
Intuições probabilísticas em alunos do 8º e 11º anos de escolaridade¹

José António Fernandes
Universidade do Minho

Introdução

Neste estudo investigaram-se intuições probabilísticas em alunos do 8º e 11º anos de escolaridade, assumindo-se que as intuições são cognições que adquirem um carácter axiomático através da prática e enfatizam-se, particularmente, as intuições primárias, enquanto ideias que se desenvolvem independentemente do ensino formal (Fischbein, 1987).

No estudo destacou-se o contraste entre os dois anos escolares sobre as intuições desencadeadas em diferentes contextos e situações (urnas, dados, moedas, experiências simples e experiências compostas), a tendência de respostas baseadas nas intuições e as intuições geradoras de respostas correctas.

Enquanto aspecto importante das intuições probabilísticas, compararam-se as respostas e a confiança nelas depositadas pelos alunos a partir de várias variáveis, designadamente as variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo, ensino de probabilidades e interpretação do conceito de probabilidade.

A apresentação do estudo organiza-se em torno das cinco secções seguintes: (1) enquadramento teórico; (2) metodologia; (3) apresentação de resultados; (4) discussão de resultados; e (5) implicações didácticas e recomendações para futuras investigações.

Enquadramento teórico

A aquisição e desenvolvimento de ideias acerca de diferentes domínios científicos não acontecem apenas na escola. Donde, quando o aluno aborda um assunto

nas aulas, frequentemente, ele possui já ideias sobre esse assunto. São estas ideias, adquiridas, fundamentalmente, em ambientes informais e baseadas numa argumentação não normativa, que se designam por intuições. No caso da seguinte situação, conhecida por “fenómeno Falk” (Falk, 1989),

Extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas de uma urna contendo duas bolas brancas e duas bolas pretas. Qual é a probabilidade que a primeira bola seja branca, sabendo-se que a segunda bola é branca?

verificou-se que muitos alunos, mesmo tendo estudado probabilidades na escola, afirmaram que a questão não tem sentido, pois não é possível condicionar a probabilidade de um acontecimento a um acontecimento que ocorreu depois, ou atribuíram a probabilidade $1/2$, argumentando que a extracção da segunda bola não pode influenciar a extracção da primeira bola.

A situação anterior exemplifica a possibilidade das intuições conduzirem a respostas erradas, aspecto que tem sido objecto de estudo no paradigma das “concepções erradas”. Nesta vertente, destacam-se os estudos de Tversky e Kahneman ao demonstrarem que as pessoas recorrem frequentemente a “heurísticas”, a interpretações causais e a “falácias” para efectuarem julgamentos de probabilidade (Tversky e Kahneman, 1982a, 1982b, 1983). Também no contexto português, Fernandes (1990) observou que alunos do 11º ano e estudantes universitários (futuros professores de Matemática) aderiram frequentemente a estes raciocínios.

Todavia, como revelam outros estudos, existem também situações em que as intuições conduzem a respostas correctas. Constituem exemplo dessas situações, o conceito de acaso, a classificação de um acontecimento em certo, possível e impossível, a atribuição e comparação de probabilidades em experiências simples e o reconhecimento de estruturas estocásticas equivalentes (Fischbein, Barbat e Mínezat, 1975; Fischbein, Nello e Marino, 1991). Já no caso da atribuição e comparação de probabilidades em experiências compostas, observou-se uma compreensão muito rudimentar e limitada.

Neste estudo, as intuições são vistas como crenças cognitivas elaboradas e confirmadas repetidamente pela prática (Fischbein, 1987), podendo estar na origem de respostas correctas e erradas e englobando as “ideias alternativas” (Duarte, 1987) ou “concepções alternativas” (Leite, 1993), termos referidos frequentemente em educação em ciências, e as “ideias prévias” ou “concepções prévias” (Ausubel, Novak e Hanesian, 1980).

Para Bruner (s/d) um indivíduo pensa intuitivamente quando, depois de ter trabalhado por muito tempo num problema, repentinamente encontra uma solução ou quando, face a problemas que lhe são colocados, é capaz de imediatamente avançar palpites acerca desses problemas. A primeira perspectiva de intuição de Bruner,

em que se descobrem soluções repentinas após um trabalho persistente e dirigido, acontece no trabalho de criação matemática, conforme relatam Poincaré (1974) e Hadamard (1954).

Bruner (s/d) e Scholz (1987) caracterizam o pensamento intuitivo por contraste com o pensamento analítico e Kahneman e Tversky (1982) referem que os termos intuição e intuitivo significam um raciocínio informal e não estruturado sem recurso a métodos analíticos ou a cálculos deliberados, uma regra formal ou um facto da natureza compatível com uma visão de iniciado do mundo e uma regra ou procedimento que é aplicada na conduta do quotidiano.

Reforçando e detalhando as características do pensamento intuitivo e analítico referidas por Bruner, Scholz (1987) advoga que o pensamento intuitivo, por oposição ao pensamento analítico, é pré-consciente, envolve uma compreensão por sentimento e instinto de empatia, implica o processamento repentino, sintético e paralelo de um campo global de conhecimento, sendo o problema tratado como um todo, depende da experiência pessoal, socorre-se de metáforas pictóricas, processa-se com um baixo controlo cognitivo, implica o envolvimento pessoal, embora sem ansiedade, e é acompanhado por um sentimento de certeza.

Com maior interesse didáctico, Fischbein (1987, 1990) atribui às cognições intuitivas um conjunto de características gerais que as distinguem de outros tipos de cognições, especificamente, a auto-evidência, a certeza intrínseca, a persistência, a coercividade, a condição teórica, a extrapolação, a globalidade e a sua natureza implícita. Estas características das intuições permitem perspectivá-las como ideias estruturadas e fortemente enraizadas na mente do aprendiz, em oposição a uma perspectiva de ideias isoladas e escassamente conectadas preconizada por Chiu (1996).

As intuições também se podem classificar em diferentes tipos. Para Poincaré (1932), no processo de invenção matemática, os matemáticos socorrem-se de diferentes tipos de intuições: apelam (1) aos sentidos e à imaginação; (2) a generalizações indutivas, à imagem dos processos das ciências experimentais; e (3) à intuição do número puro.

Piaget e Beth (1980) distinguem uma dicotomia fundamental entre intuições empíricas e intuições operacionais, conforme se referem a propriedades físicas ou psicológicas, ou são vinculadas a acções ou operações, respectivamente. No processo de desenvolvimento intelectual, as intuições operacionais, que são exactamente as que têm interesse do ponto de vista matemático, vão-se desligando cada vez mais dos objectos graças ao mecanismo de abstracção reflexiva, refinam incessantemente as técnicas dedutivas e limitam cada vez mais o domínio da intuição.

Numa perspectiva mais ampla, Fischbein (1987) tipifica as intuições com base nas suas origens e nos seus papeis. Quanto às suas origens, as intuições classificam-

-se em primárias e secundárias (Fischbein, 1987; Fischbein et al., 1975). As intuições primárias “referem-se àquelas crenças cognitivas que se desenvolvem nos indivíduos independentemente de qualquer instrução sistemática e em resultado da sua experiência pessoal” (Fischbein, 1987, p. 64). A categoria das intuições secundárias pressupõe a possibilidade de podermos desenvolver novas intuições com origem não natural. Neste último caso, Fischbein afirma que se uma “interpretação puder transformar-se de uma concepção aprendida numa crença, então podemos referir-nos a ela como uma intuição secundária” (Fischbein, 1987, p. 68).

Quanto aos seus papéis, as intuições classificam-se em afirmativas, quando representam ou interpretam factos aceites como certos, auto-evidentes e auto-consistentes; conjecturais, quando exprimem uma assunção acerca de acontecimentos futuros e conjecturais; antecipadoras, quando fornecem uma visão global e detalhada que precede a solução analítica de um problema; e conclusivas, quando sintetizam as ideias básicas da solução de um problema (Fischbein, 1987).

De entre os vários tipos de intuições referidos, no presente estudo destaca-se a classificação quanto às suas origens, particularmente a categoria das intuições primárias.

Por outro lado, vários autores têm estudado a influência de diferentes factores sobre as intuições probabilísticas. Desses factores, destacam-se a idade dos sujeitos, o ano escolar, a realização matemática, o sexo, o ensino de probabilidades e a interpretação do conceito de probabilidade. Pode afirmar-se, desde já, que estes factores, em geral, têm revelado um impacto reduzido e um tanto inconsistente face a situações contra-intuitivas.

Em relação à variável idade, alguns estudos têm demonstrado uma melhoria sistemática e espontânea na selecção das respostas correctas com a idade. Falk, Falk e Levin (1980) verificaram que as dificuldades dos alunos diminuíram com a idade e assistiu-se a uma melhoria clara e repentina por volta dos 6 anos de idade; Fischbein, Pampu e Mînzat (1975a) observaram que a percentagem de respostas correctas aumentou com a idade nas situações probabilísticas mais complexas, envolvendo resultados com probabilidades diferentes e as operações de adição e multiplicação de probabilidades.

Quanto à variável ano escolar, Fischbein, Pampu e Mînzat (1975b) observaram um aumento claro das respostas correctas com o ano escolar, especialmente nas questões que envolviam razões bidimensionais; Fischbein et al. (1991) observaram uma ligeira melhoria com o ano escolar na classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis, uma melhoria mais clara em relação à equivalência de estruturas estocásticas e, no caso da probabilidade em experiências compostas, não se observou uma melhoria clara; Green (1983) e Munisamy e Doraisamy (1998) verificaram progressos claros na selecção das respostas correctas com o ano esco-

lar e, finalmente, Leake (1962) verificou um aumento linear do score médio com o ano escolar.

Nos estudos de Green (1983) e de Munisamy e Doraisamy (1998) verificou-se um aumento sistemático das respostas correctas com o desempenho em matemática. Particularmente no estudo de Green, o desempenho em matemática foi mesmo a variável que mais explicou a melhor realização dos alunos, de entre as variáveis ano escolar, sexo e desempenho em matemática. Também no estudo de Leake (1962), em que participaram apenas alunos com desempenho médio e elevado em matemática, verificou-se que os alunos com melhor desempenho também obtiveram maiores scores. No entanto, num sentido diferente, no âmbito de concepções probabilísticas erradas, Fernandes (1990) não observou diferenças significativas entre o erro e o desempenho em matemática.

Green (1983) e Munisamy e Doraisamy (1998) observaram também uma tendência favorável aos alunos do sexo masculino. No caso do estudo de Munisamy e Doraisamy, esta tendência acentuou-se com a idade. Diferentemente, nos estudos de Leake (1962) e de Fischbein et al. (1975b) não se observaram diferenças entre ambos os sexos.

No caso da variável ensino de probabilidades, Fischbein et al. (1991) referem efeitos positivos limitados e um tanto inconsistentes do ensino de probabilidades na selecção das respostas correctas. Estes autores observaram uma ligeira melhoria na classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis e na equivalência de estruturas estocásticas. No caso da probabilidade em experiências compostas, em algumas questões foram os alunos sem ensino de probabilidades que mais frequentemente seleccionaram as respostas correctas. Num estudo centrado em concepções probabilísticas erradas, Fernandes (1990) observou também que os alunos com ensino de probabilidades não apresentaram um erro médio significativamente inferior aos alunos sem ensino de probabilidades.

De entre as interpretações clássica e frequencista de probabilidade, Fischbein et al. (1975a) observaram que a interpretação frequencista favoreceu especialmente os alunos mais velhos. Este impacto foi particularmente notório nas questões sobre probabilidades em experiências compostas, que foram precisamente aquelas que se revelaram mais difíceis.

Considerando os tipos de intuições e os factores que as influenciam, investigaram-se, neste estudo, os três seguintes aspectos sobre intuições probabilísticas: (1) identificação de intuições probabilísticas em alunos do 8º e 11º anos de escolaridade, (2) influência das variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo, ensino de probabilidades e interpretação do conceito de probabilidade sobre as respostas correctas; e (3) influência das variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo e ensino de probabilidades sobre a confiança nas respostas.

Metodologia

Considerando a classificação dos estudos descritivos de Fox (1987), o estudo assume aspectos de uma investigação de aproximação descritiva transversal e de uma investigação comparativa. No caso da aproximação descritiva transversal, descreve-se um conjunto de fenómenos num determinado momento envolvendo sujeitos de diferentes grupos etários ou de diferentes níveis de desenvolvimento (Fox, 1987; Gall, Borg e Gall, 1996). Na investigação comparativa, partindo-se de pelo menos duas entidades existentes, estabelece-se um método formal para obter dados que constituem o critério de base para comparar as entidades e chegar a algumas conclusões acerca de qual é a melhor (Fox, 1987).

Amostragem

Neste estudo participaram alunos do 8º e 11º anos que frequentavam, no ano lectivo de 1996/97, escolas da cidade de Braga. Os alunos foram seleccionados por turmas, considerando um número de sujeitos equilibrado em relação às variáveis sexo e desempenho em Matemática.

Relativamente ao conceito clássico de probabilidade, participaram no estudo alunos do 8º e 11º anos de escolaridade. No 8º ano participaram 204 alunos, com média de idades 13:8 (13 anos e 8 meses) e desvio padrão 0:10 (dez meses), distribuídos por oito turmas de quatro escolas, e não estiveram presentes 10 alunos; no 11º ano participaram 209 alunos, com média de idades 16:6 e desvio padrão 0:10, distribuídos por nove turmas de duas escolas, e não estiveram presentes 19 alunos.

Todos os alunos do 11º ano frequentavam cursos em que a disciplina de Matemática fazia parte dos respectivos currículos. O facto destes alunos pertencerem apenas a duas escolas justificou-se na medida em que nessas escolas havia alunos que não tinham estudado o tema de “Estatística e probabilidades” no 9º ano de escolaridade, conforme está previsto no programa oficial da disciplina de Matemática do 3º ciclo do ensino básico, o que permitiu incluir no estudo a variável ensino de probabilidades.

O conceito frequentista de probabilidade foi estudado apenas em alunos do 8º ano de escolaridade. Neste caso, participaram 198 alunos, com média de idades 13:10 e desvio padrão 0:11, distribuídos por oito turmas de quatro escolas, e não estiveram presentes 5 alunos.

Instrumentos e procedimentos de recolha de dados

Neste estudo foram usados dois questionários: o questionário-conceito clássico, em que a formulação das questões destacava o conceito clássico de probabilidade ou probabilidade *a priori*, e o questionário-conceito frequentista, em que a formulação das questões destacava o conceito frequentista de probabilidade ou probabilidade *a posteriori*.

Questionário—conceito clássico. Neste questionário incluiu-se um total de 14 questões, contemplando três categorias de conteúdo: três questões do subtema “Acontecimento certo, possível e impossível”, seis questões do subtema “Probabilidade em experiências simples” e cinco questões do subtema “Probabilidade em experiências compostas”. Além disso, as questões foram formuladas no contexto de urnas, dados e moedas.

No subtema “Acontecimento certo, possível e impossível”, em cada uma das cinco alíneas de cada questão, o aluno devia classificar o acontecimento formulado em certo, possível ou impossível a partir de um item de escolha múltipla com três alternativas de resposta. Nos subtemas “Probabilidade em experiências simples” e “Probabilidade em experiências compostas”, o aluno devia seleccionar, de entre dois acontecimentos formulados, o acontecimento mais provável ou afirmar a sua equiprobabilidade a partir de um item de escolha múltipla com três alternativas de resposta. Ainda, em cada questão destes dois subtemas, o aluno devia descrever o raciocínio em que tinha baseado a escolha da resposta no item de escolha múltipla e assinalar a confiança com que tinha respondido à questão numa escala de tipo-Likert com cinco pontos, variando desde “nada confiante” até “totalmente confiante”.

Questionário-conceito frequentista. Este questionário era em tudo semelhante ao questionário-conceito clássico, excepto em relação à formulação das questões, em que se destacava o conceito frequentista de probabilidade.

Embora as questões tenham sido apresentadas pela mesma ordem em ambos os questionários, na formulação frequentista salientou-se no enunciado de cada questão a substituição de uma única experiência pela repetição da experiência um grande número de vezes. Também na parte das questões correspondente ao item de escolha múltipla se destacam alterações. No caso das três primeiras questões, relativas à classificação de acontecimentos, substituíram-se as categorias “certo”, “possível” e “impossível” por “sempre”, “algumas vezes” e “nunca”, respectivamente. Quanto às restantes questões, substituiu-se a expressão “mais provável” por “mais vezes”.

Procedimentos de recolha de dados. A recolha de dados foi feita através dos dois questionários usados no estudo. O questionário-conceito clássico foi passado a alunos do 8º e do 11º anos de escolaridade entre os meses de Fevereiro e Maio de 1997. O questionário-conceito frequentista foi passado apenas a alunos do 8º ano de escolaridade durante os meses de Maio e Junho de 1997.

Foi o autor do estudo, acompanhado do professor da turma correspondente ao horário de passagem do questionário, que procedeu à passagem dos questionários em todas as turmas e os alunos dispuseram de um tempo máximo de 60 minutos para responder, tendo constituído um tempo suficiente para responder a qualquer dos questionários. A passagem dos questionários decorreu nas salas em que os alunos tinham as suas aulas e, em qualquer caso, os alunos só puderam abandonar a sala depois de recolhidos todos os questionários.

Antes dos alunos começarem a responder ao questionário respectivo, o autor do estudo informou-os dos objectivos do estudo e explicou a forma de responder ao questionário. Além disso, no sentido de evitar dificuldades de cálculo, os alunos puderam usar calculadora e foram informados de que os resultados dos questionários não influenciariam de qualquer maneira a sua avaliação escolar.

Depois de passados os questionários, foi também o autor do estudo que classificou as respostas dos alunos em correctas e erradas e categorizou os raciocínios descritos pelos alunos.

Análise de dados

A análise de dados centrou-se, fundamentalmente, na caracterização dos vários grupos e no estabelecimento de comparações entre os diferentes grupos definidos pelas variáveis consideradas no estudo. Para tal, recorreu-se ao cálculo de frequências e de percentagens, efectuaram-se testes estatísticos para comparação de médias e aplicou-se o teste de qui-quadrado. No caso dos testes estatísticos, adoptou-se o valor 0.05 para nível de significância estatística e, no caso da comparação de duas médias, foram efectuados sempre testes bilaterais.

Apresentação de resultados

A apresentação dos resultados do estudo é feita a partir de cada uma das três questões de investigação formuladas no estudo.

Questão de investigação 1.

Que intuições probabilísticas possuem alunos do 8º de escolaridade comparativamente com alunos do 11º ano de escolaridade?

Nesta questão de investigação, os resultados são apresentados a partir de cada um dos subtemas considerados: “Acontecimento certo, possível e impossível”, “Probabilidade em experiências simples” e “Probabilidade em experiências compostas”.

As intuições probabilísticas dos alunos foram estudadas apenas nos subtemas “Probabilidade em experiências simples” e “Probabilidade em experiências compostas”, e foram identificadas a partir dos raciocínios descritos pelos alunos. (Recorde-se que apenas nas questões destes subtemas se questionaram os alunos sobre os raciocínios utilizados.)

De entre os vários raciocínios identificados, destaca-se, pela sua importância, os “raciocínios gerais”. Esta categoria inclui todos os raciocínios apresentados pelos alunos que garantem, em geral, a escolha de respostas correctas.

Nesta secção, além dos raciocínios referidos pelos alunos, apresentam-se também as percentagens de respostas correctas em todas as questões. Esta informação permitiu contrastar e relacionar os raciocínios com as respostas correctas.

Por último, no subtema “Acontecimento certo, possível e impossível”, em virtude de se dispor apenas das respostas, não foi possível identificar intuições que expliquem as respostas dadas.

Acontecimento certo, possível e impossível. Neste subtema incluem-se três questões, cada uma com cinco alíneas. As questões 1 e 3, que se inserem no contexto de uma urna e tratam da extracção de uma e de duas bolas de um saco, respectivamente, e a questão 2, que se insere no contexto do lançamento de um dado. Destaca-se, ainda, que as questões 1 e 2 tratam da classificação de acontecimentos em experiências simples e a questão 3 trata da classificação de acontecimentos em experiências compostas. A título de exemplo, apresenta-se a questão 1.

1. Um saco contém uma bola branca, uma bola preta e uma bola cinzenta. Sem ver, tira-se uma bola do saco.



Diga se se obém *de certeza*, se *é possível* obter ou se *é impossível* obter:

- | | | | |
|------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| a) uma bola branca; | <input type="checkbox"/> de certeza | <input type="checkbox"/> é possível | <input type="checkbox"/> é impossível |
| b) uma bola cinzenta; | <input type="checkbox"/> de certeza | <input type="checkbox"/> é possível | <input type="checkbox"/> é impossível |
| c) uma bola vermelha; | <input type="checkbox"/> de certeza | <input type="checkbox"/> é possível | <input type="checkbox"/> é impossível |
| d) uma bola não verde; | <input type="checkbox"/> de certeza | <input type="checkbox"/> é possível | <input type="checkbox"/> é impossível |
| e) uma bola não preta; | <input type="checkbox"/> de certeza | <input type="checkbox"/> é possível | <input type="checkbox"/> é impossível |

Observando as percentagens de respostas correctas nas diferentes perguntas, que constam da tabela 1, verifica-se que, na maior parte destas perguntas, os alunos classificaram correctamente o acontecimento. As dificuldades dos alunos ocorreram nas perguntas que tratavam de acontecimentos certos e/ou envolviam conectivos lógicos. Especificamente, na alínea 1d) estabelecia-se um acontecimento certo e usava-se o conectivo *não*, na alínea 1e) usava-se o conectivo *não*, nas alíneas 2b) e 2d) estabeleciam-se acontecimentos certos, na alínea 3c) estabelecia-se um acontecimento certo e usava-se o conectivo *não*, na alínea 3d) usava-se o conectivo *não* e na alínea 3e) estabelecia-se um acontecimento certo e usava-se o conectivo *ou*.

Entre os alunos do 8º ano e do 11º ano, as maiores discrepâncias entre as percentagens de respostas correctas aconteceram precisamente nas perguntas que estabeleciam acontecimentos certos e/ou que envolviam conectivos lógicos. Nestas perguntas, os alunos do 11º ano seleccionaram mais frequentemente as respostas correctas. Já entre os alunos do 11º ano com ensino de probabilidades (*cep*) e sem ensino de probabilidades (*sep*), não se salientaram discrepâncias entre as percentagens de respostas correctas.

QUESTÕES	RESPOSTAS CORRECTAS (%)			
	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		Total
		<i>cep</i>	<i>sep</i>	
1				
1a)	93.1	98.1	96.2	97.1
1b)	91.7	98.1	97.1	97.6
1c)	99.0	98.1	98.0	98.1
1d)	48.5	77.1	74.0	75.6
1e)	81.9	95.2	92.3	94.3
2				
2a)	95.6	100.0	99.0	99.5
2b)	75.0	87.6	90.4	89.0
2c)	98.0	96.2	99.0	97.6
2d)	82.3	88.6	94.2	91.4
2e)*	94.1	100.0	98.1	99.0
3				
3a)	93.1	100.0	98.1	99.0
3b)	96.1	99.0	98.1	98.6
3c)	17.6	17.1	32.7	24.9
3d)	75.5	85.7	80.8	83.3
3e)	29.1	52.4	50.0	51.2

* Nesta alínea n=203; *cep* – alunos com ensino de probabilidades; *sep* – alunos sem ensino de probabilidades

Tabela 1. Percentagem de respostas correctas nas alíneas das três questões do subtema “Acontecimento certo, possível e impossível”, por ano escolar e ensino de probabilidades.

Os resultados obtidos revelaram ainda que, no caso dos acontecimentos certos, muitos alunos que não os reconheceram enquanto tal, classificaram-nos como possíveis. Este padrão de respostas foi mais frequente entre os alunos do 8º ano do que entre os alunos do 11º ano. Já quando se tratava de acontecimentos impossíveis, muito poucos alunos os classificaram como sendo possíveis. Assim, os resultados obtidos sugerem que os alunos têm mais dificuldades em identificar um acontecimento certo comparativamente com um acontecimento impossível, estando tais dificuldades relacionadas com uma não clara distinção entre acontecimento certo e acontecimento possível.

Probabilidade em experiências simples. Neste subtema incluem-se seis questões, das quais quatro se inserem no contexto de urnas e duas no contexto de um dado.

Nas questões inseridas no contexto de urnas comparam-se as probabilidades de obter uma bola branca em dois sacos, considerando que, em relação aos dois sacos, na questão 4 é igual o número total de bolas (Saco I: $2B + 3P$, Saco II: $3B+2P$), na questão 5 é igual o número de bolas brancas (Saco I: $2B + 2P$, Saco II: $2B+3P$), na questão 6 é diferente o número e a razão entre o número de bolas de cada cor (Saco I: $2B+1P$, Saco II: $3B+2P$) e na questão 7 é igual o número e a razão entre o número de bolas de cada cor (Saco I: $1B+1P$, Saco II: $2B+2P$). Destas questões, vejamos a questão 4.

4. Um saco I contém duas bolas brancas e três bolas pretas, e um saco II contém três bolas brancas e duas bolas pretas. **Sem ver**, tira-se **uma** bola de cada um dos sacos.



4.1. De qual dos sacos é mais provável obter uma bola branca?

- Do saco I.
 Do saco II.
 É igualmente provável obter uma bola branca de qualquer dos sacos I e II.

4.2. Que raciocínio utilizou para responder à pergunta?

Relativamente às questões inseridas no contexto do dado, na questão 8 comparam-se as probabilidades dos acontecimentos obter o número 5 com obter um número ímpar e na questão 9 comparam-se as probabilidades de obter um número par

com obter um número ímpar.

Na tabela 2 podem observar-se as percentagens de respostas correctas obtidas em todas as questões do subtema. No caso das questões inseridas no contexto de urnas, verifica-se que quase todos os alunos seleccionaram a resposta correcta na questão 4 e as percentagens diminuem quando se passa para as questões 5 e 7, em que se obtiveram percentagens idênticas, e quando se passa destas para a questão 6.

Nas questões inseridas no contexto do lançamento de um dado, quase todos os alunos seleccionaram a resposta correcta na questão 9 e experimentaram maiores dificuldades na questão 8, o que é particularmente notório entre os alunos do 8º ano.

QUESTÕES	RESPOSTAS CORRECTAS (%)			
	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		Total
		<i>cep</i>	<i>sep</i>	
4	90.7	100.0	99.0	99.5
5	57.8	89.5	90.4	89.9
6	26.9	48.6	47.1	47.8
7	64.2	93.3	83.7	88.6
7	37.2	82.9	70.2	76.6
8	98.0	100	99.0	99.5

Nota: *cep* – alunos com ensino de probabilidades; *sep* – alunos sem ensino de probabilidades

Tabela 2. Percentagem de respostas correctas nas seis questões do subtema “Probabilidade em experiências simples”, por ano escolar e ensino de probabilidades.

Entre os alunos dos dois anos escolares, verificou-se que os alunos do 11º ano seleccionaram mais frequentemente a resposta correcta em todas as questões. No caso dos alunos do 11º ano *cep* e *sep*, registou-se uma percentagem de selecção da resposta correcta ligeiramente superior entre os alunos *cep* nas questões 7 e 8.

Nas questões deste subtema, os alunos basearam as suas respostas em comparações resultantes de contagens—comparações entre o número total de bolas, entre o número de bolas de uma das cores e entre o número de bolas de ambas as cores, em “raciocínios gerais”, numa compreensão errada da lei da extensão e no facto de os acontecimentos serem possíveis.

Nas comparações resultantes de contagens, o raciocínio “Comparar o número total de bolas” consistiu em afirmar a maior probabilidade de obter uma bola branca do saco com o menor número total de bolas. Consequentemente, este raciocínio justificou a selecção da resposta correcta nas questões 5 e 6 e de uma resposta errada na questão 7.

O raciocínio “Comparar o número de bolas brancas” consistiu em afirmar a maior probabilidade de obter uma bola branca do saco com o maior número de bolas brancas ou a equiprobabilidade de obter uma bola branca de qualquer dos sacos, no caso de ser igual o número de bolas brancas em ambos os sacos. Em consequência, este raciocínio justificou a selecção da resposta correcta na questão 4 e de uma resposta errada nas questões 5, 6 e 7.

Já o raciocínio “Comparar o número de bolas pretas” consistiu em afirmar a maior probabilidade de obter uma bola branca do saco com o menor número de bolas pretas. Este raciocínio conduziu à selecção da resposta correcta nas questões 5 e 6.

O raciocínio “Comparar o número de bolas brancas e pretas” consistiu em comparar o número de bolas de cada cor entre os sacos ou em cada um dos sacos. Este raciocínio, com um maior nível de sofisticação, conduziu à selecção da resposta correcta nas questões 4, 5 e 7 e à afirmação da equiprobabilidade dos acontecimentos na questão 6.

Conjuntamente, os quatro raciocínios anteriores, foram muito referidos em qualquer dos anos escolares, tendo-se obtido sempre percentagens superiores a 80%, no 8º ano, e entre 30% e 75%, no 11º ano. No caso do 11º ano, verificou-se que a percentagem diminuiu sistematicamente da questão 4 até à questão 7.

Quanto aos “raciocínios gerais”, enquanto raciocínios que garantem a escolha da resposta correcta, os alunos explicitaram a proporção do número de bolas de cada cor em ambos os sacos ou compararam o número de casos favoráveis ou as probabilidades dos acontecimentos. Na tabela 3 podem observar-se as percentagens de alunos que adoptaram estes raciocínios nas várias questões do subtema.

QUESTÕES	RACIOCÍNIOS GERAIS			
	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		Total
		<i>cep</i>	<i>sep</i>	
4	1.0	35.2	12.5	23.9
5	0.0	37.1	19.2	28.2
6	3.9	36.2	23.1	29.6
7	3.4	65.7	54.8	60.3
7	35.8	80.0	67.3	73.6
8	40.2	90.5	81.7	86.1

Nota: *cep* – alunos com ensino de probabilidades; *sep* – alunos sem ensino de probabilidades

Tabela 3. Percentagem de alunos nos “raciocínios gerais” nas questões do subtema “Probabilidade em experiências simples”, por ano escolar e ensino de probabilidades.

Entre os “raciocínios gerais”, o raciocínio “Proporção do número de bolas” foi referido apenas nas questões 6 e 7, o raciocínio “Comparar o número de casos favoráveis” foi referido apenas nas questões 8 e 9 e o raciocínio “Comparar as probabilidades dos acontecimentos” foi referido em todas as questões. No contexto do dado, destaca-se que, dos “raciocínios gerais”, o raciocínio “Comparar o número de casos favoráveis” foi o único referido entre os alunos do 8º ano e foi o mais referido entre os alunos do 11º ano.

Entre os alunos do 8º ano, foram muito poucos os alunos que adoptaram “raciocínios gerais” no contexto das urnas, enquanto uma percentagem considerável destes alunos os referiu no contexto do dado. Já os alunos do 11º ano referiram-nos em ambos os contextos, embora com maior frequência no contexto do dado. No 11º ano observou-se, ainda, que os alunos *cep* adoptaram mais frequentemente os “raciocínios gerais” em todas as questões do subtema.

O raciocínio “O número 5 é um número ímpar”, referido apenas na questão 8, revela uma compreensão errada da lei da extensão, pois os números ímpares contêm o número 5. Este raciocínio, mais referido no 8º ano, baseou-se na observação de que o número 5 é um número ímpar e justificou a equiprobabilidade dos acontecimentos.

Finalmente, o raciocínio “Ambos os acontecimentos são possíveis” foi referido para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos pelo facto de ambos, e mesmo outros, serem possíveis, pela impossibilidade de prever o resultado numa única extracção/lançamento ou devido à sorte. No 8º ano, este raciocínio foi muito mais mencionado no contexto do dado do que no contexto das urnas e, no 11º ano, foi apenas referido no contexto do dado por muito menos alunos.

Probabilidade em experiências compostas. Neste subtema incluem-se cinco questões: na questão 10 comparam-se as probabilidades de obter duas bolas brancas com obter uma bola branca e uma bola preta, num saco com duas bolas brancas e duas bolas pretas, na questão 11 comparam-se as probabilidades de obter o número 5 num dado e o número 6 no outro com obter o número 6 nos dois dados, na questão 12 comparam-se as probabilidades de obter números diferentes em dois dados com obter números iguais em ambos os dados, na questão 13 comparam-se as probabilidades de obter a face cara em duas moedas com obter face cara numa moeda e face escudo na outra moeda e na questão 14 comparam-se as probabilidades de obter faces iguais em três moedas com obter faces diferentes em duas das três moedas. Apresenta-se, a seguir, a questão 11.

11. Lançam-se **dois** dados de uma só vez e conta-se o número de pintas das faces que ficam viradas para cima.

11.1 Qual das situações seguintes é **mais provável**?

- Obter o número 5 num dado e o número 6 no outro dado.
- Obter o número 6 em ambos os dados.
- As duas situações anteriores são igualmente prováveis.

11.1 Qual das situações seguintes é **mais provável**?

Observando as percentagens de respostas correctas nas várias questões, que constam da tabela 4, verifica-se que são muito inferiores, quando comparadas com as percentagens que foram obtidas nas várias questões do subtema “Probabilidade em experiências simples”. De entre todas as questões, destacam-se as questões 12 e 14, em que os alunos seleccionaram mais frequentemente a resposta correcta.

QUESTÕES	RESPOSTAS CORRECTAS (%)			
	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		Total
		<i>cep</i>	<i>sep</i>	
10	14.7	27.6	29.8	28.7
11	14.2	14.3	14.4	14.3
12	37.7	61.0	67.3	64.1
13	12.8	17.1	20.2	18.6
14	33.8	46.7	60.6	53.6

Nota: *cep* – alunos com ensino de probabilidades; *sep* – alunos sem ensino de probabilidades

Tabela 4. Percentagem de respostas correctas nas cinco questões do subtema “Probabilidade em experiências compostas”, por ano escolar e ensino de probabilidades.

Entre os dois anos escolares, os alunos do 11º ano obtiveram percentagens de respostas correctas consideravelmente superiores nas questões 10, 12 e 14, e, no 11º ano, o ensino de probabilidades não favoreceu a selecção das respostas correctas. Neste último caso, foram mesmo os alunos *sep* que seleccionaram mais frequentemente as respostas correctas.

Neste subtema, comparativamente com o anterior, os alunos basearam as suas respostas numa variedade maior de raciocínios, salientando-se “raciocínios gerais” e raciocínios envolvendo as probabilidades das experiências simples implicadas na experiência composta, a descrição incompleta do espaço amostral, factores causais e o facto de ambos os acontecimentos serem possíveis.

Os “raciocínios gerais”, consistindo em “Comparar o número de casos favoráveis” e em “Comparar as probabilidades dos acontecimentos”, foram muito menos referidos neste subtema do que no subtema anterior, conforme se pode verificar na tabela 5. Entre os dois anos escolares, os alunos do 11º ano referiram mais frequentemente estes raciocínios. Todavia, entre os alunos do 11º ano *cep* e *sep* não se salientaram diferenças na adesão a estes raciocínios.

QUESTÕES	RACIOCÍNIOS GERAIS			
	8º ANO (n=204)	11º ANO (n=209)		Total
		<i>cep</i>	<i>sep</i>	
10	1.0	7.6	12.5	10.0
11	1.5	6.7	1.9	4.3
12	11.8	46.7	43.2	44.9
13	0.0	9.5	6.7	8.2
14	2.0	19.1	12.5	15.7

Nota: *cep* – alunos com ensino de probabilidades; *sep* – alunos sem ensino de probabilidades

Tabela 5. Percentagem de alunos nos “raciocínios gerais” nas questões do subtema “Probabilidade em experiências compostas”, por ano escolar e ensino de probabilidades.

Para além dos “raciocínios gerais”, a resposta correcta foi também justificada, em todas as questões, pela maior dificuldade em obter o mesmo resultado ou pela maior probabilidade de obter resultados diferentes nos vários objectos aleatórios. São exemplo destes raciocínios, mais limitados e menos fiáveis, “É mais difícil obter duas bolas da mesma cor”, referido na questão 10, e “É mais provável obter números diferentes nos dois dados”, referido na questão 11.

Nos raciocínios envolvendo as probabilidades das experiências simples implicadas na experiência composta, os alunos referiram-se ao objecto aleatório ou, mais especificamente, à equiprobabilidade dos seus resultados. Por exemplo, na questão 12 referiram que “Os números dos dois dados são iguais” e na questão 13 referiram a “Equiprobabilidade de obter qualquer face de uma moeda”. A adesão a estes raciocínios conduziu quase sempre à afirmação da equiprobabilidade dos acontecimentos, tendo os alunos do 11º ano, frequentemente, operado com as probabilidades nas experiências simples para obterem a probabilidade na experiência composta.

Na descrição do espaço amostral, em virtude da não consideração da ordem, verificou-se uma descrição incompleta em termos de acontecimentos elementares equiprováveis. Este raciocínio foi referido apenas por muito poucos alunos do 11º ano e conduziu à afirmação da equiprobabilidade dos acontecimentos. Já a adesão a factores causais, pouco adoptada pelos alunos de ambos os anos, conduziu

à selecção das várias respostas possíveis.

Finalmente, o raciocínio “Ambos os acontecimentos são possíveis”, consistindo na observação de que ambos os acontecimentos eram possíveis, levou os alunos a afirmarem a equiprobabilidade dos acontecimentos. Este raciocínio foi referido por cerca de metade ou mais dos alunos do 8º ano, muitos mais do que do 11º ano.

Questão de investigação 2.

Há diferenças nas respostas correctas em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo, ensino de probabilidades e interpretação do conceito de probabilidade, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Na variável ano escolar, o teste de χ^2 com correcção de continuidade, aplicado à tabela de contingência de 2×2 definida pelas frequências das respostas correctas e erradas por ano escolar, determinou diferenças estatisticamente significativas em 9 das 15 alíneas do subtema “Acontecimento certo, possível e impossível”, em 5 das 6 questões do subtema “Probabilidade em experiências simples” e em 3 das 5 questões do subtema “Probabilidade em experiências compostas”.

Considerando, agora, o número de respostas correctas em todas as alíneas de cada questão do subtema “Acontecimento certo, possível e impossível” e em todas as questões do subtema “Probabilidade em experiências simples”, do subtema “Probabilidade em experiências compostas” e no questionário, o teste de Mann-Whitney U determinou, em todos os casos, diferenças estatisticamente significativas entre os dois anos escolares.

Depois de codificado o desempenho em matemática em baixo, médio e elevado, verificou-se que a selecção das respostas correctas aumentou com o desempenho em matemática em ambos os anos escolares. A aplicação do teste de Kruskal-Wallis determinou diferenças estatisticamente significativas em duas questões do subtema “Acontecimento certo, possível e impossível”, no subtema “Probabilidade em experiências simples” e no questionário”, no caso do 8º ano, e em duas questões do subtema “Acontecimento certo, possível e impossível”, no subtema “Probabilidade em experiências simples”, no subtema “Probabilidade em experiências compostas” e no questionário”, no caso do 11º ano.

Já a influência da variável sexo não foi tão determinante como a variável desempenho em matemática. Recorrendo ao teste de Mann-Whitney U, observaram-se diferenças estatisticamente significativas no subtema “Probabilidade em experiências simples”, no caso do 8º e 11º anos, e no questionário, no caso do 11º ano. Em ambos os anos, as diferenças foram favoráveis aos alunos do sexo masculino.

Em relação à variável ensino de probabilidades, estudada apenas entre os alunos do 11º ano, o teste de Mann-Whitney U não determinou diferenças estatisticamente significativas entre os alunos *cep* e *sep* em qualquer dos subtemas nem no ques-

tionário.

Finalmente, no 8º ano, entre a interpretação clássica e a interpretação frequentista de probabilidade, destaca-se que a interpretação frequentista favoreceu, com significância estatística, a selecção das respostas correctas numa questão do subtema “Acontecimento certo, possível e impossível”, no subtema “Probabilidade em experiências compostas” e no questionário.

Questão de investigação 3.

Há diferenças na confiança nas respostas, em relação às variáveis ano escolar, desempenho em matemática, sexo e ensino de probabilidades, entre alunos do 8º ano e/ou do 11º ano de escolaridade?

Deve recordar-se que a confiança nas respostas foi estudada apenas em 11 das 15 questões do questionário-conceito clássico, especificamente nas questões dos subtemas “Probabilidade em experiências simples” e “Probabilidade em experiências compostas”.

Comparativamente com os alunos do 11º ano, os alunos do 8º ano depositaram uma confiança média superior nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas. Em termos de significância estatística, a aplicação do teste t de Student apenas determinou diferenças significativas entre os dois anos escolares no caso da confiança nas respostas erradas.

Comparando a confiança nas respostas correctas com a confiança nas respostas erradas, verificou-se que os alunos em cada um dos anos escolares depositaram maior confiança nas respostas correctas, tendo as diferenças sido estatisticamente significativas.

Considerando, agora, em cada ano escolar, o desempenho em matemática, observou-se que a confiança média nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas aumentou com o desempenho. Todavia, efectuada uma análise de variância, para comparação de médias, verificaram-se diferenças estatisticamente significativas apenas entre as médias das confianças nas respostas e nas respostas correctas em ambos os anos escolares.

Já quanto à variável sexo, observou-se entre os alunos do sexo masculino de cada um dos anos escolares uma confiança média superior em relação às respostas (correctas e erradas), às respostas correctas e às respostas erradas. Contudo, no caso do 8º ano, a aplicação do teste t de Student não determinou quaisquer diferenças estatisticamente significativas entre as médias das confianças nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas. No caso do 11º ano, todas estas diferenças foram estatisticamente significativas.

Finalmente, a variável ensino de probabilidades foi estudada apenas entre os alunos do 11º ano. Neste caso, comparativamente com os alunos *sep*, os alunos

cep depositaram uma maior confiança nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas, tendo o teste t de Student determinado diferenças estatisticamente significativas em todos os casos.

Discussão de resultados

Nesta secção discutem-se os resultados obtidos por referência às intuições, às respostas correctas e à confiança nas respostas.

Intuições

No subtema “Acontecimento certo, possível e impossível”, porque não foi incluída no questionário a parte do raciocínio, apenas podemos conjecturar que a elevada percentagem de respostas correctas na maior parte dos itens baseou-se em intuições que conduziram à selecção da resposta correcta.

Neste subtema, as maiores dificuldades dos alunos verificaram-se na classificação de acontecimentos em certos e/ou que envolviam conectivos lógicos. Nestes acontecimentos, as dificuldades dos alunos dos 8º ano foram sensivelmente superiores às dos alunos do 11º ano.

A propósito da maior dificuldade verificada nos acontecimentos certos, observe-se que a classificação de um acontecimento em certo implica o reconhecimento de que é “possível em todos os casos”, enquanto o aluno pode ter classificado o acontecimento em possível com base em apenas alguns casos. Já no caso da distinção entre acontecimentos possíveis e impossíveis, um tal raciocínio conduz sempre à classificação do acontecimento em impossível, pois ele é “impossível em todos os casos”. Este raciocínio parece explicar, pelo menos em parte, as dificuldades dos alunos, na medida em que eles quase nunca classificaram acontecimentos impossíveis em possíveis mas frequentemente classificaram acontecimentos certos em possíveis.

Tal como no presente estudo, Fischbein et al. (1991) observaram que a maioria dos alunos, incluindo alunos do 8º ano, identificaram adequadamente o tipo de acontecimento e verificaram que a categoria dos acontecimentos certos se revelou mais difícil.

No caso dos conectivos lógicos é possível que uma compreensão limitada dos seus significados esteja subjacente às dificuldades reveladas pelos alunos. A inclusão de conectivos lógicos na formulação de acontecimentos certos aumentou consideravelmente a dificuldade dos alunos, como se constata nas alíneas 1d), 3c)

e 3e) . Além disso, a maior dificuldade revelada nas alíneas 3c) e 3e), comparativamente com a alínea 1d), pode explicar-se pelo facto de se tratar de acontecimentos em experiências compostas.

No subtema “Probabilidade em experiências simples” no contexto de urnas, considerando os “raciocínios gerais”, em que se incluíram os raciocínios “Proporção do número de bolas” e “Comparar as probabilidades dos acontecimentos”, verificou-se que os alunos do 8º ano quase nunca os referiram e foram mencionados por muitos mais alunos do 11º ano. No 11º ano verificou-se ainda que estes raciocínios foram sistematicamente mais referidos em todas as questões pelos alunos *cep*, sendo mais referida a comparação de probabilidades entre os alunos *cep* e a proporção do número de bolas entre os alunos *sep*. Daqui pode depreender-se que o raciocínio proporção do número de bolas é mais independente do ensino e que o ensino teve algum impacto na adesão ao raciocínio de comparação de probabilidades.

Interpretando as quatro questões consideradas como comparações entre razões, podemos estudar o raciocínio proporcional no contexto de probabilidades. Adoptando os estádios de desenvolvimento do raciocínio proporcional de Noelting (1980), em que a questão 4 se situa no estádio IA (Intuitivo inferior), a questão 5 no estádio IB (Intuitivo médio), a questão 7 no estádio IIA (Operacional concreto inferior) e a questão 6 no estádio IIIA (Operacional formal inferior), constata-se que, à excepção das questões 5 e 7 no 8º ano, a percentagem de respostas correctas diminuiu do primeiro para o último nível. Assim, a sequencialização dos estádios do raciocínio proporcional não parece ter sido afectado, pelo menos de forma drástica, pelo contexto de incerteza em que se inseriam as questões. Especialmente em situações de incerteza contra-intuitivas, Cañizares e Batanero (1998) verificaram que o raciocínio proporcional foi influenciado por tais situações.

No contexto de um dado, considerando os “raciocínios gerais”, em que se incluíram os raciocínios “Comparar o número de casos favoráveis” e “Comparar as probabilidades dos acontecimentos”, verificou-se que foram mais referidos entre os alunos do 11º ano do que entre os alunos do 8º ano. Neste contexto constatou-se, diferentemente do contexto das urnas, que uma percentagem considerável de alunos do 8º ano basearam as suas respostas no raciocínio “Comparar o número de casos favoráveis”. Entre os alunos do 11º ano *cep* e *sep*, manteve-se a tendência anterior de os alunos *cep* adoptarem mais frequentemente “raciocínios gerais”.

Relativamente ao raciocínio “Comparar o número de casos favoráveis”, deve notar-se que a possibilidade de seleccionar a resposta correcta é diferente consoante nos situamos no contexto de um dado ou no contexto de urnas. No primeiro caso, este raciocínio garante a escolha da resposta correcta, pois o número de casos possíveis manteve-se constante; no último caso, este raciocínio não garante a escolha

da resposta correcta, pois o número de casos possíveis nem sempre se manteve constante. Este facto constitui uma possível explicação para a maior adesão aos “raciocínios gerais” no contexto de um dado, relativamente ao contexto de urnas.

Tal como no contexto de urnas, o facto de os alunos do 8º ano adoptarem apenas o raciocínio “Comparar o número de casos favoráveis” e o facto de ser maior a adesão ao raciocínio “Comparar as probabilidades dos acontecimentos” entre os alunos do 11º ano *cep* sugere que este último está mais dependente do ensino relativamente ao primeiro.

Finalmente, no raciocínio baseado no facto de o número 5 ser um número ímpar, que justificou a equiprobabilidade dos acontecimentos, algumas dificuldades podem estar relacionadas com a possibilidade de os alunos terem visto o número 5 como representativo dos números ímpares (Tversky e Kahneman, 1982a), não identificando, assim, o acontecimento mais extenso como sendo o mais provável (Tversky e Kahneman, 1983).

Do subtema “Probabilidade em experiências simples” para o subtema “Probabilidade em experiências compostas”, verificou-se uma grande diminuição na adesão aos “raciocínios gerais”, que incluíam os raciocínios “Comparar o número de casos favoráveis” e “Comparar as probabilidades dos acontecimentos”. Estes raciocínios quase nunca foram mencionados pelos alunos do 8º ano e foram mais referidos pelos alunos do 11º ano nas questões 12 e 14. No 11º ano, não se observaram diferenças claras na adesão a estes raciocínios entre os alunos *cep* e *sep*.

A maior generalidade das questões 12 e 14 (questões gerais), comparativamente com as questões 11 e 13 (questões concretas), favoreceu a selecção da resposta correcta. Este resultado, também observado por Fischbein et al. (1991), pode ser explicado pelo facto de nestas questões ser maior a discrepância entre o número de casos favoráveis.

Mais referidos entre os alunos do 11º ano, os raciocínios baseados em experiências simples e na descrição incompleta do espaço amostral, embora tendo-se revelado limitados na sua aplicabilidade, podem tornar-se úteis a partir da exploração da independência probabilística e da clarificação do papel desempenhado pela ordem dos resultados na determinação da probabilidade.

Já a raciocínio “Ambos os acontecimentos são possíveis”, conduzindo à afirmação da equiprobabilidade dos acontecimentos, foi referido por muitos alunos, especialmente no 8º ano. Lecoutre e Durant (1988) designaram este raciocínio por “enviesamento de equiprobabilidade”, e na questão concreta do contexto do dado (questão 12) observaram uma adesão à resposta de equiprobabilidade da ordem dos 60% entre estudantes de várias escolas (liceus) e de várias formações.

As maiores dificuldades exibidas pelos alunos no subtema “Probabilidade em experiências compostas”, em relação ao subtema “Probabilidade em experiências

simples”, foram também observadas nos estudos de Fischbein et al. (1975), Fischbein et al. (1991), Green (1983) e Munisamy e Doraisamy (1998).

Respostas correctas

Tal como no presente estudo, também em outros estudos se verificou que o número de respostas correctas aumenta com o ano de escolaridade (Fischbein et al., 1975b, Fischbein et al., 1991; Green, 1983; Munisamy e Doraisamy, 1998).

O aumento sistemático das respostas correctas com o desempenho em matemática, verificado neste estudo, foi também observado nos estudos de Leake (1962), de Green (1983) e de Munisamy e Doraisamy (1998). Diferentemente, no âmbito de concepções probabilísticas erradas, Fernandes (1990) não observou diferenças significativas entre o erro e o desempenho em matemática.

O facto de o erro em situações contra-intuitivas não ser influenciado pelo desempenho em matemática permite conjecturar que o ensino regular em matemática tem um impacto mais reduzido nestas situações, face a situações não contra-intuitivas. A forte persistência das ideias probabilísticas contra-intuitivas foi também observada em outros estudos (Lecoutre e Durant 1988; Scholz, 1987; Tversky e Kahneman, 1982a, 1982b, 1983).

A tendência favorável aos alunos do sexo masculino, observada no presente estudo, verificou-se também nos estudos de Green (1983) e de Munisamy e Doraisamy (1998). Já nos estudos de Leake (1962) e de Fischbein et al. (1975b), envolvendo alunos até ao 9º e 8º anos de escolaridade, respectivamente, não se observaram diferenças entre ambos os sexos. Tal como se verificou no presente estudo, estas investigações reforçam a tendência de acentuação das diferenças entre os alunos do sexo masculino e do sexo feminino com a progressão no nível de escolaridade.

A respeito da tendência favorável aos alunos do sexo masculino, podia conjecturar-se que tal resulta de uma maior prática destes em jogos de sorte-azar. Contudo, alguns estudos parecem comprometer o poder explicativo dessa hipótese. Lecoutre e Durant (1988) verificaram que o enviesamento de equiprobabilidade foi resistente a variações de classificação dos sujeitos, designadamente formação em teoria de probabilidades, prática em jogos de sorte-azar e sexo. No mesmo sentido, num estudo centrado nas influências culturais sobre o pensamento probabilístico de estudantes de um nível de escolaridade inferior ao daqueles que participaram no presente estudo, Amir e Williams (1999) obtiveram evidência empírica de que a prática com jogos do acaso não conduz necessariamente ao pensamento probabilístico.

No presente estudo, o ensino de probabilidades, entre alunos do 11º ano, não fa-

voreceu a selecção das respostas correctas. Analogamente, Fischbein *et al.* (1991) referem efeitos positivos limitados e um tanto inconsistentes do ensino de probabilidades na selecção das respostas correctas. Também, no âmbito das concepções probabilísticas erradas, Fernandes (1990) observou que o erro médio dos alunos *cep* não se distinguiu, em termos de significância estatística, do erro médio dos alunos *sep*.

Finalmente, quanto às interpretações clássica e frequentista, Fischbein *et al.* (1975a) observaram que a interpretação frequentista favoreceu especialmente os alunos mais velhos, os quais tinham uma idade muito próxima da dos alunos do 8º ano que participaram no presente estudo.

Destaca-se, ainda, que as diferenças favoráveis à interpretação frequentista centraram-se sobretudo no subtema “Probabilidade em experiências compostas”, que foi aquele que se revelou mais difícil.

Confiança nas respostas

A maior confiança depositada nas respostas (correctas e erradas), nas respostas correctas e nas respostas erradas pelos alunos do 8º ano, relativamente aos alunos do 11º ano, pode resultar de uma atitude mais desinibida e de uma maior disponibilidade para exprimirem as suas ideias, independentemente de serem correctas ou erradas. Além disso, a maior confiança depositada pelos alunos de ambos os anos escolares nas respostas correctas, em relação às respostas erradas, e o facto de a confiança ter aumentado com o desempenho em matemática, podem constituir resultados prometedores para o ensino de probabilidades.

Fernandes (1990) não observou esta tendência num contexto de concepções erradas em probabilidades e para Brown e Clement (1987) a elevada confiança com que as respostas são afirmadas constitui evidência de que tais respostas traduzem pré-concepções e não simples palpites.

Por outro lado, particularmente entre os alunos do 11º ano, os alunos do sexo masculino manifestaram uma confiança maior do que os alunos do sexo feminino nas respostas, nas respostas correctas e nas respostas erradas. Face a este resultado, pode colocar-se a hipótese que o nível de adesão às respostas correctas repercute-se no nível de confiança com que são afirmadas.

Todavia, a hipótese anterior não é prometedora, pois o estudo da correlação entre o número de respostas correctas nas questões de probabilidade e o nível médio de confiança nessas questões determinou valores muito baixos para o coeficiente de correlação de Pearson, concretamente $r = 0,113$, no 8º ano, e $r = 0,012$, no 11º ano.

Fernandes (1990) observou a mesma tendência, mas, diferentemente, os alunos

do sexo masculino não revelaram uma menor adesão às respostas erradas. Também McLeod (1992) refere estudos em que os rapazes demonstraram uma confiança superior à das raparigas em tarefas de estimação e em que a confiança aumentou do nível de escolaridade elementar para o nível de escolaridade secundária.

Finalmente, o facto de os alunos terem estudado probabilidades repercutiu-se numa maior confiança com que eles afirmaram os vários tipos de respostas.

Contrariamente, no estudo já antes referido, Fernandes (1990) observou que o ensino de probabilidades não aumentou a confiança com que os alunos afirmaram as suas respostas. Foram mesmo os alunos *sep* que depositaram uma maior confiança nas respostas.

Em síntese, comparativamente com o presente estudo, Fernandes (1990) verificou que em situações contra-intuitivas a confiança depositada nas respostas não aumentou pelo facto de se tratar de respostas correctas nem pelo facto de os alunos terem tido ensino de probabilidades, e a maior confiança revelada pelos alunos do sexo masculino não se explicou por uma menor adesão às respostas erradas.

Implicações didácticas e recomendações para futuras investigações

Nesta secção referem-se implicações didácticas decorrentes do estudo e apresentam-se algumas recomendações para futuras investigações.

Implicações didácticas

Em relação à classificação de um acontecimento em certo, possível e impossível, os resultados obtidos sugerem a necessidade do ensino salientar, de um modo particular, os acontecimentos certos e os acontecimentos que incluam conectivos lógicos na sua formulação. Especialmente no âmbito de experiências compostas, a consideração de acontecimentos certos que incluam conectivos lógicos revelou-se um aspecto muito crítico na selecção da resposta correcta.

Nas probabilidades em experiências simples, o recurso a raciocínios baseados em contagens para comparar probabilidades, enquanto raciocínios limitados na sua aplicação, destaca a conveniência de os alunos substituírem esses raciocínios por estratégias baseadas no conceito de proporção. Neste caso, o ensino do cálculo de probabilidades através de fracções não parece ser suficiente, pois, no caso do 11º ano, muitos alunos *cep* adoptaram tais raciocínios.

Porque menos dependentes do ensino, os raciocínios “Proporção do número de bolas”, no contexto de urnas, e “Comparar o número de casos favoráveis”, no

contexto de um dado, podem ser explorados com vantagem aquando da introdução do tema de probabilidades. Fischbein (1975b) verificou que o ensino momentâneo de uma técnica de agrupamento, em que se salientava a proporção de berlindes de duas cores em duas caixas, teve um grande impacto na selecção das respostas correctas.

Nas probabilidades em experiências compostas, para além das grandes dificuldades reveladas pelos alunos neste subtema, o estudo revelou dois resultados positivos que podem ser explorados no ensino. Um, consistiu nos melhores resultados obtidos nas duas questões de maior generalidade (questões 12 e 14), o outro, apenas estudado entre os alunos do 8º ano, residiu no facto da interpretação frequentista de probabilidade ter favorecido sistematicamente a selecção da resposta correcta em todas as questões do subtema.

A afirmação da equiprobabilidade dos acontecimentos pelo facto de serem possíveis, mais referida pelos alunos do 8º ano, constitui uma ideia que não envolve a quantificação probabilística e explicou, em muitos casos, erros de avaliação de probabilidades. Este raciocínio, conhecido por enviesamento de equiprobabilidade (Lecoutre e Durant, 1988), deve ser clarificado nas suas três origens observadas: (1) o facto de qualquer dos acontecimentos ser possível, o que não significa que sejam equiprováveis; (2) a impossibilidade de previsão numa única experiência, o que não nos impede de atribuir probabilidades a acontecimentos, pelo menos na perspectiva clássica de probabilidade; e (3) a sorte, que não constitui um critério fiável para atribuir probabilidades a acontecimentos.

Comparativamente com resultados obtidos em estudos que exploraram sistematicamente situações contra-intuitivas, o facto do número de respostas correctas ter aumentado com o desempenho em matemática e dos alunos terem depositado uma maior confiança nas respostas correctas do que nas respostas erradas, constituem dois resultados favoráveis à possibilidade de promover intuições adequadas.

Recomendações para futuras investigações

Considerando aspectos não desenvolvidos ou pouco aprofundados neste estudo, mas que indiciam algum potencial clarificador acerca das intuições probabilísticas, e aspectos não completamente explicados no presente estudo, apresentam-se quatro sugestões para futura investigação neste domínio.

Classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis. No presente estudo apenas se estudaram as respostas dadas pelos alunos no contexto de itens de escolha múltipla. Para identificar intuições probabilísticas subjacentes às respostas seria necessário conhecer os raciocínios usados pelos alunos, o que não

foi considerado neste estudo.

Ainda nesta vertente de investigação seria útil comparar o desempenho dos alunos na classificação de acontecimentos com o seu desempenho na formulação de acontecimentos dos diferentes tipos (certo, possível e impossível). Neste caso, Fischbein et al. (1991) obtiveram alguma evidência empírica apontando para uma maior dificuldade dos alunos em formularem acontecimentos dos diferentes tipos, comparativamente com a classificação de acontecimentos.

Efeito de mistura. No subtema de probabilidades em experiências simples—contexto de urnas, alguns alunos afirmaram ser mais provável obter uma bola de uma dada cor do saco com o menor número total de bolas.

No sentido de aprofundar este resultado, sugere-se o estudo da hipótese de que para estes alunos seria mais fácil obter o resultado pretendido em virtude de um menor efeito de mistura.

Raciocínio proporcional. Observou-se no presente estudo, embora apenas no contexto de urnas e a partir de quatro questões, que o padrão de respostas não se afastou drasticamente da sequencialização dos estádios de desenvolvimento do raciocínio proporcional de Noelting (1980). Já Cañizares e Batanero (1998) verificaram que o raciocínio proporcional foi influenciado pela consideração de situações probabilísticas contra-intuitivas. Assim, haveria vantagem em esclarecer mais profundamente se as situações probabilísticas não contra-intuitivas, exploradas em vários contextos, continuaria a não afectar significativamente o raciocínio proporcional.

Sexo e confiança. No presente estudo observou-se que os alunos do sexo masculino, tendencialmente, revelaram um melhor desempenho na selecção das respostas correctas e manifestaram também uma maior confiança nessas respostas, tendência que se acentuou do 8º para o 11º ano de escolaridade. Todavia, neste estudo, o melhor desempenho nas respostas correctas não foi acompanhado de uma maior confiança nessas respostas, e nos estudos de Lecoutre e Durant (1988) e de Amir e Williams (1999) não se verificou que a experiência em jogos de sorte-azar e do acaso tenha favorecido o pensamento probabilístico.

Também Leder (1992) refere estudos em que os rapazes revelaram consistentemente uma confiança superior à das raparigas relativamente à sua capacidade matemática, preconizando, a partir de um outro estudo, que seria muito difícil julgar a confiança sem considerar factores, tais como: atribuições de sucesso e fracasso, de satisfação, de utilidade percebida e de persistência. Nesta perspectiva, sugere-se que se estude o potencial destes factores para explicarem a maior confiança exibida pelos rapazes em probabilidades.

Notas

¹ Este texto descreve um estudo que constitui parte da Tese de Doutorado do autor, intitulada *Intuições e aprendizagem de probabilidades: Uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade*, apresentada na Universidade do Minho em Maio de 2000.

² B significa bola branca e P bola preta.

Referências bibliográficas

- Amir, G. e Williams, J. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(1), 85–107.
- Ausubel, D., Novak, J. e Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana.
- Brown, D. E. e Clement, J. (1987). Misconceptions concerning Newton's law of action and reaction: The underestimated importance of the third law. Em J. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar, Misconceptions and Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. III, pp. 39–53). Ithaca, New York: Cornell University.
- Bruner, J. S. (s/d). *O processo da educação*. São Paulo: Companhia Editora Nacional. (Original de 1965.)
- Cañizares, M. J. e Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO*, 14, 99–114.
- Chiu, M. M. (1996). Exploring the origins, uses, and interactions of students intuitions: Comparing the lengths of paths. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 478–504.
- Descartes, R. (1989). *Regras para a direcção do espírito*. Lisboa: Edições 70.
- Duarte, M. C. (1987). *Ideias alternativas e aprendizagem de conceitos: um estudo sobre propriedades do ar em alunos do ensino preparatório*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. Em *Teaching statistics in schools* (Vol. 7 de *Studies of mathematics education*, pp. 174–184). Paris: UNESCO.
- Falk, R., Falk, R. e Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 181–204.
- Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: Uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research*, 14, 31–50.
- Fischbein, E., Barbat, I. e Minzat, I. (1975). Primary and secondary intuitions in the introduction of probability. Em E. Fischbein, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix I, pp. 138–155). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (Artigo publicado em 1971).
- Fischbein, E., Nello, M. S. e Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523–549.
- Fischbein, E., Pampu, I. e Minzat, I. (1975a). The child's intuition of probability. Em E. Fischbein, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix II, pp. 156–174). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (Artigo publicado em 1967).
- Fischbein, E., Pampu, I. e Minzat, I. (1975b). Comparison of ratios and the chance concept in children. Em E. Fischbein, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix III, pp. 175–188). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (Artigo publicado em 1970).
- Fox, J. D. (1987). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra.
- Gall, M. D., Borg, W. R. e Gall, J. P. (1996). *Educational research: An introduction*. New York: Longman Publishers USA.
- Green., D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. Em D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett e G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 2, pp. 766–783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.
- Hadamard, J. (1954). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover Publications.
- Kahneman, D. e Tversky, A. (1982). On the study of statistical intuitions. Em D. Kahneman, P. Slovic e A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 493–508). Cambridge: Cambridge University Press.
- Leake, L. (1962). The status of three concepts of probability in children of the seventh, eighth, and ninth grades (Doctoral dissertation, University of Wisconsin, 1962). *Dissertation Abstracts*, 23, 2010.
- Lecoutre, M.-P. e Durant, J.-L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357–368.
- Leder, G. C. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. Em Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbooh of research on mathematics teaching and learning* (pp. 597–622). New York: Macmillan Publishing Company.
- Leite, L. S. F. (1993). *Concepções alternativas em mecânica: um contributo para a compreensão do seu conteúdo e persistência*. Tese de doutoramento não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. Em Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbooh of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). New York: Macmillan Publishing Company.

-
- Munisamy, S. e Doraisamy, L. (1998). Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 29(1), 39–45.
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I—Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11(2), 217–253.
- Piaget, J. e Beth, E. W. (1980). *Epistemología matemática y psicología*. Barcelona: Editorial Crítica. (Original de 1961.)
- Poincaré, H. (1932). *La valeur de la science*. Paris: Ernest Flammarion
- Poincaré, H. (1974). La creación matemática. Em Morris Kline (Ed.), *Matemáticas en el mundo moderno* (pp. 14–17). Madrid: Editorial Blume.
- Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares*. Lisboa: IIE.
- Scholz, R. W. (1987). *Cognitive strategies in stochastic thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tversky, A. e Kahneman, D. (1982a). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. Em D. Kahneman, P. Slovic e A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3–20). Cambridge: Cambridge University Press.
- Tversky, A. e Kahneman, D. (1982b). Causal schemas in judgment under uncertainty. Em D. Kahneman, P. Slovic e A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117–128). Cambridge: Cambridge University Press.
- Tversky, A. e Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293–315.

José António Fernandes, Departamento de Metodologias da Educação e Centro de Estudos em Educação e Psicologia da Universidade do Minho. Endereço electrónico: jfernandes@iep.uminho.pt.

RESUMO. Neste estudo identificaram-se e caracterizaram-se intuições probabilísticas de alunos do 8º ano e do 11º ano. Os resultados do estudo revelaram que os alunos de ambos os anos escolares possuem intuições mais limitadas e primitivas sobre probabilidades em experiências compostas do que em experiências simples, e o elevado número de respostas correctas na classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis sugere que os alunos possuem intuições correctas neste tópico. A percentagem de respostas correctas aumentou com o ano escolar e com o desempenho em matemática e foi superior entre os alunos do sexo masculino, especialmente no 11º ano. No 8º ano, a interpretação frequencista de probabilidade foi mais favorável à selecção das respostas correctas do que a interpretação clássica e, no 11º ano, o ensino prévio de probabilidades não favoreceu a escolha das respostas correctas. Os alunos do 8º ano afirmaram as suas respostas com

maior confiança do que os alunos do 11º ano e, em ambos os anos escolares, os alunos depositaram maior confiança nas respostas correctas do que nas respostas erradas, a confiança nas respostas correctas aumentou com o desempenho em matemática e os alunos do sexo masculino afirmaram as suas respostas com maior confiança, especialmente no 11º ano.

Palavras-chave: Probabilidades; Intuições; Aprendizagem; Variáveis do sujeito; Confiança.

ABSTRACT. In this study 8th and 11th graders' probabilistic intuitions were identified and characterised. The results of the study revealed that pupils of both school levels hold more limited and primitive intuitions when they had to deal with compound probability problems than when they had to deal with simple probability problems, and the high number of correct answers about the classification of events as certain, possible and impossible suggests that the pupils hold correct intuitions in this topic. The percentage of correct answers increased with school grade and with performance in mathematics, and more male than female students chose the correct answer, especially among the 11th graders. For 8th graders, the frequentist interpretation of probability was more favourable to the choice of correct answers than did the classic interpretation of probability. On the other hand, the previous teaching of probability did not produce a significant effect on the selection of correct answers by 11th graders. Eighth graders were more confident on their answers than were 11th graders. In both grade levels, students showed more confidence in correct than in incorrect answers, and confidence increased with performance in mathematics. Male students were more confident in their answers than females and the differences increased with school grade.

Key-words: Probability; Intuitions; Learning; Subject's variables; Confidence.