

Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ciclo

Nuno Valério

ESE de Lisboa

Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º ciclo

Muitas vezes, para resolver problemas com que somos confrontados diariamente, recorremos a desenhos ou esquemas para apoiar o nosso pensamento. De facto, nem todas as pessoas realizam os mesmos algoritmos ou os mesmos tipos de representações externas para atingir os seus objectivos. Muitos utilizarão técnicas que aprenderam na sua vida académica e outros utilizarão processos menos formais e menos “standartizados”. Quando alguém resolve um determinado problema matemático, durante o processo e até se chegar a um resultado, algo se passa no cérebro. Se as pessoas recorrem à realização de representações para resolver problemas também o podem fazer como uma forma de chegar a uma solução ou de compreender aquilo que estão a fazer.

Na sala de aula, durante a resolução de problemas, alguns professores encorajam os seus alunos a fazer desenhos e esquemas ou a utilizar palavras como uma forma de melhor poderem compreender e obter uma solução. As representações dos alunos na área da Matemática têm vindo a ser cada vez mais objecto de estudo por parte de vários autores. Existe a ideia geral de que as representações são uma forma de registo que as crianças utilizam e que lhes são próprias, embora não se tratando de representações convencionais. Kalathil & Sherin (2000) afirmam que as representações dos alunos dão informação sobre o que este pensa, sobre o conhecimento que os alunos partilham e constroem, e servem de ferramenta para alunos e professores.

Segundo os Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) os programas devem proporcionar às crianças: a criação e uso de representações para organizar, reunir e comunicar ideias matemáticas; a selecção, aplicação, e transformação de representações matemáticas para a resolução de problemas, o uso de representações para modelar e interpretar fenómenos matemáticos, físicos e sociais.

Considere-se que o termo representação aqui expresso pelo NCTM refere-se aos processos e produtos que são observáveis externamente como ocorrências internas nas mentes das pessoas que fazem matemática.

Porém, no actual ensino da Matemática no 1º ciclo, nem sempre a atenção é muito centrada nas representações produzidas pelas crianças, inculcando-se formas de resolução de problemas rotineiros e dando-se mais ênfase à aprendizagem de processos formais em

que pouco se considera a evolução do pensamento da criança através dos seus próprios registos.

Tendo em conta que “os alunos realizam a maior parte da sua aprendizagem fazendo uso de métodos próprios” (Matos, 1994), é importante que as crianças tenham não só oportunidades para aprender formas convencionais de representações mas também construir e usar as suas próprias representações como ferramentas de apoio para a aprendizagem e para fazer matemática, como é referido nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000).

A partir destas afirmações, pensamos que “as crianças não só são capazes de desenvolver as suas próprias estratégias para realizar as tarefas da matemática escolar, mas também que cada criança tem de construir o seu próprio conhecimento matemático” (Yackel, Cobb, Wood, Wheatley e Merkel, 1991, p. 17).

Parte-se do princípio que o processo desenvolvido pelos alunos com essas representações poderá tornar a aprendizagem mais significativa para eles. Considerando que quando os alunos representam estão a exteriorizar aquilo que pensam e a forma como organizam essa informação, as representações dos alunos constituem um ponto de partida para a evolução e construção de conhecimento. Em defesa dessa opinião Sierpinska (1994) afirma que, “para muitos matemáticos e físicos, a possibilidade de matematizar parte da realidade é organizar a compreensão dessa realidade” e “sentimos que se compreende algo quando construímos um modelo matemático disso” (Pollock, citado por Sierpinska, p. 38).

Trata-se de permitir ao aluno ter um papel activo na sua aprendizagem onde ele seja o principal construtor do seu conhecimento. Numa sociedade com tantas mudanças tecnológicas ninguém se pode considerar educado. “Os estudantes devem aprender a aprender, mas também, estar preparados para a contínua necessidade de compreender” (Sierpinska, p. 27).

Se antes a matemática era vista como um produto, procura-se hoje dar maior ênfase ao processo de fazer matemática em que os alunos tenham uma profunda compreensão da sua matemática e sejam capazes de explicar e justificar os seus procedimentos (Gravemeijer, 1997).

Na abordagem sobre a resolução de problemas e desenvolvimento da capacidade de raciocínio, que o programa do 1º ciclo do Ensino Básico (1990) faz, é referido que é necessário o apoio “em materiais e linguagem gráfica que constituam uma ponte entre o real e as abstrações matemáticas” (p. 126). O mesmo documento faz alusão à dificuldade que os alunos têm na tradução da linguagem comum para a linguagem simbólica matemática, acrescentando que “a criação de sinais, desenhos e esquemas individuais constitui um suporte importante para a descoberta e construção pessoal de linguagens convencionais” (p. 131).

É objectivo deste estudo, perceber o papel das representações, que os alunos do 1º ciclo realizam quando resolvem problemas, na construção da sua compreensão matemática, nomeadamente, atendendo às seguintes questões:

- a) Haverá actividades privilegiadas que levem à evolução das representações?

- b) Os alunos apropriam-se dos seus próprios tipos de representação para resolver problemas?
- c) As representações informais dos alunos são uma ponte para a construção de representações formais?
- d) Que influências têm as interacções professor/alunos na construção das representações dos alunos?
- e) Que indicadores de construção da compreensão matemática podemos identificar durante a utilização de representações externas na resolução de problemas?

A compreensão

Segundo Sierpinska, autores como Piaget olharam a compreensão como estando ligada a uma acção prática. “Compreender uma acção é compreender porque funciona algo ou porque não funciona”. (p. 5). Outros autores no entanto, estabelecem uma relação com o conhecimento, como por exemplo Locke, para o qual “compreender é a fonte para o conhecimento, uma actividade da mente que produz conhecimento” (p. 41).

Sierpinska (1994) opõe-se a esta afirmação e afirma que a compreensão tem sido confundida com conhecer, argumentando que as instituições têm por norma a tendência de desenvolver o conhecimento em detrimento do pensamento. Acrescenta que o pensar e compreender têm sido esquecidos no ensino actual.

Não se tratando de conhecimento, esta autora refere-se ao termo compreensão em educação como, “uma actividade cognitiva que tem lugar após longos períodos de tempo” (p. 2). Usar-se-á então o termo, “processo de compreensão” no qual “actos de compreensão” são determinantes para um maior desenvolvimento. Por actos de compreensão a autora entende uma experiência mental que ocorre ao longo do tempo e que é muito rápida. A compreensão será então, algo potencial para experienciar um acto de compreensão quando necessário. No contexto do conhecimento, a compreensão será um recurso para o conhecimento.

A mesma autora faz também referência a objectos de compreensão em várias ocasiões considerando-os como aquilo que está a ser compreendido.

Durante a resolução de um problema será possível identificar possíveis processos ou etapas de compreensão ou então, inferir que se está a compreender. Para Hiebert e Carpenter (1992), como a compreensão se baseia em operações internas não pode ser observada directamente e como não é mensurável, terá que ser inferida pelo avaliador.

Greeno (1991) citado por Sierpinska (1994), refere-se à compreensão de um problema ao qual lhe corresponde um padrão. Consiste em reconhecer alguma similaridade com problemas resolvidos anteriormente. Isto permite o uso de um procedimento análogo para resolver o problema. Compreender o padrão deve provavelmente envolver uma generalização do problema, introdução de variáveis no lugar das indicações dadas e desconhecidas.

O objecto de compreensão pode ser um problema matemático verbal e no acto de compreensão pode reconhecer-se o problema como obedecendo a um determinado padrão de resolução já conhecido.

Durante a compreensão de um conceito possíveis indicações podem surgir, Sierpínska (1994) faz então duas considerações. Se o conceito for considerado como algo já existente e definido, com nome, relacionado e interpretado, compreendê-lo consistirá em analisar a sua definição ou a sua descrição, reconhecendo essas relações e interpretações. Mas pode ser também considerado como algo que representa o conceito que é generalizado e sintetizado no próprio conceito. Desta forma, o conceito só será formado no acto ou processo de compreender uma situação.

Mas será talvez através da comunicação que os principais indícios de compreensão são manifestados, ocupando então esta um papel central, uma vez que podem ser dados alguns indicadores sobre a opinião de alguém em relação ao que parece ter compreendido. Uma comunicação bem sucedida entre duas partes pode assumir o papel de “compreensão mútua” que poderá estar ao nível da empatia. Em algumas expressões, a compreensão pode estar implícita. Dizer-se “isto faz sentido para mim” pode ser substituído por “eu compreendo”. “Estou a ver como” (“seeing as”) ou “reconheço algo como” (“recognizing something as . . .”) dão conhecimento de um certo tipo de compreensão, podem descrever que tipo de conceito a pessoa pode ter sobre algo. Quando numa conversa se utiliza “estou a ver” (“I see”) referimo-nos provavelmente a um tipo interno de *seeing* (visualização) que alguém tem em mente.

Igual importância parecem ter os registos realizados durante a realização de problemas para se verificar a compreensão. Refere Greeno (1991) que uma “forma de verificar se duas pessoas estão a pensar sobre a mesma coisa é usar uma representação desses objectos: símbolos, diagramas, gráficos e talvez definições mais formais (se se tratar de objectos abstractos)” (Sierpínska, p. 12).

Sierpínska considera vários aspectos que indicam o quando se aprende. O primeiro desses aspectos será classificar, pôr em ordem, atribuindo nomes por exemplo. Isto acontece quando se identifica, por exemplo, com $y = 2x + 3$ uma função linear ou quando se identifica em que ano se aprendeu determinado conceito. Outro aspecto será encontrar um princípio unificador de pensamento, juntar como se de uma unidade se tratasse. Este aspecto pode ser importante para compreender conceitos mais abstractos, teoremas e teorias. Sierpínska (1994) refere-se a Pollak (1968) que defende que pensamos que percebemos algo se ocorrer a construção de um modelo matemático. É preciso chegar à essência das coisas, arrumar na memória os objectos de compreensão, analisá-los, decompô-los e recombiná-los.

Hiebert e Carpenter (1992) sugerem uma avaliação da compreensão. Argumentando que esta é bastante difícil, sugerem antes de mais, que os erros dos alunos fornecem uma perspectiva da compreensão, mas explicam que a ausência de erros não implica que a compreensão esteja presente.

Representações

O uso de Representações no ensino da Matemática tem ganho algum relevo nos últimos tempos e a sua importância tem sido reconhecida por parte de alguns autores. Como exemplo disso surgem as publicações do NCTM onde a sua importância é frequentemente posta em evidência fazendo referência à investigação recente que nessa área se tem realizado.

Sem existir grandes discrepâncias, vários autores da educação matemática têm tentado definir aquilo que consideram ser representações. Woleck (2001) como a maioria dos autores, refere-se às representações como um processo dinâmico. São ferramentas para articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios e não se tratando de produtos estáticos, capturam o processo de construir um conceito ou uma relação matemática. De acordo com esta opinião, o termo representações, como o NCTM (2000) o define refere-se pois, aos “processos e aos produtos, ou seja, ao acto de adquirir um conceito matemático ou uma relação de determinada forma ou na sua própria forma” (p. 66).

As representações são dotadas de várias propriedades por alguns autores, como é o caso de Dufour-Janvier, Bednarnz, Belanger (1987), segundo os quais, pensando em representações convencionais da matemática as representações são: a) parte inerente da matemática [certas representações estão tão associadas aos conceitos que é difícil ver como o conceito pode ser concebido sem elas, exemplos: funções e gráficos cartesianos; análise combinatória e árvores de hierarquia]; b) concretizações múltiplas de um conceito; c) usadas localmente para mitigar certas dificuldades; d) usadas para tornar a matemática mais atractiva e interessante.

Da análise da literatura existente verifica-se que as representações são consideradas de duas formas. Uma delas será a construção de representações pelo alunos: “O estudo das representações construídas pelos alunos deve dar-nos sugestões para formular representações alternativas para a aprendizagem de conceitos matemáticos.” (Dufour-Janvier, *et al*, p. 119) Em consonância com esta ideia, Goldin e Shteingold (2001) referem que a abordagem das representações das crianças deve ser introduzida o mais cedo possível no currículo.

Outra forma será, a apresentação de representações para serem usadas pelo professor e pelo aluno com o objectivo de construir conceitos: “Diagramas, gráficos e expressões simbólicas fazem parte do ensino da matemática, mas infelizmente essas representações, assim como outras, têm sido aprendidas e ensinadas como um fim” (NCTM, 2000, p. 66).

Como constata Janvier (1987a) do ponto de vista pedagógico muitos manuais apresentam uma grande variedade de diagramas e esquemas para promover a compreensão. Isto deve-se à ideia generalizada de que o uso do simbolismo no pensamento matemático é fundamental.

Dufour-Janvier *et al.* (1987) posicionam-se relativamente à forma como as representações surgem no ensino ao afirmar que, “nos métodos pedagógicos usados correntemente nas escolas as representações externas são impostas desde fora, e parece haver poucas oportunidades para as crianças construírem e explorarem as suas próprias repre-

representações matemáticas” (p. 119). Os únicos momentos em que as crianças podem construir representações parecem surgir no caso de problemas verbais nos quais as crianças são encorajadas com expressões do tipo “faz um desenho” ou “desenha e perceberás”.

A relação entre a existência de uma representação externa à qual corresponde uma representação interna, ou talvez mais, é bastante destacada. Citado por Janvier (1987b), Davis *et al.* (1982) explica que uma “representação deve ser a combinação de algo escrito no papel, algo existente na forma de objectos físicos e a construção cuidadosa de arranjos da ideia na mente de alguém” (p. 68). Janvier defende que abordagens verbais e de linguagem são igualmente predominantes porque constituem elos entre esses elementos.

Goldin (2002) acredita que é importante ter uma “maneira de tocar nas representações externas para descrever o que os alunos, professores ou matemáticos fazem internamente” (p. 208) e que “só podemos fazer inferências sobre as representações internas dos alunos através da produção de representações externas” (Goldin & Shteingold, 2001, p. 6).

Embora se tente estabelecer uma correspondência entre estes dois tipos de representações, será necessário fazer uma distinção entre elas. Dufour-Janvier *et al.* (1987) fazem-no do seguinte modo: 1) Representações internas estão mais ligadas a imagens mentais que correspondem a formulações internas que construímos da realidade (no domínio do significado); 2) Representações externas referem-se a todas as formulações simbólicas (símbolos, esquemas, diagramas, etc.) que tem como objectivo representar externamente uma certa “realidade” matemática (no domínio do significante).

Tentando isolar agora as representações externas, começemos por considerar sob a perspectiva de Lesh *et al.* (1987), que estas são a forma pelas quais uma ideia matemática pode ser comunicada e é apresentada sobre a forma de objectos físicos, desenhos, linguagem falada ou escrita com símbolos.

Para Mason (1987) e tal como Glasersfeld refere é mais indicado considerar as experiências internas como sendo o mundo da pessoa, e falar das suas manifestações externas (imagens, diagramas, palavras e símbolos) como uma apresentação do seu mundo. “Esta perspectiva enfatiza a importância de os alunos usarem e tornarem-se fluentes numa vasta variedade de modos para expressar a sua percepção como seja com diagramas, símbolos e metáforas” (p. 207).

As representações parecem fazer parte de uma possível transição que leve os alunos a aprender. Como Woleck (2001) refere, tal como os materiais manipulativos, as representações pictóricas servem como apoios para o pensamento, servindo à criança de passo intermédio numa tarefa sem ser “esmagado” pelo resto do problema. De acordo com os princípios da educação matemática realista, Meyer (2001) defende que os estudantes conseguem criar uma ponte entre o concreto e abstracto, com as suas criações e uso de modelos, desenhos, diagramas, tabelas ou notações simbólicas.

Em termos de aprendizagem e construção do pensamento, são os alunos que tendem a beneficiar com o uso de representações, mas também são dadas aos professores referências sobre o aluno:

As representações externas das crianças podem ser informativas de como eles percebem as situações problemáticas e podem dar ajudas para desenhar intervenções. A reconciliação entre os pontos de vista do aluno e professor serão então facilitadas e acreditamos realizadas. No entanto, este tipo de ensino será muito diferente do ensino tradicional porque requer uma mudança de atitude: melhor conhecimento das representações externas da criança, das concepções ligadas aos conceitos a que correspondem representações externas ligadas a uma certa realidade, dos obstáculos encontrados pela criança nas representações propostas por ela ou desenvolvidas, e um dinâmico conhecimento dessas representações, ou seja, como se envolvem com o significado. (Dufour-Janvier *et al.*, 1987, p. 120)

Mas antes de produzir símbolos, modelar e usar representações há que ter em conta o papel da aprendizagem em contexto. Goldin (2002) refere-se à contextualização como uma espécie de complemento para o processo de abstracção e para o poder matemático. Através da contextualização, os alunos aprendem a construir casos especiais, a ver o particular no geral, a movimentar-se pelo concreto numa nova situação representacional e a tomar esses passos espontânea e flexivelmente. Assim, para Goldin, a perspectiva das representações permite-nos ter a ideia que a matemática em contexto é oposto ao formal, à matemática abstracta. Com a abstracção, os alunos aprendem a generalizar, a ver o geral no particular, a movimentar-se desde detalhes não essenciais de situações representacionais concretos e a fazer isso espontânea e flexivelmente. Apesar da posição do autor parecer demasiado extrema, argumenta que os dois processos de representação, abstracção e contextualização, são complementares, devendo ambos ser desenvolvidos já que são essenciais para a profundidade da matemática.

Gravemeijer (1997) defende que o mais importante será a situação real que o problema representa. Embora os alunos não usem geralmente a situação real, o objectivo será resolver o problema de uma forma indirecta, através da imaginação da situação e imaginando que se age naquela situação. Este processo poderá ser facilitado sobre a forma de simbolizações ou modelações. Os modelos poderão então constituir uma ponte entre conhecimento informal e matemática formal. De acordo com este princípio estabelece-se então uma passagem entre o informal e o formal que Gravemeijer traduz pelos seguintes níveis: 1) nível das situações onde o domínio específico, o conhecimento situado e as estratégias são usadas no contexto da situação, geralmente em situações não escolares; 2) nível referencial, onde os modelos e estratégias se referem às situações inseridas nos problemas, apresentados geralmente na escola; 3) nível geral, onde uma abordagem em estratégias matemáticas dominam o contexto; 4) nível da aritmética formal no qual são usados procedimentos convencionais e notações matemáticas. Um modelo da situação que é familiar ao aluno será o ponto de partida que por um processo de generalização e formalização, se tornará numa entidade própria que poderá vir a ser usada como modelo de raciocínio matemático.

Em oposição ao desenvolvimento de um modelo Sierpinska (1994) fala de um tipo de representação ao qual denomina operacional, por se basear em certos tipos de es-

quem, acções e procedimentos. Quando um aluno vê uma equação sabe o que fazer mas pode não saber o que está a fazer, porque o faz, o que representa a equação ou a sua solução. Não se trata de uma imagem apenas mental nem apenas conceptual. Esses tipos de representações devem ter um componente conceptual porque servem para manipular objectos abstractos e símbolos e sem ele não chegarão a ser procedimentos. Pode no entanto dizer-se que esse componente conceptual é fraco se o pensamento apenas se dirige para a actividade mostrando como fazer. Será forte se tiver um esquema da actividade ainda que seja apenas verbalizado.

Representações e compreensão

A relação entre a compreensão e representações começa a ocupar lugar em vários documentos como já foi demonstrado por exemplo em *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). É aí referido que “a investigação indica que os alunos de todos os níveis precisam trabalhar desenvolvendo a compreensão das ideias complexas conseguidas em representações convencionais” (p. 67).

Segundo o mesmo documento, as representações terão um papel importante na compreensão dos alunos, ao permitir por um lado saber o que se passa a nível da compreensão dos alunos, “as formas como as ideias matemáticas são representadas são fundamentais para saber como as pessoas compreendem e usam essas ideias” (p. 68); por outro lado, ajudarão a construção da sua compreensão, “para ter um conhecimento mais profundo os alunos precisarão de uma variedade de representações que ajudem a sua compreensão” (p. 68).

Vários autores estabeleceram a relação entre compreender e representar, destacando pertinentemente a sua existência. Ajdukiewicz afirma que “um acto de compreender (uma expressão) é sempre baseado numa representação mental, sendo esta uma imagem mental ou conceptual” (Sierpiska, p. 49). Ainda Greeno e Hall (1997) referem que, “as representações devem ser consideradas como ferramentas utilitárias para construir a compreensão, para comunicar informação e para demonstrar raciocínio” (NCTM, 2000, p. 207).

Segundo Goldin e Shteingold (2001) as representações externas podem ser úteis, mas nem sempre uma grande capacidade para manipular expressões matemáticas e efectuar cálculos significa que haja compreensão matemática ou reconhecimento de estruturas ou que se seja capaz de interpretar resultados. Poderá ter havido mecanização sem a existência de muito desempenho conceptual.

Metodologia

Esta investigação foi conduzida com vista a estudar a construção/evolução de representações de alunos do 1º ciclo, quando realizam problemas matemáticos, dando enfoque à forma como essa construção se realiza através das interacções entre os alunos e o professor e sua influência na compreensão dos alunos.

Trata-se então de um estudo em que se consideraram várias situações pertencentes a determinado tipo de situações problemáticas. Pela necessidade de controlar a investigação focou-se a atenção em quatro alunos, no seu ambiente natural, neste caso a sala de aula, tirando partido de fontes múltiplas de evidência (Yin, 2003) como, documentos produzidos pelos alunos, gravações áudio e vídeo e observações efectuadas (notas do professor).

A investigação tem uma abordagem qualitativa na qual fiz a opção de o investigador ser o professor da turma já que considerei a minha própria prática na qual tento dar ênfase à resolução de problemas sem considerar procedimentos “standartizados” baseados em algoritmos.

Eu tive um papel determinante não só na recolha de dados, posterior interpretação e descrição como também no desenvolvimento da investigação. Neste estudo, uma parte da investigação incide sobre as minhas interacções com os alunos e condução das tarefas para a construção e desenvolvimento de representações e desta forma, a minha própria acção tornou-se objecto de análise.

O estudo decorreu, numa escola do 1º ciclo da Grande Lisboa, com uma turma de 2º e 3º ano, durante seis meses. A escola, situada num bairro considerado de classe média/alta, era no entanto, frequentada por alunos oriundos de bairros sociais e de bairros de lata. A população escolar tinha origem étnica bastante diversificada sendo o número de descendentes lusos muito reduzida.

Dos vários grupos existentes na turma, escolhi um para mais facilmente controlar a investigação. Era condição necessária que todos os alunos do grupo frequentassem o 3º ano de escolaridade, que fossem assíduos, problema este que era característica do grupo turma, que não tivessem qualquer tipo de conflitos e ser um grupo misto. A estas características uma principal surgia, que era o facto da inexistência de problemas de comunicação, ainda que, os alunos tivessem que recorrer a desenhos e gestos para explicitar o que pretendiam dizer.

Por estas razões escolheu-se o grupo formado por 4 alunos que designaremos por Quinjal (Q; de etnia indiana; com os colegas, em casa ou na escola falava gujarati; tinha dificuldade na expressão escrita e oral), Sara e Ricardo (S/R; de etnia lusa, não tinha dificuldades de expressão oral ou escrita), Marina (M; de ascendência cabo-verdiana; falava crioulo em casa, embora tentasse constantemente melhorar o domínio da língua portuguesa).

As tarefas foram introduzidas sempre que se iniciava ou se abordava o conteúdo programático e foram apresentadas aos alunos de forma não linear tentando evitar que actividades semelhantes se realizassem consecutivamente. Existiu também a preocupação de que todas as tarefas de cada bloco tivessem a possibilidade de se resolver segundo processos semelhantes, para analisar a evolução nos processos dos alunos.

Os documentos produzidos pelos alunos tiveram um papel central e foram considerados como ilustração das transcrições das aulas. Foram também analisados independentemente enquanto partes do processo da construção de representações.

É de realçar que o grupo foi considerado principalmente para o estudo das interacções que se desenrolam na produção e construção de representações, mas que na pro-

dução de representações todos os elementos do grupo assumiram geralmente um papel de unidade, daí serem analisadas as representações só por si em vez de se considerarem como produções de alunos individualmente.

Para analisar as representações dos alunos, tive em conta alguns aspectos que de acordo com Gravenmeijer (1997) e a Matemática Realista fazem referência à passagem de conhecimento informal para a matemática formal através de níveis, e inclui os termos representações informais e formais. Representações formais referem-se às notações e procedimentos da aritmética formal; as informais referem-se a todo o tipo de representações que os alunos utilizam antes da utilização da aritmética formal e incluem desenhos, escrita verbal e esquemas entre outros.

Na investigação realizada foram propostas aos alunos e analisadas as respectivas resoluções de várias tarefas agrupadas em quatro grupos: tarefas aditivas regulares, tarefas aditivas irregulares, tarefas de divisão descontínua e tarefas de divisão contínua (Valério, 2004). Dadas as limitações deste artigo vou concentrar-me apenas em dois tipos dessas tarefas.

O exemplo das tarefas aditivas regulares*

De seguida, apresenta-se um exemplo da forma como decorreu a investigação utilizando as tarefas aditivas regulares que foram propostas aos alunos.

Um caracol sobe um muro com 10 metros de altura. Em cada dia sobe 2 metros, mas de noite deixa-se escorregar 1 metro. Ao fim de quantos dias chega o caracol ao cimo do muro?

Sem tentar qualquer processo de resolução a Marina e a Sara vão dizendo possíveis resultados pouco reflectidos que rapidamente deixam de ser considerados por elas e pelo grupo. Quase em simultâneo vão fazendo afirmações que me levam a acreditar que estão a tentar compreender o enunciado do problema:

Q — Ainda estou a pensar

S — Eu não percebi muito bem

S — O caracol sobe um muro de 10m, certo? Altura! Certo?

S — Em cada dia sobe 2 m?

M — São 12 dias

S — Em cada noite ele cai 1.

A discussão sobre a forma como pensam resolver o problema parece ter um papel importante no grupo. A Marina sugere que se efectuem algoritmos, a Quinjal não aceita. Surgem os primeiros esquemas na folha da Sara o que me leva a sugerir que utilizem

*Designei-as por tarefas que envolvem um processo de adição e/ou subtracção com repetição de quantidades iguais.

esses desenhos e esquemas. Embora nesse registo o desenho tenha bastantes pormenores desprezando os dados do problema, o grupo aceita a proposta.

A primeira estratégia de resolução surge por parte da Sara que elabora cálculos simples e repetitivos, sempre $2 - 1 = 1$, ao lado de um segmento de recta com um caracol (figura 1).

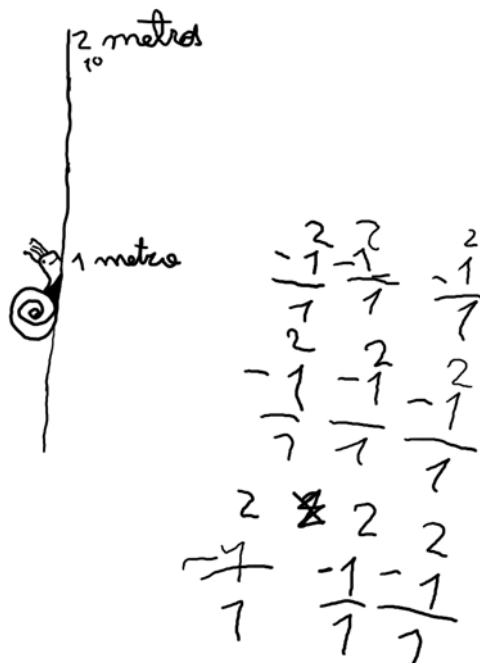


Figura 1. Esquema da Sara (1)

Surgem vários momentos de diálogo entre mim e os alunos com questões que decidi formular pondo em causa os resultados obtidos e tentando fazer pontos da situação.

A Sara explica aos restantes colegas a forma como chegou a um resultado:

S — A mim já foram 1,2,3,4, ... 5 dias!

Q — Estás a fazer como?

M — (apontando para o esquema, figura 2) Olha, ele sobe 2m, depois cai 1, outra vez 1m, depois sobe mais 2 e cai 1. então 1 e 1 já vão 2

S — Já vão 2 dias ...

M — Sim 2 dias. Eu quero fazer outra vez neste. (A Marina utiliza sempre o esquema e abandona os cálculos que entende serem insuficientes)

S — Então, sobe 2m, desce 1. sim certo! Vai dar 10. ele chega aqui ... já cheguei a 6 dias. Sobe 2, à noite cai 1, ...

Pareceu-me apropriado sugerir que se escrevessem os dias ao longo da recta. Isto parece ter levado a Marina a fazer as primeiras contagens utilizando a recta (figura 2). O grupo passa a fazer as mesmas contagens que a Marina.

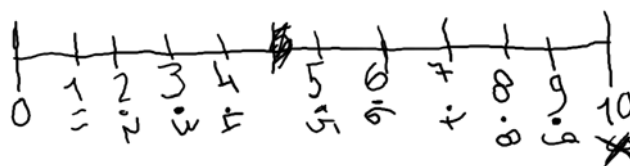


Figura 2. Esquema da Marina (1)

Surge a seguinte conversa sobre a contagem realizada:

Q — Espera aí. Tem o zero(começa a contar)

M — Fala alto e conta ...

Q — Começa no zero?

P — Sim, só quando chegar ao 1 é que tem 1!

M — Professor! São 8 são! Sim!

P — Explica então.

M — É igual à Sara ... do zero foi para o 2, depois cai 1, do 1 vai ao 3.

S — A mim já me deu outra coisa. Acho que cheguei a outra conclusão.

P — Então, onde é que te enganaste?

Q — À mesma dá 10!

M — Dá 9!

Após as alunas terem chegado a resultados diferentes ao repetirem as questões, o consenso parece demorar pelo que eu, decido intervir colocando questões que ajudem os alunos a recapitular o processo:

P — E agora o caracol chegou ao fim do muro, como é que pensaste?

S — (utilizando o desenho do Ricardo recapitula — igual ao da figura 2) desce 1, vai ao 1, ... 2 ... 1 ... 2 ... 1. Tá no 4 ... do 4 vai ao 6 e desce 1, 5, 5 ao 7 e desce 1, do 6 ao ... 7 ao 9 ... desce 1, 8 dias do 8 ao 10! Já chegou.

P — Já não escorrega, já chegou ... então ... quantos dias demorou?

Q — 8!

P — 8 estava antes de subir. Ficou com quantos?

M — Vês como dava 9?

Foi necessário recorrer ao esquema de um dos alunos (igual ao da figura 2) e foi necessário que todos os alunos pensassem em conjunto olhando para o mesmo esquema, para se chegar a uma conclusão aceite por todos.

Ao tentar explicar a conclusão do problema e a forma como tinham chegado a uma conclusão, os alunos optaram por redigir um texto com um esquema como suporte (figura 3).

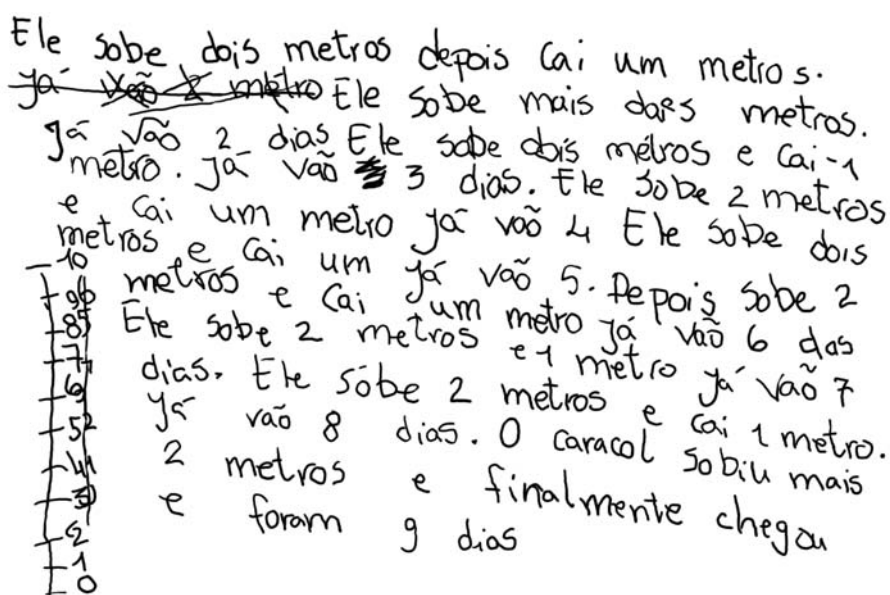


Figura 3. Esquema e explicação da Marina

Num outro momento propus aos alunos a seguinte tarefa do mesmo tipo com a finalidade de perceber se haveria alguma alteração no processo de resolução utilizado anteriormente:

O caranguejo decidiu ir até à praia. Ele estava no mar a 20 metros da praia. Em cada dia ele andava 4 metros. Mas à noite, enquanto descansava, a maré arrastava-o 2 metros para trás. Ao fim de quantos dias consegue ele chegar à praia?

Após pensarem sozinhos durante pouco tempo, os alunos decidem desenhar uma recta graduada até 20 sem precisão alguma. O desenho do caranguejo foi incluído nos registos

de quase todos os alunos, ao lado da recta. Como sabia que iria contar o número de dias que o caranguejo demorava a chegar à praia, a Marina escreveu a palavra dias e os restantes colegas fizeram igual.

Os alunos não apresentam propostas para a resolução do problema, limitam-se a contar. Os alunos realizam registos iguais e não há muita discussão ou diálogo. Parece ter havido uma mecanização de procedimentos. Eu tentei acompanhar as contagens dos alunos e quando verifiquei que havia enganos fiz reparos para que eles não se perdessem nas contagens.

Todos os alunos parecem concordar com o resultado e não são apresentados argumentos. Peço aos alunos para explicarem o seu procedimento.

S M Q — 1,2,3,4, ... volta para trás, 1,2 ... 4 dias

S M Q — 1,2,3,4 ... 5 dias

P — Está no 10

Q — 1,2,3,4, voltou para trás ... 6 dias; 1,2,3,4, voltou para trás ... 7 dias;
1,2,3,4, voltou para trás ... 8 dias; 1,2,3,4 chegou ao fim ... 9

P — 9 dias! Vejam bem isso ... verifiquem os cálculos ...

P — Então demorou 9 dias? mas tu Ricardo, como é que estás a fazer?

R — Da mesma maneira. Dá 9!



Figura 4. Esquema da Marina (2)

Percebendo que os alunos não tiveram grande dificuldade em chegar ao resultado, decidi fazer uma proposta que visava o abandono do esquema:

P — E conseguiriam chegar ao resultado de outra forma? só com cálculos, vocês conseguiam fazer? Pensem lá, é um desafio que vos coloco agora.

S — Dá 9, não custa nada fazer.

Surgem tentativas de efectuar cálculos. A Marina começa a reproduzir os avanços dados pelo caranguejo utilizando pequenos cálculos e orientando-se pelo esquema:

M — Não é $20 - 4$ é $20 \dots$

S — Eu tenho aqui 20

M — $20 - 2$ porque ele ia quatro e descia 2

Os alunos vão realizando adições e subtracções e procedendo ao seu registo (figura 5), enquanto recapitulam os avanços do caranguejo. A transição entre o esquema e a elaboração de algoritmos vai sendo realizada.

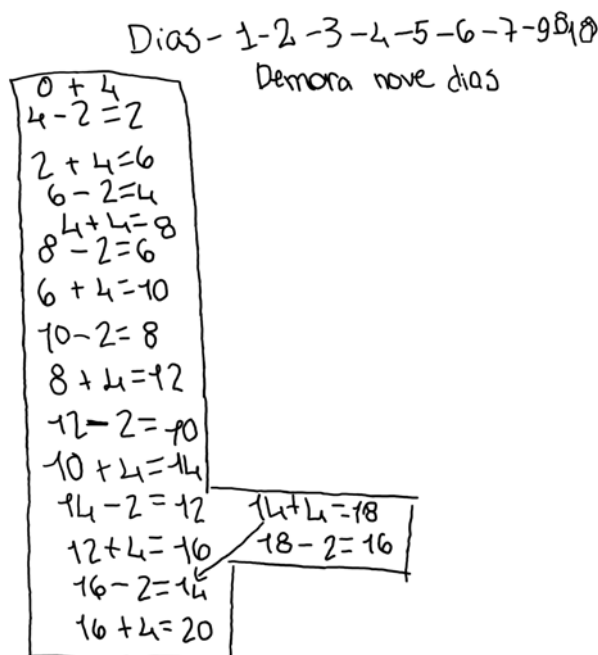


Figura 5. Resolução da Marina

Constatai que os alunos registaram os cálculos que antes tinham sido apenas contagens na recta e perguntei:

P — Estão a esquecer-se de uma coisa, como é que com essas contas conseguem saber os dias que o caranguejo demora a chegar à praia?

Os alunos começam então a contar o número de cálculos feitos. Os alunos não consideraram o número de subtracções realizadas, apenas as somas efectuadas. Decidi questionar o porquê dessa opção.

S — Então, fazemos só com as contas de mais

M — Nas de mais dá só 8

P — Vejam lá, esqueceram-se de uma ... agora é que é $16+4$ que dá 20, contem lá ... fizeram ... 16 contas

M — É as de mais

P — E as de menos, não conta?

S — São as de menos, dá 8

Q — As de menos ...

M — Tá bem ... dá 8

P — Porque é que é 8?

Q — É as de menos

P — E porque é que é só as de menos é que contam?

Da justificação dada pela Marina e apoiada pelo resto do grupo que abanavam a cabeça dizendo que sim, parece haver compreensão em relação à transição da utilização do esquema para a utilização de cálculos.

M — Porque ele descia, porque só quando é de menos é que acaba o dia, e conta um dia.

Q — Quando descansa!

Já que o resultado obtido é diferente do inicial em que apenas se usou o esquema, insisti para que os alunos me explicassem como tinham alcançado o resultado, procurando assim que chegassem a um acordo. Este acordo não é devido a existirem diferentes opiniões entre o grupo, já que todos acompanharam o mesmo raciocínio. É com a minha ajuda que os alunos chegam à conclusão que houve esquecimento no registo de alguns cálculos.

S — Primeiro fizemos a recta, 4 anda dois para trás, 4 anda 2, até ao 6 ... e anda dois para trás ... sempre assim ... e chegou à praia ... basta contar ...

P — Vocês pensam que é 9?

Q — Contámos as contas de menos, porque ele ia sempre para trás

P — E quantas deu?

Q — 8!

P — Mas esqueceram-se da última, quando ele chegou ao fim ele já não andou para trás ... então a última conta também contava, dava 9.

S — Pois é.

P — Então porque é que deu 8? É 8 ou 9?

S — Porque faltou uma conta.

S — Contando com as contas de mais dá 17. A tirar a de 2, temos 8, mais a última dá 9.

Quando os alunos se aperceberam que eram 9 dias, escreveram na sua folha, *demora 9 dias*.

O exemplo das tarefas de divisão descontínua*

Relata-se agora um exemplo da forma como decorreu a investigação utilizando as tarefas de divisão descontínua.

Numa sala de cinema há 80 cadeiras. Todas as filas têm 8 cadeiras. Quantas filas são?

Os alunos desta turma tinham tido poucas experiências formais sobre a divisão, de facto, os alunos não sabiam dividir. Por isso, optei por propor uma tarefa muito simples, com uma solução única e verificar qual era a reacção dos alunos em relação à percepção do enunciado e à forma de resolução que iriam seguir.

A Marina começa a escrever uma fila vertical com números 10 (figura 6). Conta com os dedos de dez em dez até chegar a 80.

10
10
10
10
10
10
10
10

Figura 6. Esquema da Marina (3)

A Sara e o Ricardo observam a Marina. Esta, certifica-se novamente e afirma:

M — Já está! São 8!

*Designei-as por tarefas que envolvem um processo de divisão ou distribuição de uma determinada quantidade de vários elementos iguais por uma quantidade determinada de outros elementos.

Surge então, a primeira proposta de resolução (fazer filas de 10) e também a primeira proposta de solução (8 filas).

Após observar o procedimento da Marina, a Sara regista filas de 8 e vai contando de 8 em 8 até chegar a 80. O Ricardo continua a observar atentamente a colega. A Sara afirma então:

S — São precisas 10 filas, e cada fila tem 8 cadeiras, então é 80 cadeiras.

P — Como tens a certeza?

Perguntei à Sara porque afirmava que eram 10 filas. Limitou-se a escrever 10×8 na folha de papel e mostrou-me. O Ricardo, ao perceber que a Sara tinha provado de certa forma aquele valor, talvez porque eu aceitei e não fiz mais comentários repete o procedimento da Sara. A Quinjal começa a contar filas de 8 e a Marina diz:

M — 10×8

S — A Mari chegou à mesma conclusão que eu, que eu fiz com contas.

M — Professor, já fiz.

Fiquei com dúvidas se a Marina percebeu ou se se limitou a seguir a Sara. Pergunto à Marina:

P — As filas são de 8 ou de 10?

M — Já emendei! São de 8 mas se fosse de 10 também dava 80.

A Sara reproduz na sua folha o seguinte (figura 7):

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 8 \\ \hline 80 \end{array}$$

Há 8 cadeiras em cada fila e há 80 cadeiras ao todo então são 10 filas.

Figura 7. Resposta da Sara

A Quinjal registou uma fila vertical de oitos a mais. Para a ajudar pergunto quantas filas tem e porquê. A Quinjal começa a contar. Ouvindo o meu comentário, a Sara socorre a Quinjal e explica-lhe como deve contar de 8 em 8 utilizando os dedos. Não tendo eu a certeza de a Quinjal ter percebido, peço-lhe para me explicar:

Q — Eu vou contar de 10 em 10. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80.

P — E isso quer dizer o quê?

Q — São 10 filas.

P — Nós queremos saber quantas filas são, mas é filas de 8, e tu fizeste de 10. como seria então?

A Marina intromete-se e diz à Quinjal:

M — 8 cadeiras ... 10 filas (escreve 8, 8, 8, 8, 8, ... 10 vezes na folha da Quinjal)

Q — Pois é ... eu tinha 8 filas de 10 cadeiras.

P — Assim tá bem!

A Quinjal observando as filas de dez vezes o número 8 e as filas de oito vezes o número 10, parece ter descoberto o resultado. Entretanto a Sara decide dar uma explicação extra aos seus colegas:

S — Eu fiz logo 10 filas de 8 cadeiras. Multiplico e dá 80 cadeiras.

P — Porque fizeste assim?

S — Eu fiz assim, porque está aqui escrito que há 80 cadeiras, e em cada fila há 8, vou fazer uma conta que dá 10, e fui à tabuada do 8...

P — Deu jeito o número 10

S — Pois deu.

Todos os alunos copiam o registo da Sara (algoritmo e texto) e acrescentam as palavras filas e cadeiras ao lado dos números do algoritmo (figura 8) por iniciativa do Ricardo.

Num outro momento, fiz a seguinte proposta:

A Ana preparou 48 sandes para um lanche com alguns amigos. No fim do lanche, verificaram que toda a gente tinha comido igual número de sandes e que não tinha sobrado nenhuma. Quantas pessoas poderiam ter estado no lanche, e quantas sandes inteiras comeu cada uma?

Os alunos começam por ler várias vezes o problema. Sem realizar qualquer tipo de debate em torno do problema mas olhando para as folhas uns dos outros, fazem registos que se baseiam em desenhos de filas de bonecos. Por debaixo destes bonecos começam então a colocar circunferências. É a Quinjal e a Sara que começam a fazer os registos. Neste processo o Ricardo parece estar pouco participativo. O Ricardo e a Marina também começam mas acabam por desistir e ficar a observar.

A Sara e a Quinjal optam por desenhar 6 circunferências por debaixo de cada boneco, contar de vez em quando até perfazer 48 e ir acrescentando bonecos se necessário (figura 9). Quando verificam que chegam a 48 apagam os bonecos que desenharam a mais. Esta é a primeira proposta que surge.



Figura 9. Esquema da Quinjal (1)

A Sara faz o seguinte comentário dirigindo-se a mim, como quem procura uma confirmação:

S — Pode ser 6 sandes para 8 meninos.

P — Ou ...?

S — 6 meninos e cada um come 8 sandes. Mas há outras formas, não há?

Q — Sim!

Entretanto, a Sara repara que o Ricardo parou e diz-lhe:

S — É assim, na tabuada do 8 há 48, né? Então podes fazer 6 pessoas, e cada uma tem 8 sandes. Percebeste?

R — Sim

S — Já está!

Surge uma representação que a Quinjal faz (figura 10) e que a Marina copia. Esta representação parece ser uma resposta à primeira parte do problema.

$$\begin{array}{l}
 6 \text{ sandes} \times 8 \text{ meninos} = 48 \text{ sandes} \\
 8 \text{ sandes} \times 6 \text{ meninos} = 48 \text{ sandes}
 \end{array}$$

Figura 10. Esquema da Quinjal (2)

De seguida, a Sara, a Quinjal e o Ricardo começam a repetir o procedimento para 4 sandes (figura 11). A Marina observa os colegas e apenas escreve a indicação do cálculo na sua folha sem passar pelo registo icónico.

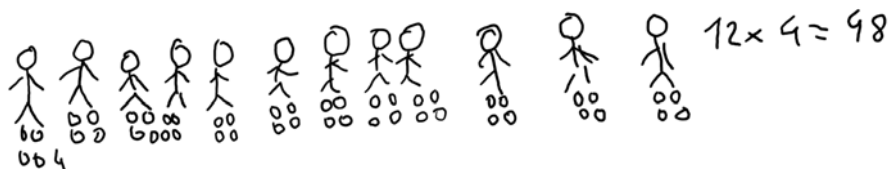


Figura 11. Esquema da Sara (2)

Apesar de terem repartido os bonecos por grupos de sandes, os alunos utilizaram sempre a multiplicação recorrendo à tabuada que conheciam, fugindo assim à divisão.

S — Consegui!

P — Então, que maneiras é que já tens?

S — 6×8 ; 12×4 ; 8×6 ; 4×12

P — Há mais?

Q — Já tenho uma maneira! 12 pessoas que comeram 4 sandes.

P — E não há outra maneira?

Q — O contrário, 4 pessoas que comeram 12 sandes (figura 29).

$$12 \text{ bonecos} \times 4 \text{ sandes} = 48 \text{ sandes}$$

$$4 \text{ bonecos} \times 12 \text{ sandes} = 48 \text{ sandes}$$

Figura 12. Esquema da Sara (3)

A partir deste momento, a Sara deixa de fazer registos de bonecos e sandes e passa a utilizar registos de multiplicações. Surge a tentativa de se encontrarem outros números cujo produto seja 48.

Q — Posso tentar com 7?

P — Experimenta!

Q — Descobri!

P — O que?

Q — 2 vezes 14 dá 28.

P — Mas não são 28, são 48 sandes!

- Q — Pois é
 P — Então é $2 \times$?
 M — A metade de 48.
 Q — 24

A Quinjal acabou por deixar de experimentar com 7. Descobriu que a multiplicação de 2 por 24 também é 48. Desta forma, a Quinjal abandona os desenhos procurando apenas representar cálculos. O Ricardo e a Marina voltam a fazer registos de cálculos.

Os alunos referem que é chato continuar a fazer o mesmo tipo de desenhos e abandonam-nos, talvez porque também os acham desnecessários. Com o objectivo de saber se os alunos perceberam pergunto:

- P — Então, quais é que já encontraram?
 M S — Recapitulam: 1×48 ; 2×24 ; 4×12 ; 8×6 e sempre ao contrário (figura 30).
 P — Mas como é que fizeram?
 S — É muito cansativo fazer os desenhos todos!
 Q — Fizemos 12 pessoas vezes 4 sandes e deu 48.
 P — Ou seja, 12 meninos tinham 4 sandes cada um.
 M — Ou 4 meninos comem 12 sandes.
 P — Agora está tudo um pouco desorganizado. Tentem organizar os vossos resultados.

6×8
 12×4
 ~~24×2~~
 \uparrow
 8×6
 4×12
 \downarrow
 2×24
 1×48
 ~~48×1~~
 1×48
 48×7

Figura 13. Esquema do Ricardo

Os alunos organizam os resultados da seguinte maneira (figura 14):

$$\begin{array}{c} \underline{48} \\ 1 \times 48 \\ 2 \times 24 \\ 3 \times 16 \\ 4 \times 12 \\ 6 \times 8 \\ 8 \times 6 \\ 12 \times 4 \\ 16 \times 3 \\ 24 \times 2 \\ 48 \times 1 \end{array}$$

Figura 14. Esquema da Marina (4)

Conclusões

Representações formais e informais

a) Apropriação de representações dos próprios alunos para resolver problemas

Entendendo por representações próprias dos alunos, as representações informais que os alunos utilizaram para realizar os problemas, podemos considerar que:

Os alunos realizaram esquemas e desenhos numa fase muito inicial, quase sempre logo após uma primeira leitura do problema. Nas actividades seguintes do mesmo tipo de tarefas os alunos tendem a repetir geralmente o processo de resolução do problema anterior, podendo assim, tratar-se da mecanização de um procedimento. No entanto, a representação incluída na repetição deste processo sofre alterações para permitir uma melhor adequação ao problema em questão.

Em algumas tarefas, surgem dois tipos de representação. Alguns alunos optam por usar o mesmo tipo de resolução utilizado nas actividades anteriores, mas outros alunos, apenas utilizam uma parte dessa representação, isto é, abandonam a parte mais esquemática e optam apenas pela realização de cálculos. Contudo, são os cálculos que todos os alunos vão utilizar nas últimas actividades de cada bloco.

Em determinadas situações eu sugeri alguns tipos de representação, como por exemplo uma expressão numérica. No entanto, este tipo de representação não foi aplicado pelos alunos em situações problemáticas semelhantes. Igualmente, após eu ter ensinado o algoritmo da divisão, este não foi utilizado nas situações problemáticas posteriores que o permitiam. Parece poder deduzir-se que os métodos que os alunos desenvolvem e dominam são utilizados sempre que lhes permitem atingir um resultado em detrimento de outro que lhes é “imposto”.

Pelas evidências apresentadas parece ser possível afirmar que os alunos se apropriam das representações que eles próprios usam inicialmente e que existe uma tendência para as mesmas representações serem utilizadas sempre que possível.

b) Elementos icónicos e função dos esquemas representados pelos alunos

Os elementos icónicos representados pelos alunos surgem em fases iniciais da resolução do problema, geralmente em simultâneo com a apresentação de dados. O elemento icónico poderá ser uma mera ilustração, uma forma de ligar o problema à realidade, uma forma de ajudar a visualizar o problema ou constituir um elemento meramente afectivo. Apenas serviu de instrumento de contagem em algumas tarefas de divisão.

Os diferentes tipos de representação que os alunos produzem, quer sejam, elementos alinhados formando filas, segmentos de recta ou outros, parecem ter várias funções para eles. Algumas serão, transpor o problema verbal para uma forma visual, ligar o real ao abstracto, utilizar o esquema como ferramenta (para contar) para obtenção de um resultado, confirmar um resultado após utilização ou não de um algoritmo.

c) Transição de representações informais para representações formais

Nas tarefas aditivas verifica-se que há uma evolução gradual dos sistemas de representação dos alunos. As representações consideradas informais parecem conduzir a representações mais formais. Nas tarefas aditivas regulares houve transposição da forma como eram representadas as indicações do problema de uma forma esquemática com o uso de setas para a forma de pequenos cálculos. Geralmente, os esquemas realizados são sempre acompanhados de cálculos que vão sofrendo adaptações. Os mesmos esquemas vão sendo abandonados gradualmente ao longo dos problemas mas persistem os algoritmos.

Nas tarefas de divisão os alunos utilizaram na maior parte das situações um algoritmo como resolução (multiplicação ou divisão) em paralelo com outros esquemas de representação que foram sendo abandonados. Nas tarefas de divisão descontínua, a transição da representação informal para a formal dá-se quase automaticamente em cada tarefa. Ao longo dos problemas deste bloco, as representações não sofreram em si grandes alterações.

As representações informais terão sido utilizadas como forma de os alunos entenderem melhor o problema, antes de serem postas de parte em detrimento de representações mais formais.

De referir que mesmo dominando representações formais (algoritmos) verifica-se uma tendência para os alunos usarem inicialmente esquemas mais informais.

Compreensão matemática

a) Indicadores de compreensão matemática durante a construção de representações externas

Os alunos parecem dar indicações de ter compreendido o enunciado de um problema ou a sua resolução durante a construção de representações externas ao longo dos vários tipos de tarefas propostas e de vários modos, nomeadamente através das representações que realizaram e da sua expressão oral.

Especificamente em relação à utilização e construção de representações durante a realização das tarefas, os alunos pareceram manifestar a sua compreensão quando esquematizaram o enunciado do problema verbal, obtendo assim uma visualização do mesmo. Isto aconteceu em todas as tarefas sempre que os alunos realizaram um esquema que reproduzia o problema (exemplo, figuras 4 e 9).

Em várias ocasiões, os alunos usaram um esquema criado por eles que serviu de ferramenta para obter um resultado. Esta evidência encontrou-se sempre que o esquema que os alunos propunham era o instrumento central utilizado para chegar a uma possível conclusão (exemplo, figura 2).

O facto de os alunos apresentarem o seu raciocínio (correcto) e demonstrarem os resultados obtidos aos restantes elementos do grupo/turma usando uma representação pode ser um indicador de compreensão.

Várias vezes, os alunos identificaram um problema-padrão, uma vez que utilizaram um procedimento de resolução anteriormente usado mas realizaram adaptações para o novo problema. Um exemplo deste procedimento pode encontrar-se nas tarefas do bloco tarefas aditivas regulares, mais concretamente nas figuras 2 e 4, em que o mesmo procedimento foi utilizado mas com as devidas adaptações.

A partir dos dados de um esquema que criaram, os alunos realizaram muitas vezes os algoritmos que lhe correspondiam, demonstrando desta forma que compreenderam a transição entre uma representação e outra na sua aplicação ao problema. Exemplo desta situação é o que acontece na transição que representam as figuras 4 e 5.

Por vezes, os alunos aplicaram e reconheceram um procedimento semelhante num contexto diferente. Quando mudei o tipo de situação no grupo de tarefas aditivas irregulares, os alunos repetiram o mesmo tipo de procedimento que já tinham utilizado, o que vai de encontro às ideias de Sierpinska (1994).

Outro indicador de compreensão, parecem ser as alterações que os alunos fizeram numa representação para chegar a um resultado com maior efectividade, corrigindo desse modo aspectos que podiam levá-los a um resultado errado (exemplo, processo de construção da figura 9).

Quando os alunos escreveram ou disseram o que significava determinado número num dado problema, poderiam estar a dar indícios de ter compreendido uma determinada situação. Esta evidência pode encontrar-se por exemplo nas figuras nas quais os alunos indicam o que representa cada número no algoritmo que realizaram (figura 8).

O facto de os alunos retirarem excesso de informação ou de organizarem os resultados de uma situação problemática pode indicar que compreenderam quais eram os elementos necessários à resolução do problema, como se evidencia por exemplo, nas figuras 13 e 14.

Um potencial indicador da possibilidade da existência de compreensão será aquilo que o aluno manifesta verbalmente, tal como Sierpinska (1994) também descreve no seu trabalho. Pareceu haver indicação ou não de compreensão através da comunicação nas seguintes situações:

- a) Os alunos puseram questões sobre o enunciado e manifestaram que tinham dúvidas sobre ele, mas quando foram esclarecidos foram capazes de fazer um esquema correcto.

- b) Os alunos identificaram um tipo de problema-padrão e manifestaram pequenas diferenças que os problemas pudessem ter:

Q — Eu percebi que era como o problema do caranguejo, porque eram contas de mais e de menos só que ali, andava 4 para a frente e dois para trás.

- c) Os alunos justificaram ou descreveram com argumentação válida um resultado ou a escolha de um procedimento para chegar a esse resultado. Isto verificou-se sempre que um aluno explicou de forma correcta o procedimento que escolheu quando eu o questioneei sobre tal.
- d) Os alunos recapitulam verbalmente o problema tendo como suporte um esquema que eles construíram, como aconteceu sempre que um aluno comunicava à turma o seu raciocínio ou dentro do grupo explicava o procedimento que realizou a outro aluno.

Por vezes os alunos optaram por escrever também um texto onde explicaram o processo que os levou a chegar a um resultado.

Não esquecendo a minha intervenção como professor da turma, parece ser possível referir que influenciei a compreensão dos alunos através das questões que coloquei para tentar saber se eles compreenderam ou não determinada situação. Uma vez que isso os pode ter levado a reflectir sobre aquilo que fizeram ou disseram, posso ter levado os alunos a questionar a validade de um resultado, promovendo assim, o seu espírito crítico. Por sua vez, sem me aperceber posso ter orientado os alunos de forma diferente à que eles estavam a seguir naturalmente, levando-os a usar esquemas que eu utilizaria mas que poderiam ter chocado com o raciocínio ou processo que o aluno estava a seguir.

Quando confrontei o aluno com o erro, este foi obrigado a reformular e a encontrar uma forma de provar que encontrou um resultado correcto. Desta forma, ao reflectir sobre a validade de um resultado e escolha de um processo, o aluno poderá pôr em prática o seu espírito crítico e poderá estar a desenvolver um processo de compreensão.

Mais estritamente em relação às várias tarefas matemáticas propostas, foi possível identificar ao longo da investigação, algumas ocorrências que podem ter contribuído para aumentar a aprendizagem do conceito de número com compreensão. Desta forma, os alunos estabeleceram relações entre números (composição e decomposição de números através da adição e subtracção); reconheceram e transformaram operações equivalentes e operações inversas; identificaram propriedades das operações; ordenaram e sequenciaram números; criaram procedimentos de contagem para fazer adições e subtracções; experimentaram vários números em situação de cálculo e criticaram os resultados obtidos; escolheram um procedimento de cálculo apropriado à situação em questão.

A realização desta investigação permitiu-me, enquanto docente, realizar uma análise efectiva da minha prática pedagógica uma vez que tive que utilizar meios objectivos para a recolha de dados. Foi necessário ter alguns cuidados em relação ao duplo papel que estava assumir (investigador e professor), o que nem sempre foi fácil. O tipo de reflexão realizada quer antes, durante ou após a investigação, ao preparar e reformular actividades

e ao analisar as minhas intervenções, terão contribuído para uma consciencialização e maior crescimento profissional no qual irei entender a compreensão e aprendizagem dos alunos de uma forma mais precisa.

Referências

- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Goldin, G., Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. Em *Roles of Representation in School Mathematics. 2001 Yearbook*. (pp. 1-23) Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Goldin, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. Em Lyn D. English et al. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. (pp.197-217) New Jersey: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematical education. Em Beishuizen, M., Gravemeijer, K. P. E., Lieshout, E. C. D. M., *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures*. (pp. 13-34) Utrecht: CD- β series on research education, Freudenthal Institute.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in mathematics Education*, Vol.22, N°3, 170-218.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P. (1992). Learning as and Teaching with Understanding. Em Douglas A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.
- Janvier, C. (1987a). Translation Processes in Mathematics Education. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Janvier, C. (1987b). Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-71). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Kalathil, R. R., & Sherin, M. G. (2000). Role of Student's Representations in the Mathematics Classroom. Em B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Ed.), *Fourth International Conference of the Learning Sciences* (pp. 27-28). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lesh, B., Post, T., Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Mason, J. (1987). Representing Representing: Notes Following the Conference. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 207-214). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Matos, J. M. (1994). Os métodos próprios dos alunos: início de uma investigação. Em *V seminário de Investigação em Educação Matemática — Actas*, pp. 109-117. Lisboa: APM.
- Meyer, M. R. (2001). Representations in Realistic Mathematics Education. Em *Roles of Representation in School Mathematics. 2001 Yearbook*. (pp. 238-250) Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ministério da Educação (1990). *Reforma Educativa. Programa do 1º ciclo do Ensino Básico*. Algueirão: Ministério da Educação, Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.
- NCTM Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

- Sierspinski, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: Falmer Press.
- Valério, N. (2004). *Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ciclo* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa e Instituto Politécnico de Lisboa). Lisboa: APM.
- Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures An Investigation of Children's Mathematical Drawings. Em *Roles of Representation in School Mathematics. 2001 Yearbook*. (pp. 215-227). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley G. , Merkel, G. (1991). A importância das interação social na construção do conhecimento matemático das crianças. *Educação e Matemática*, 18, 17-21.
- Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: design and methods* (3rd Ed.). California: Sage Publications.

Resumo. O estudo no qual se baseia este artigo, tem como objectivo perceber como se constróem e evoluem as representações externas dos alunos do 1º ciclo do ensino básico. Tenta-se ainda perceber qual é a influência dessas representações na compreensão dos alunos quando realizam problemas matemáticos.

O estudo decorreu numa turma do 3º ano de escolaridade tendo-se focado a atenção num grupo de quatro alunos em que o investigador foi o próprio professor . Foi utilizada uma metodologia qualitativa na qual se consideraram um conjunto de situações problemáticas que foram agrupadas em tarefas aditivas e de divisão.

De um modo geral verifica-se que as representações próprias dos alunos são utilizadas na resolução de outras situações problemáticas semelhantes e são posteriormente desenvolvidas. Nas tarefas analisadas, os elementos icónicos e esquemas que os alunos representam têm um papel significativo no desenrolar da actividade.

Foram identificados vários indicadores da existência de compreensão dos alunos ao longo da resolução das tarefas, a nível dos registos que efectuaram, pelas manifestações verbais que fizeram e pelo confronto com o erro.

A construção de representações e a sua formalização com compreensão passa por um processo nos quais se evidenciam as influências do professor, dos restantes alunos, e de aprendizagens anteriores destes.

Palavras-chave: Compreensão; Representações formais; Representações informais; Representações externas; Resolução de problemas.

Abstract. The study in which this article is based, has the purpose to understand how primary children's external representations are constructed, and their influence in their own understanding.

The study was made in a 3rd grade and the attention was focused in a group of four students. The researcher was the teacher of the class.

It was used a qualitative methodology in which we consider some types of problem situations: division and additive.

In a general way we can verify that children's own representations are used when they solve similar problems and this representations can be developed later by them. In the analysed problems,

iconic elements and schemata that children represented had an important role in the activity.

Some signals were identified which indicate the existence of understanding during the problems solving, specially by the drawings that children made, by their verbal manifestations and their relation with errors.

The process of constructing representations and their formalization with understanding are influenced by the teacher, the other students and the knowledge they already have.

Key-words: Understanding; Formal representations; Informal representations; Problem solving.

■ ■ ■

NUNO VALÉRIO

ESE de Lisboa

Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º ciclo

nunomrv@yahoo.com