A Aprendizagem dos números racionais

Cecília Monteiro
Escola Superior de Educação de Lisboa
Hélia Pinto
Escola Superior de Educação de Leiria

Introdução

Algumas das dificuldades que os alunos do ensino básico enfrentam no seu percurso para compreender os números fraccionários, são identificadas na literatura com os diferentes significados das fracções, com a concepção da unidade e com o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos.

Muita da investigação ocorrida nas últimas duas décadas, no ensino elementar e no âmbito das aprendizagens da Matemática, está relacionada com o desenvolvimento de competências numéricas, nomeadamente dos números racionais não inteiros, (por exemplo o projecto RNP — Rational Number Project durou mais de 20 anos, 1979-2003). Sendo um assunto dos mais complexos e fonte de alguns malentendidos que por vezes subsistem durante toda a escolaridade, é também dos mais importantes do ensino básico, na medida em que proporciona o desenvolvimento de estruturas mentais importantes para futuras aprendizagens (Post, Behr, Lesh, 1983), nomeadamente o raciocínio multiplicativo (Streefland, 1991, 1997).

Neste artigo iremos analisar dificuldades reconhecidas na literatura relativamente aos diferentes significados das fracções e ao conceito de unidade. Seguidamente discutiremos aspectos relativos à passagem das estratégias informais dos alunos na resolução de problemas para a formalização, assim como aos processos de matematização. A opção de apresentar neste artigo uma síntese da realidade portuguesa no campo do ensino dos racionais e da investigação já desenvolvida nesta área, prendeu-se com o reconhecimento de que são urgentes mais estudos aprofundados que permitam perceber razões de insucesso dos nossos alunos e, por outro lado, perspectivar formas de apoiar os professores no ensino dos números racionais.

A aprendizagem dos aspectos formais do estudo das fracções e decimais provêm do ensino, nomeadamente a dos algoritmos das operações e das regras, onde, de um modo geral, a ênfase é bastante mais acentuada nos procedimentos do que nos conceitos e raramente se estabelecem "pontes" entre uns e outros. O facto de os alunos saberem operar com os símbolos, não significa que tenham compreendido os conceitos subjacentes

(Behr, Harel, Post, Lesh, 1993, Kieren, 1988, Lamon, 2001). O treino permite a alguns alunos respostas correctas a situações de cálculo rotineiro, o que pode criar a ilusão de que compreendem o que fazem. Por outro lado, há situações em que os alunos resolvem bem um problema com desenhos ou esquemas, mas que não conseguem resolvê-lo recorrendo a símbolos; é mais fácil para uma criança de 9 ou 10 anos perceber, numa primeira fase, que se come metade de uma piza e depois um quarto de piza, come três quatros de piza, do que perceber que $1/2 + 1/4$ representa $3/4$, desligado de contexto. Estes processos informais na resolução de problemas nem sempre são valorizados e incentivados pelos professores, nem tão pouco são tidos em conta na construção de uma ponte que os ligue aos símbolos convencionais. A relação entre estratégias informais de resolução de problemas e o uso por parte dos alunos dos símbolos e dos algoritmos tem sido objecto de atenção de autores como por exemplo Streefland (1986, 1991, 1997) e Nunes (1997). Hart (1981), citada por Keijzer (2003) considera que há uma distância enorme entre problemas em contextos significativos e a manipulação formal das fracções.

A investigação em educação matemática refere diversos obstáculos dos estudantes à aprendizagem das fracções assim como à manipulação dos respectivos símbolos (Behr, Harel Post e Lesh, 1983, 1992, Lamon, 2001,Wearne and Hilbert, 1988, Mack, 1993). Um dos aspectos mais realçados é o nível abstracto e mecanicista do ensino. Moss e Case (1999) examinaram vários estudos relativamente a dificuldades que os estudantes encontram na aprendizagem dos números racionais, quando submetidos aos usuais métodos de ensino e identificaram quatro aspectos principais: 1) Ênfase na sintaxe em detrimento da semântica, isto é o tempo dedicado ao treino de procedimentos é muito maior do que aquele dedicado ao desenvolvimento dos conceitos; 2) O ensino não ancora nas tentativas informais de resolução de tarefas por parte das crianças; 3) Nas diferentes representações dos números racionais não existe uma ênfase na diferenciação entre os números inteiros e os números não inteiros; 4) Os programas tratam as notações dos números racionais como algo que pode ser dado por definição.

Para além destes aspectos devidos ao ensino, há ainda obstáculos inerentes às próprias fracções em contexto escolar. Um deles pode ser o facto da sua representação implicar dois números. Muitos dos erros dos alunos no cálculo com fracções são devidos à dificuldade que têm de compreender que não estão perante dois números. Por exemplo, quando adicionam números representados por fracções adicionam os numeradores e os denominadores. Este erro é muito comum e persiste mesmo quando lhes é ensinado o algoritmo da adição. De facto, os números aparecem no 1º ciclo para a contagem e depois são usados no cálculo, identificando o cardinal de um conjunto de objectos. Desde cedo os alunos identificam o número inteiro que sucede a outro; no caso dos fraccionários isso já não é possível. A densidade dos racionais pode constituir uma dificuldade à sua compreensão. Com os números inteiros a multiplicação implica um produto maior do que os factores, assim como o resultado de uma divisão é sempre um número menor que o dividendo, o que nem sempre acontece com os racionais não inteiros. Não é fácil para uma criança submetida a um ensino mecanicista, perceber a razão porque $2 : 0,5 = 4$. Dickson, Brown, Gibson (1984) referem um estudo feito com alunos de 15 anos, onde só 35% resolvem correctamente $40 : 0,8$, sendo que 29% das respostas incorrectas apresentavam o resultado 5 ou $0,5$, evidenciando claramente a dificuldade em aceitar 50 como a resposta correcta.

Ainda relativamente à representação dos números fraccionários na forma de numeral decimal é vulgar encontrar alunos a referirem que $1,345$ é maior que $1,7$ dando como justificação o facto do primeiro ter "mais números" que o segundo, ou então porque 345 é maior que 7. A passagem dos números inteiros para os números fraccionários representa uma grande mudança conceptual (Hibert e Berh, 1988), sendo que a interferência dos números inteiros na conceptualização dos fraccionários, passa também pelas respectivas representações simbólicas, quer na forma de fracção quer na forma de numeral decimal. Estes aspectos nem sempre são reconhecidos pelos professores.

Os diferentes significados das fracções

As fracções podem representar números e relações entre números. Uma fracção pode representar uma *quantidade* (comi $3/5$ de um chocolate), as designadas quantidades extensivas, ou um *índice comparativo* (numa turma há 3 rapazes para cada 5 raparigas) que se representa também por $3/5$, estas classificadas como quantidades intensivas (Schwartz, 1988, Nunes, Campos, Magina e Bryant, 2005). As primeiras referem quantidades que derivam de actos de contagem ou de medida, e podem portanto adicionar-se, por exemplo, de acordo com as regras dos números racionais, de modo a gerar uma nova quantidade, as segundas sendo quantidades intensivas referem-se a relações entre números e não se podem adicionar seguindo a mesma regra. No primeiro caso o todo é igual à soma das partes, um quarto de piza adicionado com três quartos da mesma piza reproduzem a piza. No caso das quantidades intensivas a relação não é da mesma natureza, visto que se trata de comparar quantidades de natureza diferente. A velocidade como razão entre duas quantidades referentes a grandezas diferentes (distância e tempo) é uma quantidade intensiva. A razão preço /unidade é outro exemplo.

Um dos obstáculos inerente à aprendizagem das fracções pode prender-se com os diferentes significados para o símbolo a/b : Relação parte-todo, medida, quociente, operador e razão (por exemplo Behr, Harel, Post, e Lesh, R., 1992, Kieren, 1988).

O conjunto dos números racionais é estruturalmente um corpo ordenado onde existe uma partição em infinitas classes de equivalência, permitindo definir as fracções como elementos dessas classes. Cada uma das classes formadas por famílias de fracções equivalentes representa um número racional. No entanto, em contexto, as fracções assumem diferentes significados:

a) A relação entre a parte de um todo contínuo ou discreto, O símbolo a/b refere-se a uma parte fraccionada de uma só unidade (por exemplo um quinto de uma folha de papel está pintada, ou um quinto de uma colecção de 10 lápis são azuis, sendo o todo a folha de papel e a colecção de lápis respectivamente). A fracção aqui surge da comparação entre a parte e o todo, considerado este a unidade. O denominador indica o número de partes em que a unidade está dividida e o numerador o número de partes escolhidas;

b) O resultado da divisão entre dois números inteiros (com o denominador diferente de zero) em situações de partilha equitativa, quando a fracção a/b representa o quociente entre dois números, isto é uma relação entre duas quantidades, tendo ainda o significado de uma quantidade extensiva. Por exemplo 3/4, na situação "3 pizas a dividir por 4 crianças", representa a relação entre o número de pizas e o número de crianças, mas também representa o resultado dessa divisão — a quantidade de piza com que cada uma ficou;

c) A razão "parte-parte", isto é a relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo, por exemplo a razão entre o número de meninos e de meninas numa turma é de 3/2 — lê-se "é de 3 para 2" — quantidade intensiva;

d) A razão entre valores de duas grandezas diferentes, dando origem a uma nova grandeza, por exemplo a razão entre a distância e o tempo necessário para a percorrer — a velocidade — quantidade intensiva;

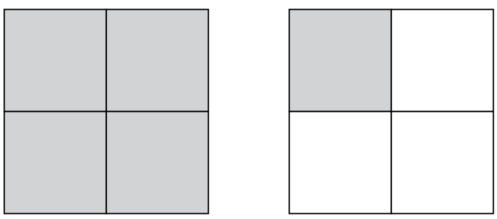
e) Operador partitivo e operador multiplicativo partitivo Neste caso a fracção a/b transforma o cardinal de um conjunto discreto (3/4 de 12 lápis são 9 lápis) ou, no caso de uma figura, tem o efeito de redução ou de ampliação;

f) A medida, onde se compara uma grandeza com outra tomada como unidade. O aluno terá de fraccionar a unidade de medida numa parte que esteja contida um número inteiro de vezes na quantidade a medir.

A fracção como relação entre a parte e o todo, aparece também nas situações didácticas de medida e nas situações de partilha equitativa visto que em ambos os casos se compara, depois do refinamento da unidade de medida e da situação de partilhar, uma parte fraccionada com um todo. Aliás, a relação da parte com o todo é uma relação inerente aos números fraccionários e que é fundamental ser realçada, seja qual for a situação didáctica, pois o "todo" traduz a unidade fraccionada.

No entanto, a abordagem didáctica às fracções exclusivamente através da "relação parte–todo" sendo aparentemente muito intuitiva, pode apresentar vários inconvenientes, entre eles o facto de os alunos confundirem a relação da parte com o todo, com a relação da parte com a outra parte. Por exemplo, há professores que se queixam que quando mostram 3/5 pintados de uma figura e perguntam que fracção está representada, pretendendo que os alunos respondam 3/5, alguns alunos respondem 3/2 evidenciando a relação entre as duas partes, a pintada e a não pintada.

Esta abordagem às fracções apresenta ainda o inconveniente de ser dificilmente percebida pelas crianças, quando se trata de uma fracção que representa um número maior do que a unidade. Por exemplo na figura seguinte, a parte sombreada da figura constituída por 2 unidades, 5/4, pode ser interpretada, como sendo 5/8.



Vizcarra, e Sallán, (2005) consideram a relação parte — todo, onde o professor apresenta uma unidade contínua já dividida, a fim de exemplificar uma fracção, uma abordagem situada na prática educativa, criada pela necessidade de abreviar o processo de ensino e que se revela eficaz a curto prazo, mas que restringe a concepção de fracção.

Streefland (1986, 1991, 1993, 1997) defende uma abordagem às fracções em contextos de partilha equitativa, partindo de situações inspiradas na realidade quotidiana das crianças, num processo construtivo de matematização. Esta abordagem permite ligar as fracções à divisão de números inteiros, evidenciando muito claramente o aspecto da quantidade extensiva das fracções, mas também o aspecto de relação entre duas grandezas da mesma espécie. Também neste tipo de contextos, mais facilmente se podem comparar quantidades representadas por fracções: Numa situação em que temos 3 pizas a repartir igualmente por 4 meninas e 6 pizas a repartir também igualmente por 8 meninos e se pergunta quem comeu mais, as meninas ou os meninos, através de esquemas, ou de uma tabela de razão, os alunos percebem que comem uma quantidade igual. A equivalência de fracções surge assim muito naturalmente (Monteiro, Pinto, Figueiredo, 2005).

Desde o 3º ano de escolaridade que as crianças resolvem problemas de partilha equitativa onde o dividendo aparece como o cardinal de um conjunto discreto, por exemplo numa situação de 10 bolachas a distribuir igualmente por 5 amigos, as crianças já familiarizadas com a notação da divisão, representam por $10 : 5$ e o resultado é o número 2. Se tiverem 11 bolachas podem obter o mesmo resultado e deixar de fora uma bolacha, que identificam com o resto da divisão, ou podem dividi-la em 5 partes iguais e dar mais um quinto de bolacha a cada um. As representações de $11 : 5$ como

$$2\frac{1}{5}$$

ou $2,2$ podem surgir, naturalmente logo no 1º ciclo, quando se trabalha a divisão. Mas não é necessário que a divisão seja trabalhada formalmente em primeiro lugar, para que os alunos de 8/9 anos possam resolver problemas onde as fracções surjam em contextos de partilha equitativa.

Como já foi referido as abordagens através da partilha equitativa ou da relação parte-todo, encontram-se de algum modo ligadas, quando após a partilha em partes iguais se relaciona a parte resultante com a unidade. Por exemplo se partilho 3 pizas por 4 pessoas na expressão

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4},$$

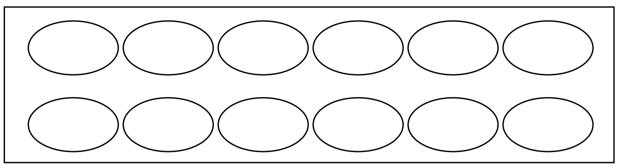
que pode ser uma das respostas dos alunos (Monteiro, Pinto, Figueiredo, 2005), eles identificam um quarto como uma das partes de uma piza dividida em quatro partes iguais. Aliás, em contextos da vida do dia a dia das crianças, a noção intuitiva de metade e da quarta parte surge muito cedo. Streefland (1986, 1991, 1993) considera as situações de partilha equitativa uma fonte natural e um ponto de partida para o ensino das fracções. De facto, partindo da razão entre duas quantidades numa situação de partilha equitativa, as fracções equivalentes aparecem a designar a mesma quantidade, relacionando-a com a quantidade inicial antes de ser fraccionada.

As fracções reflectem fenómenos de "fractura", assim como têm um carácter de razão e proporção (Kieren, 1988), sendo pois relações multiplicativas (Vergnaud, 1988). Estas duas dimensões da fracção enquanto elemento e enquanto relação proporcionam uma base para um conhecimento mais formal. Nas situações didácticas é importante a ênfase ser posta na fracção enquanto relação, o que nem sempre é feito, principalmente quando a abordagem é exclusivamente feita em situações de "parte – todo". Strefland, (1991) sustenta que, nestes casos, as crianças têm a impressão que calcular com fracções é o mesmo que calcular com números inteiros; quando se diz que dois quartos mais três quartos são cinco quartos, tal como dizemos 2 km mais 3 km são 5 km, retira-se a dimensão relacional da fracção.

A primeira abordagem às fracções através do refinamento da medida tem sido seguida por alguns autores como Keijzer (2003) que desenvolveu um estudo num contexto da Matemática Realista. Apesar de ter incluído também situações de partilha equitativa e de relação parte-todo deu ênfase à medida. Keijzer defende que esta abordagem prepara para a representação de números na linha numérica, evidenciando as fracções equivalentes, o que proporciona uma base para a adição e subtracção de racionais. Diversificar os contextos em que as fracções aparecem com diferentes significados é, de acordo com Kieren (1988), fundamental, pois é na síntese desses significados que o sentido do número racional se desenvolve.

O conceito de unidade na aprendizagem dos números fraccionários

Outra dificuldade da aprendizagem dos números racionais não inteiros prende-se com a conceptualização da unidade (Behr, Harel, Post e Lesh, 1992, Lamon, S., 2002). Se colocarmos a uma criança a questão: "A Joana gastou 1/3 da sua mesada em idas ao cinema e a Marta gastou 1/2 da sua mesada em idas ao cinema, quem gastou mais?", crianças habituadas a um ensino essencialmente virado para procedimentos, vão comparar as fracções 1/3 e 1/2, sem se preocuparem com as unidades de referência que podem ser diferentes. Também o facto das unidades serem contínuas ou discretas pode trazer perturbações se o professor não estiver atento a esta questão. Determinar a quarta parte de uma folha de papel ou a quarta parte de 8 lápis, implica que no segundo caso o resultado se represente por um número inteiro e no 1º caso isso não seja possível. Lamon (2002) analisa diferentes tipos de unidades, considerando unidades simples e unidades compostas. Por exemplo, 1 dúzia de ovos pode ser encarada como 2 meias dúzias, como 6 pares de ovos e ainda como 12 ovos.



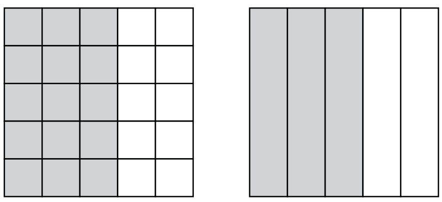
Também 1/2 de 60 minutos são 30 minutos, que por sua vez se pode representar por 1/2, se considerarmos a unidade uma hora. Streefland, (1991) refere o caso de uma aluna que, inicialmente tinha dificuldades em aceitar que uma unidade dividida em partes iguais pudesse ser representada por 1, preferindo representar por 4/4 ou por 8/8 visto que essa representação reflectia a divisão da unidade que tinha na altura.

No percurso do desenvolvimento do conhecimento matemático, nomeadamente na compreensão das fracções, a questão da unidade desempenha um papel fulcral, pois uma fracção tem sempre subjacente uma unidade. Desde as primeiras experiências de contagem (unidades simples) até às unidades como índices comparativos (por cada litro de tinta azul misturo 2 litros de tinta branca), passando pelas unidades compostas, são muitas as situações onde aparecem unidades de vários tipos. Por exemplo, quando o aluno é confrontado com o sistema de numeração decimal, a dezena, a centena, etc., são unidades de ordem diferente e que resultam de agrupamentos de unidades de outra ordem. Uma dezena é uma unidade composta de 10 unidades simples, a centena é ao mesmo tempo um grupo de 100 unidades simples e de 10 dezenas. A formação de unidades compostas a partir de outras unidades é um processo complexo, mas que é fundamental ser acentuado no ensino das fracções e dos decimais (Lamon, 2002). Também no sistema métrico os alunos se deparam com unidades que se formam a partir de outras, por exemplo a centésima parte do metro é o centímetro, que pode ser considerado por sua vez uma unidade ($0,02$ m onde a unidade é o metro, passa a 2 cm com a unidade o centímetro).

Experiências de reconstrução de unidades a partir de partes, revestem-se da maior importância, pois é no convívio com uma multiplicidade de unidades que o sentido do número e dos símbolos que o representam se vai desenvolvendo (Lamon, 2002).

Na multiplicação existe uma relação entre dois tipos de unidades. Se cada caixa de pacotes de leite tiver 12 pacotes, para calcular o número total de pacotes de 3 caixas, a criança tem de relacionar cada unidade (caixa — unidade composta) com o número de pacotes de leite de cada caixa (unidades simples). O estudo das estruturas multiplicativas tem como base conceptual a relação fixa entre duas variáveis como é o caso da correspondência "um-a-muitos" (Nunes, 2005).

Lamon, 2002, discute o modo como a partir do processo de "unitizing", isto é de se irem considerando várias partições de uma quantidade sem a alterar se pode trabalhar as fracções equivalentes de um modo muito significativo e sem recurso às regras. Por exemplo se considerarmos um quadrado dividido em 20 partes iguais podemos considerar vários tipos de relações, entre elas a seguinte:



$$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Este tipo de actividades, onde se reinterpreta uma situação em termos de diferentes unidades, possibilita o desenvolvimento de ideias matemáticas complexas.

As tabelas de razão na comparação de quantidades, favorecem também a re-conceptualização da unidade, permitindo respostas correctas a problemas que por vezes somente são resolvidos na escola elementar através de regras. Vejamos o caso do seguinte problema: Numa pizaria há uma mesa com 4 pizas para 5 pessoas e outra mesa com 5 pizas para 6 pessoas (tabela 1), em qual das mesas se come mais piza, se considerarmos uma partilha equitativa das pizas pelas pessoas?

Tabela 1.

MESA A			
Nº de pizas	4	8	**24**
Nº de pessoas	5	10	**30**
MESA B			
Nº de pizas	5	**25**	
Nº de pessoas	6	**30**	

A procura de um número de pessoas comum nas duas mesas, usando o factor multiplicativo *dentro* de cada grandeza (Vergnaud, 1988), permitiu a comparação da quantidade de piza para cada uma delas.

Percurso entre o informal e o formal

No processo do ensino e da aprendizagem, o modo como se desenvolvem os conceitos matemáticos e a sua relação com os símbolos, são questões fundamentais sendo particularmente pertinentes no caso dos racionais, (Vergnaud, 1988, Kieren, T., 1988, Mack, N., 1993).

O caminho entre a compreensão intuitiva, a capacidade de resolver situações informalmente mobilizando conhecimentos, e as representações simbólicas é um percurso não linear e que implica a vivência de experiências variadas, de modo a permitir um conjunto complexo de relações entre diferentes aspectos dos números racionais.

O desenvolvimento de um conceito (ou de uma teia de conceitos) tem de estar enraizado em situações concretas e provavelmente a ênfase não pode ser desde logo dada à notação simbólica e aos algoritmos. Se na situação de partilha equitativa de três pizas por quatro pessoas, uma criança escreve 3 fatias, referindo-se a três quartos de uma unidade e no desenho que faz evidencia que essas fatias são três quartos, porque não permitir que, numa primeira fase, resolva situações sem as notações simbólicas e se parta daí para a aprendizagem da notação convencional? Esta ligação entre as respostas informais das crianças na resolução de problemas e os símbolos convencionais vai permitir dar significado às diferentes representações dos números e pode ser feita com recurso à linguagem oral. Dizer "três quartos" faz uma ponte entre o desenho que o aluno fez e o símbolo apresentado pelo professor.

O desenvolvimento do conhecimento matemático parte do factual para a abstracção, usando os símbolos como ferramentas de pensamento, mas não existe um conhecimento conceptual, se este se processar somente a nível da manipulação simbólica (Nunes, 1997). Há alunos aplicados que conseguem memorizar todos os procedimentos dos algoritmos, resolvem correctamente longas expressões numéricas, mas não sabem mobilizar esse conhecimento para resolver problemas elementares (Wearne e Hibert, 1988).

Saxe, Taylor, McIntosh e Gearhart (2005) realizaram um estudo com 384 crianças, cujo principal foco era investigar como se desenvolvia a relação entre o uso da notação das fracções e a compreensão da relação parte – todo. Verificaram que de um modo geral a aprendizagem da notação convencional e a compreensão dos conceitos envolvidos foram adquiridos, mas de uma forma independente. Torna-se pois necessário perceber de que modo os símbolos podem interferir positiva ou negativamente no desenvolvimento dos conceitos, visto que é através deles que os entes matemáticos e as relações entre eles se expressam.

No percurso da aprendizagem dos conceitos, da resolução de situações e do uso dos símbolos, Vergnaud (1988, 1997) apresenta três conjuntos de aspectos: *o conjunto de situações* que tornam o conceito significativo para os alunos, *o conjunto de invariantes* que relacionam objectos, propriedades e evidenciam relações patentes nas situações e finalmente *o conjunto de símbolos* que são usados para representar os invariantes, as situações e os procedimentos para lidar com elas. Estes símbolos podem ser linguísticos, gráficos ou gestuais. Segundo Vergnaud, o conceito confunde-se com os dois últimos aspectos, isto é são dois aspectos do pensamento que interagem, a designação e o designado, mas sempre tendo as suas raízes em situações concretas. Os símbolos não se referem directamente à realidade mas sim aos entes matemáticos.

Uma ideia ainda deste autor e que permite perceber as situações didácticas é o que ele chama "teorema em acção" e que são relações usadas pelos estudantes quando escolhem uma operação ou uma sequência de operações para resolver um problema. A análise destes processos intuitivos usados pelos alunos permite por um lado ao professor transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explicito e por outro diagnosticar o que os alunos sabem e não sabem, de modo a oferecer-lhes experiências que lhes permitam consolidar e desenvolver a sua compreensão das ideias matemáticas (Verganud, 1988). A análise dos "teoremas em acção" permite assim aos professores ultrapassarem a lógica do certo e do errado e aproveitarem as diferentes estratégias dos alunos para, a partir delas, caminhar para a frente, isto é caminhar no sentido de relacionar a compreensão dos conceitos com a performance aritmética e o uso dos símbolos.

Outros autores se têm debruçado sobre a questão do formal e do informal na aprendizagem da matemática, por exemplo Kieren, (1988), desenvolveu um modelo de construção do conhecimento dos números racionais partindo do intuitivo para o formal e estabelecendo quatro níveis que apresenta figurativamente com quatro anéis incluídos uns nos outros. O nível mais elementar, o anel mais pequeno, é o nível *etnomatemático*, que no caso das fracções se refere ao conhecimento proveniente da vida das crianças e onde se usam as designações metade, a quarta parte, etc. O nível seguinte a que chama *intuitivo*, já é quase sempre adquirido na escola e envolve a conjugação deliberada da imagem, de mecanismos de pensamento e a utilização informal da linguagem. Esta linguagem informal de quartos, oitavos, etc. e que está associada a acções de divisão equitativa, permite ao aluno generalizar para objectos e acções mentais e "visualizar", por exemplo a centésima parte ou a divisão repetida de 2 unidades, sem estar na realidade a levar a cabo essas acções. O nível *técnico- simbólico*, refere-se ao conhecimento construído através do uso da linguagem e das notações convencionais e dos algoritmos. Este conhecimento para ser válido tem de ser referenciado a algo real ou então representar uma sequência lógica. Esta sequência lógica é validada no nível seguinte, o nível *axiomático*. Para Kieren um aluno para desenvolver o seu conhecimento dos números racionais tem de ser capaz de tomadas de decisão, e de resolver problemas, em cada um dos níveis, sendo provavelmente o último nível acessível a alunos de níveis de escolaridade mais avançados.

Analisando o processo de desenvolvimento do conhecimento matemático, Noss, (1997), destaca a perspectiva de Vigotsky, relacionando dois tipos de conhecimento, o "espontâneo" que é construído de baixo para cima, e o "científico" que é concebido de cima para baixo. Noss refere a tensão que existe na aprendizagem da matemática, se por um lado sem formalização não há significado matemático, por outro lado, sem significado não há matemática.

O movimento da Matemática Realista, que surgiu na Holanda no final dos anos sessenta dá destaque à matematização feita pelos alunos, a partir de resolução de problemas em contextos da realidade dos alunos. O "pai" da Educação Matemática Realista, Freundenthal, é citado por vários autores, por exemplo Gravemeijer, 1991, 1997, Treffers, 1991, De Lange, 1996, Streefland, 1986, 1991. Para Freundenthal, a matemática deve ser reinventada pelos alunos num processo de generalização e formalização progressivamente elaborado. O processo de matematização é pois um processo onde o conhecimento vai cada vez mais sendo formal e abstracto. Segundo estes autores, a matematização horizontal é a modelação da situação real através do uso dos símbolos, onde a ligação aos símbolos é muito visível, enquanto que a matematização vertical é o caminho "dentro" da própria matemática, não existindo no entanto, uma fronteira rígida ente as duas ideias (Gravemeijer, 1997). Na perspectiva da Matemática Realista, a aprendizagem é feita do ponto de vista da matematização, visto considerar as estratégias informais na resolução de situações como uma base para o processo do desenvolvimento de conceitos e de conexões entre eles. Estas situações significativas para os alunos funcionam como um paradigma envolvendo imagens onde as actividades abstractas devem ancorar (De Lange, 1996). Seguindo esta ideia, os professores deverão proporcionar situações de ensino que estimulem a modelação por parte das crianças como sejam os desenhos, diagramas, ou tabelas, podendo estes modelos dos alunos evoluir para modelos cada vez mais abstractos e relações mais formais.

Keijzer (2003) analisa os processos de matematização e considera os seguintes: *modelação, simbolização, generalização, formalização e abstracção.* Na modelação o aluno já não considera aspectos irrelevantes da situação e usa um modelo que a representa (por exemplo quando traça um círculo para representar uma piza). Ele actua no modelo como um objecto mental que lhe permite raciocinar sobre ele. Crianças numa fase inicial têm a necessidade de desenhar pormenores das figuras que querem representar. Depois, desprendem-se de detalhes e usam um esquema, ou um desenho despido de pormenores, que passa, nesta fase a ser um objecto de pensamento e que vai servir de trampolim para a fase seguinte, a *simbolização*. Agora o aluno usa a linguagem para se referir por exemplo à quarta parte de um chocolate ou a dois terços de uma piza. O denominador da fracção diz o número de partes em que a unidade está dividida e o numerador indica as partes consideradas. Os modelos e os símbolos permitem o pensamento reflexivo sobre a relação entre eles. No processo de *generalização* os símbolos são generalizados a vários contextos. Por exemplo, 2/3 de piza pode ser generalizado a outras situações em que a unidade está dividia em 3 partes iguais e se tomam duas delas. A *formalização* pode ser considerada uma extensão da *generalização* a regras ou a fórmulas. Os objectos sobre os quais se opera, já não são concretos, mas são números. No processo de *abstracção* o aluno percebe o que é invariante nas relações. Os processos de *generalização, formalização e de abstracção* não obedecem a uma hierarquia. O facto de no processo de formalização já se trabalhar com entes abstractos permite perceber que a abstracção pode preceder a formalização, (Keijzer, 2003).

As estratégias informais dos alunos não são o objectivo final do ensino da matemática, elas são o princípio (Dolk e Fosnot 2002). A questão está em perceber como podem os professores transformar essas estratégias em conhecimento formal e em compreensão dos conceitos envolvidos. O significado abstracto dos símbolos onde a matematização já não se baseia em imagens concretas, mas onde os símbolos se tornam objectos de pensamento e são eles mesmo imagens para níveis de compreensão mais abstractas, terá de passar pela vivência de várias e diversificadas experiências com situações da realidade das crianças e dos seus métodos informais de resolução (Streefland, 1991).

> "For bridging the gap between concrete and abstract they need to develop tools such as visual models, schemas, and diagrams. These are the vehicles of thought for students that enable them to enter mathematics and to make progress within it." Streefland, 1993, p. 289)

A aprendizagem dos números racionais no contexto das escolas e da investigação em Portugal

Em Portugal, a aprendizagem dos números racionais inicia-se com os números inteiros a partir dos 5, 6 anos, continua com os decimais nos 3º, 4º e 5º anos e só mais tarde com 10, 11 anos a grande maioria dos professores portugueses inicia o trabalho com fracções e com situações de proporcionalidade directa. É assim que consta dos programas (M.E., 1990) e dos manuais, apesar de no programa do 1º ciclo as fracções aparecerem como operadores aplicados a conjuntos discretos desde o 2º ano de escolaridade. É suposto então que as noções de "metade de ", "quarta parte de", "quinta parte de" etc., tenham sido trabalhadas e quando a décima é introduzida seja feita a relação com o operador

$(1/10)\times$, mas a nossa experiência no trabalho com professores, mostra que não é assim. A representação através do numeral decimal, 0,1, é a mais usada e raramente é feita a conexão entre as duas representações.

O significado da fracção como parte–todo é a abordagem inicial mais usada no ensino das fracções em Portugal. Uma análise aos manuais do 2º ciclo revela não só uma preferência por esta abordagem, como ainda a quase inexistência de outras. O professor apresenta aos alunos uma figura (um rectângulo ou um círculo) *já dividido* em parte iguais, onde se assinala uma parte delas e a fracção aparece como relação entre a parte seleccionada e a área total da figura. Apresenta-se então a fracção unitária $1/n$, onde n representa o número de partes em que a figura está dividida, seguindo-se as fracções m/n, com $m < n$. A fracção imprópria nem sempre aparece numa primeira fase, o que traz dificuldades quando mais tarde, aparecem fracções representando números maiores que 1. A representação destes números na forma de numeral misto é rara, prefere-se representar por exemplo 12/5 em vez de

$$2\frac{2}{5}$$

ou mesmo $2,4$ e nem sempre se realça a equivalência entre as várias representações para o mesmo número.

A abordagem através da partilha equitativa é pouco comum nos manuais portugueses e atendendo ao facto dos professores em geral seguirem os manuais para planificarem as suas lições, é provável que o mesmo se passe nas salas de aula.

Analisando os programas em vigor (ME, 1990, 1991), é suposto que no fim da escolaridade básica o conceito de número racional esteja interiorizado. No entanto o ensino dos números baseado em aspectos superficiais, como fazer "contas" ou resolver longas expressões numéricas, não valorizando abordagens conceptuais, pode ser motivo para o insucesso nesta parte da matemática escolar.

Apesar de os programas actuais realçarem a resolução de problemas, a característica predominantemente mecanicista de grande parte do nosso ensino dos números racionais não incentiva a resolução de problemas como ponto de partida para a exploração de conceitos, nem tão pouco as estratégias informais dos alunos onde estes por vezes se socorrem de esquemas e desenhos para resolver certas situações. O seguinte episódio ilustra este aspecto:

Numa situação de um teste de avaliação numa escola portuguesa, com alunos de 11 anos, foi dado o seguinte problema: "A Ana leva 3/4 de hora a colocar renda numa toalha. Quantas toalhas acaba num dia de trabalho, sabendo que trabalha 8 horas por dia". Este problema foi resolvido de várias maneiras, mas somente alguns o resolveram usando a operação divisão, $8 : 3/4$ e tendo efectuado o respectivo algoritmo para dar a resposta correcta, 10 toalhas, apesar de o resultado da divisão não ser 10 mas sim

$$10\frac{2}{3}.$$

A grande maioria dos alunos que resolveram o problema correctamente, fizeram esquemas que evidenciavam adições sucessivas de 3/4 de hora e contaram no fim por cada

3/4 de hora, uma toalha, tendo portanto respondido também correctamente. Feita uma análise conjunta com a professora do modo de resolver este problema, ela reconheceu, que foram os melhores alunos os que resolveram o problema usando a divisão e os símbolos matemáticos. Na verdade, eles tiveram de identificar a operação necessária para resolver a situação, traduzi-la por meio de simbologia adequada, resolver o algoritmo da divisão e dar a resposta correcta, avaliando a resposta como o número inteiro 10. Nos testes dos alunos que usaram a estratégia de adições sucessivas, a professora anotou "era mais fácil se tivesses feito

$$8 \div \frac{3}{4} = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3} = 10,6 \text{ ''}.$$

É interessante reflectir no facto da professora considerar mais fácil a estratégia mais formal. Para ela era evidente que o problema se devia resolver através da divisão (tinha sido o assunto tratado em aulas anteriores). Este incidente é revelador de como por vezes os professores explicam aos alunos as estratégias de resolução de acordo com os assuntos que estão a tratar, sem darem a oportunidade aos alunos de usar os seus "teoremas em acção" (Vergnaud, 1988) e partir deles para avançar.

De acordo com Streefland (1986), uma visão mais comum do ensino da matemática, e nomeadamente das fracções dá a ênfase à estrutura do sistema dos números racionais. Daí as operações aparecerem numa determinada hierarquia, e os algoritmos para comparar fracções e para a adição e multiplicação terem tanto peso nos currículos portugueses. O ensino demasiado estruturado dos racionais pode pois ser justificado por um exagerado apego aos racionais como uma estrutura algébrica bem definida. Portanto "as fracções são encaradas como um sistema matemático fechado que deve ser tornado acessível aos alunos" (Streefland, 1986, p. 69), cabendo então ao professor apresentar a Matemática aos alunos já pronta, em vez de se proporcionar oportunidades aos alunos de a "reinventar" (usando o termo de Freundenthal).

Investigação realizada em Portugal

Em Portugal a investigação no âmbito do ensino e da aprendizagem dos números racionais ainda é escassa e a que existe é relativamente recente. O Projecto Desenvolvimento do sentido do número: Perspectivas curriculares (2003-2007) envolve investigadores e professores e tem como objectivo estudar como se desenvolve o sentido do número dos 5 aos 12 anos, incluindo portanto alunos do 2º ciclo. Na vertente dos números racionais não inteiros, nomeadamente representados por fracções, pretende-se perceber como as crianças desenvolvem o sentido de número racional, tendo como primeira abordagem contextos de partilha equitativa e partindo das estratégias informais dos alunos na resolução de problemas, avaliando do ponto de vista do professor as vantagens desta abordagem relativamente às suas práticas anteriores. É ainda um dos objectivos deste projecto elaborar materiais de apoio para professores do ensino básico no âmbito do desenvolvimento do sentido do número racional, através do aperfeiçoamento das tarefas propostas e implementadas. Este estudo inspira-se no trabalho de Streefland (1991), tendo pois como contexto de trabalho em sala de aula aspectos realçados na Matemática Realista, nomeadamente as estratégias informais dos alunos na resolução de problemas serem ponto de partida para a matematização progressiva, e a realidade dos alunos ser fonte para a formação dos conceitos e também para a sua aplicação. É feita a conexão entre as diferentes representações, numeral decimal, fracção, representações e modelos criados pelos próprios alunos, como sejam diagramas, esquemas, etc.

Resultados preliminares deste projecto, ainda em curso, apontam para uma apropriação e compreensão progressiva dos símbolos convencionais, nomeadamente a representação na linha numérica de expressões numéricas onde intervém somas de números representados por fracções (Monteiro, Pinto, Figueiredo, 2005 e Monteiro, Pinto, 2006). O papel dos esquemas e desenhos que os alunos fizeram foi considerado fundamental, na medida em que as crianças puderam melhor entender a estrutura do problema e identificar estratégias convenientes para o resolver.

Uma outra investigação realizada por Alice Carvalho (2005) estudou o desenvolvimento do conceito de número racional em alunos do 4º ano de escolaridade. Neste estudo a autora implementou um conjunto de tarefas com o propósito de desenvolver o conceito de número racional, em contextos significativos, com fracções e decimais em simultâneo, e onde as fracções aparecem primeiramente na dimensão parte-todo com quantidades contínuas e discretas. Prosseguiu com problemas de partilha equitativa, de medida e finalmente de razão. Uma das questões deste estudo prendia-se com os diferentes modos de representação dos números e ideias matemáticas associados a problemas significativos para os alunos. Foi dada grande ênfase à linguagem oral e à manipulação de modelos físicos, tais como o material Cuisenaire e o MAB e ao modelo da linha numérica. Os resultados desta investigação evidenciam que as diferentes representações dos números permitiram ultrapassar certos equívocos, como por exemplo que um meio não se escrevia $1,2$. Nos problemas de partilha equitativa e nos problemas de razão os alunos mobilizaram o raciocínio multiplicativo lidando com unidades compostas e estabelecendo relações de equivalência.

Num outro estudo, Maria Helena Fernandes (1990) avaliou a eficácia de três métodos de ensino na aprendizagem do conceito de número racional: o método dos materiais manipulativos (MMM), onde os materiais eram integrados em actividades sequenciais programadas pelo professor, o método do computador (MMC), onde para além dos materiais os alunos usaram o computador inserido em sequencias de aprendizagem e o método tradicional (MT) com o professor a transmitir os conteúdos e os alunos a fazer exercícios de aplicação.

Apesar de ter verificado que o ensino foi eficaz com qualquer dos métodos, não foram encontradas diferenças significativas entre os métodos, quer ao nível da aprendizagem, quer ao nível da retenção do referido conceito, excepto quando comparou o MMM com o MT e o MMC com o MT, já que verificou que os alunos que tinham sido ensinados por recurso ao MT obtiveram melhores resultados ao nível da retenção dos conhecimentos. Segundo a autora estes resultados poderão ter ficado a dever-se a vários factores nomeadamente ao facto de 1) todos os grupos terem tido o mesmo número de sessões, tendo os alunos que seguiram o MT mais tempo para o estudo do conceito do que habitualmente lhe é dedicado, logo mais tempo para a realização de exercícios de aplicação 2) os alunos sujeitos ao MC trabalharem pela primeira vez com computadores tal como os alunos sujeitos ao MMM trabalharem pela primeira vez com materiais manipulativos, logo necessitando de tempo para se familiarizarem com estes materiais.

Isolina Oliveira (1994) tentou compreender como funciona o pensamento dos sujeitos, quando estes são postos a resolver situações ligadas à Matemática, em particular, aos números racionais. Mais especificamente teve como objectivos investigar a capacidade do(s) aluno(s) para compreender o conceito de fracção, o conceito de unidade em situações relativas aos números racionais, a adição de fracções, a noção de equivalência de fracções e ainda a capacidade para lidar com situações que envolvem o conceito de proporcionalidade. Verificou diferenças no desempenho das diversas componentes dos números racionais estudadas, que o conceito *ratio* funciona como um elemento discriminatório em termos de idade e que os contextos concretos das tarefas são facilitadores da resolução, fazendo emergir outras estratégias, relativamente aos contextos abstractos. Verificou ainda que os alunos com mau desempenho recorrem com maior frequência ao uso de materiais manipulativos e à representação gráfica do que os alunos com bom desempenho que preferem a representação matemática. Para Isolina Oliveira em termos gerais as principais dificuldades conceptuais observadas reenviam para: (1) a transposição de concepções sobre os números inteiros para os números racionais; (2) a incompreensão da relação parte – todo; (3) o não reconhecimento da unidade de referência; e (4) o não ter em conta o sentido da co-variação.

Numa outra investigação, Hélia Pinto (2004) avaliou a eficácia da Matemática Realista (MR) na aprendizagem e retenção dos números racionais a nível do 2º Ciclo do Ensino Básico, bem como na consecução de objectivos previamente seleccionados para as sessões experimentais. Para tal, comparou esta alternativa pedagógica com o Método Tradicional (MT) onde o ensino é uma transmissão de conhecimentos numa única direcção: professor → aluno. O professor selecciona determinados factos e conceitos, a partir de um corpo de conhecimentos bem estruturados para transmitir aos alunos. Este método realça a necessidade de proporcionar a estes os factos e a informação básica sem esperar que consigam pensar por si próprios. Têm de aprender o que lhes é transmitido antes de poderem emitir novas ideias que se ajustem ao conhecimento já existente neles.

Da análise dos resultados concluiu não haver diferenças estatisticamente significativas na aprendizagem/manipulação, bem como na retenção/interiorização dos números racionais entre os dois grupos, o que tinha sido ensinado por recurso à MR e o ensinado por recurso ao MT. Verificou no entanto, que a retenção/interiorização dos números racionais foi mais eficaz no grupo de alunos que foi ensinado por recurso à MR. No que respeita à consecução dos objectivos previamente seleccionados e considerados essenciais para a aprendizagem e retenção dos números racionais, verificou que a grande maioria dos alunos atingiu um elevado número destes em ambos os métodos. No entanto, o grupo de alunos que foi ensinado por recurso à MR apresentou mais facilidade na consecução dos objectivos que avaliavam uma efectiva aprendizagem e retenção dos números racionais. Para Hélia Pinto uma das dificuldades que pareceu existir no grupo de alunos que fez parte deste estudo, foi a de terem um papel activo, bem como a de contribuírem com as suas próprias construções e produções no processo de ensino/aprendizagem. Argumentando a favor de uma instrução caracterizada por um forte sentido de interacção, a autora sugere que se sensibilize os professores a adoptarem esta prática desde os primeiros anos de escolaridade. Sugere ainda que se estudem e se desenvolvam materiais, técnicas e processos adequados ao desenvolvimento de competências de cálculo e sentido do número no 1º Ciclo do Ensino Básico, de forma a permitir a interiorização de conceitos como: número inteiro, número decimal, operações com números inteiros e números decimais (adição, subtracção, multiplicação e divisão) e fracção, já que com este estudo lhe pareceu existirem, por parte dos alunos, grandes dificuldades na transição do conjunto dos números inteiros e decimais para as representações em forma de fracção do conjunto dos racionais.

Pistas para futuras investigações em Portugal

O facto dos currículos nacionais introduzirem os números fraccionários através da sua representação em numeral decimal no 3º ano de escolaridade, sem a conexão com as fracções (cujo ensino só é feito com crianças de 10 anos e no caso da razão e das proporções, somente aos 11 anos), pode ser um contexto favorável ao desenvolvimento de investigações no âmbito dos 1º e 2º ciclos do ensino básico. De facto é importante compreender causas de insucesso, que terão forçosamente particularidades relativamente a estudos internacionais nesta área, onde as fracções precedem os decimais, ou como no caso de Inglaterra onde as fracções, os decimais e as percentagens são trabalhadas em conjunto com crianças a partir dos sete anos.

O desenvolvimento do sentido do número racional necessita de tempo e de conexões entre as diferentes formas de representação (numerais decimais e fracções). O aspecto acentuadamente mecanicista e estruturalista do ensino da matemática e por outro lado, nalguns casos, o apego a um processo de ensino que se mantém no informal, não permitem à criança o percurso desejável entre as suas estratégias pessoais de resolução de problemas e o estabelecimento de relações e a formalização, fundamentais no conhecimento matemático. Como estabelecer esta ponte entre o informal e o formal e que tempo se deve dedicar a um e a outro, que percursos de vai e vem, são questões que alguns educadores matemáticos portugueses já fazem, muito pertinentes no caso da aprendizagem dos números racionais e que requerem mais investigação.

Bibliografia

Behr, M., J., Lesh, R. , Post, T, & Silver, E. A. (1983). Rational Number Concepts. R. Lesh & M. Landau (eds). Acquisition of Mathematical Concepts and processes. Axcademic. N.Y.

Behr, M., J., Harel, G., Post, T, & Lesh, R. (1992): Rational Number, Ratio, and Proportion. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan, N. Y.

Carvalho, A. M. S. (2005). O Desenvolvimento do Conceito de Número Racional em Alunos do 4º ano de Escolaridade. Tese de mestrado. Universidade de Lisboa.

De Lange, J. (1996). Using and applying Mathematics in Education. International Handbook of Mathematics Education, vol 1, pp. 49-98. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Dickson, L., Brown, M., Gibson, O., 1984. Children Learning Mathematics. A Teacher's Guide to Recent Research. Cassell. Great Britain.

Fernandes, M. (1990). Efeitos de três métodos de ensino na aprendizagem do conceito de número racional no segundo ciclo do ensino básico. Tese de mestrado, Universidade do Minho. Lisboa: APM.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). Developing Realistic Mathematics Education. Freudenthal Institute. Utrecht.

Gravemeijer, K. P. E. (1997). Mediating between concrete and abstract. Terezinha Nunes e Peter Bryant, *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective.* Psychology Press, Lda Publishers, UK.

Hibert, J. & Berhr, M. (1988). Introduction: Capturing the Major Thems. J. Hibert e M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades.* NCTM. Reston, VA.

Keijzer, R. (2003). Teaching formal mathematics in primary education — fraction learning as mathematising process. Freudenthal Institute. Utrecht.

Kieren, T. E:, (1988). Personal Knowledge of rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. J. Hibert e M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. NCTM. Reston, VA.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and Representing from Fractions to Rational Numbers. Cuoco, A. Curcio, F. (Eds): *The Roles of Representations in School Mathematics.* NCTM, 2001 yearbook, Reston VA.

Lamon, S. (2002). Part – Whole Comparisions with Unitizing. Em Litwiller, B. e Bright, G. (Eds): *Making Sense of fractions, Ratios, and Proportions.* NCTM, 2002 yearbook, Reston VA.

Mack Em, N., K. (1993). Learning Rational Numbers with Understanding: The Case of Informal Knowledge. Carpenter, T., Fennema, E., Romberg, T. (Eds): *Rational Numbers, An Integration fof Reasearch.* Laurence Erlbaum Associates. U.S.A.

ME (1990). Organização Curricular e Programas do 1º Ciclo do Ensino Básico. Ministério da Educação, DEB.

ME (1991). Organização Curricular e Programas do 2º Ciclo do Ensino Básico. Ministério da Educação, DEB.

Fosnot, C. T. E Dolk, M. (2002). Young Mathematicians at Work: Constructing Fractions and Percents. Heinemann, NH.

Monteiro, C. e Pinto, H., Figueiredo, N. (2005). As fracções e o desenvolvimento do sentido do número racional. *Educação e Matemática*, nº 85, pp.47-51. APM.

Monteiro, C. e Pinto, (2006). O sentido do número: o caso dos decimais e das fracções. Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A, Fonseca, L., Santos, L., Canavarro, P. (Eds.). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores.* Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção da Educação Matemática.

Moss, J., e Case, R. (1999). Developing children´s understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, vol. 30*, pp (122-147)

Noss, R. (1997). Meaning mathematically with computers. Terezinha Nunes e Peter Bryant, *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective.* Psychology Press, Lda Publishers, UK.

Nunes, T. (1997). Systems of Signs and Mathematical Reasoning. Terezinha Nunes e Peter Bryant, *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective.* Psychology Press, Lda Publishers, UK.

Nunes, T., Campos, T. M. M., Magina, S., Byant, P. (2005). Educação Matemática. Números e Operações Numéricas. Cortez Editora.

Oliveira, I. (1994). O conceito de número racional em alunos do 6º ano de escolaridade. Estratégias e dificuldades conceptuais. Tese de mestrado, I. S. P.A.. Lisboa: APM.

Pinto, H. (2004). Aprendizagem do conceito de número racional no 2º ciclo do ensino básico, no contexto da Matemática Realista. Tese de mestrado, Universidade Aberta.

Rational Number Project. `http://education.umn.edu/rationalnumberproject/`

Saxe, G.B., Taylor, E.V., McIntosh e Gearhart, M., (2005). Representing Fractions with Standard Notation. A Developmental Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol 36, nº2, pp.137-157.

Schwartz, J.L. (1988). Intensive quantity and referent Transforming Arithemetic Operations. J. Hibert e M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. NCTM. Reston, VA.

Streefland, (1986). Rational Analysis of realistic Mathmatics Education as a theorectical Source for Psychology. Fractions as a Paradigm. *European Journal of Psychology of Education*, Vol 1, nº2. pp 67-82.

Streefland, (1991). Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research. Kluwer Academic Publishers.

Streefland, (1993). Fractions. A Realistic Approach. Em Carpenter, T., Fennema, E., Romberg, T. (Eds): *Rational Numbers, An Integration for Reasearch.* Laurence Erlbaum Associates. U.S.A.

Streefland, (1997). Charming fractions or fractions being charmed? Terezinha Nunes e Peter Bryant, *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective.* Psychology Press, Lda Publishers, UK.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. Em *Realistic Mathematics Education in Primary School.* Freudenthal Institute. Holanda.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. Em J. Hibert e M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. NCTM. Reston, VA.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. Terezinha Nunes e Peter Bryant, *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective.* Psychology Press, Lda Publishers, UK.

Vizcarra, R.E. & Sallán, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión*, Nº1, (pp.17-35).

Wearne, D, & Hilbert, J.(1988). Em J. Hibert e M. Behr (Eds), Constructing and Using Meaning fo mathematica Symbols: The case of Decimal Fractions. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. NCTM. Reston, VA.

Resumo. Este artigo analisa aspectos do ensino e da aprendizagem dos números racionais. Identifica algumas dificuldades com que os alunos se deparam no desenvolvimento do sentido dos fraccionários, nomeadamente quando são representados por fracções. Analisa também diferentes tipos de unidades e a sua relevância na compreensão deste assunto. São discutidos aspectos relativos à passagem das estratégias informais dos alunos na resolução de problemas para a formalização. Apresenta-se ainda, neste âmbito, o contexto Português em relação ao currículo enunciado nos programas e ao currículo implementado. Finalmente faz-se uma referência a estudos, que nesta área, foram já desenvolvidos em Portugal.

Palavras-chave: Números racionais; Fracção; Estratégias informais; Símbolos e matematização.

Abstract. This article analyses some aspects of the teaching-learning process of rational numbers. It identifies difficulties faced by students concerning the rational number sense, mainly related to fractions. It discusses different kinds of units and its relevance for the understanding of rational numbers. It is also discussed children´s informal strategies and processes of formalisation. The Portuguese elementary curriculum and the implemented curriculum is discussed in terms of the aspects approached before, as well as portuguese research studies in this field.

Key-words: Rational numbers; Fractions; Informal strategies; symbols and mathematization.

CECÍLIA MONTEIRO
Escola Superior de Educação de Lisboa
ceciliam@eselx.ipl.pt

HÉLIA PINTO
Escola Superior de Educação de Leiria
hpinto@esel.ipleiria.pt