O conceito de ângulo:
experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo

Alexandra Gomes
CIFPEC/LIBEC
Instituto de Estudos da Criança — Universidade do Minho

Elfrida Ralha
Centro de Matemática
Dep. de Matemática — Universidade do Minho

Introdução

No percurso de construção do conhecimento matemático, os processos de definir e validar são, inquestionavelmente, peças básicas/estruturais do edifício matemático. Por outro lado, os conceitos matemáticos desempenham um papel crucial na construção desse conhecimento que, por sua vez, se adquire através de processos de indução, dedução e analogia.

De um ponto de vista da evolução, os conceitos matemáticos desenvolvem-se como objectos cognitivos e teórico-sociais, em confrontação directa com o ambiente social e material mas, ao contrário de outros conceitos construídos pelo Homem, os conceitos matemáticos não são, regra geral, passíveis de serem deduzidos a partir da sua forma ou do seu material. O significado dos conceitos matemáticos tem assim que ser construído pelo indivíduo em interacção com contextos baseados na experiência ou em referências abstractas. As definições são, neste sentido, centrais na descrição e na análise do ensino da Matemática e, por outro lado, a representação é um meio de ligação fundamental na codificação e na compreensão dos conceitos matemáticos.

Neste artigo propomo-nos tratar a noção de conceito matemático, dando especial relevo à sua classificação e à sua génese e detalhar o caso especial dos conceitos geométricos. Além disso, discutimos o papel desempenhado pelas definições, enquanto componentes fundamentais da actividade matemática, bem como as formas, gráficas e linguísticas, de representação dos conceitos.

Apresentamos ainda alguns resultados de um estudo mais alargado que envolveu estudantes universitários e futuros professores do 1.º ciclo do Ensino Básico assim como professores com mais e menos experiência profissional neste nível de ensino, tendo em vista identificar as suas concepções relativas ao conceito de ângulo.

Os conceitos matemáticos

Falar de conceitos e de aprendizagem de conceitos não é uma tarefa simples, mesmo quando os conceitos são apelidados de "elementares". Quando se tenta, em particular, esclarecer o significado do termo *conceito* várias são as definições dadas e nem todas são concordantes (Menchinskaya, 1969; Ausubel, Novak e Hanesian, 1980; Sowder, 1980; Piéron, citado em Fischbein, 1996).

Skemp (1971) assume que apesar do termo conceito ser largamente utilizado, não é fácil de definir nem uma definição directa é a melhor forma de entender o seu significado.

Na opinião de Fischbein (1993), o que caracteriza um conceito é o facto dele expressar uma ideia, uma representação ideal, geral de uma classe de objectos, baseada nas características comuns.

Por outro lado, é frequente verem-se os conceitos agrupados em categorias distintas. Uma das categorizações mais conhecidas divide os conceitos em *concretos* e *abstractos*: enquanto que os conceitos concretos se associam a exemplos físicos reais (mesa, cadeira, lápis), os conceitos abstractos, por oposição, não estão associados à realidade externa. Os conceitos matemáticos cabem sempre nesta última categoria, isto é, são conceitos abstractos.

No entanto, numa tradição que remonta à Grécia antiga, os conceitos matemáticos são muitas vezes descritos à custa de comparações/identificações com o "real". É bem conhecida a expressão "*a line is breadthless length*" (Euclides[1], Livro I, Definição 2) que surge frequentemente acompanhada por explicações tiradas da realidade.

O hábito de explicar em termos reais o que é indefinível introduz na Matemática um estilo semelhante ao das Ciências Naturais e pode induzir a ideia de se estar a tratar de conceitos empíricos. No entanto, na Matemática, contrariamente às ciências empíricas em que os conceitos tendem a aproximar uma dada realidade existente, *os conceitos são totalmente "controlados" pela sua definição*. O enriquecimento dos conceitos matemáticos relativamente à coerência, à clareza e ao rigor, bem como a criação de novos conceitos acontece, não em confrontação com a realidade mas analisando, melhorando e enriquecendo as suas fundações formais (Fischbein, 1996). Ainda que na Matemática, tal como nas ciências empíricas, se use a observação, a experimentação, a indução, as comparações e as generalizações, os objectos da investigação matemática são puramente mentais. As suas demonstrações são sempre de natureza lógica e nunca empírica (Fischbein, 1993).

Sobre a formação dos conceitos

Quando se faz investigação em ensino/aprendizagem de conceitos, mais importante do que saber o que significa conceito, ou como se define conceito, interessa porventura saber como se formam os conceitos.

Tall e Vinner (1981) utilizaram os termos "concept definition" e "concept image"[2] para distinguir respectivamente entre o significado de um conceito tal como é estabelecido pela comunidade científica e a interpretação subjectiva que o indivíduo tem do seu significado.

Os autores definem *imagem do conceito* como *a estrutura cognitiva que está associada ao conceito e que inclui todas as figuras mentais bem como todas as propriedades e os processos que lhe estão associados*. A imagem do conceito vai sendo construída e modificada pelo indivíduo ao longo dos anos através das suas experiências e maturação. Na opinião de Vinner (1997), a imagem do conceito surge na mente do indivíduo de modo intuitivo e como reacção ao nome do conceito. Essa intuição é imediata, espontânea e não utiliza processos analíticos sendo por isso, em muitos casos, enganosa.

Quanto à *definição do conceito* Tall e Vinner (ibidem) consideram ser *um conjunto de palavras usadas para especificar o conceito*. Ainda que a definição de um conceito possa ser fornecida ao indivíduo, ela pode também ser uma (re)construção pessoal. Ao expressar-se por palavras, a explicação da imagem do conceito evocada, constrói-se desta forma uma definição pessoal do conceito. Esta *definição pessoal pode diferir*, e em muitos casos difere, *da definição formal* que é aceite pela comunidade científica.

Tall (1991) conclui que:

> *"Our cognitive studies have shown the manifold differences between the formal definitions of concepts and the images we use in our minds to work with these concepts" (p. 252).*

Assim, não é de estranhar que indivíduos diferentes tenham por vezes diferentes entendimentos de um mesmo conceito.

O modelo exposto enfatiza o facto de que *as experiências* dos aprendizes e os exemplos de um conceito encontrados em contextos variados, incluindo a escola, *desempenham um importante papel na formação da imagem do conceito*. Muitas vezes os alunos são apenas confrontados com alguns (poucos) exemplos dos conceitos o que pode levar à construção de imagens incompletas e/ou incorrectas.

O caso particular dos conceitos geométricos

Os conceitos matemáticos são, como anteriormente referimos, construtos puramente mentais, isto é, os objectos aos quais a Matemática se refere — basicamente números e formas — não têm propriedades materiais. Um *ponto*, uma *linha*, uma *superfície* não existem, como tal, na realidade. Um *cilindro* ou uma *esfera* não têm propriedades materiais como peso, massa, densidade ou cor (Fischbein, 1996).

Os conceitos geométricos constituem no entanto uma situação especial. Fischbein (1993) identifica algumas propriedades que caracterizam as figuras geométricas e que estão relacionadas com a sua natureza conceptual:

i) Os objectos materiais — sólidos ou desenhos — são apenas modelos materializados das entidades mentais com as quais os matemáticos lidam.

ii) A perfeição absoluta das entidades geométricas só pode ser entendida no sentido conceptual.

iii) As entidades geométricas são apenas construções mentais e não têm uma genuína correspondência material.

iv) Todas as construções mentais são representações gerais, como cada conceito, e não cópias mentais de objectos concretos particulares. Quando se desenha uma figura particular ela pode representar a forma de uma classe infinita de objectos.

v) As propriedades das figuras são impostas por, ou derivadas de, definições no coração dentro de um dado sistema axiomático.

Pode assim dizer-se que, apesar das figuras geométricas possuírem qualidades conceptuais, elas reflectem também, na sua estrutura intrínseca, propriedades espaciais como forma, tamanho, posição. As figuras geométricas são entidades conceptuais sem deixarem de ser espaciais. Devido a esta natureza dual — figural e conceptual — Fischbein apelida as figuras geométricas de *figural concepts*[3].

O "conceito figurativo" é uma realidade mental, é o resultado do raciocínio matemático no domínio especificamente da Geometria.

Geralmente, o que sucede é que figuras e conceitos são considerados como diferentes categorias de entes mentais. Mas o que Fischbein (ibidem) assume é que *no caso especial do raciocínio geométrico se lida com objectos mentais que possuem simultaneamente propriedades conceptuais e figurativas*.

Esta fusão entre conceito e figura expressa um ideal, uma situação extrema, que normalmente não é atingida por causa de restrições psicológicas, nomeadamente: enquanto que a componente figurativa está geralmente influenciada por forças Gestalt, a componente conceptual está condicionada por falácias lógicas. O progresso no raciocínio geométrico acontece através da mudança das relações entre as componentes figurativas e conceptuais. Inicialmente as restrições Gestalt/figurativas são dominantes mas aos poucos o papel das restrições formais vai-se tornando mais importante. *Com a idade e por efeito da instrução, a relação entre as componentes figurativa e conceptual tende para a formação do conceito.* Note-se contudo que a componente figurativa nunca desaparece do raciocínio geométrico.

Uma ideia semelhante foi expressa por Tall e Vinner (1981), como já foi visto, na sua distinção entre "imagem do conceito" e "definição do conceito". Em Geometria o conceito figurativo ideal corresponde à definição do conceito enquanto que o seu reflexo mental com todas as conotações e ambiguidades corresponde à imagem do conceito (Fischbein, 1993).

As definições

Mariotti e Fischbein (1997) consideram que definir é uma componente básica do conhecimento geométrico e aprender a definir é um problema básico da educação matemática.

Já Poincaré se interrogava (1927, p. 123):

> "(Qu'est-ce qu'une bonne définition? Pour le philosophe, ou pour le savant, c'est une définition qui s'applique à tous les objets définis et ne s'applique qu'à eux ; c'est celle qui satisfait aux règles de la logique. Mais dans l'enseignement, ce n'est pas cela) ; une bonne définition, c'est celle qui est comprise par les élèves.".

Parece pois conveniente distinguir duas facetas da definição: a definição como componente fundamental da actividade matemática e a definição como parte do processo educativo. Neste trabalho iremos debruçar-nos apenas sobre a primeira faceta da definição.

O papel da definição na actividade matemática

Parece consensual o entendimento de que a definição desempenha um papel fundamental na actividade matemática.

De facto, entendendo a Matemática enquanto teoria dedutiva, ela começa exactamente com termos primitivos e axiomas e é a partir dos termos primitivos que todos os outros conceitos (noções) são definidos. Os teoremas são demonstrados a partir dos axiomas usando certas regras de inferência.

É normalmente através das definições que os objectos de uma teoria são introduzidos: *as definições exprimem as propriedades que caracterizam esses objectos e integram-nos na rede de relações já existente*; novas propriedades dos objectos definidos e novas relações entre eles e os objectos da teoria podem ser estabelecidos através do processo de dedução. Mas a sistematização teórica é apenas a fase final de um longo processo produtivo no qual *as definições resultam de negociações entre o rigor lógico e a criatividade* (Mariotti e Fischbein, 1997).

Winicki e Leikin (2000) enumeram alguns princípios lógicos, também referenciados por outros matemáticos, que devem ser considerados quando se define um conceito, nomeadamente

— Definir é dar um nome.

— Para definir um conceito novo só se podem usar conceitos previamente definidos (ou termos primitivos).

— Uma definição estabelece condições necessárias e suficientes para o conceito.

Cada conceito possui uma série de propriedades que constituem as condições necessárias desse conceito. Ao mesmo tempo há um conjunto de proposições que constituem condições suficientes, isto é, que diferenciam o conceito.

— O conjunto de condições de uma definição deve ser minimal.

Uma definição não deve conter informação supérflua, isto é, não deve conter partes que se possam deduzir das outras partes da definição.

— As definições são arbitrárias.

É possível estabelecer uma relação de equivalência entre as condições relacionadas com um dado conceito dando assim origem a uma classe de equivalência de definições. Ora cada uma dessas definições pode ser tomada arbitrariamente como a definição do conceito.

As representações

> *"Representar é uma forma importante de comunicar ideias matemáticas. (...) Representar envolve traduzir um problema ou uma ideia numa nova forma. (...) Representar inclui, também, a tradução dum diagrama ou dum modelo físico em símbolos ou palavras."* (NCTM, 1991, p. 34)

Segundo o Relatório Cockcroft (1982) *"a Matemática proporciona um meio de comunicação poderoso, conciso e carente de ambiguidade... que justifica a principal razão de ensinar Matemática a todos"*.

Ao servir de meio de comunicação e de estruturação do pensamento a Matemática pode, segundo Pimm (1987), ser vista como uma linguagem especial, uma metáfora.

Ora o ensino/aprendizagem dos conceitos matemáticos passa também pela utilização de uma linguagem específica entre as pessoas no sentido de clarificar o significado e a compreensão desses mesmos conceitos; a utilização da linguagem matemática dita simbólica permite, nomeadamente ao nível da álgebra, uma uniformização de comunicação que não se verifica nas línguas ditas maternas. No caso dos conceitos geométricos, que como foi referido, possuem uma natureza dual — figurativa e conceptual, recorre-se geralmente representações[4].

Representações gráficas

Sempre que se representa uma figura geométrica há perda de informação. Por um lado, numa representação não é possível mostrar todas as características da figura. Muitas das propriedades têm assim que ser reconstituídas. Essa reconstituição de significados faz-se graças à partilha da mesma cultura geométrica que se baseia muito no uso de arquétipos.

Por outro lado, certas figuras geométricas não são representáveis por serem, por exemplo, ilimitadas. Contudo, na prática convenciona-se usar uma parte limitada do todo o que por vezes pode causar ambiguidades.

Vladiminskii, citado em Clements e Battista (1992), concluiu que *os estudantes podem confundir características do diagrama com características essenciais da figura, introduzindo desse modo ideias irrelevantes no conceito*. Também Parzysz (1988) refere que os estudantes, na interpretação de diagramas, muitas vezes atribuem características do diagrama à figura geométrica que ele representa. Além disso, os estudantes não têm consciência de que os diagramas não representam toda a informação acerca do objecto representado e tentam desenhar diagramas que preservem quer a perspectiva quer o conhecimento que eles têm do objecto a ser representado, isto é, tentam preservar não só o que vêem mas também o que sabem.

Bishop (1987) refere que um dos problemas da Geometria é a impossibilidade de desenhar um diagrama generalizado: não é possível, por exemplo, desenhar um "triângulo qualquer" do mesmo modo que se representa um "número qualquer" pelo símbolo "x". Também Pimm (1995) diz que:

> *"Mathematicians* use *one diagram of a triangle on occasions to represent* all *triangles. This is reminiscent in algebra of the use of letters for* any *number,*

> *though one important difference is that a letter is not any particular number, whereas the drawn triangle used to represent all triangles can itself also be seen as a particular triangle."* (p. 58)

Apesar de não existir um diagrama generalizado para uma dada forma, há no entanto uma tendência generalizada para confiar em certos protótipos dos conceitos geométricos.

Representações linguísticas

A utilização da terminologia para representar noções geométricas também faz com que os problemas da linguagem matemática estejam presentes. Um dos problemas mais significativos relacionados com a terminologia em Matemática é o facto de que o significado de certas expressões em contexto matemático muitas vezes difere do significado em contextos do dia a dia. Por exemplo, o termo "diagonal" apresenta, como facilmente se constatará, significados distintos em linguagem corrente e terminologia matemática.

A maior parte das aulas de Matemática decorrem, segundo Pimm (1987), numa mistura de registos de linguagem matemática e corrente sendo que a falha em distinguir estes dois registos pode resultar em erros de incongruência e falhas de comunicação. Também Sierpinska (1994, p. 20) menciona:

> *"Ordinary words mean something different in mathematics. Yet, especially in the elementary school, they are used inadvertently by teachers as if there was nothing to explain. Children have to guess by themselves that a* big number *is not a number that is written with huge marks on paper, and a* low number *is not written on the bottom of the page. The* horizontal *and* vertical *refer not to directions in the surrounding space but to directions of the sheet of paper."*

Esta diferença de significados pode assim influenciar a compreensão matemática e causar frequentes confusões.

O estudo

O estudo que aqui se apresenta faz parte de uma investigação de carácter mais lato (Gomes, 2004) na qual se investigou o conhecimento matemático de professores do 1º ciclo em diversas fases de formação/profisionalização; nesse estudo alargado pudemos contar com a presença de 216 participantes divididos em dois grupos: 141 eram *estudantes universitários*, que frequentavam, em anos diversos, o curso de formação inicial de professores do 1.º ciclo e os restantes 75 eram já *professores* do 1.º ciclo inscritos em cursos de Complemento de Formação e com experiências profissionais diversificadas, quer ao nível da sua formação inicial, quer ao nível do tempo de profissionalização.

Metodologia

A *investigação* referida desenvolveu-se em diversas fases, com instrumentos de estudo diversificados e, no caso do presente artigo, recorreremos essencialmente a dados recolhidos em dois momentos sucessivos. No *1.º momento*, usou-se como instrumento de recolha de dados o inquérito, através da elaboração de um questionário escrito. Este questionário foi elaborado de forma a possibilitar a identificação de possíveis dificuldades/obstáculos na formação de conceitos geométricos e também a avaliação da imagem que os indivíduos possuem de certos conceitos geométricos, fundamentalmente através de duas características: a definição do conceito e a sua representação. No presente artigo alargamos a reflexão teórica sobre a formação de conceitos matemáticos/geométricos e seleccionámos duas questões do questionário inicial, que se relacionam com o conceito de ângulo.

As respostas foram classificadas em duas categorias opostas (ideal e errada) de acordo com o seguinte critério: uma resposta é considerada "ideal" se corresponde a uma resposta que se espera que os indivíduos, como (futuros) professores devam "oficialmente" apresentar e uma resposta é considerada "errada" se não é desejável que os indivíduos a forneçam em circunstância alguma e porventura ainda menos como (futuros) profissionais de ensino de Matemática. Esta classificação permitiu ordenar os indivíduos de acordo com o grau de concordância com o tipo de respostas considerado. Assim, foram seleccionados 32 indivíduos considerados representativos da população inicial os quais foram entrevistados (*2.º momento*) por forma a complementar e aprofundar a informação obtida.

Um conceito estudado: ângulo

O conceito de ângulo, como praticamente todos os conceitos matemáticos, é multifacetado: é, em particular, possível encontrar várias definições de ângulo, não só ao longo de textos históricos como numa consulta a diversos manuais escolares actuais. Tal facto não sendo invulgar também não surge frequentemente reconhecido de forma explícita, isto é, tanto quanto nos foi dado perceber no estudo que conduzimos, mas também em conversas informais que fomos mantendo com muitos outros intervenientes no processo de ensino/aprendizagem da Matemática, o actor comum (professores e alunos) no ensino/aprendizagem de Matemática não parece estar acostumado à constatação de que um mesmo conceito matemático pode ter, em manuais escolares da actualidade, definições distintas (trata-se, como vimos anteriormente, da arbitrariedade das definições). Assim:

(1) Para Euclides (Livro I, Definição 8), *"a plane angle is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line"*.

(2) No séc. XVII, os tratados de Arnaud e Bertrand (citados em Castelnuovo, 1947) apresentam como definição de ângulo *"parte do plano compreendida entre 2 semi--rectas com a mesma origem"*.

(3) Para A. Sannia e E. d'Ovídio, referidos em Calado (1955), *"o ângulo é uma rotação, operação que transforma uma semi-recta noutra semi-recta com a mesma origem"*.

(4) Hilbert (1952) define ângulo como: *"seja α um plano qualquer e sejam h, k duas semi-rectas quaisquer, diferentes, no plano α, que partem do ponto O e que pertencem a*

> *rectas* distintas. *Ao sistema destas semi-rectas h, k chamamos ângulo e representámo-lo por $\angle(h,k)$ ou por $\angle(k,h)$."*.

Ainda que todas estas definições possam ser, no âmbito da geometria dita elementar, consideradas, qualquer uma delas impõe limitações específicas ao conceito de ângulo. Por exemplo, a definição dada por Euclides não inclui os ângulos côncavos nem sequer o ângulo raso, enquanto que a definição de Hilbert também não inclui os ângulos côncavos. A definição de Arnaud e Bertrand coloca a questão de se saber que parte do plano considerar. Usando as palavras de Oliveira (1995):

> *"Qual seria? a "maior" ou a "mais pequena"? a que está "dentro" ou a que está "fora"? e o que é que estes termos "maior", "dentro", etc. significariam, se alguma coisa."*

Importa aqui registar que, apesar de todas estas indefinições, a definição de Arnaud e Bertrand é a definição tradicionalmente encontrada nos manuais escolares de Matemática do 1.º ciclo actuais (apesar de não ser possível encontrar uma definição explícita em quase nenhum desses manuais).

Mas no caso de se optar por definir ângulo como rotação há também várias situações possíveis. Qual a rotação que se deve considerar? Em que sentido é feita? Porquê?

Além disso, cada uma das definições dadas corresponde, na opinião de Mitchelmore e White (2000), a diferentes contextos físicos de ângulo. Assim, a definição de ângulo como rotação modela o contexto de "virar/girar", a definição de reunião de 2 semi-rectas modela o contexto de "intersecção" e a definição de região do plano modela o contexto de "canto".

Claro que qualquer uma das definições pode ser aplicada a diferentes contextos pois qualquer uma caracteriza o conceito de ângulo. No entanto,

> *"the fact that no one definition appears to match all physical angle contexts emphasises the difficulty of forming a general standard angle concept"* (Mitchelmore e White, ibidem, p. 218).

Parece-nos por isso essencial que os professores estejam conscientes das diferentes definições do conceito de ângulo e suas limitações, ou que pelo menos compreendam com rigor e profundidade as propriedades decorrentes de uma determinada definição/imagem do conceito. Só dessa forma estarão aptos para, de acordo com exigências oficiais patentes nos Programas, proporcionarem aos seus alunos actividades significativas que desenvolvam o conceito de ângulo de forma não limitada.

As perguntas

Como já foi referido, seleccionámos para este artigo duas perguntas do questionário geral que passámos aos participantes e que estão relacionadas com o conceito de ângulo.

Na primeira pergunta são dadas várias definições do conceito de ângulo e é pedido aos indivíduos que escolham a que consideram ser a mais adequada.

Das seguintes definições de *ângulo*, assinale a que considera mais adequada. Justifique a sua escolha.

1. Um ângulo é a mútua inclinação de duas linhas.
2. Um ângulo é uma rotação, operação que transforma uma semi-recta noutra semi-recta com a mesma origem.
3. Um ângulo é a figura formada pela reunião de duas semi-rectas distintas, não colineares e com a mesma origem.
4. Um ângulo é o espaço plano limitado por duas semi-rectas com a mesma origem.

Figura 1 — Pergunta 1

Com esta pergunta pretendia-se,

— Identificar a definição preferida pelos indivíduos;

— Identificar os motivos que levam à escolha de uma definição;

— Verificar se os indivíduos têm consciência das consequências da sua escolha;

— Avaliar o papel da memória na escolha da definição;

Consideramos ainda, que no caso da presente questão, não se consideraria nenhuma das definições dadas incorrectas e que a definição considerada como "ideal" seria a quarta, uma vez que, como afirmamos anteriormente, esta é a definição tradicionalmente encontrada nos manuais escolares de Matemática do 1.º ciclo actuais.

A segunda pergunta estava directamente relacionada com a anterior sendo importante, como já referimos, não confundir o ângulo — conceito figural — com a sua representação. Pretendemos com esta questão, adaptada de Fishbein (1993), sobretudo determinar se a representação visual estaria em concordância com a descrição verbal, isto é, se o "conceito domina a figura" e que relações existiriam entre essas duas componentes do conceito.

Quantos ângulos vê nas figuras 1*a)* e 1*b)*, respectivamente?

Figura 2 — Pergunta 2

Os principais objectivos desta pergunta são:

— Identificar relações entre a representação e a definição do conceito.

— Identificar relações entre a representação e a imagem do conceito.

Tendo em conta a resposta "ideal" à primeira pergunta, considerou-se como resposta "ideal" a esta pergunta a que identifique 2 ângulos na figura 1*a* e 4 ou 6 ângulos na figura 1*b*. Consideraram-se ainda "erradas" todas as outras respostas, à excepção da que identificava 1 ângulo na figura 1*a* e 3 ângulos na figura 1*b*.

Descrição e análise das respostas dos participantes

No que se segue serão apresentados os resultados obtidos nas duas perguntas do questionário e será feita a análise das respostas dadas pelos participantes quer no questionário, quer nas entrevistas.

Resultados do questionário:

Pergunta 1:
Mais de metade dos indivíduos escolheu a definição 4 (53,7%). Cerca de um quarto (26,4%) optou pela definição 3 e 15,3% pela definição 2. Apenas 4 alunos (1.8%) elegeram a definição 1 como a mais adequada, sendo que nenhum dos participantes professores escolheu a definição 1. As diferenças/semelhanças entre os dois grupos (alunos e professores) aparecem realçadas no gráfico seguinte:

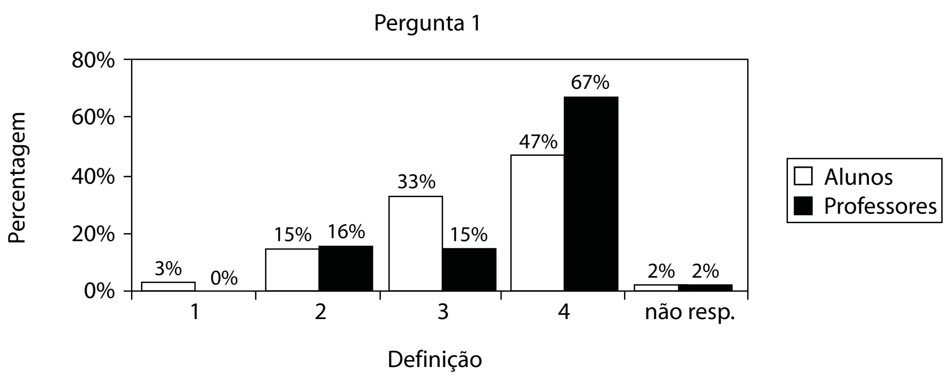

Gráfico 1 — Resultados da Pergunta 1

Estes resultados parecem-nos concordantes com o facto de a definição 4 ser a que é utilizada, no 1.º ciclo, como a definição de ângulo. Repare-se que, considerando apenas o universo dos professores, a percentagem dos que escolheram a definição 4 sobe para 66,7% o que parece indiciar alguma influência da sua experiência docente.

Estes resultados colocam-nos as seguintes reflexões:

Como já foi dito, quando se opta pela 4ª definição para o conceito de ângulo fica-se perante o problema de saber a que região plana se refere.

— Será que os sujeitos que escolheram esta definição estão conscientes deste problema? Qual é a região que consideram? Porquê?

A mesma ambiguidade parece existir quando se escolhe a 2ª definição.

— Será que os indivíduos que optaram por esta definição pensaram nestas questões? Qual foi a rotação escolhida?

Pergunta 2:
Quanto às respostas à segunda pergunta, a maior parte dos participantes identifica um ângulo na figura 1*a* e dois ou três ângulos na figura 1*b*. Um número significativo (32%) de alunos do 3.º ano vê dois ângulos na figura 1*a* e quatro ângulos na figura 1*b*.

As respostas obtidas parecem indicar que a maior parte dos participantes identifica apenas o(s) ângulo(s) convexo(s). No gráfico seguinte são apresentadas as percentagens das respostas dadas por cada grupo (alunos e professores):

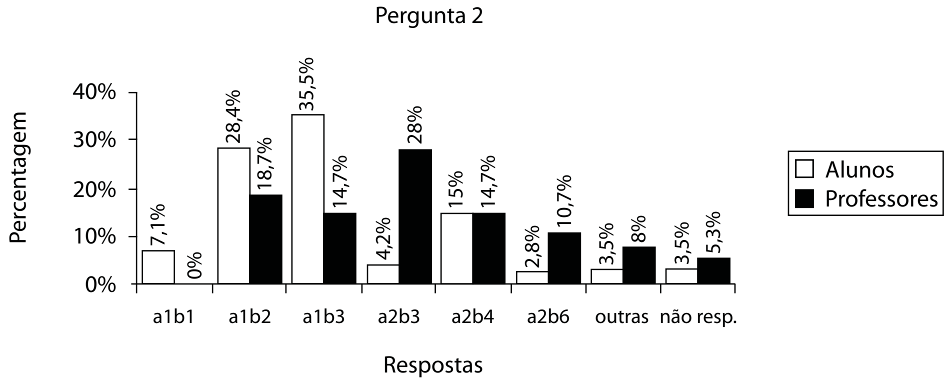

Gráfico 2 — Resultados da Pergunta 2

Nota: axby significa que o indivíduo vê *x* ângulos na figura *a* e *y* ângulos na figura *b*.

Análise das entrevistas

- Razões evocadas para a escolha feita

Pelas entrevistas efectuadas torna-se difícil perceber o que motivou a escolha de qualquer uma das três primeiras definições. Isto porque, dos indivíduos entrevistados apenas um aluno tinha escolhido a definição 1, duas alunas a definição 2 e nenhum escolheu a 3. Vejam-se as justificações dadas:

> MARIA (aluna): Eu nesta tive um bocadinho de dificuldade. Já não me lembrava da definição de ângulo. [pausa]

> Inv.: Mas porque é que optou por essa [1]? Porque é que achou que essa era a mais adequada?
>
> MARIA: Porque normalmente, a inclinação de 2 linhas dá sempre um ângulo, então foi a mais...embora eu também acho que estive em dúvida acho que foi com esta [2].
>
> Inv.: Poderia ser uma rotação?
>
> MARIA: Sim, acho que estive em dúvida entre estas duas.

> Inv.: Assinalou o ângulo como rotação, não justificou, pôs um ponto de interrogação.
>
> FÁTIMA (aluna): Porque ... por exemplo se me perguntasse assim: define ângulo, eu não era capaz de definir.
>
> Inv.: Ah, não era capaz de definir.
>
> FÁTIMA: Desenhava e dizia pronto é aquele movimentozinho, é aquela distância que existe de ... dizia mais ou menos assim. Já dada a definição, uma destas tinha que estar correcta, então escolhi a que para mim estaria mais correcta e não tinha como jus ... como é eu ia justificar? Porque pareceu-me ser a mais correcta. Acho que era assim ...

Pelos excertos apresentados pode constatar-se que as entrevistadas não têm ideias muito claras sobre a noção de ângulo.

Quanto à escolha da definição 4 os intervenientes no estudo parecem achar que esta é a definição "óbvia", como se pode constatar nos seguintes exemplos:

> LINA (aluna): Eu acho que não encontrei justificação, acho que é mesmo óbvio que um ângulo, que a definição seja aquela e então não consegui arranjar justificação. Não consegui explicar.

> Inv.: Escolheu a última mas não disse porquê (...) Porque é que escolheu essa?
>
> CARLA (aluna): Porque acho que é mesmo isso, não é?

Em alguns casos a opção por uma definição é feita por exclusão de partes, ou seja, apesar de não saberem exactamente porque fizeram determinada opção, estão convictos que as outras não poderiam ser. Considere-se o caso do Lino:

> LINO (professor): Não sei se a gente tem bem as noções correctas, não é, mas das "definições de ângulo assinale a que considera mais adequada. Justifique". Mas é que dá-me uma série de definições que a gente começa a ficar baralhada, percebe. "Um ângulo é a mútua inclinação de duas linhas", nunca tinha pensado nesse tipo de definição, nunca ouvi. "Um ângulo é uma rotação, ..., com a mesma origem", isso nós vimos depois, portanto a rotação, ..., mas aí eu estava a ver a linha, eu não escolhi esta por isto, a

> pensar por exemplo, ao transformar esta recta na rotação esta passa daqui para ali, entendo que já não está aqui.
>
> LINO: Portanto, já não forma um ângulo, embora haja uma rotação …
>
> Inv.: Mas o ângulo é exactamente a rotação.
>
> LINO: É a rotação, pois a rotação …
>
> LINO: (…) mas lá está a minha cabeça, estava a pensar se há uma rotação ele passou daqui para ali …
>
> LINO: Pronto, mas deixou a minha ideia, dá-me licença outra vez, a minha ideia é que para ter um ângulo tem que ter dois lados, e este lado ao passar para ali, há uma rotação mas deixa de haver um ângulo, deixo de ver o ângulo, percebe?
>
> Inv.: Então porque não escolheu a 3.ª ?
>
> LINO: A 3.ª "um ângulo é a figura formada pela reunião de 2 semi-rectas distintas, não colineares e com a mesma origem". Pois, se calhar achei mais complicada a definição …
>
> LINO: "Um ângulo é o espaço plano limitado por duas semi-rectas com a mesma origem". … Eu escolhia exactamente a mesma coisa.

Claro está que também há indivíduos que escolhem a definição à sorte, como por exemplo:

> GINA (professora): "Um ângulo é o espaço plano limitado por duas semi--rectas … com a mesma origem", "… é uma figura formada pela reunião de … ". Esta aqui acho que foi daquelas que pus assim olha vai aqui uma cruzinha que é para não dizer que não fiz.

- Imagem do conceito

Conforme já foi dito, quando se escolhe a definição 4 tem de se saber qual é o espaço (ângulo) considerado, já que as duas semi-rectas dividem o plano em duas regiões: uma interior[5] e outra exterior.

Alguns dos entrevistados que escolheram a definição 4 parecem assumir que o espaço mencionado corresponde à região interior, como se de uma convenção se tratasse. Muitos não colocam sequer a hipótese de poder ser outro. Vejam-se os seguintes exemplos:

> Inv.: Risque-me se faz favor aí, que espaço considera como ângulo?
>
> MARTA (aluna): [risca a parte convexa]
>
> Inv.: Esse aí. Porque é que não considera este aqui [côncavo]?
>
> MARTA: A noção que tenho de ângulo é este espaço aqui.

> ELSA (professora): (…) eu geralmente quando vejo o espaço que o ângulo ocupa, eu pelo menos tinha a noção que realmente era o espaço que estava

> limitado dentro, diria eu que era dentro, não é? Porque por exemplo, se eu tenho um campo [desenho], ou se eu tenho este espaço aqui é uma parte do ângulo, não é? Um campo não, como é que eu pensei ... é que isto às vezes uma pessoa vai buscar atrás .... Sim, mas se fosse por exemplo um canteiro assim, não é, este espaço aqui seria o ângulo, o espaço ocupado pelo canteiro, que estava limitado pelas semi-rectas. Agora realmente o espaço que está para aqui acho eu que já não pertencia ao espaço do ângulo mas ... não sei, se calhar está confuso.
>
> Inv.: Então, qual é que é o ângulo, ou seja, qual é que é o espaço plano que ficou limitado?
>
> LINA (aluna): Vai ser este [convexo] aqui.
>
> Inv.: Porque é que não é este aqui [côncavo]?
>
> LINA: Eu acho que se escolhe sempre o menor, não é?

Note-se que todos os professores entrevistados tinham optado pela escolha da quarta definição.

Também a opção pela definição 2 provoca alguma ambiguidade. No entanto os sujeitos parecem nunca ter pensado nisso. Uma das alunas, quando interrogada sobre qual a rotação que considera, responde:

> FÁTIMA (aluna): Não estou a perceber. Que ângulo é que eu vejo como?
>
> Inv.: Diz que é uma rotação. Diz que transforma uma semi-recta noutra semi-recta, ou seja, uma semi-recta é a origem e a outra é o transformado. Qual é qual?
>
> FÁTIMA: Como é que eu sei qual é o original, por assim dizer? .... Em principio ...
>
> (...)
>
> FÁTIMA: Nunca me tinham perguntado essa. E eu nunca tinha pensado que uma é original e outra ... porque é assim, eu escolhi esta, a reunião ..., não foi esta aqui, da rotação, porque sempre que se trabalha com ângulos, é com compassos, por exemplo. E o compasso roda, é uma rotação.

- Relação entre o conceito e a sua representação

Como defende Fischbein (1993), o ângulo é um "conceito figurativo", isto é, possui simultaneamente propriedades conceptuais e figurativas. Idealmente, a componente conceptual deveria controlar o significado e as propriedades da figura. Se isto acontecer os indivíduos serão capazes, por exemplo, de afirmar que as seguintes representações de ângulos, correspondem na verdade ao mesmo ângulo:

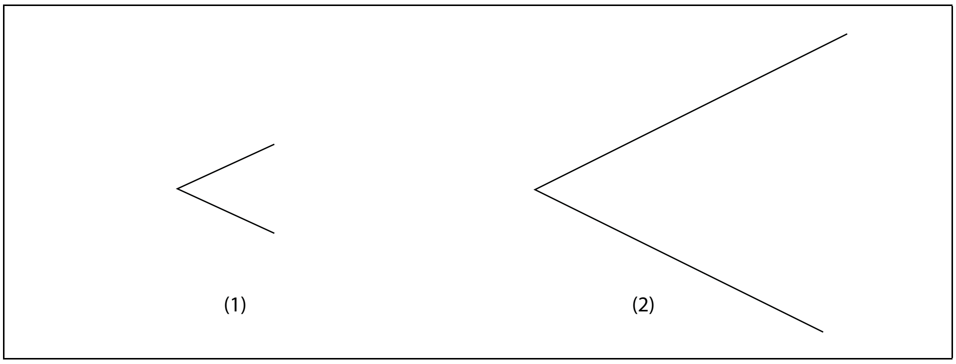

Figura 3 — Representação de ângulos

Os seguintes exemplos ilustram esta situação:

> EMA (aluna): Não, o ângulo tem a mesma amplitude. Depois é uma questão de prolongarmos ou não as extremidades da semi-recta, não é? Porque podemos transformar o ângulo mais pequeno, mais pequeno quer dizer, não me estou a contradizer, estou a pensar noutra coisa mas não devo estar a usar o termo correcto. Este ângulo (1), que à partida parece mais pequeno, podemos prolongar e obter o mesmo ângulo, que à partida parece maior.
>
> IRENE (professora): Não, são iguais.
>
> Inv.: Porque é que são iguais? Não tem mais espaço?
>
> IRENE: ... Tem, mas não é isso que se está a medir. O que se está a medir é a abertura. Elas continuam sempre com a mesma abertura.

Contudo, a fusão entre as componentes conceptual e figurativa do conceito é algo que nem sempre ocorre. Por vezes, os indivíduos revelam-se incapazes de ultrapassar as restrições impostas pela representação. Os exemplos seguintes mostram como a componente figurativa pode conduzir a uma noção errada de ângulo.

Quando se perguntou à aluna Marta qual dos dois ângulos atrás representados, (1) e (2), era o maior, ela respondeu:

> MARTA (aluna): Este (2) é o maior.
>
> Inv.: É este. Porquê?
>
> MARTA: Tem maior espaço ... As semi-rectas estão mais ... como é que se diz ... não sei as palavras ...
>
> Inv.: Mais abertas? Maiores?
>
> MARTA: Mais abertas.

Alguns dos entrevistados consideram ângulo como uma porção de espaço limitada (finita) pois quando representam um ângulo geralmente desenham-no assim:

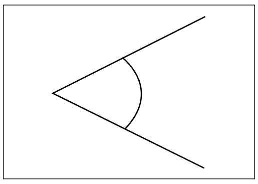

Figura 4 — Representação de um ângulo

Deste modo, os indivíduos consideram que se se alterar a posição do arco desenhado, também se altera o ângulo e a sua amplitude. Exemplos:

> CARLA (aluna): Na minha ideia o ângulo é esta parte aqui [traça arco] e não …
>
> Inv.: E então se eu resolver fazer aqui [um arco]? Já não é a mesma coisa? Já não é o mesmo ângulo? O que é que acha?
>
> (…)
>
> CARLA: Sinceramente, à primeira vista, olhando, parece que este é maior do que aquele, não é?
>
> CARLA: São diferentes.
>
> CARLA: O espaço que vai daqui aqui é diferente do que o que vai daqui aqui.

> PETRA (aluna): (…) eu acho que quando se pergunta o ângulo nós pomos aqui o transferidor e medimos esta aqui.
>
> Inv.: Deixe-me só clarificar então mais uma coisa. Quando eu dou um ângulo, se eu quiser que vocês meçam a amplitude eu tenho que dizer, tenho que desenhar algo, porque se eu desenhar isto aqui ou der um outro e desenhar aqui …
>
> PETRA: Aí, acho que vai ser diferente.

- Relação entre a representação do conceito e a sua definição

Na maior parte dos casos verificou-se que a representação está coerente com a definição escolhida. Os exemplos seguintes ilustram como dois indivíduos que escolheram definições diferentes vêem também um número diferente de ângulos nas duas figuras:

> O NUNO (aluno) optou pela definição 3 e afirma ver 1 ângulo na figura 1*a* e 3 ângulos na figura 1*b*.

> O BERTO (professor) optou pela definição 4 e vê 2 ângulos na figura 1*a* e 6 ângulos na figura 1*b*.

Note-se contudo que, no caso dos indivíduos que escolheram a definição 4, a situação mais frequente é eles verem 1 ângulo na figura 1*a* e 3 ângulos na figura 1*b*, já que, como foi referido atrás eles só consideram ângulos convexos.

Há contudo indivíduos que, apesar de escolherem uma determinada definição, não vêem a representação em sintonia com essa definição. Há um desajuste entre a definição escolhida e a representação do conceito. O exemplo seguinte mostra como uma aluna, a Carmo, optou por uma definição de ângulo que não coincide com a imagem que tem do conceito mas só se apercebeu disso quando confrontada com a representação do conceito:

> Inv.: (...) na figura 2a vê dois [ângulos]. Quais são os 2 que vê?
>
> CARMO (aluna): Vejo o de dentro e este de fora.
>
> Inv.: Pensa que isso está concordante com o que diz que é um ângulo? [Repare-se que esta aluna optou pela definição 3]
>
> CARMO: Sim, eu estava a pensar agora ... vendo o ângulo e ver o espaço que tem entre elas, é mais a ultima [definição].

- Questões de linguagem

Alguns indivíduos revelam desconhecimento do significado de certos termos matemáticos presentes nas definições o que os leva a tomar opções que por vezes não coincidem com a imagem que têm do conceito. Por exemplo:

> Inv.: Portanto temos aqui duas semi-rectas, qual é a reunião dessas duas semi-rectas?
>
> CARMO (aluna): Aqui dentro.
>
> Inv.: Isso não é reunião das semi-rectas. A reunião das semi-rectas são as próprias semi-rectas, é tudo o que faz parte das semi-rectas, isto é, a reunião de dois conjuntos, são os elementos que pertencem a um ou a outro conjunto .... Se vê isto aqui ...
>
> CARMO: Mas por exemplo, vendo também podemos considerar isto como fazendo parte da reunião delas. Se estamos a ver esta parte, porque não ver isto?

Este é apenas um exemplo mas o desconhecimento do significado de termos matemáticos é recorrente em quase todas as questões.

Além disso, os indivíduos utilizam termos incorrectos sem parecerem dar grande importância à utilização dos termos correctos e adequados:

> Inv.: O que é que é um ângulo?
>
> SOFIA (aluna): É a intersecção de duas semi-rectas.

Inv.: É a intersecção?
SOFIA: Sim.
(...)
Inv.: Qual é a intersecção destas duas [semi-rectas]?
SOFIA: É aqui no ponto.
Inv.: É só um ponto?
SOFIA: Sim.
Inv.: E só aquele ponto é que é o ângulo?
SOFIA: Então não é intersecção! ...Então é a reunião. Pois. Está certo.

Esta indiferença perante o rigor da linguagem matemática parece-nos preocupante pois, a reflectir-se na sala de aula pode levar a que as crianças, por um lado sintam confusão face ao significado dos termos e por outro fiquem com a sensação que o rigor é irrelevante.

Conclusão/Reflexão

Ao analisarmos as concepções que os participantes têm de conceitos básicos de geometria elementar deparamo-nos com um cenário preocupante. Com efeito, verificamos que os sujeitos revelam uma concepção no mínimo limitada do conceito estudado, que se baseia em exemplos prototípicos, quase nunca relacionada com uma definição rigorosa e por vezes pouco relacionada com a definição dada pelo próprio indivíduo. Aliás, a definição parece ter uma fraca influência na formação do conceito e pouca relação com a imagem que os participantes têm do conceito. Constatamos também que, o uso das representações (desenhos) parece limitar a imagem que os indivíduos formam do conceito. Notamos ainda uma certa indiferença pelo uso dos termos correctos, como se o uso rigoroso dos termos matemáticos fosse menosprezável no 1.º ciclo tratando-se, por isso, um tópico que não lhes diz respeito.

Observe-se que o exemplo escolhido — ângulo — é paradigmático porquanto ilustra uma prestação geral dos inquiridos, reveladora das concepções que os sujeitos têm de conceitos geométricos elementares e também do tipo de dificuldades que apresentam (sem que necessariamente as sintam) face à sua construção (ver, por exemplo, Gomes e Ralha, 2003).

Esta situação afigura-se como particularmente grave, uma vez que, sendo estes profissionais os responsáveis pela introdução dos conceitos matemáticos no ensino básico elementar, a ignorância revelada poder-se-á reflectir na sua prestação profissional e interferir de forma negativa nas suas aulas (como constatado por Gomes, 2004). Assim, ainda que estes participantes aspirem promover um ensino significativo/conceptual, na realidade não parecem estar em condições de o conseguir porquanto não apresentam os conhecimentos científicos suficientes/adequados dos conteúdos programáticos que têm de leccionar.

Seria porventura espectável que deles tivessem um conhecimento mais sólido, uma imagem mais clara, até porque, a elementaridade dos conceitos acarreta, por parte dos aprendizes, uma revisão sistemática ao longo do percurso escolar o que deveria, em teoria, conduzir à maturidade dos mesmos. Ora, no presente estudo, tal não foi observado tendo os participantes revelado não só um conhecimento imaturo dos conceitos elementares mas também falta de clareza na sua linha de raciocínio. Esta situação não é específica unicamente dos futuros professores (em formação inicial) mas também dos professores em exercício e experientes. Isto mostra, por um lado, que a formação inicial que está a ser fornecida a estes sujeitos não está muito provavelmente a ser a mais adequada e por outro lado, que a experiência profissional e a formação contínua também não parecem contribuir para uma compreensão mais profunda da matemática elementar (Gomes e Ralha, 2005). Parece-nos pois essencial reestruturar a formação destes profissionais no sentido de alterar a presente situação no que respeita ao conhecimento matemático dos (futuros) professores, nomeadamente, repensando as questões de natureza didáctica, não tanto a nível dos métodos de ensino/aprendizagem mas fundamentalmente ao nível dos conteúdos matemáticos. Por exemplo, parece-nos importante que durante a sua formação académica estes professores:

- sejam envolvidos em experiências específicas que explorem as interacções entre as definições e os objectos definidos;
- realizem análises matemáticas das definições de diferentes conceitos que incluam a decomposição nos seus elementos básicos;
- utilizem rigorosamente e de forma sistemática a linguagem matemática;
- procedam à revisão, consolidação e aprofundamento dos conhecimentos elementares, de um ponto de vista avançado.

Terminamos salientando uma preocupação que, na sequência desta investigação, não pudemos deixar de ter interiorizado porquanto:

— o professor do 1º ciclo desempenha um papel crucial na aprendizagem dos conceitos matemáticos, sendo o responsável pela criação dos ambientes que conduzem à formação das primeiras imagens dos conceitos matemáticos; e, no entanto,

— a formação destes profissionais, quer na vertente inicial quer na contínua, não parece englobar alguns dos ingredientes fundamentais de formação científica, já que não conseguindo colmatar as dificuldades cognitivas que, enquanto estudantes, evidenciam também não alerta/desperta para a possível criação de obstáculos didácticos de consequências incontroláveis.

Notas

[1] A versão de os *Elementos* de Euclides usada neste trabalho é a de Heath (1956).

[2] Neste trabalho serão usados os termos *"definição do conceito"* e *"imagem do conceito"* para traduzir *"concept definition"* e *"concept image"*, respectivamente.

[3] Ir-se-á utilizar a designação "conceito figurativo" para traduzir "figural concept".

[4] Neste trabalho irão ser adoptados os seguintes termos: *Figura* — para significar o objecto geométrico; *Diagrama* ou *desenho* — como sinónimo de uma representação bidimensional.

[5] *"O interior de um ângulo $\angle ABC$ é o conjunto de pontos que estão do mesmo lado de AB que C e do mesmo lado de BC que A"* (Oliveira, 1995, p. 136).

Referências

Ausubel D. P., Novak, J. D. e Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional.* Rio de Janeiro: Editora Interamericana Ltda.

Bishop, A. (1987). Quelques obstacles à l'apprentissage de la géométrie. In R. Morris (Ed.), *Études sur l'enseignement des mathématiques. L'enseignement de la géométrie*, Vol.5, (pp. 149-169). Paris: UNESCO.

Calado, J. J. G. (1955). Compêndio de trigonometria. Lisboa: Livraria Popular.

Castelnuovo, E. (1947). Um método activo no ensino da geometria intuitiva. *Gazeta de Matemática*, 33, 9-13.

Clements, D. H. e Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: MacMillan.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts* (report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in schools). London: Her Majesty Stationery Office.

Comiti, C e Ball, D. L. (1996). Preparing teachers to teach mathematics: a comparative perspective. In Alan J. Bishop, Ken Clements, Christine Keitel, Jeremy Kilpatrick e Colette Labord (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1123-1153). Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* 24, 139-162.

Fischbein, E. (1996). The psychological nature of concepts. In Helen Mansfield, Neil A. Pateman and Nadine Bednarz (Eds.), *Mathematics for tomorrow's young children* (pp. 102-119). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gomes, A. (2004). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em geometria* (tese de doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Gomes, A. e Ralha, E. (2003). Conceito de perpendicularidade: como é "visto" pelos (futuros) professores do 1.º ciclo. In *Actas do XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, Santarém, pp. 211-226.

Gomes, A. e Ralha, E. (2005). Sobre o Ensino Superior da Matemática: a geometria e os professores do 1.º ciclo. Novos desafios/Velhas deficiências. Boletim da SPM (aceite para publicação).

Heath, T. L. (1956). *Euclid, the thirteen books of The Elements*, Vols. I, II e III, 2nd Ed. New York: Dover Publications.

Hilbert, D. (1952). *Fundamentos da Geometria*. Lisboa: Instituto para a Alta Cultura.

Mariotti, M. e Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 219-248.

Menchinskaya, N. A. (1969). The psychology of mastering concepts. Fundamental problems and methods of research. In J. Kilpatrick e I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, Vol. I, (pp. 75-92). Chicago: University of Chicago.

Mitchelmore, M. e White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM/IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1989).

Oliveira, A. J. F. (1995). *Geometria Euclidiana*. Lisboa: Universidade Aberta.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational studies in Mathematics*, 22, 575-593.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms*. London: Routledge.

Poincaré, H. (1927). *Science et Méthode*. Paris: Ernest Flammarion, Editeur.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* Londres: The Falmer Press.

Skemp, R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Middleesex, U.K.: Penguin Books.

Sowder, L. K. (1980). Concept and principle learning. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*, (pp. 244-285). Reston, VA: NCTM.

Tall, D. (1991). Reflections. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall. D. e Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In David Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S. (1997). From intuition to inhibition — mathematics, education and other endangered species. In *Proceedings of PME 21 (Finland)*, vol. 1, pp. 63-78.

Winicki, G. e Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: part 1. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 17-21.

Resumo. Os conceitos matemáticos desempenham um papel crucial na construção do conhecimento, constituindo um dos alicerces do edifício matemático. Historicamente os conceitos matemáticos não surgem espontaneamente sendo o seu significado várias vezes alterado e refinado. Também não são, regra geral, fruto de um único contributo individual já que os simples actos de criação de notações, de terminologia ou de símbolos pressupõe um acordo entre os "utilizadores" desses conceitos. No entanto, uma vez criados, os conceitos matemáticos adquirem-se: ensinam-se e aprendem-se.

No presente artigo, reconstruímos teorias relativas aos conceitos matemáticos, em particular aos conceitos geométricos e explorámos o papel desempenhado quer pelas definições dos conceitos quer pelas suas representações.

Tomando como objecto exemplificativo de estudo o conceito de ângulo, questionámos 216 professores e futuros professores do 1º ciclo e analisámos as respostas apresentadas a duas questões (parte de um questionário) relacionadas com o conhecimento matemático envolvido nesse conceito.

Terminamos com algumas reflexões onde, a propósito dos resultados obtidos no estudo, questionamos, por um lado, o significado que esses profissionais extraíram da formação que receberam no decorrer dos seus percursos (académicos e experiências profissionais), sobre determinados conceitos matemáticos, vulgarmente denominados de "elementares"; por outro lado, questionamos ainda o grau de materacia efectiva destes professores e (futuros) professores, salientando a nossa preocupação/inquietação relativamente ao rigor do ensino da Matemática tal qual será conduzido por estes profissionais.

Palavras-chave: conceitos matemáticos; conceitos geométricos; definição do conceito; representação do conceito; imagem do conceito; professores do 1.º ciclo.

Abstract. Mathematical concepts perform a crucial role in the construction of mathematics, being the basis of the mathematical building. Historically, mathematical concepts are not spontaneous and their meaning is altered and refined several times. They aren't also produced by a single person since the process of creating notations, terms or symbols involves the agreement between the, so called, "users" of such concepts. Nevertheless, once formed, mathematical concepts are acquirable: they are taught and learned.

In this article, we rebuild theories related to mathematical concepts, especially geometrical ones and explore the role performed both by the definitions of the concepts and by their representations.

Considering the concept of angle as our object of study, we analyse the answers given by 216 (future) primary school teachers to two questions (part of a larger questionnaire) concerning the mathematical knowledge involved within that concept.

We shall end with some reflections where, based on the results of the study, we question, on the one hand, the meaning that these professionals got from the explanations they were given about "elementary" math concepts during their training and experience and, on the other hand, we question the degree of effective literacy of these (future) teachers, highlighting our concern related to the rigour of their teaching.

Key-words: mathematical concepts; geometrical concepts; concept definition; concept representation; concept image; primary school teachers.

▪▪▪

ALEXANDRA GOMES
CIFPEC/LIBEC
Instituto de Estudos da Criança — Universidade do Minho
`magomes@iec.uminho.pt`

ELFRIDA RALHA
Centro de Matemática
Dep.to de Matemática — Universidade do Minho
`eralha@math.uminho.pt`