

Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da Psicologia

Carolina Carvalho

Centro de Investigação em Educação
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

José António Fernandes

Centro de Investigação em Educação
Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho

Introdução

No quotidiano de qualquer pessoa, seja ela uma criança ou um adulto, encontramos fenómenos imprevisíveis para os quais não existe uma só explicação ou uma só causa, fazendo com que a realização de certos eventos seja atribuída ao acaso pela ausência de outra explicação mais plausível. Como afirma Branco (2000), “o acaso gera incerteza e esta é um ingrediente presente nos mais diversos aspectos da vida” (p. 18). Por exemplo, prever a face que se obterá no lançamento de um dado, antecipar a carta que sairá na extracção de uma carta de um baralho ou predizer qual dos atletas irá chegar em primeiro lugar na corrida familiariza as pessoas com este tipo de situações. Mas também o meio físico e social as força a confrontar-se com eventos onde a incerteza é uma realidade, como quando têm de fazer previsões sobre as condições climáticas, quando planeiam uma viagem ou quando investem em acções da bolsa.

A frequência com que nos confrontamos com este tipo de situações, onde a noção de probabilidade, entendida como um modo de medir a incerteza de um acontecimento, está presente, destaca a relevância de promover experiências na escola, onde os alunos desenvolvam noções intuitivas deste conceito adequadas às suas vivências, explorando situações que os levem a adquirir níveis mais elaborados das intuições iniciais. Só assim é possível que algumas das dificuldades sentidas por sujeitos mais velhos não permaneçam de forma tão persistente ao longo do tempo, continuando a influenciá-los erroneamente nas suas decisões e pensamentos (Fischbein, 1975).

Na opinião de Way (2003) existem fortes indícios na literatura de que o raciocínio probabilístico é influenciado pelo próprio desenvolvimento cognitivo, e que este ocorre por estádios. Assim, a criança progride neste tipo de raciocínio à medida que vai dominando de forma mais eficaz situações onde a noção de acaso está presente. Contudo, esta autora australiana refere a falta de consenso entre os investigadores no que se refere

à natureza do pensamento em cada um dos estádios e nas idades que os limitam, o que sugere a necessidade de se continuar a investigar este domínio do pensamento. Tornar-se progressivamente mais competente neste tipo de pensamento resulta do confronto com actividades significativas que sustentem estratégias de raciocínio onde estejam presentes componentes da probabilidade.

A Psicologia e o pensamento probabilístico

As motivações de psicólogos e educadores matemáticos para compreenderem como os sujeitos desenvolvem raciocínios face a situações probabilísticas não são idênticas. Para Shaughnessy (1992), os psicólogos interessam-se por observar e descrever o que acontece quando o sujeito tem em mãos uma tarefa que o obriga a tomar decisões em situações de incerteza, enquanto aos educadores matemáticos importa-lhes mais a questão de ensino-aprendizagem do conceito de probabilidade e a melhoria dos desempenhos dos alunos.

A ideia anterior é partilhada por Scholz e Waller (1987) que consideram existir uma diferença entre o que se entende por “uma probabilidade matemática e a probabilidade que os psicólogos procuram avaliar, através de diferentes métodos, em sujeitos reais” (p. 293). Do ponto de vista matemático, sendo o conceito de probabilidade um conceito multifacetado, a probabilidade de um acontecimento pode ser estudada através (1) do conceito clássico, (2) do conceito frequentista ou empírico, (3) do conceito subjectivista, e (4) do conceito estrutural ou axiomático (Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991; Hawkins & Kapadia, 1984). Do ponto de vista da Psicologia, as probabilidades devem ser consideradas como uma tentativa de determinar as cognições individuais e os processos de decisão, podendo-se incluir em ambos as probabilidades matemáticas (Scholz & Waller, 1987). Contudo, estes autores chamam a atenção que isto não significa que “os sujeitos reais estejam livres de contradições e façam julgamentos coerentes pelo facto de recorrerem a certos elementos da teoria matemática” (p. 293).

Na Psicologia, os autores mais significativos no estudo da cognição probabilística foram Piaget e Inhelder (1951) e, alguns anos mais tarde, Fischbein (1975). Enquanto os primeiros estavam interessados em compreender como este conceito evoluía de acordo com o seu modelo de desenvolvimento cognitivo, o segundo, partindo dos trabalhos iniciados pela escola de Génève, explorou os fundamentos do pensamento intuitivo e como este se relaciona com o pensamento probabilístico.

A perspectiva de Jean Piaget

De acordo com Piaget e Inhelder, o desenvolvimento da noção de probabilidade resulta de uma amálgama entre factos e sequências de causa-efeito, fruto das próprias acções do sujeito, bem como da noção de acaso e de estimações espontâneas que vai formando com base no carácter mais ou menos provável dos acontecimentos esperados ou receados que vai vivenciando através das suas experiências quotidianas.

Para estes autores, o desenvolvimento cognitivo consiste numa sequência de transformações onde esquemas sensório-motores elementares são progressivamente integrados

em estruturas cognitivas mais complexas. O conceito de probabilidade, tal como acontece com outros, segue uma ordem de diferentes níveis até a sua aquisição. No livro *La Genèse de l'Idée de Hasard chez l'Enfant* (1951) Piaget e Inhelder descrevem as várias etapas por que passa uma criança até adquirir este conceito e que, na opinião de Shaughnessy (1992), ainda “hoje não estão completamente ultrapassadas” (p. 479).

Piaget e Inhelder (1951) recorrendo ao método clínico piagetiano, que se caracteriza pelo recurso a planos empíricos precisos inspirados no método experimental — usando instruções rigorosas, observadores treinados e tarefas cuidadosamente seleccionadas, encontraram um percurso para a construção do conceito de probabilidade, desde a infância até à adolescência. A noção de acaso e, conseqüentemente, as suas implicações no desenvolvimento do conceito de probabilidade são, na opinião dos autores, a continuação da evolução das operações lógicas, como eles próprios o afirmam:

Após termos estudado a génese das operações lógicas, matemáticas e físicas e como as crianças se adaptam aos dados recolhidos pela sua experiência, e que podiam ser estruturados dedutivamente, era conveniente compreender como o pensamento em formação se adaptava para assimilar aquilo que no real resiste a esta forma de tratamento, isto é, o fortuito. (p. 5)

As investigações realizadas por estes autores acerca da aquisição da noção de probabilidade permitiram-lhes verificar que só quando compreendem muitas das relações de causa-efeito dos fenómenos físicos é que a criança consegue compreender os fenómenos aleatórios (Nisbett & Krantz, 1983), ou seja, “a noção de acaso e a intuição de probabilidade constituem elas próprias realidades derivadas e secundárias face à procura de uma ordem ou causa” (Piaget & Inhelder, 1951, p. 10), necessárias para compreender o mundo nos primeiros anos de vida. Assim, a criança pré-operatória é incapaz de distinguir entre um fenómeno previsível e um fenómeno aleatório. Nesta altura, a criança está ocupada em apreender o mundo que a rodeia e, para isso, precisa de ter razões para as coisas. É a fase dos porquês. O porquê presente nas questões espontâneas das crianças aos adultos procura uma razão para as coisas, tanto no caso em que ela existe, como quando essa causa resulta de uma série de situações fortuitas, para as quais a criança procura a resposta mais provável, uma vez que ainda não entende que essa causa única não existe.

Para compreender os fenómenos aleatórios e conseguir conceber as várias possibilidades existentes numa situação, a criança precisa da noção de reversibilidade e do esquema combinatorio. Esta noção de reversibilidade começa por ser construída em situações concretas e só gradualmente é que a criança a mobiliza para situações abstractas que lhe vão permitir pensar, não num universo familiar, concreto e próximo, mas alargá-lo ao domínio do possível. Conseqüentemente, as actividades propostas às crianças para promover a aprendizagem de conceitos mais complexos não devem esquecer este facto. Quando pensamos em situações do dia-a-dia, onde estão presentes fenómenos aleatórios, quer no mundo físico quer no mundo social, verificamos não ser fácil encontrar situações concretas para exemplificar um fenómeno aleatório a uma criança, uma vez que não é possível manipular estes fenómenos no sentido de produzir, em condições idênticas, sempre o mesmo efeito (Batanero, 2004).

Mesmo que se tenha alguma informação acerca de um determinado fenómeno aleatório não conseguimos, com segurança, antecipar qual será o seu resultado. Por exemplo, num jogo de roleta prever qual o número que sai ou anular a operação realizada de forma a ficar na posição inicial revela-se uma tarefa difícil e impraticável. Consequentemente, usar este tipo de tarefas para explicar os fenómenos aleatórios às crianças pré-operatórias torna-se complexo, levando alguns autores a considerar que a falta de reversibilidade dos eventos aleatórios se reflecte no desenvolvimento tardio das noções de aleatoriedade e de probabilidade e acentua a importância do meio social nesse desenvolvimento (Bata-nero, 1999; Piaget & Inhelder, 1951; Scholz & Waller, 1987). Nomeadamente, planear actividades que partam de experiências próximas das crianças e onde a interacção com o professor é fundamental, como acontece com a exploração de situações baseadas na literatura infantil, onde é possível através do diálogo abordar naturalmente noções probabilísticas (Lopes, 2003; Azcárate, 1996).

Com o aparecimento das operações concretas, por volta dos 7-8 anos, a criança inicia o segundo momento no desenvolvimento da noção de acaso. Nesta altura, ela começa a conseguir calcular de forma operatória muitos dos eventos aleatórios, podendo nalguns casos fazer estimativas quantitativas de probabilidade desde que o número de possibilidades seja limitado e a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos não favoráveis possa ser estabelecida de forma aditiva, isto é, com base na relação entre o todo e as partes ou entre as partes (Scholz & Waller, 1987). Por exemplo, ao lançar uma bola num plano inclinado a criança verifica que a trajectória não será a mesma em dois lançamentos, ou seja, a criança apercebe-se que é incapaz de antecipar o movimento que a bola irá seguir e esta indeterminação espaço-temporal coloca-a face a um acontecimento aleatório.

A descoberta deste tipo de situações faz com que a criança tenha de distinguir o que é um acontecimento necessário, deduzido operatorialmente do que é um acontecimento possível ou indeterminado. Assim, para Piaget e Inhelder (1951), “a descoberta de um acontecimento aleatório é o resultado da dissociação entre o possível e o necessário, ou seja, entre o indeterminado e o operatorialmente determinado. A análise do possível supõe a re-introdução da operação no plano do aleatório” (p. 241). Após uma fase de oposição entre o operatório e o fortuito “irá surgir uma nova síntese entre as operações e a noção de acaso, e é desta síntese que nascerá a noção de probabilidade, distinta de um simples conhecimento do fortuito ou do indeterminado” (p. 241).

Mas, para estes autores, o conceito de probabilidade supõe uma análise da totalidade dos casos possíveis e não somente de casos isolados. Como eles próprios afirmam, só quando a questão combinatória estiver resolvida é que a criança consegue realizar esta síntese. É por isso que a criança durante o estágio das operações concretas consegue prever probabilidades, mas somente para situações aditivas e com poucos elementos, revelando dificuldades para as restantes.

No período seguinte, das operações formais, o adolescente vê-se confrontado com uma nova tarefa: compreender a noção de acaso. Para isso, terá de traduzir para o sistema das operações o carácter imprevisível e incompreensível desta noção e a forma de o fazer é tratá-la, “pelo menos à partida, como se fosse composta por vários elementos reversíveis

para poder ser compreendida” (Piaget & Inhelder, 1951, p. 245). Por outras palavras, tem de recorrer ao seguinte princípio: se os casos isolados ou individuais são indeterminados ou imprevisíveis, o seu conjunto, enquanto um todo, é um sistema de possibilidades múltiplas, reunindo este sistema os casos reais individuais e todos os possíveis. Porém, para o sujeito recorrer a este princípio necessita da análise combinatória e das proporções. Assim, a noção de acaso ou mesmo de probabilidade para Piaget e Inhelder (1951) não pode ser totalmente adquirida antes do desenvolvimento do raciocínio combinatório, que se desenvolve durante o estágio operatório formal. Este facto é apontado por alguns autores como um dos responsáveis pelo atraso com que a noção de probabilidade é introduzida nos currículos dos anos de escolaridade básica (Lopes, 2003) e, conseqüentemente, de muitos alunos terminarem essa escolaridade sem terem desenvolvido esta forma de pensamento essencial para uma visão do mundo não determinista, cada vez mais imprescindível nos tempos actuais.

Um dos estudos mais completos, elaborado de acordo com as ideias de Piaget e Inhelder sobre o desenvolvimento da noção de acaso e de probabilidade, foi realizado em Inglaterra por Green (1982). O estudo compreendeu cerca de 3000 alunos com idades entre os 11 e os 16 anos e teve por objectivo avaliar o nível de conhecimentos acerca da noção probabilidade e, simultaneamente, avaliar o nível operatório em que os sujeitos se encontravam em relação a este conceito. O autor recorreu a provas de inspiração piagetiana num formato de escolha múltipla. Contudo, nos itens em que era requerida uma justificação, como o próprio autor refere, muitas respostas eram demasiado incompletas ou vagas, sendo por isso pouco esclarecedoras do tipo de pensamento a que os alunos recorriam quando tinham de resolver este tipo de tarefas.

As principais conclusões do estudo realizado por Green sugerem a) o conceito de proporção como sendo crucial para a compreensão do conceito de probabilidade, b) dificuldades sentidas pelos alunos em compreender e utilizar uma linguagem comum às probabilidades e c) a necessidade de dar mais importância ao ensino, quer das probabilidades quer da estatística, na escolaridade básica.

Na mesma linha de investigação de Green (1982), Munisamy e Doraisamy (1998) conduziram um estudo sobre os níveis de compreensão de conceitos probabilísticos junto de alunos malaios do 4.º e 6.º anos do ensino secundário, tendo, em geral, sido confirmados os principais resultados obtidos no estudo de Green.

A perspectiva de Efraim Fischbein

A última conclusão do vasto estudo realizado por Green destaca a importância do ensino formal na ajuda ao desenvolvimento de noções complexas como as de acaso ou de probabilidade. Piaget e Inhelder ao subestimarem o papel da aprendizagem formal no processo de formação destes conceitos provocaram um conjunto de reacções de diversos autores, dos quais Fischbein (1975) foi o mais representativo. Contudo, os autores suíços estiveram sempre mais empenhados em compreender como a noção de acaso, tão diferente de todas as outras, era desenvolvida pela criança e quais as conseqüências deste facto para a própria evolução das estruturas lógicas.

A segunda crítica que, na opinião de Scholz e Waller (1987), foi feita por Fischbein aos trabalhos realizados por Piaget e Inhelder prende-se com o facto do modelo destes autores ser incompatível com os novos resultados obtidos durante os anos sessenta em estudos realizados no âmbito do paradigma da “aprendizagem de probabilidades” (Fischbein, 1975). Na sua forma mais simples, um estudo deste tipo consiste em colocar em frente do sujeito duas lâmpadas de cor diferente e dois botões. Pode ter-se ainda uma terceira lâmpada usada como sinal de “prontidão”. Uma vez que esta lâmpada acenda, o sujeito deve pressionar o botão correspondente à lâmpada da cor que previu que iria acender. Seguidamente, uma das lâmpadas acende-se, confirmando ou refutando a previsão feita. A experiência repete-se, observando-se estes passos, durante um elevado número de vezes, agrupando-se em sequências de várias provas. Nestas experiências, para uma probabilidade de *input*, observou-se uma tendência para as previsões dos sujeitos se aproximarem dessa probabilidade em todos os grupos etários estudados, incluindo os de 3 anos de idade.

Godino, Batanero e Cañizares (1996) acrescentam que o conceito de probabilidade estudado por Piaget e Inhelder era o de Laplace, significando que se determinam probabilidades *a priori* em situações em que se assume a equiprobabilidade dos acontecimentos elementares. Ora, face a esta opção, podemos colocar a hipótese de que o desenvolvimento do conceito de probabilidade poderia ser diferente para outros conceitos de probabilidade, principalmente para o conceito frequentista, uma vez que estes autores defendem que “não parece factível no ensino básico encontrar situações diferentes daquelas em que se pode aplicar as concepções clássica de Laplace e frequentista” (p. 23), tal como acontece nos actuais programas escolares portugueses do ensino básico (Ministério da Educação, 1991).

Como vimos, muitos autores (Batanero, 1999; Godino, Batanero & Cañizares, 1996; Shaughnessy, 1992; Scholz & Waller, 1983) apontam como principal diferença entre os trabalhos de Piaget e Inhelder (1951) e os de Fischbein (1975) a influência que a instrução pode ter no desenvolvimento da noção de probabilidade, chegando mesmo, na opinião de Scholz e Waller (1983), a ser possível pensar que Fischbein (1975) se interessou por formular uma teoria acerca da aprendizagem e do desenvolvimento do conceito de probabilidade.

Para Fischbein (1975) as crianças têm ideias concretas acerca do conceito de probabilidade, muitas delas apropriadas através dos jogos infantis. Conceitos como acaso e acontecimentos independentes ou mutuamente exclusivos são naturalmente compreendidos, devendo a instrução, na sua opinião, ajudar a desenvolvê-los. Em todo o processo de desenvolvimento deste e de outros conceitos, as intuições das crianças desempenham um papel importante (Fischbein, 1987), constituindo o substrato da aprendizagem na escola ao mesmo tempo que aí se vão refinando.

Para este autor, as intuições são aquisições cognitivas que resultam directamente das acções físicas ou mentais dos sujeitos, podendo ser divididas em primárias e secundárias. As primeiras derivam directamente da experiência do dia-a-dia dos sujeitos com acontecimentos aleatórios, não necessitando por isso de nenhuma instrução. Como o autor refere, os sujeitos tanto têm intuições matemáticas como noutros domínios científicos como, por exemplo, acerca da noção de gravidade ou de aceleração.

O segundo tipo de intuições são reestruturações das primeiras, fruto de um processo de instrução, na maior parte das vezes formal, ou o resultado da interacção do sujeito com uma determinada comunidade cultural. Concretamente, no caso do conceito de probabilidade, as intuições secundárias desenvolvem-se a partir dos conceitos de frequência relativa e acaso mas, para que tal aconteça, não é suficiente um processo de auto-regulação, como considerava Piaget e Inhelder (1951). É necessária uma instrução onde devem ser trabalhadas com a criança as ideias básicas da teoria e da heurística da probabilidade. Para Fischbein (1975), sem esta instrução, o sujeito não consegue desenvolver um conceito operativo de probabilidade. Vejamos então como este autor concebe a origem das noções de acaso e de probabilidade.

Fischbein, Pampu e Mínzat (1975a) realizaram um estudo com o propósito fundamental de determinar a idade a partir da qual é possível falar de uma intuição do acaso e de probabilidade na criança. Para tal, envolveram no estudo sujeitos dos 6 aos 14 anos de idade, repartidos por cinco grupos etários: 5:10-7:6 (5 anos e 10 meses a 7 anos e 6 meses, nível pré-escolar), 7:0-8:3 (7 anos a 8 anos e 3 meses), 9:2-10:5 (9 anos e 2 meses a 10 anos e 5 meses), 11:3-12:10 (11 anos e 3 meses a 12 anos e 10 meses) e 13:5-14:5 (13 anos e 5 meses a 14 anos e 5 meses). Foram usados seis aparatos de madeira com diferentes bifurcações, dos quais três envolviam apenas acontecimentos equiprováveis e os outros três envolviam acontecimentos com probabilidades diferentes e implicavam a adição e multiplicação de probabilidades. Para cada aparato foram feitas duas perguntas: uma relativa ao lançamento de um berlinde (conceito clássico) e outra relativa a vários lançamentos de um berlinde (conceito de frequência).

No caso das situações envolvendo probabilidades iguais, verificou-se que as crianças do nível pré-escolar atingiram uma elevada percentagem de respostas correctas, superior à obtida pelas crianças mais velhas. Para os sujeitos mais novos, a intuição de equiprobabilidade, apoiada por uma reduzida capacidade de análise e por uma relativa indiferença ao detalhe, foi suficiente para responder a estas questões. Além disso, para estes sujeitos não se verificou uma diferença clara entre a probabilidade como um facto objectivamente condicionado e como um capricho subjectivo. No caso dos sujeitos mais velhos, os autores explicam os fracos resultados obtidos em termos do ensino recebido.

O processo de ensino — particularmente como é determinado pelas escolas — orienta a criança para uma interpretação determinista do fenómeno, no sentido de procurar e explicar relações em termos claros, certos e unívocos. A criança é ensinada a procurar as causas de um fenómeno na forma de factores operando univocamente. (Fischbein, Pampu & Mínzat, 1975a, p. 169)

As dificuldades em reconciliar o estocástico e o determinado em crianças de 11-12 anos explicam-se ainda, não apenas por referência ao estágio de desenvolvimento intelectual (operações concretas), segundo Piaget e Inhelder (1951), mas também pela existência de um estado de desequilíbrio. Neste último caso, para Fischbein, Pampu e Mínzat (1975a) as respostas hesitantes e oscilantes destas crianças, que aumentaram com a idade, constitui um argumento forte em favor desta explicação.

Em relação às situações envolvendo probabilidades diferentes e as operações de adição e multiplicação, verificou-se que a percentagem de respostas correctas aumentou com a idade. As dificuldades sentidas pelas crianças mais novas podem explicar-se, segundo estes autores, pela complexidade do próprio aparato, pelo facto da incerteza presente nestas situações poder ser compensada, em certa medida, pela existência de uma opção que pode ser objectivamente justificada a partir de assimetrias e causalidades e pela exigência de certas construções lógicas, as quais são elaboradas gradualmente. O maior salto, na direcção das respostas correctas, verificou-se no grupo etário dos 11:3-12:10, o que confirma, em parte, as conclusões e recomendações de Piaget. No sentido de atenuar a visão determinista, os autores advogam que a criança seja confrontada desde muito nova com problemas práticos e teóricos deste tipo, para além do cálculo de probabilidades que é geralmente ensinado às crianças mais velhas.

Finalmente, quanto à interpretação frequencista, verificou-se que foram os sujeitos dos dois grupos etários mais velhos que mais beneficiaram, apresentando maiores percentagens de respostas correctas. Também em alunos portugueses do 8.º ano, na situação de repetição de experiências de extracção (com reposição) de bolas de dois sacos e de lançamento de moedas e dados um grande número de vezes, Fernandes (1999) observou que este tipo de interpretação, comparativamente com a interpretação clássica, favoreceu a selecção da resposta correcta em acontecimentos de experiências compostas, que foram exactamente aqueles que se revelaram mais difíceis.

Num outro estudo de Fischbein, Pampu e Mînzat (1975b), em que participaram três grupos de 60 sujeitos, correspondentes aos níveis pré-escolares (5:0-6:4), 3.º ano (9-10) e 6.º ano (12:4-13:7), questionaram-se as crianças acerca da maior probabilidade de extrair um berlinde de uma dada cor em duas caixas com berlindes de duas cores. Neste contexto, as crianças deviam escolher a caixa (da esquerda ou da direita) onde era mais provável obter o berlinde da cor indicada ou afirmar que a probabilidade era igual nas duas caixas. Cada um dos grupos de 60 sujeitos foi ainda dividido em três subgrupos de 20 sujeitos, correspondentes às três condições experimentais seguintes: numa, foram ilustradas apenas as três respostas possíveis; noutra, o sujeito extraiu vários berlindes de cada caixa de modo a salientar as probabilidades (no caso de probabilidades iguais nas duas caixas, o investigador controlou a proporção exacta de berlindes a obter nas duas caixas) e foi-lhe ensinada uma técnica de agrupamento para responder às questões — face a duas caixas, uma com $4B$ (berlindes brancos) e $1P$ (berlinde preto) e outra com $9B$ e $2P$, por agrupamento conclui-se que a segunda caixa contém $4B$ e $1P$, mais $4B$ e $1P$ e sobra $1B$, donde, é mais provável extrair o berlinde branco da segunda caixa; e na terceira, foram apenas ilustrados os procedimentos de agrupamento.

Em relação às 18 questões, elas agrupavam-se em três grupos de seis questões, segundo o tipo de razões envolvidas na comparação: nas razões unidimensionais, manteve-se um dos termos correspondentes das razões; nas razões bidimensionais diferentes, os termos das razões não obedeciam a quaisquer restrições; e nas razões bidimensionais iguais, as razões eram iguais. As 18 questões ainda foram agrupadas em dois grupos de nove questões, considerando a grandeza dos termos das razões.

A realização de uma análise de variância, considerando os factores idade, condição experimental e tipo de razões, mostrou que: (1) o factor idade foi altamente significativo, revelando um aumento das respostas correctas com a idade; (2) o factor experimental também foi altamente significativo, tendo-se obtido melhores resultados no conjunto das duas condições de instrução do que sob a condição de não instrução; (3) por fim, o factor tipo de razões também foi altamente significativo, tendo-se verificado diferenças mais importantes nos resultados obtidos para cada categoria de razões nas crianças do nível pré-escolar e do 3.º ano.

Observou-se ainda uma interacção altamente significativa entre a idade e o tipo de razões, tendo-se verificado as maiores mudanças produzidas pela idade nas razões bidimensionais (diferentes e iguais) e as menores mudanças nas razões unidimensionais. Também foi significativa a interacção entre a condição experimental e o tipo de razões, tendo-se verificado um aumento das respostas correctas, particularmente saliente, nas razões bidimensionais (diferentes e iguais). Nas razões unidimensionais, o número de respostas correctas foi muito superior ao nível do acaso para qualquer dos três grupos etários, o que se explica pela simplicidade dos problemas. Finalmente, a interacção entre a idade e a condição experimental não foi significativa, resultando aparentemente que todos os sujeitos beneficiaram igualmente. Ao nível pré-escolar, os sujeitos sob a condição de não instrução apresentaram um número de respostas correctas definitivamente inferior ao nível do acaso nas razões bidimensionais iguais. Já sob as condições de instrução, o número médio de respostas correctas aumentou, atingindo apenas o nível do acaso. Em relação às razões bidimensionais diferentes, a instrução não melhorou as respostas destes sujeitos.

Relativamente às justificações verbais e aos procedimentos de resolução, observou-se nas crianças do nível pré-escolar a predominância de comparações numa razão em todas as condições experimentais, embora diminuindo ligeiramente sob as condições de instrução. Nos sujeitos do 3.º ano, sob a condição de não instrução, foram predominantes as comparações numa razão e, sob as condições de instrução, foram predominantes as comparações entre duas razões. Nos sujeitos do 6.º ano, foram sempre predominantes as comparações entre duas razões, tendo sido adoptada por todos os sujeitos sob as condições de instrução.

Com base nos resultados obtidos, Fischbein, Pampu e Mînzat (1975b) concluíram que as crianças do nível pré-escolar podem compreender correctamente e enfrentar com êxito algumas situações que envolvem o acaso. Ao nível dos 9-10 anos de idade, as crianças exibiram respostas espontâneas pouco diferentes das apresentadas pelas crianças do nível pré-escolar. Contudo, bastou uma breve instrução sistemática para tornar possível a comparação numérica entre as duas razões, tornando, assim, as suas respostas comparáveis às dos sujeitos de 12-13 anos de idade. Para estes autores esta conclusão não contradiz o facto de Piaget e Inhelder (1951) advogarem a necessidade do conceito de proporcionalidade no estabelecimento de duplas comparações, apenas disponível no estágio das operações formais, pois tal conclusão foi apenas baseada em respostas espontâneas. Diferentemente, no estudo referido destaca-se o efeito da breve instrução que pode constituir um argumento a favor do ensino das probabilidades, mesmo na escola primária.

A partir dos 12 anos, Fischbein (1975) considera que a maioria das intuições primárias desenvolvidas pelas crianças acerca das noções de frequência relativa ou de probabilidade sofrem um forte impulso devido ao próprio progresso desenvolvimental dos alunos e ao efeito de uma instrução formal. Para este autor, e contrariamente ao que pensavam Piaget e Inhelder, a noção de acaso e de probabilidade não deve ser apenas entendida como o resultado da estrutura combinatória, uma vez que encontramos adolescentes que quando lhes é pedido para calcular a probabilidade de um determinado acontecimento ocorrer procuram razões causais que ajudem a diminuir a incerteza desse acontecimento, mesmo em situações onde elas não existem.

De acordo com Fischbein e Gazit (1984), as explicações para esta situação devem procurar-se em tradições culturais e educativas que orientam a sociedade moderna no sentido de que os acontecimentos aleatórios escapam ao conhecimento científico e ainda na necessidade de uma instrução que promova a assimilação de procedimentos combinatórios nas crianças sob pena de que o recurso a este tipo de procedimentos sistemáticos, necessários à compreensão da noção de probabilidade, não passe de um potencial para muitos sujeitos (Godino, Batanero & Cañizares, 1996).

A ênfase dada ao papel da instrução na passagem de um tipo de intuição primária, adquirida pela criança à medida que vai interagindo com situações onde certos conceitos probabilísticos estão presentes, para o outro tipo de intuições secundárias, fruto de actividades planeadas para promover a aprendizagem desses conceitos, está igualmente presente nas preocupações de outros autores (Batanero, 1999; Godino, Batanero & Cañizares, 1996; Lopes, 2003; Shaughnessy, 1992; Scholz & Waller, 1983). Segundo eles, criar oportunidades para esclarecer as intuições iniciais que uma criança formou acerca de um determinado conceito, matemático ou não, são tanto mais cruciais quanto essas intuições iniciais podem dar origem a intuições erradas e, conseqüentemente, a conceitos errados. No caso das probabilidades, esta situação deve merecer particular atenção dado que muitos dos conceitos deste domínio entram em conflito com as intuições primárias iniciais, obrigando a pensar cuidadosamente no modo de fomentar a sua apropriação por parte dos alunos uma vez que ao contrário do que acontece com as proposições matemáticas, que são verdadeiras ou falsas, numa situação de incerteza as proposições não encaixam em tal dicotomia.

Para a maioria dos alunos não é suficiente uma mera explicação teórica do conceito de probabilidade. Sem o utilizar nas suas acções quotidianas e a ele recorrer para fazer previsões, o aluno corre o risco de formar ou continuar a manter intuições incorrectas. Um exemplo de uma intuição secundária mal desenvolvida evidencia-se no recurso à falácia do jogador de sorte-azar em julgamentos de probabilidade. Neste caso, depois de um sujeito ter lançado várias vezes uma moeda ao ar e de lhe ter saído sempre a face cara antecipa que no próximo lançamento tem maior probabilidade de lhe sair a face coroa. Numa versão ligeiramente diferente, em que foram apresentadas várias sequências de resultados de seis lançamentos de uma moeda, esta intuição errada foi também observado em alunos do 11.º ano e estudantes universitários por Fernandes (1990).

Esta conclusão pode resultar de uma interpretação incorrecta da lei dos grandes números (Godino, Batanero & Cañizares, 1996) ou pode ser vista como uma manifestação da crença na representatividade local (Kahneman & Tversky, 1982), pois um jogador, após ter observado várias vezes a ocorrência de um resultado, acredita ser mais provável ocorrer um resultado diferente na próxima jogada. Aqui, o acaso é visto como um processo de auto-correcção, no qual um desvio numa dada direcção provoca um desvio na direcção contrária de modo a restabelecer-se o equilíbrio.

Síntese das perspectivas de Jean Piaget e Efraim Fischbein

Na literatura encontramos frequentemente referida uma oposição entre os trabalhos de Piaget e Inhelder e os de Fischbein. No entanto, parece-nos que a posição mais consequente para compreender como o conceito de probabilidade vai sendo apropriado pela criança e qual o papel da escola nesse desenvolvimento é defendida por Hawkins, Jolliffe e Glickman (1992). Para estes autores as duas perspectivas podem ser entendidas como “as duas faces de uma mesma moeda” (p. 103), podendo colocar-se críticas a ambas as perspectivas, embora de tipo diferente. No caso de Piaget contesta-se o próprio modelo de desenvolvimento da noção de probabilidade e a não generalização e ausência de controlo nos seus estudos. No caso de Fischbein salientam-se também debilidades metodológicas nos seus estudos, designadamente quando não se avaliaram as intuições primárias que as crianças possuíam antes de participarem no estudo, bem como a ausência de um plano experimental que incluísse um grupo de controlo e um grupo experimental que possibilitasse uma comparação entre ambos, concluída a fase da instrução dada às crianças (Shaughnessy, 1992).

Para Shaughnessy, o que fica claro são as potencialidades de uma instrução precoce no progresso das intuições primárias das crianças acerca da noção de probabilidade e de acaso, o que também é destacado por Fischbein, Pampu e Míznat (1975b). Para estes autores não há qualquer oposição entre os resultados obtidos no seu estudo e os obtidos por Piaget e Inhelder (1951), pois os resultados destes últimos foram baseados em respostas espontâneas, o que não aconteceu com os primeiros.

Em relação às críticas feitas às ideias de Piaget e Inhelder relacionadas com o próprio modelo somos tentados a pensar se algumas delas não resultam de um mal entendido acerca da própria obra destes dois autores, como acontece com a discussão acerca se o desenvolvimento da noção de probabilidade é descontínuo. Para esclarecer esta ideia parece-nos fundamental dar atenção à opinião de Lourenço (1994), para quem “o desenvolvimento em Piaget nunca ocorre como transição de uma ausência para uma presença” (p. 63), ou seja, no caso do desenvolvimento da noção de probabilidade não é viável pensar que a criança constrói esta noção partindo do nada, aceitar isto era, “esquecer a sua [de Piaget] perspectiva desenvolvimentista, dialéctica e construtivista” (p. 63).

Uma outra ideia que Lourenço (1994) refere como estando frequentemente associada à anterior é pensar-se no desenvolvimento enquanto um processo de transição de uma ausência para uma presença e não no que de facto Piaget considerou ser uma concep-

tualização em termos de transformação progressiva. Aliás, Piaget e Inhelder (1951), na introdução do seu livro *La Genèse de l'Idée de Hasard chez l'Enfant*, mostram bem como Lourenço (1994) está certo quando dizem:

As operações racionais, na evolução mental da criança, permitem esclarecer a natureza e a génese das ideias de acaso e de probabilidade (...) é bem natural que antes da criança saber a possibilidade e a ordem da interferência de séries causais para um acontecimento não desenvolva a noção de acaso (p. 10).

Como refere Lourenço (1994), “Piaget fala em ausência de evidência de certa competência, não em presença de evidência de determinada incompetência” (p. 10). Esta distinção é importante porque acentua o carácter desenvolvimentista da teoria de Piaget, enquanto processo contínuo de transformação e integração, ou seja, o desenvolvimento em Piaget não é concebido em termos da passagem de uma ausência para uma presença, de um estado em que a criança está completamente vazia de uma determinada noção para um outro estado onde a criança domina essa noção. O que acontece é que as crianças para Piaget “não eram despidas de lógica e competência, mas apenas crianças que não tinham um determinado tipo de lógica e competência, mas que tinham outro” (Lourenço, 1994, p. 5).

Uma crítica que frequentemente também é feita por Fischbein é que as crianças conseguem produzir juízos probabilísticos mais cedo do que Piaget pensava, desde que as situações sejam mais simples do que as estudadas por Piaget (Fischbein & Gazit, 1984; Fischbein et al., 1975a, 1975b; Leake, 1962).

Para Lourenço (1994), é comum interpretar a teoria de Piaget como uma “cronologia de aquisição” (p. 49), dado que os protocolos piagetianos aparecem com certos limites de idade. Contudo, o próprio Piaget (1924, 1967, 1972, 1983, citado em Lourenço, 1994) referiu várias vezes que a idade de aquisição das competências não pode ser um critério de desenvolvimento. Muitos autores que utilizaram tarefas inspiradas em provas piagetianas simplificadas constataram ser frequente as crianças resolverem mais cedo essas tarefas, comparativamente às idades referidas por Piaget.

Lourenço (1994), após ter discutido trabalhos de alguns autores que apresentam uma cronologia de aquisições, por exemplo para a seriação, conservação ou a lógica das proposições, diferente da apresentada por Piaget, defende que “em Piaget é a sequência e não a cronologia que é essencial (...), ou seja, a idade não é um critério apenas um indicador de desenvolvimento” (p. 56), concluindo que “o que precisa ser explicado não é a cronologia de aquisição, mas a sequência de transformação” (p. 57).

Verificamos, assim, que Piaget, quando estudou a noção de acaso na criança, estava interessado em compreender como essa noção emerge, evolui e atinge a maturidade, não se encontrando, ainda hoje, alternativas sólidas às suas ideias (Shaughnessy, 1992). Baixar o nível de exigência das situações para captar mais cedo sinais mínimos de certas competências não parece ser a solução mais adequada se queremos captar fielmente formas dis-

tintas de operatividade, onde seja nítida a presença de um elemento de necessidade lógica (Lourenço, 1994).

Pelo que atrás foi referido podemos pensar que são menos as divergências entre Piaget e Inhelder e Fischbein do que uma leitura mais desatenta poderia sugerir. Mesmo em relação à importância da instrução e do contexto social no desenvolvimento da noção de probabilidade, Piaget e Inhelder não descuidaram a sua importância, afirmando-se que “a mentalidade de uma criança é sempre relativa ao meio social e ambiente em que vive” (Piaget & Inhelder, 1951, p. 9). Não podendo ser-se igualmente desatento à influência da evolução das estruturas lógicas do sujeito na compreensão das noções matemáticas, pois, como adverte Bruner (1997), “as opiniões de Piaget devem sempre ser levadas a sério” (p.139). Mas, como vimos, essa instrução não deverá estar limitada a uma mera transmissão de teoria, o que conduz à questão de como ensinar as ideias probabilísticas às crianças.

Algumas implicações para a sala de aula

Segundo Jones e Thornton (2005), em consequência dos estudos de Piaget, houve algumas tentativas sérias para introduzir as Probabilidades no currículo escolar. Por outro lado, as investigações de Fischbein e seus colaboradores influenciaram decisivamente o currículo e as actividades de ensino em probabilidades que emergiram durante os últimos 15 anos.

Fischbein e Gazit (1984) implementaram um programa de ensino de probabilidades num grupo experimental constituído por alunos do 5.º, 6.º e 7.º anos de escolaridade (entre os 10 e os 13 anos de idade). Para estes autores, as novas atitudes intuitivas apenas se podem desenvolver num ambiente de envolvimento pessoal do aprendiz numa actividade prática, nunca podendo ser modificadas apenas através de explicações verbais. Neste sentido, afirmam:

Um programa de ensino que tencione desenvolver um substrato intuitivo aperfeiçoado e eficiente para os conceitos e estratégias em probabilidades, conjuntamente com o correspondente conhecimento formal, deve proporcionar ao aprendiz oportunidades frequentes para experienciar activamente, mesmo emocionalmente, situações estocásticas. Nestas situações, o aprendiz confrontará as suas expectativas plausíveis com resultados obtidos empiricamente. (Fischbein & Gazit, 1984, pp. 2-3)

Analogamente, uma estratégia centrada na actividade dos alunos, na formulação de palpites, no confronto dos seus palpites com dados recolhidos e organizados pelos alunos e na construção de modelos probabilísticos teóricos que acomodassem os dados empíricos recolhidos, implementada por Shaughnessy (1977) em alunos universitários, revelou-se eficiente para ajudar os alunos a ultrapassarem algumas das suas concepções erradas. Também uma estratégia de ensino alicerçada em diferentes perspectivas do conceito de probabilidade, principalmente as perspectivas clássica e frequentista, na utilização de ob-

jectos aleatórios concretos, na exploração de analogias, em representações facilitadoras da contagem (Fischbein, Pampu e Mínzat, 1975b), na organização de sistemas de tarefas (Steinbring, 1991), em aspectos lógicos e no desenvolvimento de uma interacção intensa dos alunos entre si e entre os alunos e o professor, implementada por Fernandes (1999) em alunos do 9.º ano, mostrou-se mais eficaz do que uma estratégia tradicional em relação às intuições probabilísticas, às respostas correctas e ao cálculo de probabilidades.

Quando pensamos na complexidade do pensamento probabilístico facilmente aceitamos, ou deveríamos aceitar, que não pode ser trabalhado segundo práticas tradicionais de sala de aula nem tão pouco ensinado de modo convencional. A impossibilidade de ensinar este tópicos curricular de acordo com “os cânones tradicionais, sob os quais assenta um entendimento mais clássico (...) e uma visão determinista do mundo” (Almeida, 2000, p. 25), obriga muitos professores de Matemática a aceitar o desafio de terem de “suprir a sua deficiente formação neste domínio” (Almeida, 2000, p. 26), investindo no seu desenvolvimento pessoal e profissional. Porém, este desenvolvimento profissional do professor acontece num contínuo movimento de dentro para fora e tende a considerar a teoria e a prática de forma interligada onde uma não se sobrepõe à outra (Ponte, 1998), tanto mais que este processo de desenvolvimento e de mudança depende do próprio professor, quando está insatisfeito com os seus conhecimentos ou se questiona sobre a sua prática, procurando melhorar os seus desempenhos.

Nesta procura de mudança, frequentemente, o professor envolve-se em projectos, cursos ou encontros onde é necessário valorizar as suas experiências pessoais, os seus saberes, as suas práticas, mas também discutir as suas concepções, valores e conhecimentos. O professor é um elemento essencial na criação do ambiente que se vive na sala de aula, cabendo-lhe “a responsabilidade de propor e organizar as tarefas e de coordenar o desenvolvimento das actividades dos alunos” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 28). Mas para isso o professor deve estar atento e não ignorar as experiências e conhecimentos prévios dos seus alunos e ainda promover a reflexão dos alunos acerca dessas experiências e desses conhecimentos. A interacção e a negociação passam assim a ter um papel fundamental no processo de construção de significados por parte dos alunos. O êxito deste processo de negociação depende também de o professor estar atento ao facto do próprio conceito de probabilidade ser um conceito contra-intuitivo, gerando, por isso mesmo, confusões entre os alunos e, nalguns casos, no próprio professor (Hawkins, Jolliffe & Glickman, 1992).

Pôr em prática as actuais sugestões dos currículos e dos documentos de política educativa para o ensino das probabilidades significa criar novas tarefas, promover interacções horizontais (aluno/aluno) e verticais (professor/aluno), conseguir explorar estratégias de resolução dos alunos, colocar perguntas suficientemente estimulantes de forma a envolvê-los nas actividades propostas. Como refere Azcárate (1996), em relação à probabilidade, não devemos somente percebê-la por meio de uma definição matemática pois a dificuldade dos alunos reside na interpretação e aplicação do conceito em situações concretas. Esta ideia é também defendida Shaughnessy (1992), quando preconiza a explora-

ção de exemplos reais e que vão de encontro aos interesses e às motivações dos alunos, e é reforçada nas palavras de Lopes (2003), quando diz:

O desenvolvimento do pensamento probabilístico requer o reconhecimento de situações de acaso na vida quotidiana e no conhecimento científico, bem como a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenómenos aleatórios simples e na planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de factos que abarquem o azar (p. 65).

A planificação das actividades a propor aos alunos terão assim de partir de situações concretas onde se observem, registem e analisem fenómenos aleatórios presentes, como é o caso dos muitos dos jogos de azar presentes nas brincadeiras das crianças. Em muitas destas situações parece fundamental que o aluno possa comparar as suas previsões com o que realmente acontece, sendo o diálogo e a interacção que se estabelece entre os diversos actores o motor que rentabiliza uma actividade que só por si pouco pode ajudar ao desenvolvimento das intuições do aluno acerca das probabilidades. Mais, “actividades em torno do conceito de probabilidade têm o potencial de evidenciar diversas conexões matemáticas, permitindo que os alunos utilizem, entre outras, noções relativas a fracções, percentagens, proporções e números decimais” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 97).

Como vimos o conceito de probabilidade é complexo e desenvolve-se gradualmente ao longo de um período de tempo considerável. O meio, e em particular a escola, tem um papel fundamental nesse desenvolvimento e, tal como acontece com muitos outros conceitos, o conceito de probabilidade só é simples na sua aparência, acabando por se revelar uma fonte de dificuldades para muitos sujeitos. Mais do que saber definições importa saber lidar com os conceitos em situações concretas e em contextos variados. Compreender o que significam situações onde estejam presentes noções probabilísticas faz hoje parte da competência que todos devem desenvolver para poderem desempenhar o papel de cidadãos críticos e participativos.

Referências

- Abrantes, P.; Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Almeida, R. (2000). *Imagens sobre o ensino e a aprendizagem da Estatística*. Dissertação de não publicada, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno de las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Comares.
- Batanero, C. (1999). *Didáctica de la probabilidad y de la estadística*. Granada: Universidade de Granada.
- Batanero, C. (2004). *Ideas estocásticas fundamentales: ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad?* In J. A. Fernandes, M. V. Sousa e S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de pro-*

- habilidades e estatística — Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Borovcnik, M., Bentz, H.-J. & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27–71). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Branco, J. (2000). A Estatística no secundário: o ensino e seus problemas. In C. Loureiro, O. Oliveira e L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 11–30). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Bruner, J. (1997). *Actos de Significado: para uma psicologia cultural*. Lisboa: Edições 70.
- Carvalho, C. (2001). *Interações entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade*. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.
- Fernandes, J. A. (1990). Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Fernandes, J. A. (1999). Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade. Tese de doutoramento não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1–24.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fischbein, E., Pampu, I. & Mînzat, I. (1975a). The child's intuition of probability. In E. Fischbein, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix II, pp. 156–174). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (Artigo publicado em 1967).
- Fischbein, E., Pampu, I. & Mînzat, I. (1975b). Comparison of ratios and the chance concept in children. In E. Fischbein, *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix III, pp. 175–188). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company (Artigo publicado em 1970).
- Godino, J.; Batanero, C. & Cañizares, M. (1996). Azar y probabilidad. Madrid: Editorial Síntesis.
- Green, D. (1982). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16. In D. Green et al. (Eds.), *Proceedings of the first International Conference on Teaching Statistics* (Vol. II). Sheffield: Teaching Statistics Trust.
- Hawkins, A. & Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability — a psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 349–377.
- Hawkins, A; Jolliffe, F. & Glickman, L. (1992). *Teaching Statistical Concepts*. London: Longman.
- Jones, G. A. & Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 65–92). New York: Springer.
- Kahneman, D. & Tversky, A. (1982). Subjective probability: A judgment of representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 32–47). Cambridge: Cambridge University Press.
- Leake, L. (1962). The status of three concepts of probability in children of the seventh, eighth, and ninth grades (Doctoral dissertation, University of Wisconsin, 1962). *Dissertation Abstracts*, 23, 2010.
- Lopes, C. (2003). O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil. Campinas: Universidade Estadual de Campinas.
- Lourenço, O. (1994). *Além de Piaget? Sim, mas devagar*. Coimbra: Livraria Almedina.

- Ministério da Educação (1991b). *Programa de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Autor.
- Munisamy, S. & Doraisamy, L. (1998). Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 29 (1), 39–45.
- Nisbett, R. & Krantz, D. (1983). The use of statistical heuristics in everyday inductive reasoning. *Psychological Review*, 90(4), 339–363.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Ponte, J. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In Comissão Organizadora do ProfMat 98 (Ed.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 27–42). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Scholz, R. W. & Waller, M. (1987). Conceptual and theoretical issues in developmental research on the acquisition of the probability concept. In R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty: Cognitive decision research, social interaction, development and epistemology* (2nd ed., pp. 291–311). Amsterdam: Elsevier Science Publishers.
- Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small group, activity-based, model building approach to introductory probability at college level. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 295–316.
- Shaughnessy, M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 177–197). Nova York: Macmillan Publishing.
- Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia & M. Borovnik (Eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 135–167). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Way, J. (2003). *The development of young children's notions of probability*. Comunicação apresentada no subgrupo 5 — Statistical Thinking da 54.ª Conferência do CIEAEM, realizada em Bellaria (Itália) em Fevereiro de 2003.

Resumo. Na sociedade actual lidar com a noção de probabilidade tornou-se uma necessidade de qualquer cidadão para conseguir interpretar muitos dos eventos com que é confrontado nos mais variados contextos da sua vida. Em resposta a essa necessidade, tem sido introduzido nos currículos da generalidade dos países o seu estudo, enquanto meio de compreender a incerteza inerente a tais eventos, esperando-se que os alunos pensem, apreendam e descrevam a realidade de uma forma não determinista. Para planear actividades e situações que ajudem os alunos a construir um conceito tão complexo como o de probabilidade é fundamental o professor compreender como esse conceito se desenvolve ao longo da vida da criança e do adolescente. Encontrar na literatura explicações sobre o modo como este conceito evolui leva-nos até aos trabalhos de Piaget e Fischbein e seus colaboradores, sobre os quais nos debruçamos neste artigo com o objectivo de daí retirar algumas implicações para a sala de aula.

Palavras-chave: Conceito de probabilidade; Perspectiva de Piaget; Perspectiva de Fischbein; Ensino de probabilidades.

Abstract. In today's society all citizens need to deal with the notion of probability in order to interpret many of the events they face in the various contexts of their life. In response to this need, its study has been introduced in the curricula of most countries as a way of understanding inherent uncertainty of these events, hoping that students think, apprehend and describe reality in a non-deterministic manner. To plan activities and situations that help students construct a concept as complex as that of probabili-

ty, it is essential that the teacher understand how this concept evolves throughout the life of a child and teenager. The search in the literature for explanations about the way this concept develops takes us to the works of Piaget and Fischbein and collaborators, which we shall analyse in this paper with a view to drawing certain implications for the classroom.

Keywords: Probability concept; Piaget's view; Fischbein's view; Teaching of probability.

■ ■ ■

CAROLINA CARVALHO

Centro de Investigação em Educação
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
cfcarvalho@fc.ul.pt

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES

Centro de Investigação em Educação
Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho
jfernandes@iep.uminho.pt