

A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática

Helena Rocha

Universidade Nova de Lisboa

Introdução

Desde os anos 80 que o recurso à tecnologia no processo de ensino/aprendizagem é recomendado em documentos como “An agenda for action” (NCTM, 1980), “Everybody counts” (NRC, 1989) ou “Curriculum and evaluation standards for school Mathematics” (NCTM, 1989). Duas décadas depois das primeiras recomendações, estas permanecem de tal forma actuais que foram reiteradas no documento “Principles and standards for school Mathematics” (NCTM, 2000), publicado recentemente.

Uma aprendizagem mais activa e dinâmica, explorando uma maior variedade de situações, testemunhando a verdadeira natureza dos processos matemáticos e envolvendo-se em aplicações com dados realistas, são os grandes argumentos apontados nestes documentos a favor da integração da tecnologia no ensino.

Também em Portugal foram reconhecidas as muitas potencialidades da tecnologia relativamente ao processo de ensino/aprendizagem da Matemática. Disso mesmo são testemunho o documento “Renovação do currículo de Matemática”, publicado pela APM em 1988, e as muitas experiências vividas nas nossas escolas, no final da década de 80 e início dos anos 90, no âmbito do Projecto Minerva. Também os programas oficiais passaram a integrar recomendações de utilização da tecnologia, sendo que, actualmente, esta é mesmo considerada de utilização obrigatória.

Ainda assim, as tentativas de integrar a utilização do computador no processo de ensino/aprendizagem depararam-se sempre com diversos obstáculos, principalmente ao nível da acessibilidade.

Com algumas características semelhantes às do computador e sem alguns dos inconvenientes que pareciam obstar à divulgação destes, as calculadoras gráficas surgiram então como uma nova esperança. Contudo, ninguém acredita que a calculadora tenha efeitos mágicos sobre os alunos, ou seja, não é razoável esperar que os alunos usem e compreendam os gráficos intuitivamente, apenas porque dispõem duma calculadora gráfica. Torna-se assim fundamental dar atenção, entre outros aspectos, à forma como esta é utilizada.

Objectivos do estudo

O principal objectivo deste estudo é conhecer e compreender a forma como os alunos utilizam a calculadora gráfica. Procura-se, assim, identificar as razões que estão na origem do tipo de utilização que é feita e, em particular, perceber qual a influência da relação que os alunos mantêm com a Matemática e da perspectiva que têm relativamente à tecnologia. Como tal, pretende-se encontrar resposta para um conjunto de questões incidindo sobre diferentes aspectos da utilização da máquina:

- Quais os critérios em que os alunos se baseiam para decidir relativamente à conveniência de recorrer à calculadora gráfica?
- Qual o nível de conhecimentos que cada aluno tem da sua calculadora gráfica?
- Qual o aproveitamento que faz das potencialidades de que tem conhecimento e que são disponibilizadas pela sua máquina?
- Como é que os alunos interpretam as informações disponibilizadas pela máquina?

Elementos teóricos sobre a utilização da calculadora gráfica

Aspectos gerais

Estudos realizados indicam que os alunos tendem a usar as potencialidades existentes nas calculadoras gráficas ao nível do cálculo, de uma forma semelhante à que utilizavam nas calculadoras científicas (não gráficas), ou seja, como um substituto do cálculo mental e de métodos escritos que seriam indiscutivelmente mais complexos e morosos. No que respeita às potencialidades gráficas, estas substituem rapidamente as rotinas mentais e escritas utilizadas para representar graficamente uma função. No entanto, para além das situações referidas, a calculadora gráfica não introduz qualquer alteração nas abordagens que os alunos até então estavam habituados a fazer, a menos que tal lhes seja explicitamente ensinado (Ruthven, 1992). Como referem Boers e Jones (1994), mesmo durante um exame, em questões em que o recurso à calculadora seria vantajoso, existe muito pouca evidência que esta tenha sido utilizada. A única excepção parece ocorrer nos casos em que o enunciado especificamente pede o gráfico de uma função. Neste sentido, Ruthven (1992) considera que a utilização que é feita da calculadora tende a ser “tradicional” e Barling (1994) apresenta uma justificação para esta tendência.

Quando uma nova tecnologia é introduzida, uma preocupação ouvida frequentemente é que os alunos ao utilizarem os novos métodos percam capacidades e que tenham menos compreensão do que estão a fazer. A resposta usual é insistir que a tecnologia se bem utilizada será enriquecedora e proporcionará mais e mais profundas oportunidades do que os métodos tradicionais, levando como tal a uma melhor compreensão. No entanto, Barling (1994) considera que nenhuma destas perspectivas corresponde à realidade. E isto porque não só tem sido difícil persuadir os alunos a abandonar alguns dos seus métodos tradicionais de fazer as coisas, como também convencê-los das maiores

possibilidades destes novos métodos. Um aspecto chave tem sido a extraordinária dificuldade que a maioria dos alunos tem em processar determinada informação ou conceito por mais de uma forma.

De um modo geral, e ainda segundo o mesmo autor, consideramos que estamos a ajudar os alunos quando lhes proporcionamos oportunidades de contactar com diferentes abordagens e discutimos os méritos de cada uma, com o objectivo de proporcionar uma escolha informada. Muitos alunos, contudo, consideram esta atitude profundamente destabilizadora e necessitam de muito mais apoio do que poderíamos supor. Eles preferem fixar-se apenas numa abordagem, mesmo para problemas em que esta é claramente inadequada, ou mudar para um método alternativo apenas quando são forçados a isso pela natureza do problema. A técnica preferida é, em geral, a primeira a ser aprendida, o que não é surpreendente.

Ruthven (1992), no entanto, considera que a tendência que os alunos têm para optar por abordagens semelhantes às que costumavam utilizar antes de disporem da calculadora gráfica evolui com o decorrer do tempo. Como tal, à medida que a confiança aumenta, começam a surgir mais exemplos de situações em que é feita uma utilização inovadora da calculadora.

Quando os alunos começam a utilizar uma calculadora gráfica, eles vêem-na como uma forma automática de realizar um conjunto limitado de procedimentos, tais como determinar valores de uma função ou representá-la graficamente. O aumento de confiança na sua utilização pode contudo dar origem a novas utilizações, a mais promissora das quais é o recurso ao método de tentativa e erro. Com efeito, embora este método tenha limitações, constitui uma forma de os alunos abordarem problemas que de outro modo estariam para além das suas possibilidades (Ruthven, 1992).

Ainda assim, o recurso a uma estratégia como a tentativa e erro não é considerado adequado por muitos alunos, como refere Broman (1996). E esta situação está associada à experiência matemática dos alunos. Efectivamente, a partir do momento em que os alunos passam a ter conhecimento de um certo método ou fórmula que permite a resolução de determinado tipo de problema, passam frequentemente a ser proibidos de recorrer a cálculos sistemáticos ou a qualquer outra estratégia para alcançar o resultado pretendido. Passa-lhes a ser exigido que recorram ao “método correcto”. Nestas circunstâncias, não é pois de estranhar que os alunos interiorizem a ideia de que existe apenas uma forma correcta de resolver cada problema e que fiquem hesitantes, sem saber como prosseguir, ao depararem-se com um problema para o qual não conseguem recordar o “método correcto” (Broman, 1996).

É precisamente esta compartimentação que os alunos habitualmente fazem da Matemática, e que os leva a considerar que determinada técnica é apenas adequada para determinado tipo de problema, que, segundo Barling (1994), é responsável pela forma como a calculadora gráfica é utilizada. Com efeito, embora alguns alunos encarem o potencial que a calculadora lhes disponibiliza com entusiasmo, para a maioria esta é vista apenas como mais um instrumento que é utilizado quando é obviamente útil (por exemplo, para fazer um gráfico) mas a que raramente recorrem noutras circunstâncias (por exemplo, para confirmar resultados).

Estudos realizados indiciam que os alunos têm alguma dificuldade em utilizar a calculadora de forma eficiente e apontam para a necessidade de ponderar a forma como esta é utilizada (Hodges e Kissane, 1994).

Segundo Broman (1996), os alunos ficam geralmente tão satisfeitos por poderem utilizar calculadoras que tendem a usá-las de forma ineficaz, recorrendo a elas, nomeadamente, para executar qualquer tipo de cálculo. Ainda assim, de acordo com Boers e Jones (1994), um problema geral com as calculadoras gráficas parece ser, contrariamente aos receios mais comuns, que esta é sub-utilizada em vez de sobre-utilizada.

Ward (2000), que analisou a utilização que os alunos fazem da calculadora, é particularmente crítico relativamente às estratégias a que estes recorrem para encontrar uma imagem aceitável do gráfico de uma função. Segundo este autor, os alunos recorrem a uma de três estratégias: limitam-se a introduzir a expressão da função e a carregar na tecla que permite traçar o gráfico; usam os valores pré-definidos pela calculadora; ou introduzem manualmente valores adequados para a janela de visualização, partindo de uma análise da expressão da função. Estas três estratégias não são, no entanto, igualmente utilizadas, existindo uma preferência clara pela primeira delas. Ao recorrerem a esta estratégia, na opinião de Ward (2000), os alunos limitam-se a carregar em botões, não existindo qualquer reflexão sobre o que estão a fazer.

Este autor parece contudo esquecer-se que, apesar das muitas potencialidades da calculadora gráfica, esta é apenas uma máquina e, como tal, o raciocínio terá que ficar sempre a cargo do utilizador. É que, como refere Dion (1990, p.567), “os alunos que carregam cegamente nos botões da calculadora ‘com os dedos cruzados’, rapidamente descobrem que um dos princípios fundamentais dos computadores também se aplica às calculadoras: lixo introduzido, lixo como resposta”. E é importante ter presente que para obter realmente uma imagem representativa do gráfico de uma função, é preciso mais do que simplesmente introduzir a expressão e carregar na tecla *graph*.

Ainda assim, o estudo de Ward (2000) chama a atenção para a dificuldade que os alunos parecem ter em alterar directamente os valores da janela de visualização. Com efeito, nos casos em que foram obrigados a fazê-lo surgiram quase sempre problemas, que os alunos procuraram ultrapassar recorrendo a estratégias como a de considerar os valores que aparecem na expressão da função.

Dificuldades associadas a características da calculadora gráfica

Hodges e Kissane (1994) também deram alguma atenção à utilização da calculadora gráfica, mas centraram-se na análise das dificuldades que os alunos enfrentam e, em alguns casos, mesmo nas concepções erradas que têm. Neste âmbito, referem a falta de compreensão das diferentes representações disponibilizadas pela máquina e as limitações inerentes às calculadoras gráficas, que consideram responsáveis pelo surgimento destas.

As dificuldades e concepções erradas que mais têm sido estudadas, ainda segundo os mesmos autores, são as que têm origem na falta de compreensão da representação simbólica e gráfica das funções, bem como da relação entre estas, e a forma como a informação deve ser introduzida ou a forma como é apresentada pela calculadora.

Encontram-se nestas circunstâncias as situações em que é feita uma incorrecta interpretação do gráfico, devido a efeitos visuais ilusórios. É o que acontece nos gráficos de funções em que uma translação vertical pode parecer uma translação horizontal, uma situação bastante comum nas funções afins (Goldenberg, 1988, cf. Hodges e Kissane, 1994).

São igualmente comuns as situações em que os problemas decorrem de uma incorrecta introdução da informação na calculadora. E neste campo são, em particular, bastante usuais os casos em que não é feita uma utilização adequada de parêntesis na introdução de expressões (Boers e Jones, 1994).

A falta de compreensão da relação existente entre a forma do gráfico e a janela de visualização utilizada, é outro aspecto que frequentemente dá origem a dificuldades. Com efeito, é esta a justificação para que muitos alunos criam que o ângulo formado pela bissetriz dos quadrantes ímpares e pelos eixos coordenados é sempre de 45° (Hector, 1992, cf. Hodges e Kissane, 1994). Também uma falta de compreensão quanto ao efeito da escala, leva a que alguns alunos, ao observarem o eixo dos yy mais grosso do que de costume, considerem que parte do gráfico se encontra sobre este ou que a função tem uma assíntota vertical. Os alunos não se apercebem que o efeito que observam resulta de uma escala pequena e de uma amplitude de valores no eixo dos yy comparativamente grande (Ward, 2000).

Saber se a utilização da calculadora gráfica é responsável pelo desenvolvimento de concepções erradas ou se apenas as revela, é uma questão importante. No entanto, segundo Hodges e Kissane (1994), os estudos realizados identificam diferentes tipos de concepções, mas não abordam este aspecto. Ainda assim, estes autores consideram que a última hipótese parece ser a mais plausível, uma vez que a maioria das concepções erradas referidas também foi detectada noutros estudos, em que não foram utilizadas calculadoras gráficas.

Esta opinião também parece ser partilhada por Hector (1992), que aponta a anterior experiência matemática dos alunos, como a origem do problema. Segundo o autor, as calculadoras obrigam os alunos a enfrentar questões que, até então, nunca tinham sido abrangidas no âmbito da sua aprendizagem da Matemática. Com efeito, a escolha dos valores a considerar em cada eixo, ao pretender traçar um gráfico, não era um aspecto digno de nota. De um modo geral, as funções consideradas eram suficientemente simples e envolviam valores que facilmente podiam ser representados num referencial, considerando valores de x e de y entre -10 e 10 . A inexistência de discrepâncias assinaláveis na ordem de grandeza dos valores a representar nos dois eixos, levava ainda a que quase sempre fosse adoptada a mesma escala — uma escala unitária. A utilização das calculadoras gráficas permitiu a exploração de outro tipo de situações e transformou a escolha dos valores representados em cada eixo e da escala, num aspecto fundamental. Esta alteração veio a revelar que a opção por simplificações permanentes, impediu os alunos não só de se aperceberem da importância das noções envolvidas, como também, e principalmente, de as compreenderem convenientemente.

Mas existe também outro tipo de concepções erradas, como já foi referido. É o caso das que decorrem das reduzidas dimensões do ecrã da calculadora e da sua resolução

(Dion, 1990; Dick, 1992; Hodges e Kissane, 1994).

As concepções erradas atribuídas às reduzidas dimensões do ecrã da calculadora, incluem a convicção de que o gráfico termina nos limites do ecrã, bem como algumas ilusões relacionadas com a posição do gráfico no visor. Por exemplo, alguns alunos pensam que uma parábola mais alta aparece mais arredondada (Goldenberg, 1988, cf. Hodges e Kissane, 1994).

Quanto às que são atribuídas à reduzida resolução do ecrã, os principais problemas prendem-se com o facto de cada *pixel* representar vários valores. Estas características do funcionamento da máquina fazem com que por vezes a imagem exibida apresente algumas distorções. Surgem assim gráficos em que, por exemplo, não são visíveis os pontos de descontinuidade, ou em que partes horizontais são exibidas em zonas curvas, que incluíam um extremo local da função (Hector, 1992; Hodges e Kissane, 1994). A forma como alguns alunos interpretam estas situações denota, mais uma vez, uma falta de conhecimento/compreensão de aspectos importantes do funcionamento da máquina.

A ausência de indicação, no próprio gráfico, da escala que está a ser utilizada, é outra das limitações da calculadora que, de acordo com Ruthven (1996), também dá origem a dificuldades. Com efeito, e ainda segundo este autor, esta característica da máquina está intimamente associada às dificuldades que os alunos têm em compreender como as mudanças nos valores da janela de visualização interferem com o aspecto do gráfico.

É importante ter presente que a natureza de todas estas dificuldades é, muito provavelmente, influenciada de forma significativa pelo utilizador da calculadora. Com efeito, um utilizador mais sofisticado e experiente, consegue ter uma percepção suficiente dos diferentes factores envolvidos e distinguir, na informação disponibilizada pela máquina, os aspectos que devem ser ignorados e os que não devem. No entanto, os utilizadores pouco experientes, e em particular os alunos que estão apenas a iniciar o estudo das funções e seus gráficos, não têm ainda os conhecimentos necessários ao desenvolvimento de uma espécie de sensibilidade que lhes permita distinguir o que é importante do que não o é. Podem assim ser levados a tomar como reais alguns elementos apresentados de forma distorcida pela máquina (Hodges e Kissane, 1994).

É fundamental que os alunos se apercebam destas limitações da máquina, pois só assim poderão ultrapassar as dificuldades com que frequentemente se deparam e aprender Matemática com a calculadora gráfica (Dion, 1990; Hodges e Kissane, 1994). No entanto, as limitações da máquina não são as únicas responsáveis pelas dificuldades com que os alunos se deparam.

De acordo com Boers e Jones (1994), a maioria dos alunos tem dificuldade em integrar informação obtida por processos algébricos com informação obtida a partir da calculadora gráfica. E os autores descrevem algumas situações elucidativas. É o caso de alunos que depois de constatarem analiticamente que existiam dois valores de x para os quais uma função não estava definida, não foram capazes de integrar adequadamente esta informação com o facto do gráfico disponibilizado pela calculadora apresentar apenas uma assíntota vertical, sem ilustrar qualquer outro ponto de descontinuidade. São assim frequentes as ocasiões em que os alunos efectuam analiticamente, de forma correcta, um determinado cálculo, apresentando em seguida um gráfico que contradiz

frontalmente esse resultado. Os alunos podem ou não ter visto o conflito mas, em qualquer dos casos, é inevitável que nos questionemos quanto à compreensão que detêm do conceito envolvido. Nesta perspectiva, permitir a utilização da calculadora gráfica, nomeadamente nos exames, pode até dar-nos mais informação acerca da compreensão que os alunos têm dos conceitos envolvidos.

A partir da análise de exames realizados por alunos, Boers e Jones (1994) concluem que, aparentemente, o que devemos recear não é que a utilização das calculadoras gráficas diminua as capacidades dos nossos alunos. Com efeito, é um problema muito maior que os alunos não utilizem as calculadoras gráficas de forma eficiente e que tenham dificuldades em integrar os resultados obtidos por forma algébrica com os obtidos por via gráfica. Ainda segundo estes autores, a razão para esta falta de integração pode ser o facto da calculadora gráfica confrontar os alunos com uma fonte de informação independente, a qual tem que ser reconciliada com a sua compreensão algébrica. O ensino da matemática tem que abordar ambos os problemas por forma a que a calculadora possa realmente corresponder ao que esperamos dela.

A utilização de uma notação diferente da usual é outro aspecto a não negligenciar (Ruthven, 1996). Ao contrário doutras máquinas, as calculadoras gráficas trabalham com as expressões numa notação bastante próxima da que geralmente é utilizada em Matemática, respeitando a ordem de escrita das expressões (como, por exemplo, $\sqrt{20}$ e 12^2). No entanto, subsistem algumas diferenças (como, por exemplo, a simbologia utilizada para representar números em notação científica) que por vezes confundem os alunos.

De acordo com Ruthven (1996), o recurso a calculadoras interfere com as características dos registos escritos que os alunos elaboram e fá-lo em diferentes níveis. Por um lado, torna-os menos frequentes, pois deixa de ser necessário anotar o último resultado obtido ou esboçar o gráfico, uma vez que a informação permanece disponível durante algum tempo. Por outro lado, parece existir uma certa tendência dos alunos para adotar um estilo de registo análogo ao exibido pela máquina. Com efeito, segundo Barton e outros (1994, cf. Ruthven, 1996), alguns alunos optam por registar as expressões introduzidas na calculadora justificando-as à esquerda e as respostas obtidas justificando-as à direita, tal como é feito pela máquina. Outros optam por registar a sequência de teclas em que é necessário carregar para introduzir a expressão. Mas podem ainda surgir conflitos mais sérios com a notação usualmente utilizada em Matemática, quando um aluno, ao pretender registar a informação exibida no visor da calculadora, escreve qualquer coisa como $450 : 2 = 225 : 2 = 112.5$. No entanto, Ruthven (1996) chama a atenção para o facto deste problema relacionado com a utilização do símbolo $=$, ser já uma situação existente antes das calculadoras serem utilizadas.

Mas saber quais as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao utilizar a calculadora gráfica é apenas um primeiro passo. Importa conhecer a forma como estas máquinas são usadas e compreender as razões que estão na base dessa utilização. Só assim será possível encontrar a melhor forma de ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades com que se deparam e levá-los, progressivamente, a fazer uma utilização mais eficiente da calculadora gráfica, tirando partido das suas inúmeras potencialidades.

Metodologia

A natureza das questões envolvidas levou à adopção de uma metodologia de natureza qualitativa e à opção pela realização de estudos de caso, envolvendo três alunos de uma turma do 10º ano de escolaridade que dispunham de calculadora gráfica (modelo TI-83 da Texas Instruments): o Afonso, a Alexandra e a Carina.

No que diz respeito aos instrumentos utilizados na recolha de dados, a preocupação em reunir um conjunto de informações simultaneamente profundo e diversificado, levou à utilização de um vasto conjunto de instrumentos.

Assim, com o intuito de seleccionar os alunos sobre os quais este estudo incidiria, foi aplicado a toda a turma, no início do ano lectivo, um inquérito e observadas informalmente algumas aulas.

Aos três alunos que participaram no estudo foram feitas duas entrevistas, com a intenção de conhecer a sua opinião sobre aspectos relacionados com o estudo. A primeira dessas entrevistas decorreu no 2º período, uma semana antes dos alunos iniciarem o estudo do tema Funções, aquele em que pela primeira vez iriam utilizar a calculadora gráfica. Quanto à segunda entrevista, foi realizada no final do ano lectivo, numa altura em que os alunos já estavam familiarizados com a calculadora e em que podiam ter eventualmente alterado as suas opiniões iniciais, em face do confronto com a experiência.

A intenção de acompanhar detalhadamente a utilização que os alunos faziam da calculadora, levou à realização de entrevistas com tarefas. Existiram assim três entrevistas, em que foram propostas tarefas de índole matemática. No decorrer destas entrevistas, para além de observar o processo de resolução adoptado pelo aluno, procurou-se também aceder às razões justificativas das opções efectuadas. Atendendo a que seria natural esperar que a forma como a máquina era utilizada fosse evoluindo ao longo do ano lectivo, considerou-se conveniente realizar estas entrevistas em momentos diferentes. Assim, a primeira entrevista com tarefas realizou-se sensivelmente uma semana após os primeiros contactos com a calculadora, quando os alunos ainda se encontravam numa fase inicial de utilização, mas tinham já realizado as primeiras experiências. A segunda entrevista com tarefas decorreu aproximadamente a meio da experiência e a última realizou-se já perto do final das aulas.

Todas as entrevistas (com e sem tarefas) foram realizadas individualmente, gravadas e posteriormente integralmente transcritas.

A partir do momento em que os alunos começaram a utilizar as calculadoras gráficas nas aulas de Matemática, e até ao final do ano lectivo, foram observadas semanalmente duas aulas em tempos lectivos consecutivos. As aulas observadas não foram pois escolhidas em função do assunto em estudo, do tipo de actividade em que os alunos estariam envolvidos ou da metodologia de trabalho adoptada, nem sequer em função do nível de utilização da calculadora que era esperado. Esta opção está directamente relacionada com os objectivos da investigação, uma vez que o que se pretendia era estudar a forma como os alunos lidavam com a calculadora durante as diversas fases que constituem o processo de ensino/aprendizagem e não apenas em determinadas circunstâncias. No entanto, por vezes foram observadas mais algumas aulas em que se esperava um nível considerável

de utilização da calculadora, o que de um modo geral correspondeu às aulas em que foram realizadas actividades de investigação. Esta decisão teve por base o facto de se considerar importante observar os alunos quando envolvidos em actividades que claramente apelavam ao recurso à calculadora, pela riqueza de informação que certamente permitiriam recolher relativamente aos diversos aspectos dessa utilização.

Ao longo do ano foram ainda recolhidos todos os documentos escritos produzidos pelos alunos, tais como testes, relatórios e demais trabalhos efectuados.

O reconhecimento da importância do papel da professora, levou à realização de uma entrevista com o intuito de conhecer melhor as suas perspectivas relativamente ao ensino da Matemática e, em particular, relativamente à utilização didáctica das calculadoras gráficas. Existiram ainda diversas conversas informais, grande parte das quais ocorreu na sequência das aulas observadas.

A análise de dados foi posteriormente efectuada, ponderando, para cada aluno, os diferentes elementos recolhidos.

Os alunos e a calculadora gráfica

O Afonso

O Afonso é um óptimo aluno (nível 5 a Matemática, no 9º ano), cuja forma de encarar a Matemática parece ser influenciada pela perspectiva familiar, onde é notória uma grande preocupação com a formação que é adquirida.

Apesar de considerar fundamental a prática de exercícios e parecer demonstrar alguma preferência por aulas expositivas e um ensino assente na mecanização, a disciplina de Matemática não é encarada como uma espécie de aquisição de um conjunto de perícias que são executadas quase automaticamente, sem qualquer reflexão. Pelo contrário, em Matemática a compreensão é considerada fundamental. Executar uma qualquer tarefa ou rotina apenas porque lhe dizem que é isso que deve fazer, não é considerado aceitável pelo aluno.

Apesar do Afonso assumir uma postura claramente favorável à utilização da calculadora, não deixa de sentir a necessidade de impôr algumas limitações a essa mesma utilização:

- A – Devemos usar mas não perder ... aa todo o conhecimento matemático que nós temos e a capacidade de saber aplicá-lo ... ou seja não nos vamos tornar presos à máquina por ela fazer as contas mais rapidamente. (...) Agora não vou para uma aula de Matemática de dois tempos (...) sempre a fazer contas de cabeça ... faço assim as que forem mais rápidas que isso assim até ... até demora mais tempo a ir à máquina fazer ...

As limitações que impõe a si próprio situam-se assim fundamentalmente ao nível do cálculo. Fora deste campo, a calculadora é considerada bastante adequada para resolver questões que requeiram a elaboração de um gráfico ou cuja resposta possa ser obtida

através da leitura deste. Constitui igualmente uma boa via para, por um processo diferente do anteriormente utilizado, verificar a correcção dos cálculos aritméticos efectuados ou para confirmar outros resultados alcançados:

A – Agora vamos verificar se isso está certo.

I – E como é que vais fazer isso?

A – Vou fazer um gráfico na máquina.

E, se surgirem dificuldades, o recurso à tecnologia poderá sempre constituir uma forma de as conseguir ultrapassar, uma vez que esta facilita a exploração da situação, possibilitando assim a elaboração de um plano de abordagem.

Relativamente ao funcionamento da máquina, pode-se dizer que o Afonso conseguiu, com bastante rapidez, adquirir um conjunto bastante razoável de conhecimentos, fundamentalmente no que diz respeito aos comandos associados à exploração de gráficos de funções. No entanto, este conhecimento é ainda incompleto, sendo nomeadamente ignorados aspectos fundamentais, como a forma de definir os modos de funcionamento e traçado de gráficos da calculadora. Também a utilização de parêntesis, quando estão envolvidas multiplicações implícitas, é por vezes problemática, apesar de ser uma questão de que o aluno tem consciência.

Não parecendo existir um grande interesse em descobrir, por iniciativa própria, novas potencialidades da calculadora, por vezes são feitas algumas tentativas que talvez se possam incluir neste campo. Não é, no entanto claro se estas são efectuadas conscientemente ou se acontecem por acaso, motivadas pelo desconhecimento, ou por ideias erradas, a respeito da forma como proceder para utilizar um comando já anteriormente experimentado.

De um modo geral, o aproveitamento que o Afonso faz das potencialidades disponibilizadas pela calculadora, parece ficar aquém do que os conhecimentos de que dispõe, fundamentalmente ao nível de construção e exploração de gráficos de funções, poderiam fazer prever. Com efeito, por vezes mostra alguma dificuldade em seleccionar, de entre os comandos que conhece e respectivas estratégias de utilização, aquele que poderá ser o mais adequado à prossecução dos seus objectivos. São frequentes as situações em que, por exemplo, começa por tentar obter determinada informação a partir do gráfico, recorre a seguir à tabela, opta por criar uma outra função e/ou recorrer ao menu *calc*, repete eventualmente algum destes processos e acaba por encontrar a resposta pretendida.

Existem também situações em que não tem dificuldade em optar pela melhor estratégia a seguir, como quando é necessário optar entre a realização de *zooms* ou a alteração directa dos valores de *window*. E outras ainda, fundamentalmente associadas à elaboração de cálculos, em que não tira melhor partido da calculadora porque muito simplesmente entende que não o deve fazer.

Sendo verdade que, por vezes, os comandos disponíveis parecem ir sendo utilizados um pouco ao sabor de ideias mais ou menos vagas que a memória vai trazendo, a calculadora constitui um recurso que o aluno não dispensa na exploração de questões que se revelam um pouco mais complicadas e para as quais não consegue vislumbrar à partida

uma outra forma de abordagem. E apesar de esta via nem sempre lhe permitir encontrar a desejada solução, são frequentes as explorações bem sucedidas.

Pode-se considerar que o hábito de interpretar as respostas obtidas à luz da situação em causa (por exemplo, excluindo velocidades negativas que não faziam sentido no contexto), aliado ao conhecimento de que nem sempre aquilo que a calculadora mostra é uma boa imagem da realidade (por exemplo, uma recta não poderá ser uma imagem global do gráfico de um polinómio do segundo grau), permitem ao aluno interpretar adequadamente parte da informação disponibilizada pela máquina. No entanto, existem ainda situações onde são notórias algumas dificuldades.

Parece ser particularmente complicada a compreensão da relação entre os valores da janela de visualização e o aspecto do gráfico apresentado. Por exemplo, certa vez, ao tentar melhorar a visualização de um gráfico que a calculadora apresentava como duas rectas verticais, quando em *window* tinha valores de 1000 a 1000 para x e y , optou por alterar os valores do y para valores de 100 a 100. O Afonso pensava tratar-se de uma função polinomial de grau 3 e estava a tentar encontrar a outra zona onde o gráfico também intersectava o eixo dos xx , mas com esses objectivos esta actuação não faz sentido. Embora parecesse existir um esforço para perceber o que se estava a passar, o Afonso parecia incapaz de enquadrar a visualização exibida pela calculadora com a visualização esperada e as tentativas que efectuava pareciam ser ditadas pelo acaso. Como a última alteração aos valores do *window* não trouxe resultados positivos resolveu fazer o contrário, ou seja, atribuir a x valores de 100 a 100 e a y de 1000 a 1000. O que mais uma vez mostra as dificuldades sentidas em enquadrar as sucessivas imagens de um mesmo gráfico, numa imagem global.

A Alexandra

A Alexandra é uma aluna média (nível 3 a Matemática, no 9º ano), que encara a aprendizagem da Matemática numa perspectiva profundamente mecanicista. Para ela, a Matemática parece consistir num conjunto de regras, cuja utilização é treinada através da resolução sistemática de exercícios, depois do processo de resolução ser convenientemente explicado pela professora. Assim, a sua actividade matemática tem por base “regras de actuação”, sendo notórias as dificuldades que enfrenta se não consegue obter respostas satisfatórias às questões do tipo: “Então sempre que tivermos isto fazemos desta maneira?”.

Relativamente à utilização da calculadora, a aluna assume uma postura claramente favorável, não tendo qualquer preocupação em limitar a sua utilização, até porque considera que esta não interfere com a aprendizagem matemática. Assim, pode-se dizer que, de um modo geral, a Alexandra usa livremente a calculadora para efectuar qualquer tipo de cálculo, pois considera que esta é a única forma de ter a garantia que obtém o resultado certo. Nas restantes situações tende a utilizá-la precisamente da forma que aprendeu a fazer nas aulas:

- A – Utilizo da maneira como é pedida ... em determinado exercício. Por exemplo, aquilo tem uma técnica, que já nos ensinaram a trabalhar a calculadora, e eu faço daquela maneira.

A calculadora é ainda utilizada sempre que, explícita ou implicitamente, está envolvida a elaboração de um gráfico, mesmo nos casos em que não sabe muito bem como proceder:

A – Não estou a ver muito bem como é que vou passar isto para aqui, para [a calculadora].

I – Tens que usar a calculadora, é?

A – Sim, para fazer o gráfico da função.

À parte estas situações, a calculadora é utilizada sempre que surge uma questão para a qual desconhece à partida o caminho a seguir. Nestas circunstâncias a máquina é utilizada como uma espécie de último recurso que a aluna espera que lhe possa fornecer a desejada resposta. A perspectiva adoptada nestes casos é do tipo “vamos lá a ver se isto dá” (nas palavras da própria aluna), não existindo à partida um plano claro de actuação, nem uma reflexão sobre a situação, que procure, nomeadamente, integrar os conhecimentos matemáticos que possui.

A Alexandra adquiriu com relativa rapidez um conjunto razoável de conhecimentos referentes ao funcionamento da calculadora. Ainda assim, numa fase inicial, existiam por vezes algumas dificuldades em seleccionar de entre os comandos que conhecia aquele cuja utilização seria mais adequada. Com o decorrer do tempo, não só esta situação se alterou, como passaram a ser dominadas mais algumas das potencialidades disponibilizadas pela máquina. No entanto, alguns aspectos nunca chegaram a ser dominados por completo, como é o caso da forma como a calculadora interpreta a multiplicação implícita e das situações em que é, ou não, necessário utilizar parêntesis.

Os conhecimentos relativamente ao funcionamento da calculadora tendem, contudo, a limitar-se aos que foram sendo referidos pela professora e que a prática veio a revelar de utilidade. Como tal, nunca foi dada grande importância à aprendizagem do funcionamento da máquina:

A – Eu ... sozinha não conseguia vir a trabalhar melhor com a máquina, e depois nas aulas também a gente ... a Stora explicava aquilo que era necessário a gente saber mexer nela, para resolver determinados exercícios. Também não havia hipóteses da gente saber mexer mais com ela.

A Alexandra parece nem sempre fazer o melhor aproveitamento possível das potencialidades disponibilizadas pela calculadora. Com efeito, por vezes parece não existir uma verdadeira interiorização dos conhecimentos que a aluna tem da máquina, sendo visível uma forte tendência para a utilizar sempre da mesma forma. Como tal, traçar gráficos e fazer *zooms* são os procedimentos com que está mais familiarizada e a que mais recorre.

A aluna mantém-se fiel às suas preferências, mesmo quando isso a obriga a despende mais tempo, a leva a obter apenas uma resposta aproximada e em situações em que até tinha conhecimento de abordagens alternativas. Utilizações da calculadora um pouco divergentes tendem a ocorrer apenas nos casos em que nas aulas aprendeu uma estratégia específica para aquele tipo de exercício.

Sendo o recurso a *zooms* uma abordagem que privilegia claramente, não foi, no entanto, ainda adquirido um domínio profundo sobre estes, existindo situações em que não consegue tirar todo o proveito possível das suas potencialidades. Este domínio algo superficial sobre as potencialidades dos *zooms*, dá origem a algumas dificuldades na obtenção de uma janela de visualização dos gráficos que possa ser considerada aceitável.

A aluna tem conhecimento que são necessários alguns cuidados na interpretação da informação disponibilizada pela calculadora, mas tem dificuldade em o fazer adequadamente quando esta é apresentada pela máquina de uma forma distorcida. Além disso, tende a esquecer-se desse aspecto e a aceitar acriticamente o que a calculadora apresenta.

Gráficos que se encontrem total ou parcialmente fora da janela de visualização deixam-na sempre algo confusa, não sendo frequentemente capaz de os interpretar sozinha e evidenciando dificuldades mesmo com apoio. Foi o que sucedeu quando tentou obter uma melhor representação do que aparecia como uma recta horizontal, mas que a aluna sabia corresponder a uma parábola. Decidiu então alterar os valores de $xMin$ e $xMax$ (depois de incentivada a abandonar os *zooms*):

A – O que é que me aconteceu?

I – Não apareceu nada ...

A – Então mas isto não devia aparecer? (...) Eu aumentei o valor de x ... logo se eu aumento devia-me aparecer a recta ... também ... Será que isto dá com um *zoom out*? ... Não sei.

Apesar de estar a raciocinar correctamente, o desconhecimento das limitações da calculadora impediu-a de compreender o que aconteceu. Assim, optou por executar um *zoom* que nunca lhe permitiria observar qualquer parte do gráfico, uma vez que este se encontrava comprimido em torno do eixo dos yy .

A aluna parece não ter o hábito de interpretar a informação fornecida pela máquina à luz dos seus conhecimentos matemáticos e mesmo quando é incentivada a fazê-lo tende a adaptá-los, por forma a que estes se enquadrem naquilo que a calculadora exhibe. Foi o que sucedeu quando lhe pedi uma previsão do aspecto do gráfico da função resultante do produto de dois polinómios de grau um:

A – Eu acho que isto é ... isto são dois polinómios do 1º grau, portanto vai dar duas rectas.

A Alexandra parecia ter feito uma espécie de adaptação dos seus conhecimentos, por forma a que estes se enquadrassem naquilo que o ecrã da calculadora lhe mostrava: duas rectas verticais. Ainda assim, estava perfeitamente ciente que o produto de dois polinómios de grau um era um polinómio de grau dois e que o gráfico deste seria uma parábola. Contudo, não aparentava ver a contradição existente entre as duas afirmações.

A Carina

A Carina é uma óptima aluna (nível 5 a Matemática, no 9º ano) que tem um gosto particular pela Matemática. Para ela, nesta disciplina, a compreensão é fundamental,

pelo que é imprescindível perceber o que se está a fazer. A sua relação com a Matemática é ainda caracterizada por uma forte valorização da vertente analítica, aspecto por que parece nutrir um gosto muito especial.

A perspectiva como a Carina vê a Matemática leva-a a pôr algumas objecções à forma como a calculadora é utilizada, considerando inadmissível o recurso a esta quando desligado da compreensão. Como tal, comenta assim a utilização da máquina:

- C – Por um lado acho correcto, pois é um instrumento auxiliar que nos pode levar a compreender melhor certos assuntos em estudo, se forem devidamente utilizadas. Mas por outro, penso que os alunos podem utilizar as máquinas “em demasiado”, não tentando compreender os assuntos em questão.

Ainda assim reconhece-lhe potencialidades, especialmente no que diz respeito à rapidez de execução. Como tal, apesar das dificuldades iniciais que sente em a utilizar, esforça-se por o fazer. No entanto, a valorização da vertente analítica dificulta o estabelecimento de critérios quanto às ocasiões em que o recurso à tecnologia é ou não adequado. E, por outro lado, toda a forma como a aluna sempre viveu a Matemática e sempre estruturou o seu raciocínio (a partir do analítico), dificultam por vezes a articulação das duas abordagens. São assim poucas as actividades em que se pode considerar que desde logo é feita uma opção por uma resolução exclusivamente com base na calculadora. Efectivamente estas reduzem-se praticamente àquelas que requerem a elaboração e análise de um gráfico e à resolução de equações e inequações.

A Carina não parece ter tido grandes dificuldades em começar a trabalhar com a calculadora. Contudo, comandos fundamentais, como é o caso de *window*, nunca chegam a ser completamente dominados. É igualmente desconhecida a relação existente entre a realização de *zooms* e as alterações dos valores da janela de visualização. Foi pois com surpresa que, certa vez, se apercebeu que a máquina lhe alterara os valores que colocara em *window*, na sequência da realização de um *zoom*:

- C – 4000?! Mudou-me para 4000?! Porquê? ...

I – (...) O que é que fizeste entretanto?

C – Nada.

I – Nada? Então não fizeste um *zoom out*?

C – Ah, sim ... *zoom out*.

I – Então o *zoom out* não muda a forma como vês o gráfico?

C – Amh amh!?

O pouco interesse que sempre mostrou relativamente ao funcionamento da máquina, levou a que as tentativas que fazia para descobrir novas potencialidades não só fossem pouco frequentes, como tendessem ainda a diminuir com o tempo:

C – Quer dizer ... aa ... ao início comecei assim a experimentar e de vez em quando também, só que depois comecei a ver que dava erro e achei melhor não ir para a frente porque podia estragar ou assim qualquer coisa ...

Além disso, também não é dada grande atenção a alguns dos comandos abordados nas aulas (como por exemplo *eval* e os que permitem determinar extremos de funções), que aparentemente não são considerados de grande utilidade e, como tal, nunca são utilizados.

A Carina parece ter passado por uma fase inicial, em que os conhecimentos que tinha da calculadora eram algo difusos. Existia, então, alguma dificuldade em estabelecer estratégias de utilização da máquina, o que de um modo geral se traduzia por uma certa tendência para recorrer a um procedimento idêntico ao último utilizado. À medida que a aluna se foi tornando mais confiante na utilização da calculadora, ocorreu uma evolução no aproveitamento que fazia das potencialidades desta.

A maior facilidade com que começou a estabelecer estratégias de actuação deixou, no entanto, transparecer alguma preferência por determinados comandos (realização de *zooms*) em detrimento de outros, o que faz com que nem sempre seja tomada a decisão mais adequada. Em particular, no que diz respeito à obtenção da melhor visualização possível dos gráficos, o facto de não serem utilizadas todas as potencialidades disponibilizadas pela máquina, coloca-a, por vezes, perante sérias dificuldades.

A aluna tem dificuldade em interpretar e ultrapassar as situações em que o recurso à tecla *graph* não lhe permite visualizar o gráfico. Nestes casos, tende a pensar que o problema é da forma como introduziu a expressão da função que está a considerar e procura alterá-la:

I – Nesse gráfico não se vê nada.

C – (...) Será pela ordem de ... ou não?

I – Pela ordem que puseste as coisas? Teres posto primeiro um número e depois o x ?

C – Uhm uhm!

Só depois põe a hipótese de se tratar de um problema de visualização e opta por efectuar alguns *zooms*. Quando o recurso a *zooms* mostra não ser uma solução e acaba por ser levada a alterar os valores de *window*, denota grande dificuldade em escolher valores adequados. Com efeito, não só tende a ponderar mal os valores face ao contexto da situação em causa, como, quando já dispõe de uma visualização parcial do gráfico, não lhe é fácil identificar qual o valor de *window* que deve alterar para conseguir uma melhor imagem.

De um modo geral, a interpretação dos gráficos parece ser a grande dificuldade que a utilização da calculadora lhe levanta, o que não pode ser considerado surpreendente se atendermos a que esta é usualmente feita ignorando por completo a ordem de grandeza dos valores representados nos eixos.

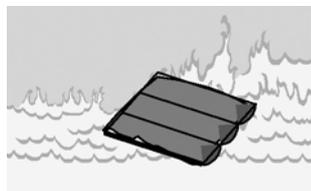
Síntese

A importância atribuída pelo Afonso à compreensão, faz com que, ao deparar-se com uma proposta de trabalho à qual não consegue associar de imediato um determinado procedimento conducente à desejada solução, tenda a passar alguns momentos como que a explorá-la. Só depois desta fase de exploração elabora um plano que lhe permita corresponder ao solicitado. A calculadora, pelas potencialidades exploratórias que tem, surge assim ao Afonso como um elemento de grande utilidade. Como tal, as fortes limitações que este coloca à sua utilização para a realização de cálculos aritméticos não são extensíveis a outros tipos de utilizações, e a máquina acaba por ser um recurso a que o aluno frequentemente recorre para realizar experiências matemáticas. Parece pois que é a perspectiva que o Afonso tem da Matemática e a forma como tende a lidar com as questões que se lhe deparam, que determina a relação que o aluno tem com a calculadora e que leva a que esta seja utilizada como se fosse um laboratório.



Laboratório

A perspectiva que a Alexandra tem da Matemática, que a leva a abordar as questões precisamente da forma como foi ensinada, faz com que a calculadora seja parte integrante desse processo e que, como tal, venha a ser usada da forma e nas circunstâncias em que foi ensinada a fazê-lo. Ao deparar-se com questões com que não se sente familiarizada, a Alexandra tende a sentir-se perdida, mostrando dificuldade em elaborar uma estratégia de actuação. Nestas circunstâncias, a calculadora surge-lhe como uma última hipótese de conseguir aceder à informação pretendida. Contudo, a compartimentação dos seus conhecimentos matemáticos, dispersos por diversas “regras de actuação”, reduz as possibilidades de ser bem sucedida, ao fazer com que a calculadora seja utilizada um pouco ao acaso, como se de uma tábua de salvação se tratasse.



Tábua de salvação

Quanto à Carina, a perspectiva que esta tem da Matemática levou-a a, inicialmente, colocar algumas reservas relativamente à utilização da calculadora, principalmente por considerar inadmissível o recurso a esta desligado da compreensão, mas também devido à sua preferência por abordagens analíticas. No entanto, reconhece-lhe potencialidades, o que a levou a esforçar-se por aprender a utilizá-la. Acaba assim por ser conquistada pela facilidade e rapidez que a máquina lhe permite. Avião a jacto é pois uma boa imagem para caracterizar a utilização que a aluna faz da máquina, uma vez que é a rapidez o grande factor que a leva a recorrer a esta.



Avião a jacto

Os resultados e a teoria

Seria interessante analisar de que forma os resultados deste estudo se enquadram no seio de outros já realizados. Como é natural, algumas das conclusões alcançadas estarão em consonância com as de outros autores, mas existirão também aspectos relativamente aos quais a concordância parece ser menor ou até mesmo inexistente. Existem ainda algumas ideias que, embora decorrendo deste estudo, não é possível garantir que efectivamente sejam inequivocamente suportadas pelos elementos recolhidos.

Critérios base para a utilização

À semelhança do que é referido por Ruthven (1992) também os resultados deste estudo indicam uma forte tendência para as potencialidades gráficas substituírem rapidamente as rotinas mentais e escritas utilizadas para representar graficamente uma função. Esta tendência não pode, no entanto, ser associada a uma sobre-utilização da calculadora, uma vez que, e tal como mencionado por Boers e Jones (1994), mesmo em questões em que o recurso à calculadora seria vantajoso, existe muito pouca evidência da sua utilização. Contudo, e contrariamente ao referido pelos mesmos autores, os alunos envolvidos neste estudo não tendem a recorrer à calculadora apenas nos casos em que o enunciado especificamente pede o gráfico de uma função. Efectivamente, como já foi referido, a utilização da calculadora era sempre considerada adequada, mesmo nos casos em que apenas estava implícita a elaboração de um gráfico ou quando se pretendia resolver uma equação ou uma inequação.

A utilização que os alunos fazem da máquina não tende, no entanto, e à semelhança

do que foi observado noutros estudos (Ruthven, 1992), a ser inovadora. Ainda assim, e contrariamente ao que Ruthven (1992) parece de algum modo sugerir, a opção dos alunos por certa abordagem não parece ser determinada apenas pelo facto de esta lhes ter sido explicitamente ensinada. Com efeito, as razões que levam os alunos a optar por recorrer à calculadora para resolver uma equação ou uma inequação, são a simplicidade e a rapidez desta abordagem e não o facto de lhe ter sido ensinado um processo para o fazer.

A utilização que os alunos fazem desta tecnologia é sempre enquadrada nas suas perspectivas relativamente à Matemática, pelo que não existe a necessidade de conciliar a utilização que é feita com as perspectivas existentes. E embora existam, por parte do Afonso e da Carina, referências claras à vontade de manter a autonomia relativamente à calculadora, o uso desta com base na compreensão é considerado positivo. Como tal, não foi observada a existência dos sentimentos de culpa que Dunham (1990, cf. Hooper, 1993) refere serem experimentados por um considerável número de alunos, que tende a sentir a calculadora como uma forma demasiado fácil de abordar as questões.

É, no entanto, curioso observar que são precisamente os dois alunos com um nível mais elevado de conhecimentos na disciplina, quem sente a necessidade de fazer algumas considerações relativamente ao tipo de utilização que consideram admissível. Recorde-se que a Alexandra, que pode ser caracterizada como uma aluna média, não coloca qualquer objecção a um uso ilimitado e incondicional da calculadora. Parece pois poder-se afirmar que, relativamente a este aspecto, os dados recolhidos estão em sintonia com a posição expressa por Dunham (1990, cf. Hooper, 1993), deixando transparecer uma maior preocupação quanto ao uso que é feito da calculadora por parte dos alunos com um maior grau de confiança na disciplina.

Nível de conhecimentos

Começar a trabalhar com a calculadora gráfica parece não constituir um problema. Em consonância com as conclusões alcançadas por Ruthven (1992 e 1996), numa fase inicial foi visível alguma dificuldade em recordar a tecla, ou sequência de teclas, que permite aceder a determinado aspecto que pretendiam utilizar e que se recordavam de já ter visto. No entanto, após um período de tempo relativamente curto, os alunos já faziam uma utilização confiante da calculadora.

Tal como referido por Boers e Jones (1994) também agora os elementos recolhidos mostram que são comuns as situações em que surgem problemas como consequência de uma incorrecta introdução de informação na calculadora. São, em particular, bastante usuais os casos em que não é feita uma utilização adequada de parêntesis na introdução das expressões.

Aproveitamento das potencialidades

O facto dos alunos não atribuírem um papel de relevo à tecnologia, influi obviamente no aproveitamento que conseguem fazer desta. Mas, como refere Broman (1996), para além

da importância que os alunos dão à calculadora no seio da Matemática, a perspectiva que estes têm da disciplina parece também interferir com o aproveitamento que acabam por fazer da máquina. Com efeito, são os alunos que maior facilidade têm em questionar e em relacionar conceitos, que parecem ter também uma maior facilidade em integrar a informação disponibilizada pela calculadora, no âmbito dos seus conhecimentos e das informações obtidas por outras vias.

Alunos mais habituados a lidar com a Matemática numa perspectiva exclusivamente mecanicista e desligada da compreensão serão obrigados a uma utilização da calculadora mais limitada, uma vez que se limitarão a reproduzir técnicas anteriormente adquiridas. A necessária articulação entre conhecimentos matemáticos e espírito crítico, como forma de detectar as informações enganadoras transmitidas pela máquina, surge bastante dificultada e conseqüentemente a versatilidade na utilização da calculadora fica aquém do que poderia.

Há, no entanto, outros aspectos a ter em conta. Segundo Gómez (1996), a forma como a calculadora é utilizada na sala de aula é um aspecto de grande importância, que não deixará de ser influenciado pela perspectiva do professor relativamente às calculadoras. Uma opinião semelhante é partilhada por Jost (1992, cf. Penglase e Arnold, 1996) que considera ainda que determinados estilos de ensino são mais compatíveis com a utilização das calculadoras do que outros. E embora os dados recolhidos ao longo deste estudo, apontem para elementos relativos aos próprios alunos, como justificativos do tipo de aproveitamento que estes fazem das potencialidades disponibilizadas pela calculadora, a sua actuação pode ter sido reforçada ou inibida pela da professora.

Efectivamente, várias questões pareciam ser abordadas pela professora, numa perspectiva preferencialmente analítica. Era o que sucedia, por exemplo, quando se pretendia encontrar a expressão de uma função definida por ramos, em que todas as expressões correspondiam a funções afins. A abordagem escolhida incluía sempre o recurso aos conhecimentos de geometria analítica, para determinar as expressões das partes de recta envolvidas, e nunca à calculadora e ao estudo que tinha sido feito da função afim. E mesmo quando os alunos já estavam a seguir uma via com recurso à calculadora e a uma abordagem exploratória, por vezes a sua interferência ia no sentido de alterar o tipo de abordagem, como sucedeu com o Afonso, durante o estudo da transformação de funções.

Nestas circunstâncias, parece razoável admitir que alunos como a Carina tenham de algum modo reforçado as suas preferências por abordagens analíticas. Também alunos como a Alexandra, que ao centrarem-se muito na mecanização tendem com mais facilidade a reproduzir as abordagens efectuadas pela professora, não deixarão de ser afectados. Com efeito, a grande abertura que a Alexandra tinha relativamente à utilização da calculadora, teria certamente correspondido a um uso ainda mais extenso desta, se a tal tivesse sido incentivada.

O Afonso era, dos alunos envolvidos, aquele cuja perspectiva relativamente à calculadora e até mesmo à aprendizagem da Matemática, mais diferia da da professora. E apesar de ser um aluno de convicções fortes, habituado a pensar e não a reproduzir procedimentos, é provável que também tenha sido influenciado por esta.

Os dados disponíveis não permitem garantir que a grande preferência que os alunos envolvidos neste estudo mostravam relativamente à realização de *zooms*, teve origem na perspectiva e actuação da professora. No entanto, a questão é inevitável.

Interpretação dos resultados disponibilizados

Os grandes problemas que os alunos enfrentam ao tentar interpretar a informação disponibilizada pela máquina prendem-se com a dificuldade que estes têm em integrar informação obtida por processos algébricos com informação obtida a partir da calculadora. Este é aliás um dos aspectos a que Boers e Jones (1994) já haviam feito referência.

Hector (1992) é da opinião que as dificuldades com que os alunos se deparam ao interpretar os gráficos disponibilizados pela calculadora, têm origem na sua anterior experiência matemática. Segundo este autor, os alunos nunca, até então, se viram confrontados verdadeiramente com a necessidade de decidir quais os valores e escalas mais adequados para representar graficamente uma função. Como tal, este é um assunto parcialmente novo, que requer aprendizagem. Também eu partilho desta opinião, mas acho que a utilização das calculadoras faz igualmente surgir um outro aspecto neste campo.

Compreender o que é o gráfico de uma função e saber interpretar a informação que este nos disponibiliza, efectuando uma leitura adequada da respectiva escala, é muito diferente de perceber que o gráfico de qualquer função, por mais curvo que seja, pode ser visualizado como uma recta, desde que limitemos a nossa observação a uma zona adequadamente escolhida. Esta é uma ideia completamente nova! E, mais do que isso, é por vezes uma ideia em que é difícil acreditar, porque vai contra aquilo que a intuição nos diz. E mesmo algo que sabemos ser verdadeiro, se de algum modo contraria a forma como até então nos tínhamos habituado a vê-lo, necessita de ser trabalhado durante algum tempo até poder ser aceite. E temos que concordar que aceitar que as curvas também podem afinal ser rectas, requer algum esforço.

Uma outra diferença introduzida pelas calculadoras gráficas, é o facto dos gráficos agora deixarem de incluir a indicação da escala que está a ser utilizada. E esta é precisamente uma das críticas que alguns autores (ver Ruthven, 1996) fazem a estas máquinas, pelas dificuldades que consideram que daí podem advir. No entanto, considerar que todos as dificuldades seriam ultrapassadas se esses valores integrassem o próprio gráfico, parece-me uma visão algo simplista do problema. Na minha opinião o problema reside, isso sim, na forma como a máquina é utilizada.

Os alunos envolvidos neste estudo tinham o hábito de interpretar os gráficos apresentados pela máquina sem ter qualquer conhecimento dos valores da janela de visualização que estava a ser utilizada. Além disso, recorriam intensamente a *zooms*, sem que, no entanto, compreendessem por completo as implicações que este processo tinha sobre os valores da janela de visualização. Com este tipo de utilização, não é legítimo esperar uma adequada interpretação da informação veiculada pela calculadora. De resto, os problemas associados à realização de *zooms* e à subsequente interpretação do gráfico, não são novidade. Com efeito, Hodges e Kissane (1994) também lhes fazem referência ao apontar a realização de *zooms* como a origem de dificuldades substanciais.

Algumas recomendações

Prática pedagógica

Algumas das conclusões alcançadas neste estudo tornam inevitável que se questione o papel do professor e a sua influência, nomeadamente em termos das propostas de trabalho que faz e das respectivas abordagens que permite. Dessas questões decorrem por vezes algumas ideias, cuja adopção parece recomendável se se pretender contribuir para uma melhor utilização da calculadora gráfica por parte dos alunos.

Uma das grandes dificuldades que a utilização da calculadora gráfica coloca aos alunos diz respeito à escolha de uma janela de visualização do gráfico. Como tal, este é um aspecto que não pode deixar de merecer atenção. É importante que os alunos tenham oportunidade de se aperceberem do efeito que uma mudança na janela de visualização pode ter sobre o aspecto do gráfico e, em particular, de como essas mudanças o podem “deformar”. Assim, parece de toda a conveniência o envolvimento dos alunos em actividades que englobem o contacto com representações gráficas de aspectos muito diferentes, mas de uma mesma função. É importante ter presente que a noção de janela de visualização é nova para os alunos e, de acordo com os elementos recolhidos, está longe de ser uma noção trivial.

Entre os alunos envolvidos neste estudo existe uma clara preferência pelo recurso a *zooms* (*in* e *out*), sendo os gráficos assim obtidos interpretados de uma forma completamente dissociada dos valores da janela de visualização. Até que ponto esta forma de actuação foi induzida pelas primeiras actividades realizadas? Esta é uma pergunta perfeitamente legítima, se atendermos a que estas primeiras actividades envolveram várias aulas e tiveram características muito semelhantes, permitindo assim o desenvolvimento de uma estratégia de abordagem. O facto de apenas se pretenderem esboços dos gráficos observados, que permitissem uma visualização dos tipos de curvas associados à classe de funções em estudo, tornava a consulta e a indicação da escala desnecessária. Além disso, a grande abertura da tarefa, permitia que as expressões fossem escolhidas pelos alunos e, nestas circunstâncias, uma função cujo gráfico se mostrasse de difícil visualização podia sempre ser abandonada. O recurso a *zooms* tornava-se assim numa estratégia simples e simultaneamente eficiente.

Embora não seja possível garantir que a preferência pela utilização de *zooms* decorreu das características das primeiras experiências vividas, é de algum modo plausível que assim tenha acontecido. Em qualquer dos casos, a aquisição do hábito de registar os gráficos observados, sem os fazer acompanhar dos valores da janela de visualização utilizada, foi sem dúvida permitida pelas características destas actividades e pelo tipo de registos admitido pela professora. Assim, e atendendo às consequências negativas que podem decorrer deste hábito, parece conveniente dar alguma atenção à escolha das primeiras tarefas a propor e às eventuais normas de actuação que os alunos podem desenvolver a partir destas. Propostas de trabalho bastante diversificadas poderão constituir uma forma de ultrapassar o problema. Para além de actividades de investigação, tendo em vista o estudo de diferentes classes de funções, poderão ser considerados outros tipos de investigações, bem como actividades de modelação e de resolução de situações problemáticas,

entre outras.

A diversidade das propostas de trabalho dará provavelmente origem a uma variedade de actuações, contribuindo assim para uma melhor compreensão do funcionamento da calculadora gráfica. Certamente não deixarão de surgir situações que obriguem a considerar, por exemplo, uma grande discrepância entre os valores representados nos dois eixos ou então valores grandes ou, pelo contrário, muito pequenos. Estas situações contribuirão para alcançar uma maior flexibilidade na utilização da máquina, à medida que os alunos se apercebem que, consoante as circunstâncias, algumas estratégias são mais eficientes do que outras.

Algumas das dificuldades com que os alunos envolvidos neste estudo por vezes se deparam, parecem estar associadas a um certo desconhecimento do funcionamento da sua calculadora. Esta é aliás uma situação natural se atendermos a que, por um lado, estes nunca se interessaram muito por aprender a trabalhar com ela e, por outro lado, também não existiram muitos momentos, ao longo do ano, a isso dedicados.

A literatura (ver Broman, 1996) parece indicar que alguns professores encaram o tempo despendido a ensinar a trabalhar com a máquina como mal empregue, uma vez que não estão a ensinar Matemática. Mas se calhar esta preocupação até nem faz muito sentido. Efectivamente, utilizar a máquina adequadamente envolve muito mais conhecimentos matemáticos do que pode parecer à primeira vista. A tecla onde se carrega para ver o gráfico e para mudar os valores da janela de visualização, ensina-se e aprende-se depressa. Já a introdução de valores adequados no *window*, de modo a conseguir observar as principais características do gráfico, é mais complexo, pois só se consegue quando se tem o domínio matemático suficiente para se compreender o que se está a fazer.

A calculadora gráfica não é apenas um meio, cujo tipo de utilização é irrelevante no processo de aprendizagem matemática. Como tal, é fundamental que os professores prestem atenção a como os alunos a estão a utilizar.

A compreensão do funcionamento da calculadora envolve muitos conhecimentos matemáticos e permite ainda o aprofundamento de muitos outros. Desprezar a forma como a tecnologia é utilizada, é quase como desprezar o processo e valorizar apenas o resultado alcançado. Não auxiliar os alunos a evoluir para utilizações mais eficientes, é negar-lhes a possibilidade de aprofundar os seus conhecimentos matemáticos.

Formação de professores

A formação de professores é sempre um aspecto de grande importância. São os professores que vão seleccionar as propostas de trabalho, gerir a dinâmica das aulas e conduzir o processo de ensino/aprendizagem. É a sua visão da calculadora gráfica e da Matemática que não deixará de estar presente na sala de aula. Importa pois proporcionar momentos de formação, aos mais diversos níveis.

É obviamente importante que os professores tenham alguma experiência pessoal de utilização da calculadora gráfica e que conheçam o seu funcionamento. Devem igualmente estar ao corrente das limitações da máquina, bem como das características do funcionamento desta que estão na origem dessas limitações.

No entanto, estar familiarizado com o funcionamento da calculadora gráfica, só por si não é suficiente. O professor deve ter consciência das mudanças que a utilização desta tecnologia torna possível ao nível do tipo de trabalho que é realizado. Deve assim ser capaz de planear diversos tipos de aulas, envolvendo diferentes níveis e tipos de utilização da máquina.

Mas é também importante que os professores estejam alertados para as dificuldades que os alunos muitas vezes encontram na utilização destas máquinas. Que tenham consciência que uma utilização eficiente da calculadora é um processo que exige algum tempo, até se desenvolver plenamente, e durante o qual é necessário discutir diferentes aspectos de ordem matemática e da forma como a calculadora interpreta a informação introduzida.

Importa pois criar momentos em que os professores possam não só ter ocasião de aprender a utilizar a calculadora gráfica, como também de elaborar e discutir diferentes tipos de tarefas que enquadrem adequadamente a tecnologia disponível. Mas é igualmente importante conceber um espaço em que os professores possam reflectir e trocar experiências relativas ao tipo de utilização que os seus alunos fazem da calculadora, bem como ponderar estratégias que possam contribuir para uma utilização progressivamente mais eficiente.

Investigação futura

Este estudo permitiu conhecer e compreender um pouco melhor a forma como a calculadora gráfica é utilizada. No entanto, fez também surgir um conjunto de questões que seria interessante ponderar. Dessas, parecem-me particularmente pertinentes as que respeitam à origem dos hábitos de utilização da calculadora desenvolvidos pelos alunos.

Com efeito, este estudo aponta para alguma interferência do género de tarefas propostas no tipo de utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica, o que torna inevitável que se questione quais as características das propostas de trabalho que contribuem para uma utilização mais eficiente da calculadora gráfica.

O trabalho realizado revelou uma grande preferência, por parte dos alunos, pelo recurso a *zooms*. Esta preferência era de tal forma marcada que, por vezes, os impedia de utilizar uma estratégia mais eficiente. A detecção desta situação faz surgir a necessidade de compreender melhor qual a influência dos primeiros contactos com a calculadora gráfica na posterior eficiência da sua utilização. Coloca assim em questão a forma como devem decorrer esses primeiros contactos e de que comandos devem os alunos ter conhecimento desde logo.

Muito próximo de todas estas questões está o professor e a postura que assume face à tecnologia e à sua utilização no processo de ensino/aprendizagem da Matemática. Como é que as concepções dos professores, relativamente a esta temática, afectam os alunos, as suas perspectivas face à calculadora gráfica e a utilização que fazem desta, é igualmente um campo que importa investigar.

Referências

- APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.
- Barling, Chris (1994). Graphical calculators: potential vs practice. Em T. Andrews e B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom*, (pp.123-126). Adelaide: AAMT.
- Boers, Monique e Jones, Peter (1994). Is calculus made easier with the graphics calculator?. Em T. Andrews e B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom*, (pp.65-72). Adelaide: AAMT.
- Broman, Per (1996). Possibilities and fears. Em P. Gómez & B. Waits (Eds.), *Roles of Calculators in the Classroom*, (pp.15-20) [On-line]. Disponível em <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/tg18/Base/Abstracts-1.html>.
- Dick, Thomas (1992). Super calculators: implications for calculus curriculum, instruction, and assessment. Em J. Fey e C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education*, (pp.145-157). Reston, Va.: NCTM.
- Dion, Gloria (1990). The graphics calculator: a tool for critical thinking. *Mathematics Teacher*, 83(7), 564-571.
- Gómez, Pedro (1996). Graphing calculators and mathematics education in developing countries. Em P. Gómez e B. Waits (Eds.), *Roles of Calculators in the Classroom*, pp.59-70 [On-line]. Disponível em <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/tg18/Base/Abstracts-1.html>.
- Hector, Judith (1992). Graphical insight into elementary functions. Em J. Fey e C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education*, (131-137). Reston, Va.: NCTM.
- Hodges, Amanda e Kissane, Barry (1994). Learning about functions and graphs using a graphics calculator. Em T. Andrews e B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom*, (pp.39-48). Adelaide: AAMT.
- Hooper, Jennifer (1993). Issues of Mathematics classroom use of graphing calculators. *The Mathematics Educator*, 4(2), 45-50.
- NCTM (1980). *An agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, Va.: NCTM.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: NCTM.
- NRC (1989). *Everybody counts — a report to the nation on the future of Mathematics Education*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- Penglase, Marina e Arnold, Stephen (1996). The graphics calculator in mathematics education: a critical review of recent research. *Mathematics Education Research Journal*, 8(1), 58-90.
- Ruthven, Kenneth (1992). Personal technology and classroom change: a british perspective. Em J. Fey e C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education*, (pp.91-100). Reston, Va.: NCTM.
- Ruthven, Kenneth (1996). Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology. Em A. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, (pp.435-468). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ward, Robin (2000). *Observing high school student's strategies and misconceptions as they use graphing calculators* [On-line]. Disponível em <http://www.calpoly.edu/~rward/nctm.html>.

Resumo. Este trabalho procura contribuir para o conhecimento e a compreensão da forma como os alunos utilizam a calculadora gráfica na aprendizagem da Matemática. A metodologia adoptada é de estudo de caso, sendo os participantes três alunos do 10º ano de escolaridade. A análise dos dados sugere que os alunos não possuem um conhecimento profundo sobre a calculadora, aspecto que de resto não valorizam. Aponta ainda para um recurso à máquina essencialmente para traçar gráficos e resolver equações/inequações, com um aproveitamento das potencialidades da tecnologia que fica aquém do que seria de esperar. A interpretação da informação veiculada pela máquina surge como a grande dificuldade que os alunos têm que enfrentar. Associada a estes

aspectos surge a actuação do professor e, nomeadamente, a atenção que este dá à utilização que os alunos fazem da calculadora e o género de tarefas que propõe.

Palavras chave: Calculadoras gráficas, Alunos, Matemática, Ensino Secundário.

Abstract. This work intends to contribute to understand how pupils use the graphic calculator in mathematics classroom and to increase the knowledge about this use. The methodology adopted followed a case study approach. The participants were three 10th grade pupils. Data analysis shows that these pupils don't know the graphic calculator very well, and that they don't mind about that. They use it mainly to draw graphics and to solve equations and inequations, taking a small profit from the calculator's potentialities. Pupils' main difficulties are related to the interpretation of information given by the graphic calculator. These findings appear to be related to teacher's practice, especially regarding his attention to pupils' use of the graphic calculator and the type of tasks he proposes in the classroom.

Key-words: Graphic calculators, pupils, mathematics, secondary teaching.

■■■

HELENA ROCHA
Universidade Nova de Lisboa
hcr@fct.unl.pt