

Resolvendo adição de frações através do simbolismo matemático e através de âncoras¹

Maria Soraia Cruz

Universidade Federal de Pernambuco

Alina Galvão Spinillo

Universidade Federal de Pernambuco

Diversos autores apontam as dificuldades experimentadas pelas crianças com frações e com a adição de frações. Conhecer a natureza dessas dificuldades é relevante porque a partir delas é possível compreender a perspectiva da criança e implementar formas de ensino que permitam superar tais dificuldades. Entretanto, é igualmente importante examinar formas alternativas de resolução que possam ser adotadas pelas crianças ao operarem com frações. Considerando os limites e as possibilidades do pensamento infantil, o presente estudo examina como crianças resolvem adição de frações a partir do uso do referencial de *metade* como âncora ao raciocínio, uma vez que este referencial mostrou auxiliar na resolução de problemas envolvendo conceitos relacionais complexos como a proporção e a probabilidade. Antes, porém, de apresentar o estudo e seus resultados, torna-se necessário discutir, com base na literatura na área, acerca das dificuldades e possibilidades das crianças com a adição de frações e acerca da importância do referencial de metade no raciocínio lógico-matemático, em especial sobre sua importância para o raciocínio fracionário.

A complexidade do número fracionário

A complexidade do número fracionário é amplamente reconhecida por pesquisadores e por professores de matemática. Considerando a perspectiva de Vergnaud (1983, 1991, 1997) acerca dos campos conceituais e da natureza dos conceitos matemáticos, percebe-se que a complexidade se manifesta ao nível dos invariantes envolvidos, das representações e das situações em que emergem.

Inserida no campo conceitual das estruturas multiplicativas, fração envolve outros conceitos como a divisão e a noção de equivalência, como mencionam Kerslake (1986), Nunes e Bryant (1997) e Streefland (1997). A conexão entre divisão e fração torna-se evidente ao se pensar em termos de divisão de quantidades contínuas como barras de chocolate, bolos e pizzas. Enquanto a divisão sobre quantidades discretas produz subconjuntos, a divisão sobre quantidades contínuas produz frações. A noção de equiva-

lência, por sua vez, é crucial para a compreensão da aritmética de frações (sobretudo a adição) e para a compreensão da magnitude relativa associada ao número fracionário quando em situações de quantificação.

Como evidenciado por Behr, Lesh, Post, e Silver (1983), Ohlsson (1991) e Streefland (1997), frações adquirem diferentes significados, podendo ser entendidas como (a) um número em uma reta numérica; (b) um operador (um terço de 15 bolinhas); (c) um quociente derivado de uma divisão (três barras de chocolate repartidas entre quatro crianças); ou (d) uma relação parte-todo (uma fração de pizza dividida em n -cortes). Entretanto, situações usualmente propostas no contexto escolar se limitam a representações diagramáticas para ilustrar as relações parte-todo, para explicar o simbolismo (o denominador corresponde ao número de partes em que o todo foi dividido e o numerador ao número de partes pintadas no diagrama) e a linguagem fracionária (um terço, um quinto etc.). Restringir o ensino a situações deste tipo leva a uma compreensão fragmentada e incompleta a respeito da fração, bem como favorece o aparecimento de formas inapropriadas de raciocinar, como a dupla contagem, por exemplo (e.g., Gravemeijer, 1997; Silva, 1997).

Diante da complexidade que caracteriza a fração, do ponto de vista conceitual, bem como das dificuldades advindas das práticas de ensino, torna-se relevante compreender a natureza das dificuldades que crianças apresentam.

As dificuldades das crianças com frações e com a adição de frações

Pesquisas com crianças indicam que muitas das dificuldades decorrem da interferência de um conhecimento anterior: o conhecimento sobre números inteiros (e.g., Biddlecomb, 2002; Lamon, 1999).

Sophian, Garyants e Chang (1997) apontam que a dificuldade que as crianças apresentam ao julgar a magnitude entre frações decorre da aprendizagem que tiveram sobre a seqüência numérica. Desde muito cedo, é ensinado que na seqüência numérica o número conseqüente é sempre maior que o antecedente. Este conhecimento é generalizado para os números fracionários, levando a criança a incorrer em erros quando solicitadas, por exemplo, a determinar qual seria a maior fração: $1/3$ ou $1/4$. Na maioria das vezes, a resposta dada é que $1/4$ é maior que $1/3$, porque 4 é maior que 3 (Gelman & Meck, 1992).

Segundo Streefland (1991), o conhecimento sobre números inteiros também interfere na compreensão da representação simbólica da fração (a/b), visto que este simbolismo é compreendido como representando dois números inteiros, um sobre o outro, e não como um único número. Esta dificuldade é também documentada por Silva (1997), que afirma que os números inteiros são, durante muito tempo, os únicos que têm o *status* de número para as crianças que, como conseqüência, buscam aplicar todo o conhecimento de que dispõem sobre os inteiros para as frações.

A noção de inteiro pode, ainda, interferir nas estratégias de resolução de problemas com frações. Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984) desenvolveram um estudo que envolvia ordenar e adicionar frações. Observou-se que as crianças aplicavam a aritmética

utilizada para os números inteiros tanto para estabelecer as comparações necessárias para ordenar diversas frações, quanto para resolver as operações de adição, considerando apenas os numeradores (quando os denominadores eram iguais) ou os denominadores (quando os numeradores eram iguais). Porém, como a aritmética dos números inteiros não se aplica aos números racionais, as crianças incorriam em erros ao adicionar as frações. Dificuldades semelhantes foram documentadas por Kerslake (1986) e Silva (1997) em levantamento acerca das estratégias e erros das crianças com a adição de fração. Tirosh, Fischbein, Graeber e Wilson (1999) sugerem que talvez esta concepção esteja relacionada com a idéia de que o modo mais adequado para efetuar uma adição é somando coisas do mesmo tipo: somar numerador com numerador e denominador com denominador.

Apesar de serem inegáveis as dificuldades experimentadas pelas crianças ao resolverem adição de frações, há estudos que, embora raros, apontam algumas possibilidades do pensamento infantil sobre este tema, como discutido a seguir.

As possibilidades das crianças com a adição de frações

A intuição deveria desempenhar um papel muito mais expressivo na aritmética de frações, no sentido de que não se deveria esperar que as crianças utilizassem o algoritmo para calcular operações como $1/2 + 1/2$, ou $1/2 + 3/4$, uma vez que tais operações podem ser realizadas com base, apenas, no conhecimento sobre o que representa cada uma dessas frações.

Um excelente exemplo que ilustra e complementa o comentário acima é o estudo de caso realizado por Zeman (1991) que mostra a possibilidade de crianças operarem com frações utilizando procedimentos não algorítmicos. Ethan, aos 8 anos, foi solicitado a resolver a operação $3/4 + 1/2$, escolhendo uma das seguintes alternativas como resposta: (a) $3/8$; (b) $1(1/4)$; (c) $7/8$; ou (d) $4/6$.

O procedimento esperado para a resolução desta operação é a aplicação do algoritmo típico de adição de frações que envolve transformar as frações em frações com um denominador comum ($3/4$ e $2/4$), para então, adicionar os numeradores, mantendo o mesmo denominador, obtendo como resultado uma fração imprópria ($5/4$) ou uma fração mista ($1(1/4)$). Ethan, entretanto, resolveu a operação de forma diferente. Inicialmente realizou uma decomposição ($1/2 = 1/4 + 1/4$), e, em seguida, somou um desses quartos a $3/4(3/4 + 1/4)$, obtendo como resultado um inteiro (1). O outro $1/4$ foi, então, adicionado ao inteiro (1), obtendo $1(1/4)$. Matematicamente, o raciocínio empregado por Ethan (Zeman, 1991, p. 253) foi:

Operação:	$3/4 + 1/2 =$
Procedimentos:	$3/4 + (1/4 + 1/4) =$ $(3/4 + 1/4) + 1/4 =$ $1 + 1/4 =$
Resultado:	$1(1/4)$

Note-se que o raciocínio de Ethan apoiou-se em âncoras: o referencial de $1/4$ (para decompor uma das parcelas da operação: $1/2$) e o referencial de *inteiro* (para compor $3/4 + 1/4$). A estratégia de resolução adotada por Ethan mostra que pontos de referência são importantes no raciocínio matemático, como discutido adiante.

Um outro estudo que aponta as possibilidades do pensamento infantil na resolução de problemas envolvendo adição de frações foi conduzido por Zunino (1995). A autora apresentou a crianças de 3ª série do ensino fundamental problemas que envolviam quantidades fracionárias. Um dos problemas consistia na apresentação de uma figura contendo três recipientes, cada qual com uma etiqueta. Na etiqueta do primeiro recipiente, de maior tamanho, estava escrito *6 litros e meio*; na etiqueta do segundo recipiente, de tamanho intermediário, estava escrito *3 litros e um quarto de litro*; e na etiqueta do terceiro recipiente, de menor tamanho, estava escrito *2 litros e um quarto de litro*. A criança tinha que descobrir quantos litros tinha ao todo na figura apresentada.

Zunino (1995) observou que enquanto algumas crianças procuravam somar os números inteiros e desprezavam as frações, outras até conseguiam resolver bem a tarefa, porém não sabiam como representar numericamente a operação nem o resultado encontrado. Neste último caso, por exemplo, uma criança explicou que embora não sabendo usar o simbolismo matemático, o problema poderia ser resolvido da seguinte maneira: somando todos os inteiros (6 litros + 3 litros + 2 litros), formando 11 litros; e somando as frações (meio litro + $1/4$ de litro do segundo recipiente + $1/4$ de litro do terceiro recipiente). Compreendendo que $2/4$ de litro equivale a meio litro, a criança concluiu que a soma de meio litro com $2/4$ de litro é igual a um litro. No raciocínio expresso pela criança, o resultado final deste problema seria obtido a partir da soma dos inteiros (11 litros) com a soma das frações (1 litro), portanto, igual a 12 litros. Observa-se, neste exemplo, que as crianças operavam com frações, utilizando formas de representação distintas da representação simbólica formal (a/b).

Os dois estudos acima ilustram as possibilidades do pensamento infantil na resolução de adição de frações. Isso significa que, apesar das dificuldades anteriormente descritas, as crianças são capazes de resolver adições de fração através do uso de pontos de referência e do uso de representações distintas do simbolismo matemático. As estratégias adotadas diferem, em muito, da aplicação do algoritmo típico da aritmética de frações, porém, mostram-se apropriadas.

O referencial de metade como âncora do raciocínio fracionário

A idéia de âncora (*anchor, benchmark*) pode ser entendida como apoio para o raciocínio durante o processo de resolução de situações-problema que envolvem diversos conceitos matemáticos. O uso de âncoras é geralmente explorado por pesquisadores que investigam o sentido numérico (denominado *number sense*) em crianças (e.g., Sowder, 1995; Resnick, 1989; Yang, 2003). Sowder ressalta a importância do uso de âncoras, sobretudo, em atividades em que é necessário estimar quantidades, como por exemplo: usando o número 1 como âncora, é fácil concluir que a operação $7/8 + 9/10$ deve ter como resultado um número menor que 2, uma vez que cada fração é um pouco menor que

1. No exemplo anteriormente apresentado (Zeman, 1991), Ethan utilizou como âncora o referencial de inteiro e de $1/4$ durante o processo de resolução. Pesquisas diversas, sobretudo aquelas que examinam as heurísticas utilizadas em cálculos orais em situações extra-escolares, mostram que fatos numéricos como dezenas e centenas são amplamente adotados como âncoras durante o processo de resolução (e.g., Carraher, Carraher & Schliemann, 1995).

Um tipo de âncora considerado relevante é o referencial de *metade*. Pesquisas evidenciam que crianças desde os 6-7 anos utilizam este referencial na resolução de tarefas envolvendo proporção e probabilidade (Correa, Spinillo, Brito & Moro, 1998; Spinillo, 1996a, 1996b, 1997, 2002a; Spinillo & Bryant, 1991, 1999). Inclusive, como recentemente verificado por Spinillo (2002b), crianças são capazes de aprender sobre proporção a partir de uma intervenção específica voltada para o uso de estimativas e para o uso sistemático do referencial de *metade*. Segundo a autora, a intervenção oferecida permitia que o uso desse referencial fosse transferido para outras situações análogas, porém distintas; bem como auxiliava na superação de muitas das dificuldades identificadas antes da intervenção. Concluiu-se que crianças podem ser ensinadas a fazer julgamentos proporcionais, sendo a estratégia de *metade* um referencial importante que auxilia a lidar com as quantidades e com as relações cruciais ao raciocínio proporcional. Intervenção semelhante, adaptada ao contexto escolar, foi conduzida pela professora de uma sala de segunda série do ensino fundamental de uma escola pública que atendia crianças de baixa renda no Brasil (Spinillo, 2003). A experiência didática foi avaliada como positiva, sendo possível identificar o progresso dos alunos no decorrer das aulas.

Diante da importância do referencial de *metade* na resolução de tarefas envolvendo a proporção e a probabilidade, é possível pensar que este referencial também seja relevante para a compreensão de frações. Recentemente, Singer-Freeman e Goswami (2001), investigando a competência de crianças entre 3 e 4 anos para estabelecer a equivalência entre quantidades contínuas e discretas, observaram um maior sucesso nos problemas que envolviam a fração *metade* do que naqueles que envolviam as frações $1/4$ ou $3/4$.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), o referencial de *metade* desempenha papel importante na quantificação de fração, favorecendo a conexão inicial entre os aspectos extensivos (parte-parte) e intensivos (parte-todo) que caracterizam os números racionais.

Considerando a importância do referencial de *metade* na compreensão inicial da criança sobre conceitos lógico-matemáticos complexos, é possível supor que este referencial seja uma âncora que possa facilitar a resolução de operações de adição de frações por parte de crianças. Esta possibilidade é examinada na presente investigação que contrasta duas situações de resolução de adição de frações: uma em que o referencial de *metade* é apresentado como apoio (âncora) para a resolução de adições de frações; e outra situação em que as operações são apresentadas através do simbolismo formal, tendo que serem resolvidas através de lápis e papel, como ocorre no contexto de sala de aula.

Objectivos do estudo

A presente investigação tem por objetivos investigar: (1) se as crianças seriam capazes de resolver adições de frações através do referencial de *metade*, procurando analisar as estratégias adotadas quando este referencial é fornecido como âncora para resolver tais operações; e (2) as estratégias adotadas pelas crianças ao realizar adição de frações através do simbolismo formal próprio de frações, procurando compreender a natureza das dificuldades experimentadas.

Supõe-se que o uso de *metade* como ponto de referência possa auxiliar na resolução das operações propostas, o mesmo não ocorrendo em relação ao uso do simbolismo matemático formal, como evidenciado pelas pesquisas na área.

Método

Participantes

Os participantes foram 42 crianças de classe média, alunas de três escolas particulares da cidade do Recife, sendo 21 crianças da 2ª série (média: 8 anos e 4 meses) e 21 da 3ª série (média: 9 anos e 3 meses). Em cada escola foram entrevistadas 14 crianças, sendo sete de cada série, escolhidas aleatoriamente. As entrevistas foram realizadas no meio do ano letivo. As crianças da 2ª série não haviam sido introduzidas aos números fracionários; porém, as crianças da 3ª série já haviam iniciado, de forma introdutória, o contato com números fracionários (notação convencional das frações $1/2$, $1/3$ e $1/4$; e suas representações em diagramas: pizzas e barras de chocolate). Nenhuma das crianças da amostra havia sido formalmente ensinada sobre operações com fração no contexto escolar.

Com o objetivo de garantir que cada participante compreendesse a notação convencional e a representação diagramática das frações utilizadas nas tarefas descritas a seguir, foi aplicada uma sondagem. Nesta sondagem, a criança era apresentada uma fração por vez, em sua representação simbólica típica, sendo nomeada pelo examinador (um meio, um terço, um quarto e um sexto). Quatro diagramas, desenhados em uma folha de papel, eram mostrados a cada item, tendo a criança que escolher o diagrama que representava a fração apresentada (Anexo I). Participaram do estudo apenas as crianças que nesta sondagem demonstraram conhecer a denominação, a notação convencional e diagramática das frações apresentadas.

Procedimento, Material e Planejamento Experimental

O estudo consistiu em duas tarefas que envolviam a resolução das mesmas operações: (a) $1/4 + 1/4$; (b) $1/3 + 1/6$; (c) $1/6 + 1/6 + 1/6$; (d) $1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$; (e) $1/3 + 1/3 + 1/3$; e (f) $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$. A ordem de apresentação das adições em cada tarefa foi aleatória, decidida através de sorteio com cada criança. Cada criança foi individualmente entrevistada por uma mesma examinadora em duas sessões, com um

intervalo de sete dias entre elas. Na primeira sessão aplicou-se a Tarefa 1 (referencial de *metade*) e na segunda sessão, a Tarefa 2 (simbolismo matemático)².

Após resolver cada adição, a criança era solicitada a explicar a maneira como havia resolvido a operação. As entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas em protocolos individuais relativos a cada tarefa. Durante a entrevista a examinadora registrava o comportamento não verbal da criança (gestos).

Tarefa 1 (referencial de metade)

O objetivo desta tarefa era investigar se as crianças seriam capazes de resolver adição de frações através de equivalência, usando o referencial de *metade* como âncora, investigando-se, ainda, as estratégias adotadas.

Material. Quatro círculos de cartolina, com 8 cm de diâmetro cada, em diferentes cores, representando bolos de diferentes sabores: rosa (morango); verde (limão); amarelo (baunilha); e marrom (chocolate). Os bolos, disponíveis sobre a mesa, estavam seccionados de diferentes maneiras: o bolo de morango dividido em duas partes iguais; o bolo de limão em três partes iguais; o bolo de baunilha em quatro partes iguais; e o bolo de chocolate em seis partes iguais.

Cartelas retangulares de cartolina, uma para cada operação, em que as frações (fatias de bolo) correspondentes às parcelas da adição estavam coladas uma a uma na cartela, evitando que as crianças agrupassem as fatias de maneira a formar meio bolo ou um bolo inteiro. O sinal de adição foi colocado entre as fatias (Anexo II).

Oito fatias de bolo de morango (fração um meio), em cartolina, disponibilizadas sobre a mesa, servindo como unidades fracionárias de referência (Anexo III). As fatias podiam ser manipuladas pela criança, visto serem soltas.

Figuras de dois meninos que eram personagens da história contada para as crianças com o objetivo de criar um contexto para as adições apresentadas (Anexo IV).

Procedimento. O examinador contava, para cada criança, a história de Pedro e Artur:

Pedro e Artur (mostra as figuras dos meninos) são irmãos e gostam muito de comer bolo. A mãe deles sempre faz bolos de diferentes sabores para eles comerem. Certo dia ela fez um bolo de morango, um bolo de chocolate, um bolo de baunilha e um bolo de limão. Só que ela fatiou os bolos e disse que se eles quisessem comer dos bolos iam ter que comer as fatias do tamanho que ela havia cortado. Os bolos foram fatiados do seguinte modo: o bolo de morango em duas partes iguais; o bolo de baunilha em quatro partes iguais; o bolo de limão em três partes iguais; e o bolo de chocolate em seis partes iguais (mostra cada bolo, Anexo III). Artur comia de vários tipos de bolo, mas Pedro só comia bolo de morango ($1/2$). Só que Pedro queria sempre comer o mesmo tanto de bolo que Artur comia.

A examinadora entregava a cartela com uma dada operação (por exemplo: $1/3+1/6$, ver Anexo III), continuando:

Um dia, Artur comeu uma fatia do bolo de limão ($1/3$) e uma fatia do bolo de chocolate ($1/6$). Pedro quer comer o mesmo tanto de bolo, só que ele não gosta de bolo de limão e nem de bolo de chocolate, pois ele só gosta do bolo de morango. Então, para comer o mesmo tanto de bolo que Artur comeu, quantas fatias desse bolo de morango (entregava para a criança oito unidades de referência, ou seja, oito fatias de bolo de morango: $1/2$) Pedro vai ter que comer? Faz para eu ver.

A cada item eram entregues oito unidades fracionárias de referência (*metade*) para a resolução das operações que podiam ser manipuladas durante o processo de resolução. Realizada a operação, a criança era solicitada a explicar sua resposta e a maneira como resolveu a adição. O mesmo procedimento era adotado em relação às demais operações.

Tarefa 2 (simbolismo matemático)

Esta tarefa teve por objetivo examinar as estratégias adotadas e as dificuldades experimentadas pelas crianças para adicionar frações apresentadas através do simbolismo formal, utilizando lápis e papel (Anexo V). Importante mencionar que, a partir da sondagem anteriormente descrita, todas os participantes conheciam o simbolismo das frações adotadas e sua nomenclatura.

Material. Folha de papel contendo as seis operações, com espaço para a criança resolver cada operação. Lápis e borracha.

Procedimento. A examinadora entregava a folha com as operações, solicitando que a criança resolvesse cada uma delas usando lápis e papel, como ocorre em situações escolares. Cada operação era lida em voz alta pela examinadora, ao mesmo tempo em que mostrava a escrita simbólica da operação em questão. Após a resolução de cada operação através de lápis e papel, a examinadora solicitava que a criança explicasse como havia resolvido a operação (a folha de papel com os cálculos realizados ficava às vistas da criança e da examinadora).

Resultados

Os dados foram analisados com base no número de respostas corretas e nas estratégias adotadas em cada tarefa, não sendo realizado nenhum tratamento estatístico de natureza quantitativa sobre os dados³.

As respostas corretas

O desempenho das crianças em ambas as tarefas é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1. Número de acertos (percentual em parênteses) por série em cada tarefa.

Série	Tarefa 1 (referencial de <i>metade</i>) (n=126)	Tarefa2 (simbolismo matemático) (n=126)
2 ^a	94 (74,6)	3 (2,4)
3 ^a	116 (91,3)	11 (8,7)
Total	210 (83,3)	14 (5,5)

Observa-se que, tanto no geral como em cada série, os percentuais de acertos na Tarefa 1 (referencial de *metade*) foram expressivamente mais altos que os percentuais obtidos na Tarefa 2 (simbolismo matemático). As crianças em ambas as séries tiveram, como previsto, grande dificuldade na resolução das operações na Tarefa 2.

Comparando-se os percentuais de acertos entre as séries em cada tarefa, verifica-se que tanto na Tarefa 1 como na Tarefa 2 as crianças de ambas as séries não se diferenciam, apresentando um mesmo nível de desempenho.

As estratégias na Tarefa 1 (referencial de *metade*)

A partir da análise dos protocolos de cada criança, foram identificados cinco tipos distintos de estratégias⁴:

Estratégia I (comparação de tamanho): A criança compara uma fatia correspondente a uma parcela da operação com a fatia de referência (unidade fracionária usada como âncora: 1/2). Ao realizar as comparações, justapondo as fatias⁵, constata que uma fatia correspondente a uma parcela da operação (1/3, 1/4 ou 1/6) é maior/menor do que a fatia de referência (1/2). Há uma tentativa de compensar os tamanhos para, então, decidir quantas fatias de referência deverão compor o bolo a ser formado. Exemplos⁶:

Operação $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$ (*bolo de baunilha*)

C: Um (fatia de referência: 1/2).

E: Por que?

C: Porque tem quatro fatias do bolo de baunilha (1/4), e uma fatia do bolo de morango (1/2) já é maior que a de baunilha.

E: Você acha que vai ficar igual?

C: Fica.

Operação $1/6 + 1/6 + 1/6$ (bolo de chocolate)

C: Um tá bom.

E: Por que?

C: Porque o pedaço do bolo de morango é muito maior do que o pedaço do bolo de chocolate.

Estratégia II (quantidade absoluta de fatias): A criança raciocina em termos absolutos, tomando por base o número de fatias presente na operação apresentada. Desta forma, a solução consiste em compor um bolo que tenha o mesmo número de fatias que o número de parcelas da operação apresentada. Exemplos:

Operação $1/3 + 1/3 + 1/3$ (bolo de limão).

C: Três.

E: Por que?

C: Porque ele comeu três aqui ($1/3 + 1/3 + 1/3$) e agora três aqui ($1/2 + 1/2 + 1/2$). E: Vai dar o mesmo tanto de bolo?

C: Vai.

Operação $1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$ (fatias de bolo de limão, de chocolate e de baunilha, respectivamente)

C: Quatro.

E: Por que?

C: Porque aqui ($1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$) tem quatro.

E: Se juntar quatro fatias dessa ($1/2$) e juntar essas quatro fatias ($1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$) vai dar o mesmo tanto de bolo?

C: Vai.

Estratégia III (tentativas de composição e decomposição): A criança tenta estabelecer a equivalência entre as fatias apresentadas na operação e a fatia de referência. Essas tentativas se caracterizam por justaposições das fatias de referência sobre as fatias que compõem a operação. As composições e decomposições são feitas a partir de compensações entre os tamanhos das fatias de referência e as fatias correspondentes às parcelas da operação. Algumas vezes, a criança é capaz de realizar composições e decomposições apropriadas, porém confunde-se e não consegue estabelecer todas as equivalências necessárias. Exemplo:

Operação $1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$ (fatias de bolo de limão, de chocolate e de baunilha, respectivamente)

C: (coloca $1/2$ sobre $1/3$; $1/2$ sobre $1/6$; $1/2$ sobre $1/4 + 1/4$) Três.

E: Como você descobriu?

C: Um desse (unidade de referência: $1/2$) nesse ($1/3$). Metade desse (refere-se à unidade de referência $1/2$) nesse ($1/6$). E esse (refere-se a outra unidade de referência $1/2$) para esses dois ($1/4 + 1/4$).

Estratégia IV (global): A criança, de imediato, procura determinar se as fatias que correspondem às parcelas na operação apresentada formam um bolo inteiro ou se formam metade de um bolo. Uma vez constatado isso, a criança volta-se para a unidade fracionária de referência ($1/2$) com o objetivo de compor um bolo inteiro ou metade de um bolo. No caso de itens em que a soma das parcelas na operação apresentada forma *metade de um bolo*, a criança procura compor metade de um bolo com a fatia de referência. No caso de itens em que a soma das parcelas resulta em um bolo inteiro, a criança procura formar um bolo inteiro com as fatias de referência ($1/2$). Esta é uma estratégia global que não envolve composições e decomposições parciais durante o processo de resolução. Exemplos:

Operação $1/3 + 1/3 + 1/3$ (bolo de limão)

C: (olha para as figuras dos bolos de limão e de morango sobre a mesa) Se ele comeu o bolo todo desse daqui (refere-se ao bolo de limão — $1/3$) ele vai comer o bolo todo desse daqui (refere-se ao bolo de morango — $1/2$). Então, duas partes ($1/2 + 1/2$).

Operação $1/6 + 1/6 + 1/6$ (bolo de chocolate)

C: Uma.

E: Por que?

C: Juntando as três (refere-se às três fatias de bolo de chocolate: $1/6$) forma uma metade. Ai é uma dessa ($1/2$) de morango.

Operação $1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$ (fatias de bolo de limão, chocolate e baunilha, respectivamente).

C: Dava um inteiro (referindo-se às fatias de bolos diversos). Seriam duas fatias de morango ($1/2$).

Estratégia V (composição e decomposição adequadas): A criança estabelece todas as equivalências necessárias, fazendo composições e decomposições apropriadas a partir de agrupamentos entre as fatias correspondentes às parcelas da operação apresentada e de agrupamentos entre as fatias de referência. As composições e decomposições realizadas podem envolver justaposições das fatias de referência (fatias soltas) sobre as fatias que correspondem às parcelas (fatias coladas na cartela). Exemplos:

Operação $1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$ (fatias de bolo de limão, chocolate e baunilha, respectivamente)

C: Comeu um bolo todo de morango (junta duas fatias do bolo de morango: $1/2 + 1/2$).

E: Quantas fatias do bolo de morango?

C: Duas.

E: Por que?

C: Porque essa (unidade fracionária de referência: $1/2$) fica para essa mais

essa ($1/3 + 1/6$); e essa *metade* (refere-se a outra unidade fracionária de referência) fica para esses dois ($1/4 + 1/4$).

Operação $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$ (bolo de baunilha)

C: Duas. Esse tava mais fácil.

E: Como você descobriu?

C: Uma *metade* é esse com esse de baunilha ($1/4 + 1/4$) e a outra *metade* é esse mais esse de baunilha ($1/4 + 1/4$).

Operação $1/3 + 1/6$ (bolo de limão e de chocolate, respectivamente)

C: (coloca uma unidade fracionária de referência ($1/2$) sobre a fatia de limão ($1/3$); e depois sobre a fatia ($1/6$) de chocolate). Uma dessa aqui (refere-se à unidade fracionária de referência: $1/2$).

E: Como você sabe?

C: Esse (unidade fracionária de referência: $1/2$) fica com esse ($1/3$), e esse pedaço (refere-se à parte que sobrou da unidade de referência quando comparada à fatia do bolo de limão: $1/3$) fica com esse (refere-se à fatia do bolo de chocolate: $1/6$).

A distribuição das estratégias é apresentada na Tabela 2.

Tabela 2. Número de estratégias (percentual em parênteses) por série.

Estratégias	2ª Série	3ª Série
I (n=20)	14 (70)	6 (30)
II (n=19)	19 (100)	0
III (n=11)	5 (45,5)	6 (54,5)
IV (n=76)	36 (47,4)	40 (52,6)
V (n=126)	52 (41,3)	74 (58,7)

No geral, as Estratégias IV e V foram as mais frequentes. A Estratégia I foi mais utilizada pelas crianças da 2ª série e a Estratégia V pelas da 3ª série. As Estratégias III e IV foram igualmente utilizadas em ambas as séries. Por outro lado, a Estratégia II ocorreu apenas

entre as crianças da 2ª série. Importante comentar que as Estratégias IV e V foram consideradas mais sofisticadas do que as demais estratégias, visto que envolviam noções de equivalência que são fundamentais na adição de frações.

As estratégias na Tarefa 2 (simbolismo matemático)

Quatro tipos de estratégias foram identificados na resolução da Tarefa 2, como descrito e exemplificado a seguir:

Estratégia I (adição conjunta de todos os números contidos nas frações, resultando um número natural): A criança adiciona todos os números presentes nos numeradores e denominadores das frações, resultando em um número natural. Exemplos:

Operação $1/3 + 1/3 + 1/3$

C: Doze (escreve 12 no papel).

E: Como você fez?

C: $1 + 1 + 1$, 3 (referindo-se aos numeradores). $3 + 3 + 3$, 9 (referindo-se aos denominadores). *Aí é para somar os resultados.*

Operação $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$

C: Vinte (escreve 20 no papel).

E: Como você fez?

C: Porque $4 + 1$ dá 5. E $5 + 5$ dá 10. Mais 5, dá 15. E mais 5, dá 20. (soma o numerador e o denominador da primeira parcela, chega a um resultado, procedendo desta mesma forma em relação às demais parcelas, contando, então, de 5 em 5).

Operação $1/4 + 1/4$

C: Dez (escreve 10 no papel).

E: Como você fez?

C: $4+1$, 5 (refere-se à primeira parcela). $4+1$, 5 (refere-se à segunda parcela).

Estratégia II (soma separada dos numeradores e dos denominadores, resultando um número natural): A criança procura tratar o numerador e o denominador de forma diferenciada, adicionando-os separadamente. O resultado final obtido é um número natural cujo primeiro dígito corresponde ao resultado da soma dos numeradores e os dígitos seguintes correspondem ao resultado da soma dos denominadores (ou vice-versa). Exemplos:

Operação $1/4 + 1/4$

C: Vinte e oito (escreve 28).

E: Como você fez?

C: Eu juntei os de cima (numeradores somados entre si, resultando 2) e os de baixo (denominadores somados entre si, resultando 8).

Operação $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$

C: (soma todos os denominadores e escreve 16. Em seguida, soma todos os numeradores e escreve o resultado 4 ao lado do 16). Dá 164.

E: Como você fez?

C: $4 + 4 + 4 + 4$ dá 16 (mostra os numeradores das frações), e esses (mostra os denominadores das frações) dá 4.

Operação $1/6 + 1/6 + 1/6$

C: (arma a seguinte operação:

$$\begin{array}{r} 6 \quad 1 \\ 6 \quad 1 \\ 6 \quad 1 \\ \hline 18 \quad 3 \end{array}$$

E: Como você fez?

C: Primeiro, a gente começa pela unidade (refere-se ao 3 em 183), e depois pela dezena (refere-se ao 18 em 183). Dá 183.

Operação $1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$

C: (escreve 4 e acrescenta 17 antes do 4). Fica 417.

E: Como você fez?

C: $1 + 1 + 1 + 1$ é igual a 4. E $3 + 6$, 9. Aí $4 + 4$, 8. Aí eu somei esses dois (aponta o 9 e o 8) e deu 17. Dá 417.

Estratégia III (soma separada dos numeradores e denominadores, formando um número fracionário). A criança adiciona todos os numeradores e depois todos os denominadores das parcelas. A soma dos numeradores corresponde ao numerador e a soma dos denominadores corresponde ao denominador da fração final obtida como resultado. Esta estratégia se diferencia da Estratégia II porque o resultado obtido é um número fracionário e não um número natural. Isso sugere que a criança é sensível ao simbolismo da fração (um número sobre o outro), acreditando que esta disposição deve ser mantida. Exemplos:

Operação $1/3 + 1/3 + 1/3$

C: (faz o traço da fração, escreve 3 acima do traço e 9 abaixo do traço: $3/9$)

E: Como você fez?

C: $1 + 1 + 1$ (os numeradores), 3. $3 + 3 + 3$ (os denominadores), 9.

Operação $1/4 + 1/4$

C: (escreve o traço da fração, soma os numeradores, colocando o resultado acima do traço da fração e em seguida soma os denominadores, colocando o resultado abaixo do traço da fração: $2/8$)

E: Como você fez?

C: Eu somei esse (numerador 1 na primeira parcela) com esse (numerador 1 na segunda parcela) e esse (denominador 4 na primeira parcela) com esse (denominador 4 na segunda parcela).

Operação $1/3 + 1/6$

C: (escreve o traço da fração, soma os numeradores ($1 + 1$) e coloca o resultado acima do traço da fração e em seguida soma os denominadores ($3 + 6$) colocando o resultado abaixo do traço da fração, registrando $2/9$).

E: Como você fez?

C: Eu somei esse (1) com esse (1) e esse (3) com esse (6).

Estratégia IV (resolução através do uso de âncoras): O uso desta estratégia mostra claramente um efeito da tarefa anterior sobre a resolução das adições, visto que se faz presente o uso do referencial de *metade* durante o processo de resolução. Esta estratégia foi sempre acompanhada de uma representação feita através da linguagem natural em que a criança colocava por escrito sua resposta. Exemplos:

Operação $1/4 + 1/4$

E: Resolva esta continha

C: Como assim uma continha? Um mais um, né? Ou é um quarto mais um quarto?

E: É.

C: Então vai dar *metade*, ou melhor, vai dar menos que *metade*.

E: Escreva a resposta.

C: Como? Vou escrever menos da *metade*, certo?

E: Está bem.

C: (escreve “menos da *metade*”).

Operação $1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$

C: $1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4$ dá um bolo (nomeia as frações corretamente).

E: Como você sabe?

C: Porque $1/3 + 1/6$ dá a *metade*. Mais $1/4 + 1/4$, dá um bolo. (escreve “um bolo inteiro”).

Operação $1/3 + 1/6$

C: Metade de um bolo! (escreve “*metade* de um bolo”).

E: Como você sabe?

C: Porque eu sei que dá *metade*.

Essas estratégias foram consideradas como expressando níveis distintos de sofisticação. Na Estratégia I a criança não diferenciava os numeradores dos denominadores das frações, tratando a adição de frações como se fosse a adição de números inteiros, cuja soma resulta em um número inteiro. Na Estratégia II, embora continue tratando a soma das frações como resultando em um número inteiro, a criança dá sinais de que considera que numeradores são diferentes de denominadores e que precisam ser tratados em separado durante o processo de resolução. Na Estratégia III, esta sensibilidade é mais aguçada, pois a criança produz como resultado da operação, uma fração e não mais um número inteiro como ocorria na Estratégia II. Particular atenção deve ser dada à Estratégia IV em que a criança claramente mostra utilizar-se de âncoras durante o processo de resolução. O uso dessa estratégia decorreu, sem dúvida, de um efeito de ordem provocado pela Tarefa 1 em que o referencial de *metade* era fornecido como âncora para estabelecer a equivalência. O uso desse referencial, na maioria das vezes, levou ao acerto, como mostrado mais adiante quando discutidas as relações entre o número de acertos e as estratégias. Antes disso, entretanto, é relevante apresentar a distribuição das estratégias em cada série (Tabela 3).

Tabela 3. Número (percentual em parênteses) de estratégias por série.

Estratégias	2ª Série	3ª Série
I (n=189)	105 (55,5)	84 (44,5)
II (n=27)	9 (33,3)	18 (66,7)
III (n=12)	0	12 (100)
IV (n=24)	12 (50)	12 (50)

Nota-se que as Estratégias I e IV aparecem quase que igualmente distribuídas entre as séries. Por outro lado, a Estratégia II foi mais freqüente na 3ª série do que na 2ª série, e a Estratégia III não foi observada na 2ª série. Importante comentar que a esta estratégia envolvia o uso do simbolismo de frações na apresentação do resultado da operação, sendo isso apenas realizado pelas crianças da 3ª série.

Relações entre o número de acertos e as estratégias adotadas em cada tarefa

As relações entre o número de acertos e o tipo de estratégia são apresentadas na Tabela 4 (Tarefa 1: referencial de *metade*) e na Tabela 5 (Tarefa 2: simbolismo matemático).

Tabela 4. Número de acertos e erros (percentual em parênteses) em função do tipo de estratégia na Tarefa 1 (referencial de *metade*).

Estratégias	Resposta correta	Resposta incorreta
I (n=20)	14 (70)	6 (30)
II (n=19)	0	19 (100)
III (n=11)	3 (27,3)	8 (72,7)
IV (n=76)	70 (92)	6 (8)
V (n=126)	123 (97,6)	3 (2,4)

As Estratégias II e III estão mais freqüentemente associadas a itens respondidos de forma incorreta, enquanto as Estratégias IV e V a itens respondidos corretamente. Parece haver uma tendência quanto ao fato de estratégias mais elaboradas estarem associadas a itens respondidos corretamente.

Tabela 5. Número de estratégias (percentual em parênteses) na Tarefa 2 (simbolismo matemático).

Estratégias	Respostas corretas	Respostas incorretas
I (n=189)	0	189 (100)
II (n=27)	0	27 (100)
III (n=12)	0	12 (100)
IV (n=24)	14 (58,3)	10 (41,7)

Observa-se que as Estratégias I, II e III estavam sistematicamente associadas a respostas incorretas. Respostas corretas foram encontradas apenas em operações cujo procedimento de resolução se caracterizava pelo uso da Estratégia IV. Isso significa que o uso de âncoras, presente nessa estratégia, parece favorecer o desempenho.

Discussão e Conclusões

Os limites e as possibilidades das crianças com a adição de frações

Como esperado, as crianças em ambas as séries apresentaram grande dificuldade na resolução de adições de frações através do simbolismo matemático formal. Os erros identificados durante a resolução das adições indicam, como documentado na literatura (Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984; Kerslake, 1986; Silva, 1997; Sophian, Garyants & Chang, 1997; Streefland, 1991) que, de fato, a criança tende a aplicar o conhecimento que possui acerca dos números inteiros para os números fracionários. Os resultados do presente estudo, entretanto, detalham os tipos de erros apresentados e, ainda, acrescentam uma perspectiva de desenvolvimento quanto a esse aspecto. A evolução quanto aos erros é evidenciada na Estratégia III a qual envolve uma certa sensibilidade por parte da criança quanto ao simbolismo da fração tanto em relação à maneira de realizar as adições parciais, quanto em relação ao resultado obtido que é sempre um número fracionário. Esta sensibilidade está ausente nas Estratégias I e II que geram um número inteiro como resultado. Assim, parece haver uma progressão quanto aos erros entre as crianças nas séries investigadas, sendo a Estratégia III um procedimento menos elementar do que aquele identificado nas Estratégias I e II.

No entanto, além dos limites, é importante considerar as possibilidades do pensamento infantil. Neste sentido alguns pontos merecem destaque. Um primeiro ponto é que, mesmo quando solicitadas a resolver adições de frações através do simbolismo matemático, algumas crianças adotaram o referencial de *metade* como âncora, levando ao surgimento da Estratégia IV. É evidente que esta estratégia decorreu do efeito da Tarefa 1 (referencial de *metade*) sobre a Tarefa 2 (simbolismo). A questão que se coloca, entretanto, é que algumas crianças transferiram o uso de uma estratégia adotada em uma dada situação para outra, aplicando o referencial de *metade* na resolução de adições de fração simbolicamente representadas. Esse é, sem dúvida, um dado interessante, pois, ao usarem esta âncora as crianças alcançaram percentuais de acertos bem mais altos do que quando adotavam estratégias puramente simbólicas. Ao que parece, o uso do referencial de *metade* favoreceu a quantificação das frações e a compreensão acerca de adições de frações.

Um outro aspecto que merece ser destacado é que o uso de âncoras permite o aparecimento de esquemas de equivalência relevantes para a compreensão de adição de fração, como ilustrado pelo uso freqüente da Estratégia IV (global) e da Estratégia V (composição e decomposição adequadas) na Tarefa 1. Os esquemas de equivalência estão relacionados à habilidade de sintetizar unidades para gerar uma outra unidade, equivalente à soma de suas partes, como por exemplo, identificar que a soma de dois $\frac{1}{4}$

equivalem a $2/4$. As noções de equivalência são, de fato, fundamentais para que a criança possa operar com frações (Kerslake, 1986; Lima, 1993; Streefland, 1997).

O esquema de equivalência foi utilizado na Tarefa 1 (referencial de *metade*) a partir das composições e decomposições realizadas durante o processo de resolução. As tentativas de estabelecer a equivalência entre as parcelas da adição (fração de bolos divididos em n -cortes) e a unidade de referência fornecida (fatias representando a *metade* de um bolo) indicam uma compreensão, ainda que intuitiva, acerca da adição de fração, mesmo sem dominar o simbolismo e o algoritmo apropriado. Este dado confirma o que foi observado por Zeman (1991) e por Zunino (1995).

O esquema de equivalência também se expressa no uso de estratégias globais. Na Tarefa 1 (referencial de *metade*), as crianças, de imediato, procuravam determinar se as fatias relativas aos termos da adição juntas formavam um bolo inteiro ou *metade* de um bolo. Esta estratégia global também levava a um grande número de acertos. Na realidade, ao adotar tal estratégia, as crianças utilizavam o referencial de *metade* e o referencial de *inteiro* como âncoras. Assim, além da *metade*, o referencial de *inteiro* parece ser importante em situações envolvendo operações com frações. A importância de cada um desses referenciais precisa ser explorada em pesquisas especificamente voltadas para este fim.

A importância das situações no raciocínio fracionário

Vergnaud (1983, 1991, 1997) ressalta a importância de se considerar os conceitos matemáticos inseridos em situações que os tornam funcionais e significativos. O presente estudo é um exemplo disso⁷ ao contrastar a compreensão de crianças sobre adição de frações em situações distintas as quais geraram níveis de desempenho bastante diferentes. Partindo da perspectiva teórica de Vergnaud e à luz dos resultados obtidos, torna-se relevante analisar as características e a natureza das situações propostas neste estudo com o objetivo de compreender o bom desempenho das crianças na Tarefa 1 (referencial de *metade*), em contraste com as dificuldades identificadas na Tarefa 2 (simbolismo matemático).

A situação na Tarefa 2 era tipicamente escolar, em que as frações que correspondiam às parcelas das adições eram apresentadas sem um referente, através do simbolismo formal típico de frações, sendo disponibilizados lápis e papel como suporte para a manipulação de símbolos. Por outro lado, a situação proposta na Tarefa 1, criada a partir de um contexto de história, se assemelhava às situações-problema do cotidiano extra-escolar, as frações que correspondiam às parcelas das adições apresentadas estavam associadas a um referente (fatia de bolo). Enquanto na Tarefa 2, as crianças tinham que pensar sobre o que fazer com os números, decidindo aplicar o que sabiam sobre adição de números inteiros; na Tarefa 1, as crianças se engajavam em raciocinar sobre a situação-problema, manipulando quantidades ao invés de símbolos. Essa situação propicia o surgimento de noções informais. Neste sentido, o referencial de *metade* inserido em um contexto familiar parece: (a) propiciar o uso do conhecimento informal extra-escolar; (b) facilitar a quantificação das frações presentes nas parcelas; e (c) auxiliar no estabelecimento

da equivalência apropriada. O referencial de *metade*, desempenha papel facilitador na compreensão de adições de fração quando estas não envolvem o simbolismo formal. Este é, sem dúvida, um resultado importante que tanto corrobora resultados de estudos anteriores sobre a proporção e a probabilidade, como pode ter implicações educacionais.

Algumas implicações educacionais

Do ponto de vista educacional, a instrução escolar não deveria se limitar ao ensino da linguagem, do simbolismo e da mera representação diagramática das frações, e nem tampouco restringir a aritmética de frações à aplicação de regras algorítmicas. De modo geral, o contexto escolar deveria propor situações-problema semelhantes àquelas que emergem em contextos extra-escolares, propiciando, assim, o uso de formas de raciocinar que as crianças dominam. Por exemplo, a noção de *metade*, dominada pelas crianças desde muito cedo, poderia ser amplamente explorada no ensino introdutório sobre frações, pois, além de anteceder a formação de outras unidades fracionárias, contribui para a formação das mesmas, como ocorre com as frações $1/4$, $3/4$, e outras divisões com número par de cortes. O referencial de *metade* poderia, ainda, ser utilizado na quantificação de frações, servindo como âncora no emprego de relações lógicas com base em 'maior que', 'menor que' e 'igual a metade'. Com base nessas relações lógicas, é possível que erros decorrentes do conhecimento sobre a seqüência numérica, como, por exemplo, considerar que $1/4$ é maior que $1/3$, pudessem ser evitados caso a criança fosse levada a perceber que $1/4$ é menor que *metade* e que $1/3$ é maior que *metade*.

É possível supor, também, que se as crianças fossem estimuladas a utilizar o referencial de *metade*, talvez fossem capazes de resolver adição de frações simbolicamente representadas. Por exemplo, seria interessante criar uma situação didática em que o aluno fosse levado a entender que *metade* mais *metade* resulta em um *inteiro*, e fosse levado a contrastar e refletir acerca do absurdo de sua resposta ao resolver simbolicamente $1/2 + 1/2 = 6$ ou $1/2 + 1/2 = 24$. Nesse caso, os erros dos alunos tornar-se-iam um recurso poderoso para a elaboração de situações em que o erro é tomado como estratégia didática (Pinto, 2000). O efeito de uma situação didática desta natureza na compreensão da adição de fração poderia ser examinado através de um estudo de intervenção em situações individuais controladas ou em situações coletivas em sala de aula.

Para concluir, é preciso esclarecer que, apesar de sua contribuição, o estudo apresentado é de caráter exploratório, levantando questões que merecem ser futuramente investigadas. O ponto principal a ser ressaltado é que além dos limites do pensamento infantil há possibilidades que podem ser consideradas tanto pela pesquisa em psicologia do desenvolvimento cognitivo, como pelas práticas em sala de aula.

Notas

¹ Este artigo faz parte da dissertação de mestrado elaborada pela primeira autora sob orientação da segunda na Pós-Graduação em Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil. Agradecimentos são endereçados ao CNPq pela bolsa de estudos concedida à primeira autora para realização de curso de mestrado. As autoras agradecem a Alex Gomes, Antonio José Lopes (Bigode), Joaquin Gimenez, Jorge Tarcísio da Rocha

Falcão e Verônica Gitirana pelas sugestões e comentários pertinentes feitos sobre a pesquisa que originou este artigo.

² O estudo piloto mostrou que as crianças que na primeira sessão resolviam as adições através do simbolismo tendiam a não querer participar da segunda sessão. Em vista disso, na realização da pesquisa propriamente dita, optou-se pela apresentação desta tarefa (simbolismo matemático) na segunda sessão.

³ A ausência de um tratamento estatístico sobre os dados deveu-se ao grande número de células vazias (igual a zero) ou de células com valores muito baixos. No entanto, considerando o objetivo desse estudo, comparações de natureza qualitativa são perfeitamente apropriadas no sentido de ressaltar as dificuldades das crianças na Tarefa 2 e o bom desempenho na Tarefa 1, bem como as diferentes estratégias adotadas.

⁴ Todas as estratégias de todos os participantes foram analisadas por dois juizes que, através de discussão, chegaram a um consenso quanto à sua classificação.

⁵ As justaposições realizadas durante o processo de resolução envolviam sobrepor as fatias de referência (*metade*), que eram soltas, sobre as fatias coladas na cartolina ($1/2$, $1/3$, $1/4$ e $1/6$), que representavam as parcelas das adições.

⁶ C: criança; E: examinadora. Entre parênteses constam informações sobre os gestos e as ações da criança, bem como especificações sobre as fatias de bolo.

⁷ Outros estudos na literatura apontam diferenças de desempenho em problemas matemáticos apresentados em situações escolares e extra-escolares (e.g., Carraher, Carraher & Schliemann, 1995; Hughes, 1986; Mack, 1993, citado por Nunes & Bryant, 1997; Schliemann, 1998).

Referências

- Behr, M.; Wachsmuth, I.; Post, T. R. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: a clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (5), 323–341.
- Biddlecomb, B.D.(2002). Numerical knowledge as enabling and constraining fraction knowledge: an example of the reorganization hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 167–190.
- Carraher, T.N.; Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1995). Matemática escrita versus matemática oral. Em T.N. Carraher; D.W Carraher & A D. Schliemann (Orgs.), *Na vida dez, na escola zero* (pp. 45–68). São Paulo: Cortez Editora.
- Correa, J.; Spinillo, A.G.; Brito, M.R.F. de & Moro, M.L.F. (1998). O desenvolvimento de conceitos matemáticos: Temas de interesse para a Educação Matemática. Em M.L. Seidl de Moura; J. Correa & A.G. Spinillo (Orgs.), *Pesquisas Brasileiras em Psicologia do Desenvolvimento* (pp. 73–110). Rio de Janeiro: Editora da UERJ.
- Gelman, R. & Meck, B. (1992). Early principles aid initial but not later conceptions of number. Em J. Bideaud; C. Meljac & J-P. Fischer (Orgs.), *Pathways to number: children's developing numerical abilities* (pp.171–190). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. Em T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315–446). Hove: Psychology Press.
- Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Basil Blackwell.
- Kerslake, D. (1986). *Fractions: children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor: NFER-Nelson.
- Lamon, J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content and instructional strategies for children*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lima, M. (1993). Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. Em T.N. Carraher (Org.), *Aprender pensando: Contribuições da psicologia cognitiva para a educação* (pp. 81–127). Petrópolis: Vozes.

- Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Ohlsson, S. (1991). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. Em J. Hiebert & M. Behr (Orgs.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53–92). NJ.: Lawrence Earlbaum.
- Pinto, N.B. (2000). *O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino da matemática elementar*. Campinas: Papirus.
- Resnick, L.B. (1989). Defining, Assessing, and teaching number sense. Em J.T. Sowder & B.P. Schappelle (Orgs.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: report of a conference* (pp. 35–39) (mimeo).
- Schliemann, A.D. (1998). Da matemática da vida diária à matemática da escola. Em A. D. Schliemann & D.W. Carraher (Orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos: Ensino e pesquisa* (pp. 7–10). Campinas: Papirus.
- Silva, M. J. F. (1997). *Sobre a introdução do conceito de número fracionário*. Dissertação de Mestrado não-publicada, Curso de Mestrado em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, SP, Brasil.
- Singer-Freeman, K.E. & Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, 16, 811–829.
- Sophian, C.; Garyants, D. & Chang, C. (1997). When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology*, 33 (5), 731–744.
- Sowder, J. (1995). A compreensão de número na escola de primeiro grau. Em L. Meira & A.G. Spinillo (Orgs.), *Anais da I Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática* (pp.19–28). Recife: Copiadora Caxangá.
- Spinillo, A. G. (1996a). Developmental perspectives on children's understanding of ratio and proportion and the teaching of mathematics in primary school. Em J. Gimenez, R. C. Lins & B. Gómez (Orgs.), *Arithmetics and algebra education: Searching for the future* (pp. 132–137). Barcelona: Copisteria Asturias.
- Spinillo, A. G. (1996b). O conceito de chance em situações de julgamento e de construção. Em M.H. Novaes & M.R.F. de Brito (Orgs.), *Psicologia na educação: Articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica. Coletâneas da ANPEPP*, 1 (5), 167–186. Rio de Janeiro: Xenon Editora.
- Spinillo, A. G. (1997). Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. Em A.D. Schliemann; D.W. Carraher; A.G. Spinillo; L.L. Meira; J.T. da R. Falcão & N. Acioly-Régnier (Orgs.), *Estudos em psicologia da educação matemática* (pp. 40–61). Recife: Editora da UFPE.
- Spinillo, A.G. (2002a). Children's use of part-part comparisons to estimate probability. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 357–369.
- Spinillo, A. G. (2002b). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Revista Psicologia: Reflexão e Crítica*, 15 (3), 475–487.
- Spinillo, A.G. (2003). Ensinando proporção a crianças: Alternativas pedagógicas em sala de aula. *Boletim do GEPEM (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática)*, 43, 11–47.
- Spinillo, A.G. & Bryant, P. (1991). Children's proportional judgments: The importance of "half". *Child Development*, 62, 427–440.
- Spinillo, A.G. & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition*, 5 (2), 181–197.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed?. Em T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 347–371). Hove: Psychology Press.
- Tirosh, D.; Fischbein, E.; Graeber, A. & Wilson, J. (1999). The teaching module on rational numbers for prospective elementary teachers. *The United State-Israel Binational Science Foundation, The University of Georgia*. Retirado em 02/07/2001, no World Wide Web: <http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Module.html>.

- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Em R. Lesh & M. Landau (Orgs.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 127–174). New York: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1991). Multiplicative structures. Em J. Hiebert & M. Behr (Orgs.), *Numbers concepts and operations in the middle grades* (pp. 141–161). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum.
- Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. Em T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5–28). Hove: Psychology Press.
- Yang, D.-C. (2003). Teaching and learning number sense: An intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1 (1), 115–134.
- Zeman, M. (1991). The part-whole schema in the conceptualization of fractions. *Journal of Mathematical Behavior*, 10 (3), 251–259.
- Zunino, D. L. (1995). *A matemática na escola: Aqui a agora*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Resumo. Pesquisas mostram que crianças resolvem, com sucesso, tarefas envolvendo conceitos matemáticos complexos (proporção e probabilidade) quando usam o referencial de *metade* como âncora para o raciocínio. A partir desses resultados o presente estudo investigou: (a) se crianças resolveriam adições de frações através do referencial de *metade*; e (b) a natureza das dificuldades ao realizar adição de frações através do simbolismo formal. Quarenta e dois alunos do ensino elementar (8-9 anos) resolveram adições de frações em duas situações: através do referencial de *metade* e através do simbolismo matemático. Em ambas as situações as crianças eram solicitadas a explicar como haviam resolvido as operações. A partir dessas justificativas foram identificados diferentes tipos de estratégias. Como esperado, as crianças apresentaram dificuldades na resolução das operações através do simbolismo matemático; porém mostraram um bom desempenho quando o referencial de *metade* era oferecido como âncora durante o processo de resolução. Os erros na situação simbólica, como documentado na literatura, indicam que a criança aplica o conhecimento sobre números inteiros aos números fracionários. Os tipos de erros são detalhados e discutidos em uma perspectiva de desenvolvimento. Concluiu-se que o referencial de *metade* auxilia na resolução de adição de frações, desempenhando papel importante no raciocínio matemático.

Palavras-chave: Crianças; Adição de frações; Simbolismo matemático; Referencial de metade.

Abstract. Previous studies have shown that children can successfully solve tasks involving complex mathematical concepts (proportion and probability) by using the notion of *half* as an anchor for reasoning. This study aimed at investigating: (a) whether children would be able to add fractions by using the notion of *half* as an anchor to support their reasoning process; and (b) the types of difficulty they have when adding fractions by using the symbolism peculiar to fractions. Forty-two elementary school children (8-9 years old) were asked to solve additions of fractions in two different contexts: using the notion of *half* and using the mathematical symbolism. In both contexts children were asked to explain their solution procedures. On the basis of these explanations different types of strategies were found. As predicted, children had difficulties in solving addition of fractions in the symbolic situation. In contrast, they performed successfully when using the notion of *half* as an anchor for reasoning. The errors they made when using mathematical sym-

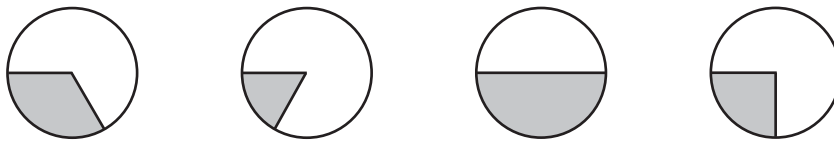
bols, as already documented in the literature, indicate that children apply their knowledge about whole numbers to fractions. The types of errors were discussed in a developmental perspective. The conclusion was that the notion of *half* helps children to solve addition of fractions, playing an important role on children's mathematical reasoning.

Key-words: Children; Addition of fractions; Mathematical symbolism; The notion of half.

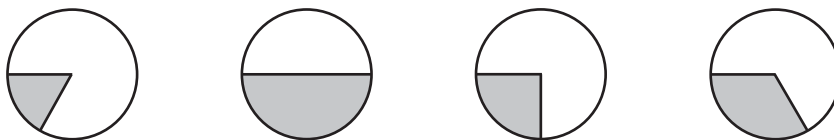
Anexo I

Folha de respostas da tarefa de Sondagem

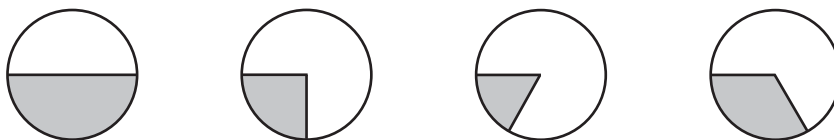
Item: $1/2$



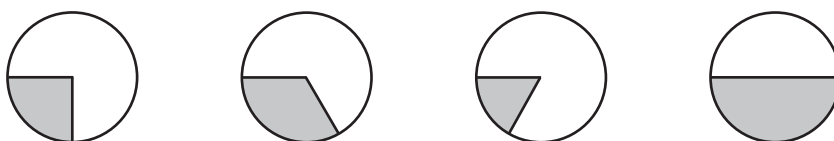
Item: $1/3$



Item: $1/4$

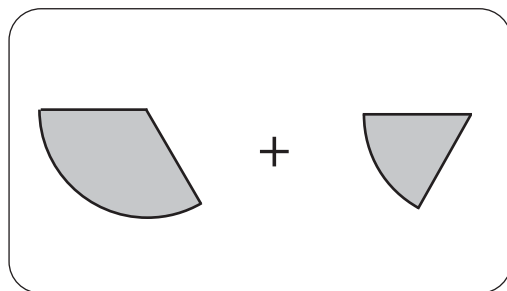


Item: $1/6$

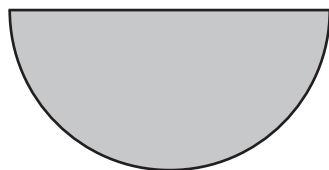


Anexo II

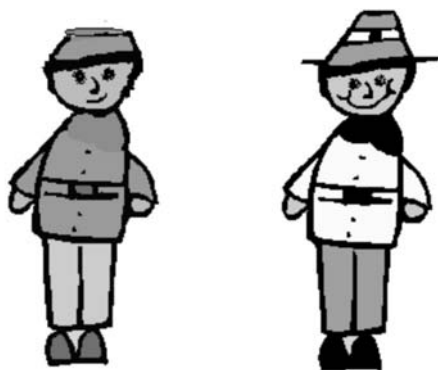
Exemplo de uma das operações ($1/3 + 1/6$) apresentadas na Tarefa 1 (referencial de metade).

**Anexo III**

A unidade de referência (*metade*) apresentada como âncora para a resolução das operações na Tarefa 1 (referencial de *metade*).

**Anexo IV**

Figuras de Pedro e Artur, personagens da história que serviu de contexto para as operações apresentadas na Tarefa 1 (referencial de *metade*).



Anexo V

Operações apresentadas às crianças na Tarefa 2 (simbolismo matemático).

$$1/4 + 1/4 =$$

$$1/3 + 1/6 =$$

$$1/6 + 1/6 + 1/6 =$$

$$1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/4 =$$

$$1/3 + 1/3 + 1/3 =$$

$$1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 =$$

■■■

MARIA SORAIA SILVA CRUZ
Universidade Federal de Pernambuco
msoraiacruz@yahoo.com.br

ALINA GALVÃO SPINILLO
Universidade Federal de Pernambuco
spin@ufpe.br