparecen en el primer curso de la E.S.O.[7] (12–13 años). Nos proponemos como primer ejercicio matemático-didáctico la utilización de *técnicas aritméticas* (prealgebraicas) para abordar dichos problemas y proponer una solución de los mismos. Esta actividad matemática ("técnico-práctica") nos proporcionará criterios para empezar a clasificar los problemas de la muestra y para describir y relacionar entre sí las técnicas prealgebraicas que se utilizan para resolver estos problemas en la primera etapa de la E.S.O. (12–14 años).

P1. El producto de dos múltiplos de 5, ¿es siempre un múltiplo de 5?
P1$'$. El producto de un múltiplo de 5 por un múltiplo de 7, ¿es siempre un múltiplo 35?
P2. Justifica que $44 + 55 + 77$ es múltiplo de 11, sin necesidad de calcular la suma.
P2$'$. La suma de un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7, ¿es siempre múltiplo de 11? ¿es un múltiplo de 7? ¿es un múltiplo de $11 + 7$?
P3. El resultado de sumar dos múltiplos de 5, ¿es siempre un múltiplo de 10? ¿Qué condiciones han de cumplir los múltiplos de 5 para que al sumarlos se obtenga un múltiplo de 10?
P3$'$. ¿En qué casos la suma de dos múltiplos de 18 será también un múltiplo de 90?
P4. Escribe el primer múltiplo común de 240 y 300 que es más grande que 2000.
P4$'$. Calcula el menor múltiplo común de 8, 10 y 15.
P5. ¿Cuántos divisores comunes tienen los números 60 y 48? ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es el mayor?
P5$'$. ¿Cuál es el mayor divisor común de los números 551 y 437? ¿Cuántos divisores comunes tienen estos dos números?
P6. Busca todos los divisores de 100 que son múltiplos de 4.
P6$'$. Busca todos los divisores comunes de 120 y 300 que son múltiplos de 6.
P7. ¿Es cierto que $4\alpha20$ es divisible por 4 sea cual sea el dígito α? ¿Cuál ha de ser el valor del dígito a para que el número $4\alpha33282$ sea múltiplo de 11?
P7$'$. Substituye los símbolos α y β por dígitos de manera que el número $4\alpha5\beta4$ sea, a la vez, múltiplo de 11 y de 4.
P8. Dos faros se encienden, respectivamente, cada 6 segundos y cada 10 segundos. Si se han encendido los dos a las 12 horas, ¿cuando volverán a coin-

cidir?
P9. Descompón un rectángulo de 108 cm por 80 cm en el mínimo número posible de cuadrados iguales cuyos lados midan un número entero de centímetros.
P10. Si contamos las fotografías de 5 en 5 sobran 3, pero si las contamos de 9 en 9, entonces sobran 6. ¿Cuál es el número mínimo de fotografías que tenemos sabiendo que tenemos más de 50?
P11. Si archivamos los CD en cajas de 5 nos sobran 4, si los archivamos en cajas de 8 nos sobran 6 y si los archivamos en cajas de 3 ni falta ni sobra ninguno. ¿Cuántos CD tenemos, como mínimo?
P11′. Si contamos las agujas de una caja de 5 en 5, de 10 en 10, de 15 en 15 o de 20 en 20, siempre sobran 2. Pero si se cuentan de 7 en 7, no sobra ninguna. ¿Cuál es el número mínimo de agujas que contiene la caja?

A continuación utilizaremos las técnicas aritméticas (prealgebraicas) habituales para resolver algunos de estos problemas.

P3' ¿En qué casos la suma de dos múltiplos de 18 será también un múltiplo de 90?

Resolución: Dado que 90 es 5 veces 18, para que la suma de dos múltiplos de 18 sea un múltiplo de 90, debe cumplirse que el número de veces que uno de ellos contiene a 18 más el número de veces que el otro contiene a 18, sea un múltiplo de 5.

P4. Escribe el primer múltiplo común de 240 y 300 que sea más grande que 2000.

Resolución: Dado que la diferencia entre 240 y 300 es 60, resultará que los sucesivos múltiplos de 300 se obtendrán sumando a los múltiplos de 240 los correspondientes múltiplos de 60.

240	+60	300
480	+120	600
720	+180	900
960	+240	1200
1200	+300	1500
1440	+360	1800
1680	+420	2100
1920	+480	2400

El *menor múltiplo común* de 240 y 300, será 1200 porque se ha obtenido sumando a un múltiplo de 240 (el 960) el primer múltiplo de 60 que también es múltiplo de 240 (que es el 240). El siguiente múltiplo común aparecerá cuando en la columna de los múltiplos del 60 aparezca el siguiente múltiplo de 240 (que es el 480). Resulta, pues, que el segundo múltiplo común es el 2400 y éste resulta ser el primer múltiplo común a 240 y 300 que es mayor que 2000.

P5′. ¿Cuál es el mayor divisor común de los números 551 y 437? ¿Cuántos divisores comunes tienen estos dos números?

Resolución: La técnica más rudimentaria consiste en escribir todos los divisores de cada uno de los dos números empezando por el 1 y observar cuáles son los comunes. De esta forma se obtendría, en particular, el máximo común divisor de los dos números dados. Se trata de una técnica poco eficaz (poco ”económica”) en el caso en que los números tengan ”muchos” divisores o bien cuando sus divisores primos sean ”grandes”.
Existe otra técnica aritmética, mucho más económica, para calcular el mcd de dos números. Se basa en el hecho que, si d es divisor de 551 y de 437, entonces también es divisor de la diferencia $551437 = 114$. El proceso se puede iterar y, forzosamente, se alcanzará una pareja de números tal que uno de ellos será divisor del otro. Éste será el *máximo común divisor* buscado (en el ejemplo el mcd es el número 19).

	551	437
551 – 437 = 114	114	437
437 – 3(114) = 95	114	95
114 – 95 = 19	19	95
95 – 5(19) = 0	**19**	0

P6. Busca todos los divisores de 100 que son múltiplos de 4.

Resolución: Existe una técnica aritmética rudimentaria que consiste en escribir todos los divisores de 100 y buscar entre ellos los que son múltiplos de 4. Pero, de nuevo, se trata de una técnica ineficaz a poco que crezca el número de divisores del primer número.
Es mucho mejor calcular los divisores de 100 que son múltiplos de 4 sin más que multiplicar por 4 cada uno de los divisores de $100/4 = 25$. Dado que los divisores naturales de 25 son 1, 5 y 25; los divisores naturales de 100 que, además, son múltiplos de 4, serán:

$$1 \cdot 4 = 4; 5 \cdot 4 = 20 \text{ y } 25 \cdot 4 = 100$$

P7. ¿Cuál ha de ser el valor del dígito α para que el número $4\alpha33282$ sea múltiplo de 11?

Resolución: Para que el número dado sea múltiplo de 11, la diferencia entre:

$4+3+2+2=11$ y $\alpha+3+8=11+\alpha$ que es igual al dígito desconocido α, debe ser un múltiplo de 11. Dado que el único dígito múltiplo de 11 es el cero, resulta que a es cero y el número buscado es el 4033282.

Si analizamos las técnicas empleadas en esta pequeña muestra de problemas e intentamos extenderlas al resto de los problemas enunciados, nos encontramos con "partición" de la muestra que, postulamos, se extendería a todos los problemas que aparecen en el conjunto de los textos de primer curso de E.S.O. Podemos comprobar, en efecto que las cinco técnicas utilizadas, con pequeñas variaciones, son suficientes para resolver todos los 19 problemas enunciados y, postulamos, que también son suficientes para resolver la inmensa mayoría de los problemas de divisibilidad sobre los naturales que aparecen en los textos del primer curso de la E.S.O.

En resumen, la organización aritmética escolar $\mathrm{OM}_{\mathrm{DN}}$ que estamos analizando y empezando a "reconstruir", contiene *cinco* (*tipos de*) *técnicas* casi algorítmicas (con pequeñas variaciones) y las correspondientes *cinco clases de problemas* bastante independientes entre sí. Dado que todavía no hemos explicitado los elementos tecnológicos necesarios para describir, interpretar y justificar las técnicas, identificaremos cada una de ellas con una etiqueta. En la siguiente sección daremos una descripción más precisa de cada técnica, junto con la correspondiente justificación e interpretación.

Técnica		Problemas
1	$M=d{\cdot}x$	1, 1', 2, 2', 3 y 3'
2	mcm	4, 4', 8, 10, 11 y 11'
3	mcd	5, 5' y 9
4	$M/x=d{\cdot}x$	6 y 6'
5	Criterios algorítmicos	7 y 7'

Elementos tecnológico-teóricos

En este apartado explicitaremos los *elementos tecnológico-teóricos* (expresados en forma de "definiciones" y "proposiciones") que sirven implícitamente para *describir*, *justificar*, *interpretar* y *producir* las técnicas aritméticas (prealgebraicas) de resolución de problemas de divisibilidad que hemos utilizado. Enunciaremos únicamente aquellos elementos del discurso tecnológico que se mantienen más próximos al trabajo técnico y que, por tanto, son más visiblemente necesarios para que las técnicas utilizadas puedan "vivir" en la E.S.O. Sería interesante "demostrar" las proposiciones que enunciaremos a continuación, pero éste es un trabajo que no desarrollaremos aquí[8].

- Definición (1): Diremos que un número natural M es *múltiplo* de otro número natural d, si M contiene a d un número exacto de veces; esto es, si la división euclídea de M entre d es exacta (tiene resto cero). El número 0 es *múltiplo de todos los números*.

- Definición (2): Si M es un múltiplo de d, diremos que d es un *divisor* de M. El número 1 es *divisor de todos los números*.

- Definición (3): Si los únicos divisores de un número natural N son 1 y N, entonces diremos que el número N es *primo*. El número 1 no se considera "primo".

- Definición (4): Dos números naturales se llaman *primos entre si* (o bien *coprimos*) si el único divisor común de ambos es el número 1.

- Definición (5): Se llama *mínimo común múltiplo* (m.c.m.) de dos o más números naturales al menor número natural que es múltiplo de todos ellos.

- Definición (6): Se llama *máximo común divisor* (m.c.d.) de dos o más números naturales al mayor número natural que es divisor de todos ellos.

- Proposición (1): La relación "ser múltiplo" es transitiva en el conjunto de los números naturales.

- Proposición (2): El producto de dos números naturales es múltiplo de ambos.

- Proposición (3): El producto de un múltiplo de N por un múltiplo de M es un múltiplo del producto $N \cdot M$ de ambos.

- Proposición (4): Al sumar dos múltiplos de un mismo número se obtiene otro múltiplo de dicho número.

- Proposición ($4'$): Al restar dos múltiplos de un mismo número natural se obtiene otro múltiplo de dicho número (siempre que la operación pueda realizarse en los naturales).

- Proposición ($4''$): Si un número natural es divisor de otros dos, entonces también es divisor de la suma de dichos números y de la resta del mayor menos el menor.

- Proposición (5): Si dos números son primos entre si, la suma de un múltiplo de uno de ellos más un múltiplo del otro no será múltiplo de ninguno de ellos (a menos que los dos sumandos lo sean).

- Proposición (6): *Criterios de divisibilidad*.
  Un número natural es divisible por (o múltiplo de)

  2 si su última cifra es par (el cero es un número par).

  3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.

5 si su última cifra es un 0 o un 5.

6 si es divisible por 2 y por 3.

10 si acaba en 0.

11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan un lugar par y las que ocupan un lugar impar es un múltiplo de 11.

- Proposición (7): Si d es un divisor de M, entonces todos los múltiplos de M son también múltiplos de d. En el conjunto ordenado de los múltiplos de d, los múltiplo de M aparecen con una periodicidad de M/d.

- Proposición (8): Sea d un divisor de M. Para que la suma de dos múltiplos N y P de d sea también un múltiplo de M debe cumplirse que la suma de veces que N y P contienen a d sea un múltiplo de M/d.

- Proposición (9): El m.c.m. de dos números se obtiene sumando al primer múltiplo de la diferencia que sea múltiplo del menor de ellos, el correspondiente múltiplo del menor.

- Proposición (10): Para calcular el m.c.m. de tres o más números basta calcular el m.c.m. de dos de ellos; a continuación el m.c.m. del resultado con el tercer número y así sucesivamente hasta agotar los números.

- Proposición (11): Si M es un múltiplo de d y N no es múltiplo de d, entonces la suma $M + N$ tampoco es múltiplo de d.

- Proposición (12): Los múltiplos comunes de dos números naturales son exactamente los múltiplos del m.c.m. de dichos números.

- Proposición (13): El m.c.d. de dos números coincide con el m.c.d. del menor y la diferencia entre el mayor y el menor.

- Proposición (13′): Para calcular el m.c.d. de dos números naturales basta sustituir el mayor por la diferencia entre ambos. Repitiendo este proceso se llegará siempre (en un número finito de pasos) a dos números iguales. Éste es el m.c.d. de los dos números iniciales.

- Proposición (14): Los divisores comunes de dos números naturales son exactamente los divisores del m.c.d. de dichos números.

Tal como han sido enunciados, *los elementos tecnológicos presentan una fuerte atomización* hasta el punto que algunas de las proposiciones parece que estén incluidas para justificar determinadas técnicas muy particulares. Podría decirse que esta “atomización” o “desintegración”, que es común a los tipos de problemas de divisibilidad, a las técnicas y a los elementos tecnológicos, es una de las características más visibles de esta *organización aritmética escolar empírica* que hemos denotado por $\mathrm{OM_{DN}}$. Dicha atomización se mantiene incluso después de nuestra "reconstrucción" que ha consistido únicamente en añadir algunas variaciones a los problemas y a las técnicas aritméticas que figuran en los libros de texto.

	Técnica	Problemas	Tecnología
1	$M = d{\cdot}x$	1, 1', 2, 2', 3 y 3'	Def. 1 y 2; Prop. 1 a 5
2	mcm	4, 4', 8, 10, 11 y 11'	Def. 5; Prop 9 a 12
3	mcd	5, 5' y 9	Def. 6; Prop. 13, 13' y 14
4	$M/x = d{\cdot}x$	6 y 6'	Prop. 7 y 8
5	Criterios algorítmicos	7 y 7'	Prop. 6

La primera "técnica" aritmética que se utiliza en la resolución de los problemas de la muestra citada (y que hemos etiquetado mediante $M = d \cdot x$) podría describirse como la aplicación de las propiedades "inmediatas" que se deducen de las Definiciones (1) y (2) de *múltiplo* y *divisor* en el conjunto de números naturales. Estas propiedades se explicitan en las Proposiciones (1) a (5) y se aplican en los Problemas 1 a $3'$. Aunque la *clase de problemas* correspondiente no es muy "uniforme" puesto que no se resuelven mediante una técnica común, podríamos decir que todas las subtécnicas están muy relacionadas entre sí porque responden a las "propiedades aritméticas básicas" (que se desprenden de las definiciones) de los múltiplos y divisores de un número natural.

La segunda técnica que aparece es la que permite calcular aritmética y sistemáticamente los múltiplos comunes de dos o más números naturales y, en particular, el mínimo común múltiplo de los mismos. La técnica se basa en la Definición (5) y está descrita y justificada en las Proposiciones (9) a (12). Esta técnica, junto a ciertas variaciones de la misma, se emplea en los Problemas 4, $4'$ y 8. Una variación más fuerte de esta técnica se emplea en los Problemas 10, 11 y $11'$.

La tercera técnica que se utiliza para resolver esta muestra de problemas es la que permite calcular aritméticamente el máximo común divisor de dos (o más) números naturales y, además, simplifica el cálculo del conjunto de los divisores comunes de dichos números. La técnica se basa en la Definición (6) y está descrita y justificada en las Proposiciones (13), ($13'$) y (14). Se emplea en los Problemas 5, $5'$ y 9.

La cuarta técnica permite calcular sistemáticamente todos los divisores de un número natural que son múltiplos de otro divisor, así como ligeras variaciones de esta cuestión. Se fundamenta y está descrita y justificada en las Proposiciones (7) y (8). Se emplea, por ejemplo, en los Problemas 6 y $6'$.

La quinta técnica, por fin, se presenta como un conjunto de algoritmos, los *Criterios de divisibilidad*, que aparecen en los libros de esta primera etapa de la E.S.O. como si no tuvieran ninguna relación entre sí y de una manera absolutamente dogmática y misteriosa. Figuran en la Proposición (6)—sin explicitar—y permiten decidir si un número concreto es o no es divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 y 11. La elección de estos números concretos también es misteriosa. No se da ninguna explicación del porqué no aparece, por ejemplo, el criterio de divisibilidad por 7. Una pequeña variación de estos algoritmos se emplea para resolver los Problemas 7 y $7'$.

Carácter prealgebraico e incompletitud relativa de la organización OM_{DN}

En un trabajo anterior (Bolea, Bosch y Gascón, 2001) hemos caracterizado el grado de algebrización de una OM mediante cuatro indicadores.

El primero de estos indicadores (IGA1) está relacionado con la posibilidad de tomar en cuenta, describir y hasta manipular la *estructura global* de los problemas. Esto significa que cuanto más algebrizada está una OM más clara es la tendencia a tratar con *tipos generales de problemas*, en lugar de tratar únicamente con problemas aislados. Para poder manipular la estructura global de los diferentes tipos de problemas es preciso hacer un uso sistemático del juego entre *parámetros* e *incógnitas*. En OM_{DN} todas las técnicas aritméticas empleadas mantienen una clara *distinción* entre las *variables* "*conocidas*" y las "*desconocidas*". Ninguna de dichas técnicas permite abordar el *estudio conjunto de todas las variables* del sistema subyacente al problema. En ningún caso se lleva a cabo una *simbolización global de las relaciones* entre los "datos" y las "incógnitas" del problema. No es posible llevar a cabo en OM_{DN} ningún tipo de "juego" entre *parámetros* y *variables*, manipular la estructura global de los problemas de divisibilidad ni, por tanto, llevar a cabo "justificaciones" ni "demostraciones" relativas a dicha estructura.

Un segundo indicador (IGA2) del grado de algebrización de una OM viene dado por la posibilidad de plantear y estudiar problemas relacionados con la *descripción*, la *interpretación*, la *justificación*, la *producción* y el *alcance* (o dominio de validez) de las técnicas que la integran. Ninguno de estos cuestionamientos se puede llevar a cabo en OM_{DN}. En particular, una OM algebrizada debe permitir describir los tipos de problemas resolubles con determinadas técnicas, estudiar en qué condiciones un determinado tipo de problemas tendrá o no tendrá solución, en qué casos la solución será única y, en definitiva, debe permitir caracterizar la *estructura de las soluciones*. Esto significa que cuanto más algebrizada esté una OM, más fácil será plantear la cuestión de las *condiciones de existencia de solución* (de un determinado tipo de problemas) y no sólo la cuestión de la *determinación de una solución* de dicho tipo de problemas.

Tomando la organización aritmética OM_{DN} en conjunto, puede afirmarse que en ella no se persigue descubrir las *condiciones de existencia del objeto incógnita* (lo que, por otra parte, tampoco sería posible dada la naturaleza de las técnicas utilizadas). Únicamente se pretende calcular el *valor de la incógnita* de cada uno de los diferentes tipos de problemas que aparecen, siendo éste el objetivo principal de la actividad matemática que se lleva a cabo en OM_{DN}.

El tercer indicador (IGA3) del grado de algebrización de una OM viene dado por la mayor o menor *unificación de los diferentes tipos de problemas* que forman parte de OM, así como por la mayor o menor *integración de las técnicas* correspondientes y de los *elementos tecnológicos* asociados. Esta unificación comporta, paralelamente, una reducción drástica de los instrumentos escritos (formalismos) con los que se representan y manipulan los problemas, las técnicas y los componentes del discurso tecnológico-teórico (nociones, conceptos, definiciones y teoremas). En un primer análisis hemos visto que los diferentes *tipos de problemas* de OM_{DN} se presentan *bastante aislados* entre sí y que también las *técnicas* aparecen *muy desintegradas*. Un estudio más detallado de los elementos tecnológicos propuestos y de sus relaciones con las técnicas y los tipos de problemas, permitirá clarificar un poco más esta cuestión.

El cuarto y último indicador (IGA4) del grado de algebrización de una OM se refiere a la posibilidad de generar *tipos de problemas cada vez más alejados del contexto* de la organización en cuestión. En el caso de OM_{DN} las técnicas de que se dispone no permiten ir más allá del ámbito de los números naturales y de las relaciones aritméticas básicas entre ellos. Unas de las razones de esta importante limitación técnica proviene del hecho que las técnicas aritméticas que estamos analizando no utilizan el *lenguaje funcional* ni las *fórmulas* como *modelos algebraicos*.

Podemos decir, en resumen, que OM_{DN} está muy "*poco algebrizada*" porque no satisface (o satisface muy levemente) ninguno de los cuatro indicadores citados. También diremos que esta OM escolar, incluso después de la reconstrucción que hemos llevado a cabo para obtener OM_{DN}, es "*incompleta*". Es evidente que ambas nociones, la de "*grado de algebrización*" y la de "*incompletitud*" son relativas y, por tanto, tomarán un sentido más preciso cuando comparemos OM_{DN} (su grado de algebrización y su completitud) con OM_{DZ} que se obtendrá, mediante un *proceso de modelización matemática*, a partir de OM_{DN} (ver próxima sección).

La *incompletitud relativa* de una OM hace referencia a la ausencia de componentes (tipos de problemas, técnicas y elementos tecnológico-teóricos) que podrían o deberían existir en función de los componentes que aparecen efectivamente de una manera más o menos explícita. Así, por ejemplo, la incompletitud puede mostrarse en la ausencia de un trabajo de las técnicas existentes que comportaría la ampliación de las clases problemas y daría origen a nuevos tipos de problemas que están ausentes. En otros casos es la inexistencia de técnicas, que podrían obtenerse como una simple composición de técnicas que están presentes en la OM inicial o mediante pequeñas variaciones de éstas, la que pone de manifiesto un aspecto de la incompletitud de dicha OM. En ocasiones las técnicas inexistentes son, sin embargo, necesarias para resolver problemas que efectivamente aparecen en la organización en cuestión y, como las técnicas están ausentes (no están institucionalizadas), se deja la resolución de dichos problemas a la responsabilidad 'creativa' de los sujetos de la institución. En otros casos, por fin, la incompletitud de una OM se pone de manifiesto en la ausencia de elementos justificativos e interpretativos de las técnicas que se utilizan en la OM en cuestión. Esta ausencia provoca una utilización rígida y estereotipada de las técnicas e impide, entre otras cosas, que éstas se desarrollen y generen nuevas técnicas.

El proceso de algebrización de la organización matemática $\mathbf{OM_{DN}}$

En esta sección describiremos la forma de utilizar la OM_{DN} como punto de partida de las *ampliaciones* y *completaciones* progresivas que requiere, de acuerdo con nuestra hipótesis inicial, su proceso de estudio. Dicho *proceso de estudio* parte de las cuestiones matemáticas subyacentes a dichos problemas y comportará una *completación progresiva* de OM_{DN} que se llevará a cabo mediante su *algebrización*, esto es, mediante su *modelización algebraica* (Bolea, Bosch y Gascón, 1998 y 2001).

Una vez que hemos reconstruido[9] la organización matemática OM_{DN} que queremos tomar como *sistema a modelizar*, describiremos el proceso de *modelización algebraica* que dará como resultado una nueva organización matemática que designaremos mediante $\mathbf{OM_{DZ}}$ que *ampliará* y *completará relativamente* la organización matemática aritmética inicial. Mediante dicha modelización, conseguiremos:

(1) Explicitar las nuevas técnicas (que deben generalizar e integrar de alguna manera las técnicas iniciales) y mostrar que pueden considerarse como una *modelización algebraica de las técnicas aritméticas*.

(2) Mostrar que, mediante un adecuado trabajo de las nuevas técnicas, es posible *integrar diferentes tipos de problemas*, incluyendo técnicas de nivel tecnológico superior y *ampliando la clase inicial de problemas*.

(3) Mostrar que las técnicas algebrizadas se constituyen en *elementos justificativos* e *interpretativos* de las técnicas aritméticas iniciales y provocan la emergencia de nuevos objetos matemáticos.

El carácter mucho más algebraico (en términos de los indicadores citados anteriormente) de la nueva organización matemática $\mathrm{OM_{DZ}}$ (en comparación con la organización inicial $\mathrm{OM_{DN}}$) modificará profundamente las *posibles formas de estudiarla* transformando, por tanto, las *organizaciones didácticas* posibles.

Modelización algebraica de las técnicas aritméticas de $\mathrm{OM_{DN}}$

El proceso de algebrización de $\mathrm{OM_{DN}}$ se iniciará *modelizando la técnica aritmética* que servía para calcular el mínimo común múltiplo (y todos los múltiplos comunes) de dos números naturales dados. Para ello, necesitamos la versión "algebraica" de la definición aritmética de "múltiplo":

> Definición (1A): Diremos que un número M es *múltiplo* de d, si y sólo si existe un tercer número x tal que: $M = d \cdot x$. (Esta definición ya no hace referencia a la noción aritmética de "contener un número exacto de veces" y no requiere restringirse al ámbito de los naturales, de manera que podemos suponer que M, d y x son números enteros).

Con esta nueva noción de "múltiplo", podemos modelizar de una forma muy sencilla los múltiplos M comunes a dos enteros a y b:

(M es un múltiplo común a a y b) $\Leftrightarrow$ (Existen enteros x, y tales que $M = bx = ay$)

La resolución algebraica de esta *ecuación diofántica* (lineal homogénea con dos incógnitas) requiere una técnica que puede vivir perfectamente en el actual tercero de E.S.O. (14–15 años). Así, por ejemplo, en el caso del Problema (4) se tiene:

> P4. Escribe el primer múltiplo común de 240 y 300 que sea más grande que 2000.

Resolución: Los múltiplos comunes a 240 y 300 son los números M que se escriben de la forma:

$$240x = 300y = M$$

Se simplifica:

$$4x = 5y$$

y se tiene el conjunto de todas las soluciones enteras:

$$\{(x, y) = (5, 4)t, t \in \mathbb{Z}\}$$

Para $t = 1$ se obtiene la solución $(5, 4)$ que corresponde a

$$M = \text{mcm}(240, 300) = 1200.$$

Mostraremos a continuación que mediante pequeñas variaciones de esta *técnica algebraica* es posible modelizar todas y cada una de las técnicas aritméticas de O^{DN}.
Para construir un modelo algebraico de una técnica que permita calcular los divisores comunes de dos números, debemos utilizar la traducción algebraica de la definición aritmética de "divisor".

> Definición (2A): En el conjunto de los números enteros, se dice que d es un *divisor* de M si y sólo si M es *múltiplo* de d.

Con esta nueva noción de "divisor", podemos modelizar de una forma muy sencilla los divisores d comunes a dos enteros a y b:

> (d es un divisor común a a y b) $\Leftrightarrow$ (Existen enteros x, y tales que $d = a/x = b/y$).

El problema se reduce de nuevo a la resolución algebraica de la *ecuación diofántica* (lineal homogénea con dos incógnitas). Así, por ejemplo, en el caso del Problema (5') se tiene:

> P5$'$. ¿Cuál es el mayor divisor común de los números 551 y 437? ¿Cuántos divisores comunes tienen estos dos números?

Resolución:

$$551x = 437y$$

Se simplifica y se obtiene la ecuación asociada:

$$29x = 23y.$$

Pero, en este caso, no todas las soluciones de la ecuación diofántica asociada proporciona *divisores comunes*. Se debe cumplir, además, la condición suplementaria de que el cociente $a/x = b/y$ sea un número entero.

$$\{(x, y) = (23, 29)t, t \in \mathbb{Z}\}$$

En este caso existe un único divisor común que corresponde a la solución que se obtiene en la diofántica asociada para $t = 1$ $(437/23 = 551/29 = 19)$.

Desarrollo e integración de las técnicas aritméticas de $\mathrm{OM_{DN}}$

A fin de poner de manifiesto la *integración de las técnicas aritméticas* de la organización $\mathrm{OM_{DN}}$, mostraremos cómo se utiliza la técnica modelizada en el caso particular de algunos de los problemas de la muestra anterior. Veremos que, en algunos casos, será preciso tomar en consideración variaciones de esta nueva técnica, lo que deberemos interpretar como un primer paso en el *desarrollo de las técnicas modelizadas*.

> P2′. La suma de un múltiplo de 11 mas un múltiplo de 7, ¿es múltiplo de 11? ¿es múltiplo de 7? ¿es múltiplo de $11 + 7$? [¿En qué condiciones lo es?].

Resolución: Se supone que hemos encontrado un múltiplo de 11 $(11x)$ y un múltiplo de 7 $(7y)$ tales que su suma es un múltiplo de 11 $(11z)$

$$11x + 7y = 11z \Rightarrow 7y = 11(z - x).$$

La solución general de esta diofántica es: $(y, z-x) = (11, 7)t$ y pone de manifiesto que si la suma de un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 es un múltiplo de 11, forzosamente el múltiplo de 7 sumado (esto es, $7y = 7(11t) = 77t$) era también un múltiplo de 11.

> P3′. ¿En qué casos la suma de dos múltiplos de 18 será también un múltiplo de 90?

Resolución:

$$18x + 18y = 90z \Rightarrow x + y = 5z.$$

Para cada valor de x tenemos una *ecuación diofántica lineal con dos incógnitas* que tiene infinitas soluciones para la variable y:

$$\begin{aligned}
x = 0 &\Rightarrow y = 5z - x = 0, 5, 10, 15, 20, ...\\
x = 0 &\Rightarrow y = 5z - x = 0, 5, 10, 15, 20, ...\\
x = 1 &\Rightarrow y = 5z - x = 4, 9, 14, 19, 24, ...\\
x = 2 &\Rightarrow y = 5z - x = 3, 8, 13, 18, 23, ...\\
x = 3 &\Rightarrow y = 5z - x = 2, 7, 12, 17, 22, ...\\
x = 4 &\Rightarrow y = 5z - x = 1, 6, 11, 16, 21, ...\\
x = 5 &\Rightarrow y = 5z - x = 0, 5, 10, 15, 20, ...
\end{aligned}$$

Podemos enunciar, por tanto, una solución general de este problema: Dos múltiplos de 18 $(18x, 18y)$ suman un múltiplo de 90, si y sólo si $x + y$ es un múltiplo de 5.

P4$'$. Calcula el menor múltiplo común de 8, 10 y 15.

Resolución: El problema se reduce a resolver un *sistema de dos ecuaciones diofánticas lineales con 3 incógnitas*.

$$8x = 10y$$
$$10y = 15z.$$

La solución general de la primera ecuación es: $(x, y) = (5t, 4t)$
Substituyendo $y = 4t$ en la segunda ecuación se obtiene: $40t = 15z \Rightarrow 8t = 3z$ cuya solución general es: $(t, z) = (3u, 8u)$
Para $u = 1$, obtenemos el "mínimo" trío $(x, y, z) = (15, 12, 8)$
En efecto: $u = 1 \Rightarrow (t, z) = (3, 8) \Rightarrow (x, y) = (5t, 4t) = (15, 12)$.
En resumen, se tiene:

$$\text{mcm}(8, 10, 15) = 8x = 10y = 15z = 8 \cdot 15 = 10 \cdot 12 = 15 \cdot 8 = 120.$$

P6. Busca todos los divisores de 100 que son múltiplos de 4.

Resolución: El problema se reduce a resolver una *ecuación diofántica no lineal con dos incógnitas*:

$$100/x = 4y \Rightarrow 25/x = y \Rightarrow xy = 25.$$

Desgraciadamente no disponemos de ningún procedimiento "algebraico" para resolver este tipo de ecuaciones. La afirmación anterior equivale a reconocer que *no podemos expresar de una manera general la estructura del conjunto de todos los divisores de un número cualquiera*. Aparece así un tipo de problemas que, si bien podemos resolver aritméticamente en casos particulares sencillos—como el de este enunciado—no podemos resolver en general (como tipo de problemas) dentro de la nueva organización que estamos construyendo. Naturalmente que con el problema P6$'$ se produce el mismo fenómeno.

P10. Si contamos las fotografías de 5 en 5 sobran 3, pero las contamos de 9 en 9, entonces sobran 6. ¿Cuál es el número mínimo de fotografías que tenemos sabiendo que es mayor que 50?

Resolución: Si llamamos n al número total de fotografías, el problema se reduce a resolver la siguiente *ecuación diofántica lineal no homogénea con dos incógnitas*:

$$n = 5t + 3 = 9s + 6 \Rightarrow 5t - 9s = 3.$$

La técnica algebraica para resolver este tipo de ecuaciones es una variación de la técnica para resolver ecuaciones diofánticas homogéneas y puede *justificarse* (o *interpretarse*) geométricamente.

(1) Se resuelve la *ecuación homogénea asociada*:

$$5t - 9s = 0 \Rightarrow 5t = 9s \Rightarrow (t,s) = (9,5)u.$$

(2) Se busca, por tanteo, una *solución particular* de la no homogénea:

$$9s + 3 = 5t$$

$$s = 1 \Rightarrow 9s + 3 = 12 \text{ (no es múltiplo de 5)}$$
$$s = 2 \Rightarrow 9s + 3 = 21 \text{ (no es múltiplo de 5)}$$
$$s = 3 \Rightarrow 9s + 3 = 30 = 5t \Rightarrow t = 6 \Rightarrow (t,s) = (6,3)$$

(3) La *solución general de la ecuación no homogénea* se obtiene sumando a una solución particular de ésta, la solución general de la homogénea asociada:

$$(t,s) = (6,3) + (9,5)u.$$

Posibles valores del número total de fotografías:

$$u = 0 \Rightarrow (t,s) = (6,3) \Rightarrow n = 5t + 3 = 9s + 6 = 33$$
$$u = 1 \Rightarrow (t,s) = (15,8) \Rightarrow n = 5t + 3 = 9s + 6 = 78$$
$$u = 2 \Rightarrow (t,s) = (24,13) \Rightarrow n = 5t + 3 = 9s + 6 = 123$$

....

P11. Si archivamos los CD en cajas de 5 nos sobran 4, si los archivamos en cajas de 8 nos sobran 6 y si los archivamos en cajas de 3, ni falta ni sobra ninguno. ¿Cuántos CD tenemos, como mínimo?

Resolución: Si llamamos n al número total de CD, el problema se reduce a resolver el siguiente *sistema de ecuaciones diofánticas lineales no homogéneas*:

$$n = 5x + 4 = 8y + 6 = 3z \Rightarrow \begin{cases} 5x - 8y = 2 \\ 3z - 8y = 6 \end{cases}$$

La solución general de la primera es: $(x,y) = (2,1) + t(8,5)$.
Substituyendo $y = 1 + 5t$ en la segunda ecuación se obtiene:

$$3z - 8(1 + 5t) = 6 \Rightarrow 3z - 40t = 14$$

cuya solución general es: $(z,t) = (18,1) + u(40,3)$.
Dando valores enteros a u se obtienen todas las soluciones para x, y, z y, por tanto, para n:

$$u = 0 \Rightarrow (z,t) = (18,1) \Rightarrow n = 3z = 54$$
$$u = 1 \Rightarrow (z,t) = (58,4) \Rightarrow n = 3z = 174$$
$$u = 2 \Rightarrow (z,t) = (98,7) \Rightarrow n = 3z = 294$$

....

Ampliación del campo de problemas aritméticos

El desarrollo de la técnica algebraica para resolver *sistemas de ecuaciones diofánticas lineales* no sólo integra las técnicas aritméticas de la organización inicial sino que, lo que es más importante, permite *ampliar los tipos de problemas* que son resolubles con esta nueva técnica. Se pone de manifiesto el alcance y, sobre todo, las *limitaciones de las técnicas aritméticas* aisladas iniciales.

Los cinco primeros problemas que enunciaremos a continuación, (PA1–PA5), proporcionan justificaciones de algunos de las técnicas descritas en la Proposición (6) y, por tanto, se sitúan en el *nivel tecnológico* de la organización aritmética OM_{DN}.

PA1. ¿Qué condiciones ha de cumplir un número de tres cifras abc para ser múltiplo de 3? ¿Puedes generalizar el criterio a un número cualquiera?
PA2. ¿Qué condiciones ha de cumplir un número de tres cifras abc para ser múltiplo de 7? ¿Puedes generalizar el criterio a un número cualquiera?
PA3. ¿Qué condiciones ha de cumplir un número de tres cifras abc para ser múltiplo de 11? ¿Puedes generalizar el criterio a un número cualquiera?
PA4. ¿Qué condiciones ha de cumplir un número de cuatro cifras $abcd$ para ser múltiplo de 13? ¿Puedes generalizar el criterio a un número cualquiera? ¿Y si es capicúa?
PA5. ¿Qué condiciones ha de cumplir un número de 4 cifras para ser, a la vez, múltiplo de 7 y múltiplo de 3? ¿Cuáles de esos números con capicúas?
PA6. ¿Qué relación debe haber entre dos números a y b para que su mínimo común múltiplo sea 24800? ¿Y si uno de los números es 100?
PA7. En una casa de deportes venden cajas de 14 pelotas de ping-pong y cajas de 4 pelotas. Si queremos comprar 150 pelotas:

(a) ¿Cuántas cajas tendremos que comprar de cada tipo?

(b) Si un amigo nuestro no pudo comprar el número exacto de cajas, ¿puedes dar alguna información del número de pelotas que compró?

(c) Con cajas completas de 14 y de otro tamaño se pueden servir 140 pelotas, pero no se pueden servir exactamente 220 pelotas. ¿qué condiciones debe cumplir el número de pelotas que contienen las cajas del segundo tipo?

(d) Con cajas completas de 14 pelotas y 12 cajas de otro tamaño, se sirven 352 pelotas, ¿sabrías cuántas pelotas contiene cada caja del segundo tipo?

PA8. Tenemos tres tamaños de archivadores de CD. En los del primer tamaño caben 5 CD y al archivar los CD en ellos nos sobran 4 CD. Si los archivamos en los del segundo tipo nos sobran 6 y si los archivamos en los del tercer tipo ni falta ni sobra ninguno. ¿Cuáles son los posibles tamaños de los dos últimos tipos de archivadores? Calcula en cada caso el número total de CD.

Todos estos problemas (y muchos más) son resolubles mediante las *técnicas algebraicas* de resolución de sistemas de ecuaciones diofánticas lineales, o bien mediante pequeñas variaciones de las mismas. Vamos a esquematizar su aplicación en algunos casos particulares.

PA2. ¿Qué condiciones ha de cumplir un número de tres cifras abc para ser múltiplo de 7? ¿Puedes generalizar el criterio a un número cualquiera?

Resolución: Si el número abc fuese múltiplo de 7, existiría un número entero z tal que:

$$100a + 10b + c = 7z.$$

Se trata de una ecuación diofántica lineal homogénea con 4 incógnitas que es equivalente a:

$$(98a + 2a) + (7b + 3b) + c = 7z \Rightarrow 2a + 3b + c = 7t$$

que proporciona un criterio de divisibilidad por 7 para los números de 3 cifras. Dado que este criterio no es inmediatamente generalizable para números cualesquiera, no figura en los libros de texto de la E.S.O.

PA4. ¿Qué condiciones ha de cumplir un número de cuatro cifras $abcd$ para ser múltiplo de 13? ¿Puedes generalizar el criterio a un número cualquiera? ¿Y si es capicúa?

Resolución: Si el número $abcd$ fuese múltiplo de 13, existiría un número entero z tal que:

$$1000a + 100b + 10c + d = 13z.$$

Se trata de una ecuación diofántica lineal homogénea con 5 incógnitas que es equivalente a:

$$[13(76a)+12a]+[13(7b)+9b]+10c+d = 13z \Rightarrow 12a+9b+10c+d = 13t$$

y proporciona el criterio de divisibilidad por 13 válido para números de 4 cifras. Como este criterio no puede generalizarse inmediatamente a números cualesquiera, tampoco figura en los libros de texto de la E.S.O. Si añadimos la condición de ser capicúa ($a = d$ y $b = c$), deberá cumplir:

$$12a + 9b + 10b + a = 13t \Rightarrow 13a + 19b = 13t \Rightarrow 6b = 13u.$$

Dado que 6 y 13 son primos entre si, la única solución de esta ecuación diofántica tal que b sea un número de un dígito es $(b, u) = (0, 0)$. Tenemos, en resumen, que los únicos múltiplos de 13 capicúas de 4 cifras son los de la forma $a00d$. Hay exactamente 10 de estos números 0000, 1001, 2002, … , 9009.

PA7. En una casa de deportes venden cajas de 14 pelotas de ping-pong y cajas de 4 pelotas. Si queremos comprar 150 pelotas:

(a) ¿Cuántas cajas tendremos que comprar de cada tipo?

(b) Si un amigo nuestro no pudo comprar el número exacto de cajas, ¿puedes dar alguna información del número de pelotas que compró?

(c) Con cajas completas de 14 y de otro tamaño se pueden servir 140 pelotas, pero no se pueden servir exactamente 220 pelotas. ¿Qué condiciones debe cumplir el número de pelotas que contienen las cajas del segundo tipo?

(d) Con cajas completas de 14 pelotas y 12 cajas de otro tamaño, se sirven 352 pelotas, ¿sabrías cuántas pelotas contiene cada caja del segundo tipo?

Resolución: Cada uno de los apartados puede ser interpretado como el estudio de la resolubilidad de una o varias ecuaciones diofánticas.

(a) Se trata de resolver la ecuación diofántica:

$$14x + 4y = 150$$

(b) ¿Para qué valores de n la siguiente ecuación diofántica, en las incógnitas x, y no tiene solución?

$$14x + 4y = n$$

(c) Se trata de estudiar para qué valores de b la primera de las ecuaciones siguientes tiene solución y la segunda no tiene solución.

$$14x + by = 140$$
$$14x + by = 220$$

(d) Se trata de estudiar la resolubilidad de la ecuación:

$$14x + 12b = 352.$$

Los *elementos tecnológicos* asociados a estas técnicas y, sobre todo, los necesarios para seguir desarrollándolas en la dirección sugerida por estos últimos problemas, no han sido aquí suficientemente explicitados. Así, por ejemplo, el desarrollo de estas técnicas hace aparecer *nuevas necesidades tecnológicas* para sistematizar y justificar la generalización de la técnica a sistemas de más de 2 ecuaciones diofánticas, para caracterizar adecuadamente cuando un sistema es compatible o incompatible y para identificar qué tipos de ecuaciones diofánticas no lineales pueden ser incluidas dentro de este tipo de problemas (por cuanto que la técnica de resolución se reduzca a una variación de la técnica de resolución de sistemas lineales).

Es evidente, en definitiva, que al mostrar explícitamente los elementos tecnológicos que permiten describir, interpretar y justificar esta nueva actividad matemática (de la que sólo hemos descrito el punto de partida, pero que es susceptible de un rápido desarrollo) se pondrá claramente de manifiesto la necesidad de operar en el campo de los números enteros, situando esta nueva OM, que hemos designado mediante el símbolo $\mathbf{OM_{DZ}}$, en el ámbito de la*teoría de la divisibilidad del anillo de los enteros* y, a la larga, en el ámbito de la *teoría de la divisibilidad en un anillo euclídeo*. Podemos resumir la sección 4 afirmando que, mediante una *modelización algebraica*, μ, hemos transformado $\mathbf{OM_{DN}}$ en $\mathbf{OM_{DZ}}$.

$$\mathbf{OM_{DN}} \xrightarrow{\mu} \mathbf{OM_{DZ}}$$

Efectos "didácticos" de la algebrización de una organización matemática

En este apartado analizaremos brevemente los efectos que produce (o que produciría) la *algebrización de una* OM sobre las posibles *formas de estudiarla*. Pero no deberíamos olvidar los posibles efectos recíprocos, esto es, la incidencia de la estructura y las funciones del *proceso de estudio* (lo que llamamos "*organización didáctica*") *sobre la naturaleza* y *la estructura* de las OM escolares. Confrontaremos dichas incidencias recíprocas con el *contrato didáctico institucional*[10] vigente actualmente en las citadas instituciones y para describir dichas relaciones emplearemos las dimensiones del *proceso de estudio* que nos proporciona la *teoría de los momentos didácticos*.

Completación "matemática" de $\mathbf{OM_{DN}}$: La organización $\mathbf{OM_{DZ}}$

Para estimar el carácter relativamente más algebraico de la organización $\mathrm{OM_{DZ}}$ en comparación a $\mathrm{OM_{DN}}$, pueden utilizarse los indicadores del grado de algebrización citados anteriormente. Veremos, además, que la nueva organización $\mathrm{OM_{DZ}}$, puede ser interpretada como una *completación matemática relativa* de $\mathrm{OM_{DN}}$, tanto del nivel técnico-práctico (tipos de problemas y técnicas) como del tecnológico-teórico.

$$\mathbf{OM_{DN}} \subset \mathbf{OM_{DN}}$$

En OM_{DZ} se hace uso sistemático del juego entre *parámetros* y *variables*. Un ejemplo de este juego lo constituye el problema PA7. En general, en OM_{DZ} las nuevas técnicas no hacen ninguna distinción esencial entre las variables "*conocidas*" y las "*desconocidas*", abarcando el estudio conjunto de todas las variables del sistema subyacente. Estas técnicas permiten la *simbolización global de las relaciones entre los datos y las incógnita*s del problema y, por tanto, se produce un importante avance en lo que respecta al primer indicador (IGA1) del grado de algebrización. En OM_{DZ} existe la *posibilidad de estudiar las condiciones de existencia del objeto incógnita*. Las nuevas técnicas permiten preguntar por la relación que debe darse entre determinadas variables a fin de que el problema tenga o no tenga determinado tipo de soluciones. Es posible, además, estudiar la *estructura del conjunto de las soluciones* como se pone de manifiesto siempre que aparecen ecuaciones diofánticas lineales no homogéneas.

Por lo que respecta al segundo indicador (IGA2) que hace referencia a la posibilidad de llevar a cabo un cuestionamiento tecnológico, el avance también es considerable. En efecto, al poder "materializar" simbólicamente la estructura formal de la condición del problema, es posible "*manipular*" *dicha estructura* mediante ciertas reglas formales y llevar a cabo "justificaciones" y hasta "demostraciones" relativas a dicha estructura. Así, por ejemplo, en el problema PA6, para estudiar la relación que debe existir entre dos números para que su mínimo común múltiplo pueda ser 24800, se llega a "demostrar", de hecho, la *relación fundamental entre el MCD y el mcm*. Resulta, en particular, que en la organización OM_{DZ} se plantean y resuelven problemas relativos al *nivel tecnológico* de OM_{DN}.

El cuanto al tercer indicador (IGA3) que se refiere a la *unificación de los tipos de problemas* y la *integración de las técnicas*, el progreso ha sido evidente. Podría decirse que hemos incluido las cinco clases de problemas aritméticos de OM_{DN} en un gran tipo de problemas de OM_{DZ}. Únicamente no hemos podido incluir en ese tipo de problemas los que requieren "buscar todos los divisores de un número dado".

Digamos, por último, que al utilizar las *ecuaciones diofánticas como modelos algebraicos* de los problemas aritméticos, ha sido posible generar *tipos de problemas cada vez más alejados del contexto* puramente aritmético de los números naturales, lo que constituye un avance importante en el cuarto indicador (IGA4) del grado de algebrización.

Podemos decir, en resumen, que la organización matemática OM_{DZ} está mucho más "*algebrizada*" que OM_{DN} respecto de los cuatro indicadores citados. También podemos afirmar que OM_{DZ} constituye una *completación relativa* de OM_{DN} puesto que:

(a) En OM_{DZ} se han integrado y ampliado las clases de problemas existentes en OM_{DN}.

(b) Se han producido nuevas técnicas como desarrollo y generalización de las técnicas aritméticas iniciales, y se ha mostrado que algunas de las nuevas técnicas eran necesarias para resolver de forma sistemática y más económica muchos de los problemas que ya aparecían en OM_{DN}.

(c) La práctica matemática en OM_{DZ} aporta elementos esenciales para describir, interpretar y justificar el uso de las técnicas que se utilizaban en OM_{DN}.

Completación "didáctica" de $\partial \mathbf{OM_{DN}}$: El proceso de estudio $\partial \mathbf{OM_{DZ}}$

¿Podemos dar alguna explicación plausible de la *ausencia de la organización* OM_{DZ} y del tipo de actividad matemática que requiere su estudio en el currículum de la Enseñanza Secundaria Española, incluyendo el Bachillerato (12–18 años)?

Postulamos, e intentaremos ponerlo de manifiesto en lo que sigue, que una de las causas principales de esta ausencia está relacionada con el tipo *organización didáctica* (de ayuda al estudio de las matemáticas) que debería existir en la Enseñanza Secundaria para que fuese posible un proceso de estudio de OM_{DZ} (no debemos olvidar que todo proceso de estudio consiste en la reconstrucción escolar de una OM). Veremos que existe una flagrante contradicción entre el *contrato didáctico institucional* vigente actualmente en la Enseñanza Secundaria de las matemáticas y la naturaleza de la organización didáctica $OD_{DZ} = \partial OM_{DZ}$ que sería necesaria para poder estudiar OM_{DZ}.

Más en concreto, describiremos algunas de las características que debería tener forzosamente un proceso de estudio capaz de reconstruir OM_{DZ} en la institución escolar de la E.S.O. Dicho *proceso de estudio hipotético* podría ser considerado como una *completación didáctica* de los actuales procesos de estudio escolares tal como éstos aparecen en la primera etapa de la E.S.O. (12–14 años). Mostraremos algunas de las causas de la *ausencia escolar de los procesos de estudio relativamente* "*completos*" y, por tanto, de las OM que estos procesos permiten reconstruir. Mostraremos, en definitiva, que una ampliación de este tipo de la organización didáctica:

$$\partial \mathbf{OM_{DN}} \subset \partial \mathbf{OM_{DZ}}$$

requería un cambio importante en el contrato didáctico institucional.

(1) En el *proceso de estudio* de una OM con un grado de algebrización relativamente alto (como, por ejemplo, $\mathrm{OM}_{\mathrm{DZ}}$) el *momento exploratorio* debe tener forzosamente un carácter "material" y comunitario: la exploración no se lleva a cabo con el "pensamiento", ni con la "cabeza", se realiza con manipulaciones esencialmente escritas y compartidas. En la reconstrucción de $\mathrm{OM}_{\mathrm{DZ}}$ una gran parte del "razonamiento conjetural o plausible" (Polya, 1954) se lleva a cabo "calculando". Se pone así de manifiesto que, desde un principio, *la actividad matemática algebrizada es una actividad material*. Este carácter esencialmente *manipulativo escrito* de la actividad matemática algebrizada se contrapone a la ilusión de una actividad puramente "mental" e individualista, como a veces se interpreta la actividad matemática prealgebraica, ya sea ésta aritmética, geométrica o combinatoria. En el caso particular de la *divisibilidad escolar*, el *contrato institucional* vigente en la Enseñanza Secundaria privilegia el cálculo mental en contraposición a la *actividad escrita*, especialmente en lo que se refiere a la dimensión de la actividad matemática que denominamos "*exploratoria*" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 290).

(2) A lo largo del *proceso de estudio* de $\mathrm{OM}_{\mathrm{DZ}}$ la comunidad de estudio debe ir más allá del *momento exploratorio* y de la mera *rutinización de las técnicas matemáticas* que utiliza. Para estudiar (reconstruir) $\mathrm{OM}_{\mathrm{DZ}}$ *las técnicas se han de desarrollar en el seno de la comunidad de estudio* (la clase) y ésta debe llegar a producir técnicas "nuevas", al menos en el sentido de variaciones no triviales de las técnicas iniciales. Pero para que esto sea posible, es imprescindible que se disponga de un modelo material de dichas técnicas, que éstas hayan estado previamente *institucionalizadas* y, además, que *el contrato permita* (*y provoque*) llevar a cabo un *cuestionamiento tecnológico* de las mismas, relativo a su alcance, su *interpretación* y su *justificación*. En la Enseñanza Secundaria, y más marcadamente en la E.S.O. (12–16 años), el *contrato didáctico institucional* vigente no da cabida al cuestionamiento tecnológico. El marcado carácter "*mostrativo*" (en contraposición a "*demostrativo*") de las organizaciones matemáticas de Secundaria es un reflejo de esa cláusula del contrato[12]. Lo mismo podría decirse de las enormes dificultades mostradas por los alumnos de Secundaria para llevar a cabo el citado *cuestionamiento tecnológico*.

(3) En un *hipotético proceso de estudio* de $\mathrm{OM}_{\mathrm{DZ}}$, el citado cuestionamiento tecnológico debería llevar a establecer interrelaciones fluidas entre el *momento del trabajo de la técnica* y los elementos *tecnológico-teóricos* a fin de flexibilizar las técnicas, reforzar el carácter integrador del momento del trabajo de la técnica y potenciar su capacidad creadora de nuevos objetos matemáticos (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 286–290). Pero en la Enseñanza Secundaria española actual, además de no tener cabida el *cuestionamiento tecnológico*, tampoco tienen cabida los *elementos tecnológicos asociados a las técnicas de resolución de ecuaciones diofánticas lineales*. Es por esta razón que, de incluirse el estudio OM_{DZ} en la Secundaria actual, el uso de las técnicas sería inevitablemente muy rígido y estereotipado.

(4) El proceso de estudio de OM_{DN}, tal como se lleva a cabo actualmente en la primera etapa de la ESO (12–14 años), presenta cierta "*atomización*". Si, a pesar de ello, OM_{DN} y el desintegrado proceso de estudio asociado sobreviven en la institución escolar, es gracias a la *interpretación cultural del sistema* "*concreto*" *estudiado* (los números naturales) y a la aparente "naturalidad" de las técnicas aritméticas que se utilizan. Esta interpretación cultural proporciona de antemano la "inteligibilidad" mínima necesaria para su supervivencia dentro de la institución. Dicho en otros términos, se constata que la técnicas aritméticas que se utilizan en OM_{DN} presentan un marcado carácter *autotecnológico* (Chevallard, 1999).

El hipotético paso de OM_{DN} a OM_{DZ}, dependiendo de las condiciones en las que se llevase a cabo, podría provocar una pérdida importante de inteligibilidad cultural (local). La institución tendría dificultades para legitimar y "dar sentido" al nuevo proceso de estudio. Se requeriría una *actividad matemática sostenida y continua* que pudiese ser *interpretada y evaluada globalmente* para recuperar el "sentido" de la actividad. Pero, de nuevo, chocamos con el *contrato didáctico institucional* vigente actualmente en la Enseñanza Secundaria en el que (por razones en las que no podemos entrar aquí[13]) no se contemplan *objetivos didácticos a medio y largo plazo* y en el que los momentos de *institucionalización* y *evaluación*, entendidos como dimensiones o aspectos del proceso de estudio de las matemáticas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 266–273), pueden vivir localmente, pero nunca abarcan a toda una organización matemática considerada globalmente.

En resumen, hemos mostrado la profunda interdependencia entre la estructura de una OM que puede vivir potencialmente en una institución didáctica determinada y el *proceso de estudio* que se requeriría para reconstruirla efectivamente en dicha institución. En particular, hemos puesto de manifiesto hasta qué punto la *algebrización de* OM_{DN} para obtener OM_{DZ} puede ser considerada como una *técnica didáctica* (o técnica de "ayuda al estudio"), en el sentido de que es un instrumento imprescindible (aunque no sea suficiente) para llevar a cabo un proceso de estudio relativamente "integrado" y "completo" de la OM escolar en torno a la divisibilidad.

Se trata de un nuevo ejemplo de proceso *matemático-didáctico*: en efecto, la *modelización algebraica* de OM_{DN} puede ser considerado inicialmente como un proceso "matemático" puesto que modifica profundamente la estructura matemática de dicha organización (sus tipos de problemas, sus técnicas matemáticas y sus componentes tecnológico-teóricos), dando origen a una nueva organización OM_{DZ}. Pero, a su vez, dicho proceso puede considerarse como una técnica "didáctica" ya que su realización en una institución determinada modificaría, asimismo, la organización del proceso de estudio de OM_{DN} en dicha institución. En este sentido, la modelización algebraica juega un papel análogo a la "*demostración matemática*" de un teorema o a la "*axiomatización de una teoría matemática*" en una institución determinada (Antibi y Brousseau, 2000).

Quedan abiertas muchas cuestiones y, en particular, todas las relativas a la posible incidencia de la *organización didáctica escolar y la gestión del proceso de estudio* sobre la estructura de las OM escolares que dicho proceso "reconstruye". Así, por ejemplo, podríamos preguntarnos:

(a) ¿Cómo organizar y gestionar el momento *exploratorio* para que éste evolucione desde una actividad "mental" a una actividad "material", escrita, mucho más controlable y evaluable?

(b) ¿En qué tipo de dispositivo y de qué manera habría que gestionar el momento del trabajo de la técnica de manera que posibilitara el *cuestionamiento tecnológico* y, por tanto, la emergencia de *nuevos tipos de problemas*?

(c) ¿En qué momentos del proceso de estudio debe tomarse la *modelización explícita* y *material de las técnicas* como objeto de estudio?

(d) ¿Qué tipo de *institucionalización* habría que realizar a fin que la *evaluación* pudiese tomar en consideración la OM en su conjunto y no sólo ciertos elementos aislados de la misma?

Postulamos, en definitiva, que el *contrato didáctico institucional* (actual o potencial) refleja, a la vez, tanto la estructura de las OM que pueden vivir en una institución como la dinámica[14] de los procesos de estudio que permiten (o permitirían) reconstruir dichas OM en dicha institución. Puede hablarse, por tanto, de una *determinación recíproca* entre las OM y las organizaciones didácticas, $OD = \partial OM$, asociadas. Esta tesis puede ser considerada como uno de los principios básicos del Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Notas

[1] Algunas de las ideas que aquí se presentan fueron planteadas inicialmente en el curso "*L'algebrització de lactivitat matemàtica a l'Educació Secundària Obligatòria*" impartido por el autor en el marco del programa de doctorado de Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona durante el curso académico 1996–1997. Posteriormente se desarrollaron en el curso "*Algebrización de la divisibilidad escolar. De la Organización Matemática a la Organización Didáctica*", dictado en la Universidad de Jaén, en Junio de 1999, en el ámbito del Seminario de Investigación: "*El trabajo empírico dentro de la Teoría Antropológica: la descripción de organizaciones matemáticas y didácticas*", integrado en el Programa de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas de dicha Universidad.

[2] Utilizaremos la *reconstrucción racional* (Lakatos, 1971), de la evolución de la Didáctica de las Matemáticas que se describe en Gascón (1998 y 1999c) y que, en cierta forma, expresa mi propio punto de vista respecto a la naturaleza de nuestra disciplina. Partiendo de la *problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, —como objeto de investigación básico de la Didáctica de las Matemáticas—postulamos la existencia de dos ampliaciones sucesivas de dicha problemática que modifican progresivamente su *objeto primario de investigación* dando origen, respectivamente, a dos Programas de Investigación (Lakatos, 1978) en Didáctica de las Matemáticas: el *Programa Cognitivo* y el *Programa Epistemológico*.

[3] Se suele considerar que los trabajos iniciales de Guy Brousseau y, en especial, los que tratan sobre la "epistemología experimental", constituyen el germen del Programa Epistemológico. En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990.

[4] La teoría de los *momentos didácticos* propone seis momentos o *dimensiones* del proceso de estudio. Estos reciben, respectivamente, los nombres siguientes: *del primer encuentro*, *exploratorio*, *del trabajo de la técnica*, *tecnológico-teórico*, *de la institucionalización* y *de la evaluación* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997 y Chevallard, 1999).

[5] Una descripción más detallada de este modelo en formación se encuentra en Chevallard (1996, 1997 y 1999); Chevallard, Bosch y Gascón (1997); Gascón (1998); y Bosch y Chevallard (1999).

[6] Se trata, en este caso, de técnicas *aritméticas*. El adjetivo "prealgebraicas" hace referencia al hecho de que se trata de técnicas matemáticas que forman parte de una organización matemática OM_{DN} muy "poco algebrizada" en el sentido que se especifica en la sección "Carácter prealgébrico e incompletude relativa de la organización OM_{DN}" de este trabajo.

[7] La mayor parte de los problemas de esta muestra han sido tomados de un texto oficial de primer curso de E.S.O. (Bailo y otros, 1996). Hemos añadido algunos problemas para

permitir una emergencia más clara de las técnicas aritméticas de resolución y subsanar así algunas deficiencias e incoherencias graves de la organización matemática que aparece en los textos. Los problemas añadidos constituyen "pequeñas variaciones" de los problemas del texto, a fin de situar cada uno éstos en cierta clase de problemas. Queremos subrayar que hemos elegido el texto citado como material de partida de nuestra análisis debido a que se trata—en nuestra opinión—de uno de los más coherentes, sistemáticos y bien estructurados de cuantos se han publicado de primer curso de E.S.O.

[8] Esta actividad matemática serviría, entre otras cosas, para poner de manifiesto las "verdades evidentes" o *axiomas implícitos* en las que se fundamenta las proposiciones enunciadas, así como para clarificar las relaciones lógicas que existen entre ellos.

[9] Esto significa que hemos explicitado con bastante precisión los componentes principales (tipos de problemas, técnicas y elementos tecnológico-teóricos) de la OM_{DN}.

[10] El *contrato didáctico institucional* esta formado por un conjunto de cláusulas que distribuyen las responsabilidades recíprocas en el juego que se establece en cada institución docente entre los estudiantes, el conocimiento matemático y el profesor, como director del proceso de estudio. Las cláusulas del contrato tienen un carácter *marcadamente implícito* (el contrato siempre está presente, pero no se puede explicitar) y no rigen todos los aspectos de la relación que se establece entre los estudiantes y el profesor, sino únicamente los que hacen referencia al *conocimiento matemático a estudiar*. Esta noción adquiere un sentido más preciso en el marco de la *teoría de las situaciones didácticas* (Brousseau, 1998).

[11] Para un análisis del contraste y hasta de la discontinuidad entre el carácter "*mostrativo*" y el carácter "*demostrativo*" las organizaciones matemáticas, ver Gascón (1997).

[12] En Gascón (1999d) se analizan algunas restricciones culturales que inciden sobre la naturaleza del contrato didáctico institucional vigente actualmente en la Enseñanza Secundaria.

[13] En términos de los *momentos o dimensiones del proceso de estudio*.

[14] Que aparece más desarrollada y ejemplificada en Chevallard (2001 y 2002), Gascón (2001) y Bosch y Gascón (2002).

Referências Bibliográficas

Antibi, A. y Brousseau, G. (2000). La de-transposition didactique des connaisances scolaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/*1*, 7–40.

Bailo C., Casals, R., Gomà, A. y Tudurí, J. (1996). *Vector 1. Matemàtiques*. Barcelona: Ed. Teide.

Bolea, P., Bosh, M. y Gascón, J. (1998). The role of algebraization in the study of a mathematical organization. *CERME-1*, Osnabrueck, Germany.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J., (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (Pendiente de publicación).

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/*1*, 77–124.

Bosch, M. y Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *12*(3), 314–332.

Bosch, M. y Gascón, J. (2002). Organiser l'étude. 2.Théories & empiries, *Actes de la XIème École d'été de Didactique des Mathématiques* (à paraître).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, Eds.), La pensée sauvage: Grenoble.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/*2*, 221–266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del SI-IDM, Huesca*. (Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm)

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. *Actes de la XIème École d'été de Didactique des Mathématiques* (à paraître).

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori. [Existe traducción al portugués: Estudar Matemáticas. O elo perdido entre o encino e a aprendizagem, Porto Alegre (Brasil): Artmed Editora, 2001].

Gascón, J. (1989). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*. (Tesis doctoral). Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Gascón, J. (1992). Què s'enten per Resolució de Problemes de Matemàtiques?. *Biaix*, *2*, 10–17.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de Análisis-Síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 13(3)*, 295–332.

Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 6(3), 37–51.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemática en secundaria a estudiar matemática en la universidad. *Suma, 26*, 11–21.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7–34.

Gascón, J. (1999a). "Didactique fondamentale" versus "Advanced Mathematical Thinking": ¿Dos Programas de Investigación inconmensurables? *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Tome II, (pp. 152–170). Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Gascón, J. (1999b). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En Ortega, T. (Editor). *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, 129–150.

Gascón, J. (1999c). "Didactique fondamentale" versus "Advanced Mathematical Thinking": ¿Dos Programas de Investigación inconmensurables? *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Tome II, pp. (152–170). Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

Gascón, J. (1999d). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática, 11(1)*, 77–88.

Gascón, J. (2001). Algunos problemas de investigación relacionados con la práctica docente del profesor de matemáticas. *XVI Jornadas del SI-IDM*, Huesca. (Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm)

Lakatos, I. (1971). History of Science and its Rational Reconstructions. En R. C. Buck y R. S. Cohen (eds.), *P.S.A., 1970, Boston Studies in the Philosophy of Science*, 8, (pp. 91-135). Dordrecht: Reidel.

Lakatos, I. (1978). *The Methodology of Scientific Research Programmes, Philosophical Papers Volume I.* Cambridge University Press: Cambridge.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton University Press: Princeton.

Josep Gascón, Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona, Edificio C, 08193 Bellaterra (Barcelona) Spain; Fax: 34 93 581 27 90; E-Mail: gascon@mat.uab.es

RESUMEN. En este trabajo, que se sitúa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), hemos mostrado la profunda interdependencia entre una organización matemática *que puede vivir potencialmente en la Enseñanza Secundaria Obligatoria española (E.S.O.) y la* organización didáctica *que se requeriría para reconstruirla efectivamente en dicha institución. Hemos visto que la* modelización algebraica *de la organización matemática en torno a la divisibilidad sobre los naturales provoca su extensión a los enteros y puede ser considerada como una* técnica didáctica *(de "ayuda al estudio"), esto es, un instrumento imprescindible para llevar a cabo un proceso de estudio relativamente "integrado" y "completo" de la divisibilidad. Esta técnica didáctica choca con muchas restricciones porque su puesta en marcha modificaría profundamente el* contrato didáctico institucional *vigente en la E.S.O.*

Palavras-chave: *Divisibilidad en la Enseñanza Secundaria; Organización Matemática (OM); Organización Didáctica (OD); Proceso de algebrización de una OM; Teoría Antropológica de lo Didáctico.*

ABSTRACT. Within the framework of the anthropological approach to the didactics of mathematics (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), we show the high interdependence between a mathematical organization and a didactic organization. The later would be required to successfully implement the former in the Spanish Mandatory Secondary Education (E.S.O.). We observed that algebraic modelization of the mathematical organization built around the divisibility of natural numbers leads to its extension to integers. It can be considered as a didactic technique (teaching aid), that is, it is an essential instrument to carry out a rather self-sufficient and comprehensive process of study on divisibility. This didactic technique faces many problems as its implementation would deeply modify the prevalent institutional didactic contract in E.S.O.