A integração de tarefas de investigação no ensino e aprendizagem das sucessões

Magda Pereira
Escola EBI c/ JI da Amareleja

Manuel Joaquim Saraiva
Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior
Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Introdução

Um dos objectivos do estudo que serviu de base a este artigo era analisar a forma como as investigações matemáticas se poderiam articular com outro tipo de tarefas e estudar a aprendizagem e o desempenho dos alunos daí resultante. Nele foram tidas em conta as orientações curriculares e a professora (a primeira autora do presente artigo) assumiu também o papel de investigadora, actuando como agente reflexiva da sua própria prática profissional.

A primeira secção deste artigo apresenta o enquadramento teórico do estudo realizado. Na segunda secção é referida a metodologia seguida, de natureza qualitativa e interpretativa. A terceira secção apresenta a proposta pedagógica implementada no estudo. Os resultados desta investigação são apresentados na quarta secção e referem-se i) à integração de tarefas de investigação no ensino e aprendizagem das Sucessões, realçando-se a possibilidade do cumprimento do programa (no sentido da leccionação dos conteúdos matemáticos prescritos); ii) à natureza aberta das tarefas e o desenvolvimento de competências transversais e de conexões matemáticas; e iii) à importância para a aprendizagem dos alunos das apresentações que eles fazem a toda a classe e das discussões colectivas daí resultantes. Na quinta, e última, secção do artigo são apresentadas as conclusões.

As investigações matemáticas

A criação matemática e as tarefas de investigação

A Matemática desempenha um papel muito importante nas diversas actividades humanas e é o motor de muitas outras ciências. Para Davis e Hersh (1995), isto resulta de uma imposição do próprio Universo, que se exprime na linguagem matemática alicerçada em símbolos. Estes usam-se para designar e comunicar com clareza as representações mentais dos conceitos matemáticos, e servem quer para efectuar cálculos, quer para interpretar resultados, ao associar-se a um símbolo um conceito ou uma imagem mental. A linguagem matemática assume-se, assim, com um papel importante para o desenvolvimento desta ciência.

No entanto, não é possível falar no desenvolvimento da Matemática sem falar na demonstração. Com ela atinge-se a verdade matemática, através do raciocínio dedutivo e da lógica. Para Braumann (2002), porém, a demonstração matemática não pode ser separada de aspectos como a intuição e a experimentação:

> Antes de demonstrar uma proposição matemática (teorema), é preciso enunciar o teorema a demonstrar. Como se chega lá? Que problema é que ele resolve? Que mecanismos intuitivos, associados por vezes a métodos de tentativa e erro, que razões estéticas, até, nos levam a pensar que a proposição é verdadeira? E depois de sabermos o que demonstrar, que estratégias usar para o demonstrar? (p.6).

A exploração matemática, a descoberta de estratégias, a tentativa e o erro são, assim, processos inerentes à investigação matemática e imprescindíveis à sua criação e ao seu próprio desenvolvimento. A este respeito, Poincaré (1996) afirma que a criação matemática consiste precisamente em discernir e escolher de entre as possíveis combinações com entes matemáticos já conhecidos, tratando-se de uma selecção e escolha, onde a intuição desempenha um papel muito importante. Investigar em Matemática é, pois, descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos, procurando identificar e provar as respectivas propriedades (Ponte, 2003).

Relacionando a criação e a técnica matemáticas, Almeida (1994) afirma que aprender a criar é sempre mais difícil do que aprender (ou assimilar) uma técnica de raciocínio. Para a criação, a imaginação pode dar um contributo fundamental, pois ela requer abstracção e implica um esquema mental para além do que se percepciona fisicamente. Para este autor, diversificar experiências e promover a reflexão (individual e colectiva) são métodos que gradualmente habituam os alunos a pensar matematicamente. Este processo é contínuo e, para que se desenvolva em cada indivíduo, é necessário que ele saiba adoptar estratégias e métodos que lhe permitam resolver e ultrapassar cada dificuldade sentida. Dessa forma, a experiência vai aumentando quer no que refere à demonstração ou resolução do problema em causa, quer no que refere ao desenvolvimento da própria capacidade de intuir — um percurso delicado e algo tumultuoso. Nesta perspectiva, resolver tarefas de investigação matemática — caracterizadas pelo seu enunciado geral, pouco definido e acompanhado de um conjunto de dados pouco estruturados — permite a exploração de situações através de construções visuais e analíticas, importantes e úteis ao próprio processo de criação matemática. Por outro lado, permite a extensão da linguagem natural à linguagem matemática, através das representações simbólicas de conceitos abstractos e da sua consequente articulação e comunicação.

Schoenfeld (1996) refere que modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar são actividades com verdadeiro sentido matemático, ou seja, aquilo que a Matemática realmente é. Este tipo de pensamento, fomentado na actividade investigativa, é o que se espera ver desenvolvido nos alunos e as investigações matemáticas tornam-se, assim, um veículo para que tal se concretize.

As investigações no currículo e na aula de Matemática

Mais importante do que saber o que contém um currículo é saber como ele é implementado. Segundo Pires (1999), currículo pode ser encarado como uma prática, mais do que um resultado ou um produto, e como um processo em construção e inacabado. De igual modo, Stanic e Kilpatrick (1989) afirmam que o currículo não é o que vem estabelecido nos documentos oficiais, pois estes constituem apenas um esquema de um currículo a realizar. Torna-se, assim, necessário que o professor modele tais orientações oficiais às condições intrínsecas à sua prática. Esta modelação é condicionada pela sua própria experiência e formação, o que exige ao professor uma enorme capacidade de decisão, de autonomia, de espírito crítico e de reavaliação acerca de concepções e saberes interligados com a própria Matemática.

Quando o professor selecciona ou elabora uma tarefa de investigação tem de ter em conta os interesses dos alunos, bem como as suas formas de aprendizagem (NCTM, 1991). É importante que se lembre de aspectos tais como: i) a Matemática deve ser aprendida dando significado às ideias, aos símbolos e às fórmulas matemáticas; ii) os alunos aprendem através de uma variedade de métodos diferentes; iii) o desenvolvimento da compreensão e das aptidões matemáticas dos alunos é muito importante; iv) a promoção da predisposição para todos os alunos fazerem Matemática é fundamental; v) a comunicação matemática tem de ser promovida; e vi) a Matemática deve ser apresentada como uma actividade em permanente evolução. Quanto à integração das tarefas de investigação no currículo e na aula de Matemática, Cunha, Oliveira e Ponte (1995) afirmam que a troca de ideias e de opiniões entre professores e a experimentação de protótipos de tarefas de investigação são componentes que poderão enriquecer as propostas de trabalho. Segundo estes autores, nas questões a propor aos alunos há que atender aos aspectos de natureza curricular e a algumas questões associadas ao modo de introduzir este tipo de tarefas nas aulas. Assim, é necessário ter em conta: i) a estrutura das questões e o seu potencial valor nos diversos graus de ensino; ii) a proposta colocada, como suporte de outra aprendizagem ou valendo-se a si mesma; iii) o tipo de apoio a dar aos alunos; iv) a promoção de discussão entre eles; v) e a avaliação deste tipo de actividade.

Neste sentido, a planificação de actividades de investigação exige que o professor faça um trabalho reflexivo, de investigação e de reavaliação, acerca das suas concepções e dos seus saberes interligados com a própria Matemática. A preocupação em reflectir encaminha o professor, na maioria das situações, a um questionamento sistemático da sua própria actuação enquanto educador, inserido em contextos próprios que particularizam cada escola, cada ambiente de trabalho e cada vivência. Segundo Schön (1992), um professor reflexivo permite-se ficar surpreendido com o que o aluno diz e faz. Em seguida, pensa sobre aquilo que o aluno disse ou fez, tentando compreender a razão porque ficou surpreendido. Posteriormente, reformula o problema originado pela situação. Por último, implementa uma experiência que teste a sua hipótese, como, por exemplo, colocando uma nova questão ao aluno (para que deste modo consiga concluir acerca da hipótese que colocou e acerca do modo de pensar desse aluno).

Goldenberg (1996) refere que as investigações matemáticas introduzem alguma variedade na *dieta* da aula, sobretudo quando os alunos recorrem à visualização e discutem a actividade com os colegas. Indica quatro funções essenciais das investigações: i) questionar, ii) explorar, iii) descobrir, e iv) diversificar. Investigar permite colocar em questão uma série de conjecturas iniciais que posteriormente se aceitam ou refutam através de um contínuo processo de questionamento. Permite, de igual forma, explorar e descobrir conexões matemáticas existentes entre os vários conceitos e conteúdos que são postos à consideração e discussão. Pela natureza aberta, a resolução de uma tarefa de investigação permite seguir diversos caminhos e estratégias. Para Goldenberg, investigar pode funcionar como uma actividade lúdica. A interacção entre os membros de cada grupo de trabalho na sala de aula e a comunicação de saberes, conjecturas e descobertas, quer ao professor, quer aos outros grupos de trabalho, funciona como um jogo de competitividade saudável.

Barbedo e Simões (2003) implementaram uma tarefa de investigação com base numa visita, com os alunos de uma delas, à exposição *Simetria — Jogos de espelhos*. Concluíram que a preparação de uma tarefa de investigação é, em si mesma, uma actividade investigativa para o professor, pois este reflecte acerca das suas próprias concepções de Matemática, saberes de conteúdo e saberes didácticos.

Por vezes existe algum receio, por parte dos professores, em implementar investigações matemáticas nas suas aulas. No entanto, têm sido desenvolvidas experiências profissionais que podem ser úteis aos professores que pretendem iniciar, ou mesmo continuar, o trabalho de integração de investigações nas aulas de Matemática. Segurado (1997) implementou investigações matemáticas nas suas aulas e concluiu que, inicialmente, os alunos mostraram-se algo dependentes e receosos mas, com o decorrer da resolução das tarefas, já se mostravam bastante autónomos e desenvolviam as capacidades de realizar investigações, de argumentar e comunicar matematicamente. Brocardo (2001), no seu estudo, concluiu que, no início, os alunos tinham dificuldade em entender a investigação como um todo mas, com a experiência continuada de realização de novas tarefas, passaram a relacionar melhor as observações iniciais e a clarificar o foco da investigação, acabando por alcançar uma boa compreensão deste tipo de trabalho.

Teixeira, Pereira, Saraiva, Marques e Xistra (2003) estudaram a implementação de investigações matemáticas nas aulas, enquadradas com outro tipo de tarefas, como a resolução de problemas e de exercícios. Fizeram-no nas Unidades dos Números e Cálculo (7º ano de escolaridade), da Geometria (9º ano de escolaridade) e das Funções (11º ano de escolaridade). Das conclusões que retiraram destacam-se as seguintes:

> Nestas aulas os alunos revelaram um maior envolvimento com o trabalho matemático, assumindo um papel mais activo. Com o auxílio da calcu-

> ladora gráfica (11º ano) tiveram oportunidade de analisar os gráficos das funções, fazendo conjecturas e argumentando. Para além dos objectivos propostos para estas tarefas, os alunos desenvolveram a capacidade de comunicação, de reflexão e do raciocínio matemático. Permitiu o desenvolvimento de competências matemáticas e sociais que são uma mais valia para os alunos, facilitando o desenvolvimento de outros conhecimentos.
>
> As tarefas de investigação mobilizaram, em geral, todos os alunos, embora esse envolvimento se tenha processado de forma diferente, consoante a relação que os alunos mantinham com a Matemática. Todos eles, porém, manifestaram, ao princípio, algum receio com este novo tipo de actividade matemática — mesmo os bons alunos, muito provavelmente pela abertura das tarefas, pois elas fugiam da natureza mais fechada da generalidade das tarefas matemáticas com as quais eles se relacionavam e com as quais têm tido sucesso. (p. 326)

Para estes autores, com o trabalho matemático desenvolvido nestas aulas — onde as tarefas de investigação foram integradas com tarefas de outro tipo como a resolução de problemas e de exercícios —, os alunos fizeram uma aprendizagem não só ao nível conceptual mas também ao nível do desenvolvimento de capacidades, tais como as da conjecturação, argumentação e comunicação matemáticas. Também Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), com base em experiências já realizadas com a introdução de tarefas de investigação na sala de aula de Matemática, afirmam que os alunos têm mostrado aprendizagens de grande alcance e um aumento do entusiasmo pela Matemática. Porém, e de forma clara, referem que não encaram a introdução das investigações matemáticas na sala de aula como "a poção mágica" para a resolução dos problemas do ensino da Matemática. Segundo eles, há que ter em conta, entre outros aspectos, os da comunicação e linguagem e os das TIC na criação de novas situações de aprendizagem.

Apesar dos alunos apresentarem algumas dificuldades ao nível da organização dos dados, da selecção e implementação de estratégias e da compreensão do que é o trabalho investigativo, a investigação diz-nos que eles mostram progressos assinaláveis com uma experiência prolongada neste tipo de actividade, que lhes permite ultrapassar, mais facilmente, determinadas dificuldades. Aumenta, assim, a convicção sobre a importância, utilidade e possibilidade da implementação de tarefas de investigação, integradas com outro tipo de tarefas, na aula de Matemática.

Metodologia

Este estudo seguiu uma metodologia qualitativa-interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994; Lüdke & André, 1986; Ponte, 2002), pois procurava-se compreender o processo de integração de tarefas de investigação nas aulas de Matemática, mais do que encontrar leis ou generalizações sobre essa realidade.

A professora assumiu em simultâneo a função de investigadora, actuando como agente reflexiva da sua prática profissional. Esta dupla função é exigente e requer muito discernimento, pois colocam-se à professora/investigadora situações relacionadas com o seu grau de participação no trabalho e com o seu papel no decorrer da actividade matemática dos alunos. Assim, teve necessidade de actuar como investigadora participante no trabalho dos alunos (de acordo com as necessidades por eles manifestadas, de modo a intervir em benefício da aprendizagem dos mesmos) e como simples observadora nos momentos em que teve de se distanciar da actividade dos alunos. Segundo Lüdke e André (1986), esta dialéctica decorre como um "*continuum* que vai desde uma imersão total na realidade até a um completo distanciamento" (p. 28).

O estudo realizou-se ao longo do ano lectivo de 2002/03, envolvendo uma turma de alunos da professora do 11º ano de escolaridade, de uma escola secundária de uma cidade da zona centro de Portugal. A turma era constituída por 22 alunos residentes na cidade e nas localidades vizinhas, num raio de 5 a 10 quilómetros. A maioria dos alunos pertencia a um meio socio-económico médio e, em geral, faziam depender o seu gosto pela Matemática da simpatia que nutriam pelo professor que lhes leccionava a disciplina, nomeadamente da forma como ele explicava os assuntos. Reconheceram que a sua falta de empenho e de estudo se devia à desmotivação proveniente das dificuldades que sentiam. Esta situação arrastava-se há anos e fazia com que eles tivessem pouco sucesso a Matemática. Apenas três alunos da turma afirmaram gostar muito desta disciplina e de terem necessidade de a estudar diariamente para conseguirem acompanhar os assuntos leccionados nas aulas. A Matemática, para os alunos desta turma, é a disciplina mais trabalhosa do seu plano curricular e isso faz com que por vezes seja difícil obter resultados satisfatórios. Os alunos trabalharam nas tarefas de investigação organizados em cinco grupos.

Os dados recolhidos centraram-se em torno de cinco tarefas de investigação matemática, integradas no tema Sucessões. A sua recolha foi feita através i) de relatórios escritos pelos alunos (que continham as resoluções das tarefas, efectuadas em grupo); ii) de reflexões críticas escritas pelos alunos (realizadas de modo individual, após a realização de cada tarefa de investigação); iii) de notas de campo efectuadas pela professora/investigadora no seu diário de registos (ao longo de todo o processo, desde o período de elaboração das tarefas e do seu enquadramento curricular até à última entrevista realizada); e iv) de entrevistas realizadas a dez alunos, após as aulas com investigações (em grupos de dois, em que os alunos foram seleccionados aleatoriamente de entre os elementos de cada um dos cinco grupos). As entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas.

Neste estudo, a identidade dos alunos envolvidos foi preservada e a professora/investigadora identificou os alunos com pseudónimos adaptados a cada um deles. A totalidade dos alunos concordou com a divulgação dos dados e dos resultados, compreendendo que tal facto não agiria em seu prejuízo. Consequentemente, a investigadora preservou, ao longo da investigação (quer na fase da apresentação do desenrolar de cada experiência, quer na fase da divulgação dos resultados), a regra do anonimato. Cumpriu, de igual modo, com todos os outros pressupostos éticos, previstos como requisitos de qualquer estudo, tais como a voluntariedade com que os sujeitos aderiram à investigação e, consequentemente, o conhecimento prévio (por parte dos mesmos) da natureza do estudo, bem como o respeito constante por cada elemento do estudo aquando da recolha e da análise dos dados.

A primeira fase do estudo foi a da elaboração e do enquadramento das cinco tarefas no currículo da disciplina, que decorreu em fase anterior à implementação das tarefas nas aulas (*As Sequências de Fibonacci*, *Sucessões com fósforos*, *Viagens pelo Mundo*, *Os Números Pitagóricos* e *A Tabela de Números*).

A segunda fase do estudo consistiu na implementação das tarefas de investigação na aula de Matemática (durante o final do segundo Período e grande parte do terceiro) e a preparação e realização das entrevistas aos alunos.

A terceira e última fase do estudo foi a da análise dos dados recolhidos acompanhada da reflexão sobre todo o processo. Porém, a reflexão e a análise dos dados acompanharam todo o estudo de forma transversal, desde o período da elaboração e do enquadramento das tarefas, passando pelo período da implementação (reflexão na acção), até à fase posterior à implementação (reflexão após a acção e sobre a reflexão na acção).

Fizeram-se três tipos de análise. O primeiro foi o da compilação dos dados referentes a cada uma das tarefas (a concepção e elaboração, as aulas, as entrevistas e as reflexões). Os dados assim organizados foram agrupados em quatro categorias, de acordo com o problema do estudo, os pressupostos teóricos e o trabalho empírico desenvolvido — i) *A integração das tarefas no currículo*, ii) *as situações problemáticas que antecedem a tarefa de investigação*, iii) *o modo de exploração das tarefas* e iv) *a reflexão*. Após esta primeira análise, seleccionaram-se os dados mais representativos referentes a cada uma das cinco tarefas e organizaram-se, com alguma problematização, segundo as quatro categorias definidas, obtendo-se cinco grandes blocos. A análise de terceira ordem tem por base a leitura transversal, por categorias, dos cinco blocos e de acordo com as questões do estudo, permitindo colocar questões e relacioná-las.

A proposta pedagógica do estudo

Conteúdos matemáticos

No programa oficial vigente da disciplina de Matemática do 11º ano de escolaridade, emanado pelo Ministério da Educação, é várias vezes frisada a importância de desenvolver nos alunos capacidades, tais como: usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real; formular e resolver problemas; comunicar com rigor, espírito crítico e criatividade; desenvolver o raciocínio e o pensamento científico. Este desenvolvimento deve fazer-se acompanhar de um conjunto de valores e atitudes que permitam ao aluno ganhar hábitos de trabalho e de persistência, aumentando a confiança em si próprio, o sentido de tolerância e cooperação, bem como o sentido da responsabilidade. No que refere a conhecimentos gerais do 11º ano, importa aprofundar (em cada tema a tratar e ao longo do ano lectivo) o conceito de número e os conhecimentos de Geometria, Análise Infinitesimal, Estatística, Probabilidades e Contagem, assim como os da História da Matemática.

Neste contexto, na planificação da unidade didáctica das Sucessões, a professora/investigadora pressupôs o aluno como o principal agente da sua própria aprendizagem e considerou ser importante o desenvolvimento de determinadas capacidades, com base na própria experiência, tais como: o raciocínio, a comunicação e o uso da Matemática na interpretação e intervenção do real. Nesta perspectiva, as tarefas de investigação foram planificadas segundo duas vertentes: i) *A construção de conceitos novos* e ii) *a investigação com base em conceitos já conhecidos*. No que refere à primeira vertente foi adaptada a tarefa de investigação *As Sequências de Fibonacci*, uma situação da natureza, publicada por Fibonacci no século XIII. Um dos principais objectivos desta tarefa era a aprendizagem do método de recorrência. Esta foi a primeira tarefa de investigação a ser proposta aos alunos. Porém, antes de lhe dar início, foram propostas algumas situações problemáticas destinadas a introduzir o conceito de sucessão.

No que se refere à vertente *A investigação com base em conceitos já conhecidos*, a professora/investigadora considerou a ligação da Matemática a questões de cariz prático, interdisciplinares e internas à Matemática. Em relação à primeira foi elaborada a tarefa de investigação *Os Fósforos* — uma tarefa destinada à consolidação do conceito de sucessão, definida à custa de uma expressão para o termo geral, ou definida por recorrência. Pretendia-se que os alunos aplicassem, em situações práticas e construídas por eles, o conceito de sucessão estudado nas aulas que precederam imediatamente a resolução desta tarefa (que foram as duas aulas de 90 minutos dedicadas à resolução e discussão da tarefa *As Sequências de Fibonacci*).

Relativamente à ligação da Matemática com questões interdisciplinares foi concebida e implementada a tarefa *Viagens pelo Mundo*, destinada a exemplificar junto dos alunos a necessidade do uso das sucessões na vida quotidiana. Pretendia-se que construíssem uma fórmula que permitisse unir todas as zonas, cidades e localidades (assinaladas nesse mapa) por um caminho, sem ficarem zonas, localidades ou cidades por unir. Esta tarefa foi implementada após três aulas destinadas ao estudo e à exercitação dos conceitos inerentes à monotonia de uma sucessão, sucessão limitada e limite de uma sucessão (a exploração destes temas foi feita em exposição dialogante entre a professora/investigadora e toda a classe) e uma quarta aula destinada à realização de um teste escrito para avaliação. A tarefa *Viagens pelo Mundo* é uma investigação com possíveis readaptações no 12º ano de escolaridade (aquando do estudo do cálculo combinatório) e em cursos superiores (no âmbito da Teoria de Grafos). Pretendia-se que os alunos descobrissem e aplicassem, fazendo alusão à Geografia, propriedades existentes entre alguns números (nomeadamente os números triangulares) e respectiva conexão geométrica, baseando os seus raciocínios nos conceitos estudados no âmbito das sucessões (atrás referidos). Após a implementação desta tarefa foram dedicadas duas aulas de 90 minutos à exposição dialogante do conceito de progressão aritmética, seguida de resolução de exercícios e de problemas (do manual adoptado).

Em relação a questões internas à Matemática foram elaboradas as tarefas de investigação *Os Números Pitagóricos* e *A Tabela de Números*. A primeira destas teve como finalidade descobrir fórmulas de vários números pitagóricos, proporcionando, por um lado, o aprofundamento do conhecimento histórico ao nível da Matemática (útil para a fundamentação da própria investigação e consequentemente para o envolvimento dos alunos) e, por outro, o estudo de modo aprofundado das relações existentes entre os números. Assim, os alunos poderiam dar seguimento às explorações iniciadas na tarefa de investigação anterior (*Viagens pelo Mundo*), nomeadamente no que refere às propriedades existentes em certas sucessões numéricas (como as dos números quadrados, pentagonais, hexagonais, entre outros). A tarefa *A Tabela de Números* (ver anexo), a última tarefa de investigação deste estudo, foi antecedida por uma tarefa de exploração (realizada numa aula de 90 minutos) destinada a introduzir o conceito de progressão geométrica. Consta de uma tabela, aparentemente simples, mas que permite uma grande diversidade de explorações, no âmbito das sucessões. Pretendia-se que os alunos aplicassem e descobrissem conexões, de modo livre, relativas a qualquer conceito ou raciocínio (estudado no tema das sucessões ou num outro tema), apresentando as suas resoluções de forma clara, em linguagem matemática e em texto corrente. Após a implementação da tarefa *A Tabela de Números*, a professora/investigadora dedicou duas aulas ao estudo do número de Nepper e três aulas à resolução de problemas e exercícios sobre todo o tema das sucessões.

A proposta implementada

Na fase de planificação do trabalho, a professora/investigadora considerou, de modo transversal, o desenvolvimento de valores e atitudes. Assim, foram planificadas aulas para a resolução e para a discussão de cada tarefa, pressupondo o desenvolvimento da confiança, de hábitos de trabalho e persistência, do sentido da responsabilidade, do espírito de tolerância e de cooperação. Os momentos destinados à resolução de cada tarefa em grupo realçariam a importância que determinados valores assumem no processo de aprendizagem dos alunos, tais como: a partilha de saberes e de responsabilidades dentro do seio de cada grupo; o respeito pela opinião do outro e pelas diferenças que surjam dessa opinião. Por outro lado, a elaboração de um relatório escrito, com as resoluções dos alunos, evidenciaria a importância de determinadas atitudes na aprendizagem, tais como: a procura de informação necessária a cada resolução; o desenvolvimento da persistência na procura de soluções numa situação nova; a avaliação e a tomada de decisões; a elaboração e apresentação de trabalhos de forma organizada e cuidada.

No quadro da página seguinte apresenta-se uma síntese de todo o processo seguido.

Síntese da integração curricular das tarefas de investigação

Caracterização e tempo de implementação das tarefas			Objectivos das tarefas	Conteúdos	Contextualização das tarefas: Aulas antes	Contextualização das tarefas: Aulas depois
Investigação destinada à construção de conceitos novos:	***As Sequências de Fibonacci*** *(1ª Tarefa de Investigação)* (70 minutos – resolução + 90 minutos – discussão)		— Construir e representar (analítica e esquematicamente) uma sucessão usando o método de recorrência. — Traduzir, por escrito e oralmente, os raciocínios desenvolvidos.	— Definição de sucessão, de termo e de ordem de um termo de uma sucessão. — Representação geométrica de uma sucessão. — Definição de uma dada sucessão por recorrência.	(20 min) Situação problemática que antecedeu a resolução da tarefa, destinada à introdução do conceito de sucessão.	Resolução da 2ª tarefa de investigação.
Investigação com base em conceitos já conhecidos:	Questões de cariz prático	***Os Fósforos*** *(2ª Tarefa de Investigação)* (90 minutos – resolução + 90 minutos – discussão)	— Construir um modelo matemático que traduza cada construção (que represente uma sucessão) efectuada com fósforos. — Descobrir propriedades das sucessões. — Consolidar o conceito de sucessão.	— Modelação matemática usando sucessões.		(90 min) Exposição dialogante do conceito de monotonia de uma sucessão. Resolução e discussão de uma tarefa de exploração livre destinada à aplicação e consolidação desse conceito. Resolução de exercícios.
	Questões de cariz interdisciplinar	***Viagens pelo mundo*** *(3ª Tarefa de Investigação)* (90 minutos – resolução + 90 minutos – discussão)	— Construir um modelo matemático que permita unir todas as regiões, cidades ou localidades por um caminho.	— Propriedades existentes ente alguns números, concretamente os números triangulares. — Algumas noções implícitas da teoria de grafos. — Noção intuitiva de cálculo combinatório.	(4×90 min) Exposição dialogante, seguida de resolução de problemas e de exercícios, dos conceitos: sucessão limitada, sucessão convergente; infinitamente grandes e infinitésimo.	(2×90 min) Exposição dialogante, seguida de resolução de problemas e de exercícios, dos conceitos de termos geral e soma de termos de uma progressão aritmética.
	Questões internas à Matemática	***Os números Pitagóricos*** *(4ª Tarefa de Investigação)* (90 minutos – resolução + 90 minutos – discussão)	— Construir modelos matemáticos que traduzam regularidades de sucessões de certos números figurados.	Modelação matemática usando sucessões.	(90 min) Resolução e discussão de uma tarefa de exploração livre de aplicação dos conceitos de termo geral e soma de termos de uma progressão aritmética	(90 min) Resolução e discussão de uma tarefa de exploração destinada à construção do conceito de termo geral de uma progressão geométrica.
		A Tabela de Números *(5ª Tarefa de Investigação)* (90 minutos – resolução + 90 minutos – discussão)	— Aplicar quaisquer conceitos estudados ao longo do tema, transversalidade com Geometria e com Funções.	— Conceitos estudados ao longo do tema das sucessões até ao momento de resolução da 5ªtarefa de investigação	(2×90 min) Formalização do conceito de termo geral e soma de termos de uma progressão geométrica. Resolução de problemas e exercícios.	(3×90 min) Estudo e aplicação do número de Nepper. Resolução de exercícios e problemas globais do tema das sucessões. Teste de Avaliação Global.

Resultados do estudo

O estudo realizado evidencia a possibilidade do cumprimento do programa de Matemática implementando tarefas de investigação na sala de aula, alternando aulas com investigações e aulas com outro tipo de tarefas matemáticas, como a resolução de problemas e de exercícios. Evidencia também que a natureza aberta das tarefas de investigação pode promover uma actividade matemática dos alunos que possibilite o desenvolvimento de competências transversais e o estabelecimento de conexões entre os diversos temas matemáticos. Evidencia, ainda, a importância que têm para a aprendizagem dos alunos as apresentações que eles fazem, a toda a classe, dos seus processos de resolução e dos resultados a que chegam, bem como a discussão colectiva das várias resoluções e resultados. É o que procuramos mostrar de seguida, através da explanação de dados (extraídos de aulas, de entrevistas feitas aos alunos e de relatórios realizados pelos alunos durante o estudo) que evidenciam empiricamente cada resultado apresentado.

Articulação das investigações com outro tipo de tarefas e o cumprimento do programa

No que respeita ao tema das Sucessões, a realização deste estudo mostrou que aulas com tarefas de investigação, enquadradas em aulas com outro tipo de tarefas, como a resolução de problemas e a resolução de exercícios, possibilitaram o cumprimento do programa da unidade didáctica em causa, em termos da leccionação dos conteúdos matemáticos prescritos.

Quer na situação problemática que antecedeu a primeira tarefa de investigação, quer na primeira tarefa de investigação (*As Sequências de Fibonacci*), os alunos desenvolveram conceitos específicos das sucessões, tal como o próprio conceito de sucessão (ver figura 1):

N.º de alunos que se portaram bem	1	2	3	4	…
Quantidade da tablete de chocolate que cada aluno vai comer	1	½	⅓	¼	…

Figura 1 — A noção de sucessão da aluna Carolina, do Grupo 4

A aluna Carolina elaborou um quadro organizador dos dados onde está implícita a noção de termo e de ordem de um termo na situação em causa. Este quadro serviu de base para a discussão em toda a turma.

A ideia de recorrência pode ser observado, por exemplo, na resolução a seguir apresentada (figura 2):

$$u_1 = 1$$
$$u_2 = u_1$$
$$u_3 = u_1 + u_2$$
$$u_4 = u_2 + u_3$$
$$u_5 = u_3 + u_4$$
$$\ldots$$
$$u_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$$

Figura 2 — Definição por recorrência.

Os alunos chegam mesmo a generalizar, embora não introduzam restrições ao n ($n > 2$).

Na tarefa de investigação *Os Fósforos*, os alunos transcreveram matematicamente as situações que construíram, aplicando conhecimentos já adquiridos e permitindo o esclarecimento de dúvidas surgidas no decorrer da resolução da tarefa. Exemplo disso foi a "estrela com triângulos" (ver a figura 3, bem como o diálogo entre a professora/investigadora e os alunos):

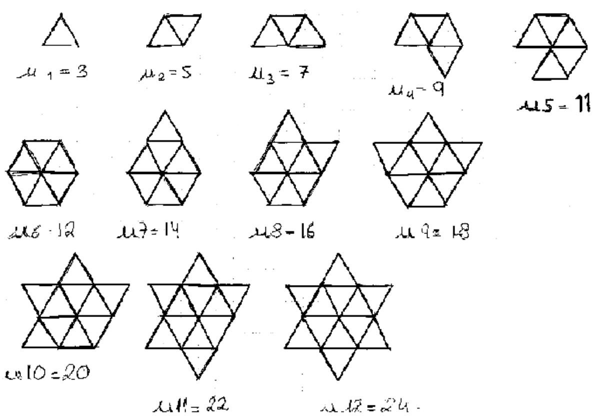


Figura 3 — Estudo com triângulos, do Grupo 4

Professora: Construíram uma estrela à custa de triângulos. Podemos determinar uma fórmula matemática para essa sequência do número de fósforos?

Carolina (do Grupo 4): Como? Do 5º para o 6º termo a regularidade muda! Há mais que uma lei de formação dos termos?

Professora: Sim, pode haver. Têm é que se especificar os termos em que ocorre essa mudança e as respectivas leis de formação.

Luís: Já sei! É a sequência dos números ímpares ($2n + 1$) até ao 5º termo. Depois, do 6º termo até ao 12º termo, tem de ser a sequência dos números pares ($2n$).

...

Professora: Muito bem, ou seja:

$$\begin{cases} u_n = 2n + 1, & \text{para } n \leq 5 \\ u_n = 2n & \text{para } 6 \leq n \leq 12 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

(Aula, 03/04/03)

O papel da professora foi importante, não só para a dinamização da discussão, mas também para a síntese dos resultados nela alcançados.

Antes da resolução da terceira tarefa de investigação, *Viagens pelo Mundo*, foram introduzidos pela professora os conceitos de monotonia de uma sucessão, minorantes e majorantes de um conjunto, majorante e minorante do conjunto dos termos de uma sucessão, infinitamente grande negativo, infinitamente grande positivo e sucessão limitada. Para tal, foi realizada uma exposição dialogante e foram resolvidos exercícios e problemas do manual dos alunos. Após a resolução e discussão da terceira tarefa de investigação, *Viagens pelo Mundo*, foi introduzido o conceito de limite de uma sucessão e o conceito de progressão aritmética. Este processo realizou-se a partir de uma discussão colectiva professora/alunos, em que o excerto apresentado a seguir, para o caso do conceito de progressão aritmética, é um exemplo:

Professora: Lembram-se da sucessão de triângulos com fósforos que estudámos na segunda tarefa de investigação?

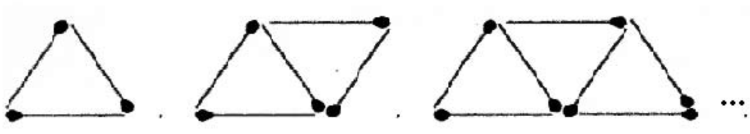


Figura 4 — Triângulos com fósforos, da segunda tarefa de investigação.

Alunos (de um modo geral): Sim.
Professora (escrevendo no quadro os primeiros termos da sucessão): Construímos um triângulo com 3 fósforos, dois triângulos com 5 fósforos, etc. Então $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7$; $u_4 = 9$; ... .
Alunos (de um modo geral): Sim.
Professora: Estudámos o facto desta sucessão se assemelhar à sucessão dos números ímpares maiores do que 1. Dissemos que o seu termo geral é: $u_n = 2n + 1$. Assim, nesta sucessão, o que acontece a u_2 relativamente a u_1?
José: u_2 é maior que u_1. Isto é, u_2 tem mais duas unidades que u_1.
Professora: Muito bem. E o que acontece a u_3 relativamente a u_2?
Francisco: u_2 também tem mais duas unidades que u_1.

Professora: E o que acontece a u_{n+1} relativamente a u_n?
Carolina: Também tem mais duas unidades.
Professora (ao mesmo tempo que escrevia no quadro): Então podemos dizer que $u_{n+1} = u_n + 2 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2, \forall\, n \in \mathbb{N}$?
Carolina: O resultado dessa subtracção é sempre igual a dois!
Professora: Exactamente. A esse valor, que é sempre constante, vamos chamar razão. Tentem definir u_2, u_3, …, e u_n "à custa" de u_1 e desta razão ($r = 2$).
José: Como?
Professora (escrevendo no quadro): $u_1 = 3$; $u_2 = 5$, então $u_2 = u_1 + 2$ …
José: $u_3 = 7$ então $u_2 + 2$.
Professora: Mas, por sua vez, $u_2 = u_1 + 2$. Ou seja, $u_3 = u_2 + 2 = (u_1 + 2) + 2$. Como se escreve u_4? Quem quer vir fazer ao quadro?
Célia (levantou-se): Eu vou! Então temos: $u_4 = [(u_1 + 2) + 2] + 2$.
Professora: Podemos tirar esses parêntesis?
Célia: Podemos. Fica: $u_4 = u_1 + 2 + 2 + 2$.
Professora: Quantas vezes adicionamos o 2, em u_4?
Célia: Adicionamos três vezes.
Professora: E quantas vezes adicionamos o 2, em u_3?
José: Duas vezes.
Professora: Quantas vezes adicionamos o 2, em u_2?
Bernardina: Uma vez.
Professora: Quantas vezes adicionaríamos o 2, em u_{30}?
Luís: Vinte e nove vezes.
Professora: Então podemos dizer que $u_n = u_1 + (n - 1) \times 2$. Assim, "Uma sucessão ($u_n$) é uma progressão aritmética se existir um número real r tal que: $u_{n+1} = u_n = r, \forall\, n \in \mathbb{N}$".

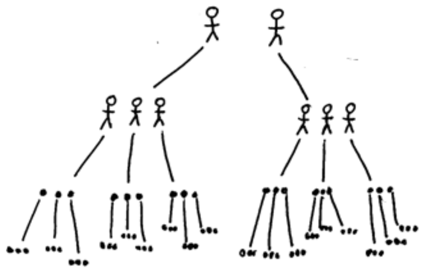
(Aula, 12/05/03)

Desta forma, a professora/investigadora introduziu o conceito de progressão aritmética, procurando que a sua formalização surgisse para os alunos como o resultado de um ganho de significado matemático.

Após a resolução da quarta tarefa de investigação, *Os Números Pitagóricos*, e antes de dar início à quinta tarefa de investigação, *A Tabela de Números*, os alunos resolveram a tarefa de exploração *O Segredo* (inicialmente um segredo foi contado a duas pessoas e divulgado, de 10 e 10 minutos, a três novas pessoas), que auxiliou à introdução do conceito de progressão geométrica (ver figura 5).

A professora/investigadora, a partir da discussão colectiva desenvolvida com base nas apresentações dos alunos, e à semelhança do que havia sucedido para o caso das progressões aritméticas, definiu, também, o conceito de progressão geométrica.

A implementação desta proposta pedagógica permitiu o cumprimento do programa prescrito para a unidade didáctica das sucessões. As tarefas de exploração e de investigação mobilizaram os alunos e facilitaram a introdução de alguns conceitos matemáticos,



Pessoas que ficam a conhecer o segredo no momento (de 10 em 10 minutos)

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \\ u_2 &= 6 \quad \times 3 \\ u_3 &= 18 \quad \times 3 \\ u_4 &= 54 \quad \times 3 \end{aligned} \qquad \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3 \cdot u_{n-1}, \quad n > 1 \end{cases}$$

Figura 5 — A exploração *O Segredo*, do Grupo 3 e do Grupo 4.

tendo sido importante e necessário, também, o recurso à exposição dialogante professora/alunos. As tarefas de resolução de exercícios e de problemas, propostas ora antes ora depois das tarefas de exploração e de investigação, foram fundamentais para dar uma maior coesão e solidez aos conceitos e ideias matemáticas trabalhadas.

Natureza aberta das tarefas e o desenvolvimento de competências transversais e de conexões matemáticas

Este estudo evidenciou que os alunos tiveram uma evolução gradual e significativa no que se refere à complexidade e à riqueza das resoluções de novas situações que emergiam na resolução de uma tarefa de investigação à medida que a experiência com a resolução nesse tipo de tarefas ia aumentando. De facto, na extensão da tarefa *Sequências de Fibonacci* (com a suposição da morte de um casal de coelhos numa das gerações) poucos alunos apresentaram uma resolução. Apenas o grupo 3 conseguiu resolvê-la (ver figura 6).

$$\textit{Até ao 5}^o\textit{ mês} \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = 2 \\ u_4 = 3 \\ u_5 = 4 \quad \textit{porque morre 1 casal} \end{cases} \qquad \textit{Depois do 5}^o\textit{ mês} = \begin{cases} u_6 = 7 \\ u_7 = 11 \\ \dots \end{cases}$$

Figura 6 — A resolução que a aluna Célia, do Grupo 3, fez no quadro.

Esta resolução foi validada na turma, embora não fosse a única solução para a extensão proposta, pois o número de casais de coelhos depois da 5ª geração dependia do tipo de casal que morria (casal jovem, ou não). Mais tarde, na exploração do conceito de monotonia de uma sucessão, a professora/investigadora pediu aos alunos exemplos da vida real, de outra disciplina, ou usando situações puramente matemáticas, que pudessem envolver a utilização do conceito de monotonia de uma sucessão. A maioria dos alunos manifestou mais desenvoltura, criatividade e rapidez, comparativamente com a sua reacção face à primeira vez que lhes foi feita uma solicitação deste tipo (ver figuras 7 e 8):

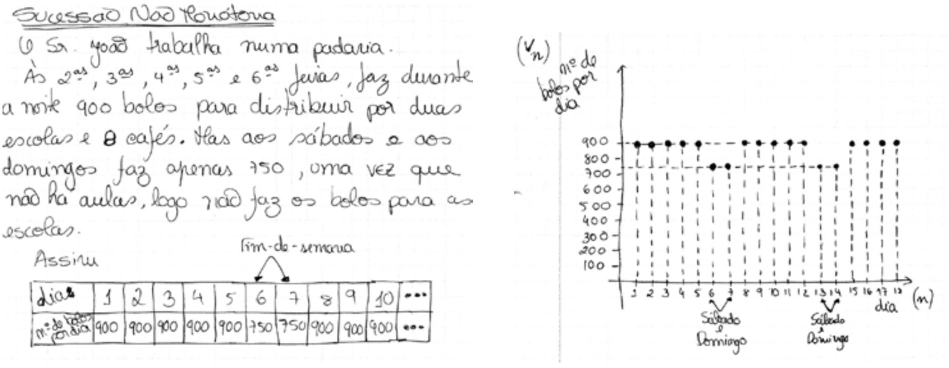


Figura 7 — Sucessão não monótona, do Grupo 4.

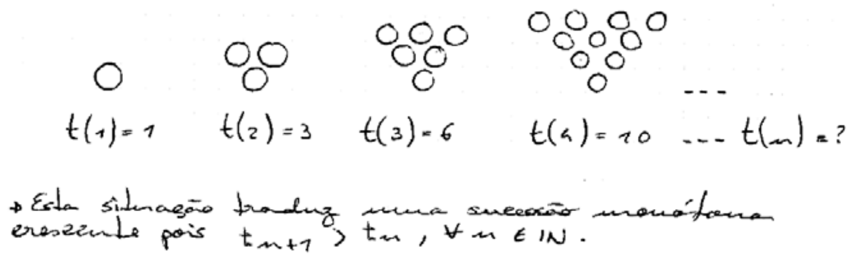


Figura 8 — Sucessão monótona crescrente, do Grupo 2.

No primeiro caso, figura 7, os alunos trazem para a aula uma situação próxima da sua vida real, o caso da produção de uma padaria (possivelmente uma situação familiar de um dos alunos), e, no segundo caso, figura 8, é apresentada uma situação geométrica. Tudo indica, porém, que em ambas as situações os alunos haviam compreendido o conceito de sucessão monótona.

Este estudo também evidenciou que a resolução de tarefas de natureza aberta conduziu à manifestação da imaginação dos alunos na explicitação escrita das suas resoluções. Como exemplo considere-se a construção da “árvore que em cada mês dá origem a dois novos ramos” realizada na tarefa de investigação *Os Fósforos* (ver figura 9):

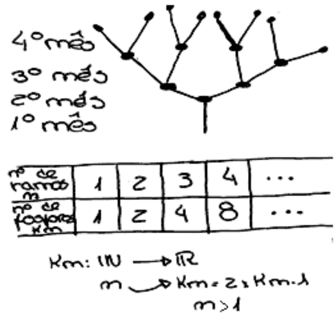


Figura 9 — Árvore com fósforos, do Grupo 3.

Nela, os alunos deram azo à sua imaginação e apresentaram um exemplo original para o que era pedido.

Um outro exemplo é a representação da sucessão de números explorada na tarefa *Os Números Pitagóricos* (ver figura 10), em que cada novo termo da sucessão construída é formado por um número determinado de unidades.

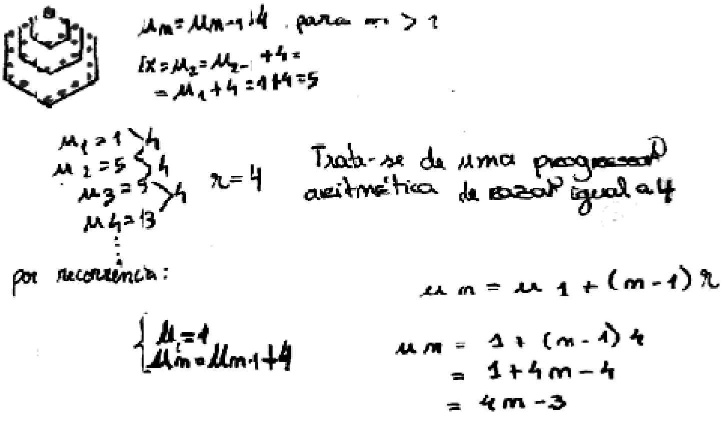


Figura 10 — A extensão, do Grupo 4.

Relativamente ao desenvolvimento de competências transversais nos alunos, este estudo evidenciou que a resolução de tarefas de natureza aberta contribuiu para o desenvolvimento de determinados valores e atitudes tais como a autonomia, o sentido de responsabilidade, a cooperação e o espírito crítico. A resolução de investigações matemáticas nas aulas permitiu que cada aluno pudesse tomar decisões dentro de cada grupo, partilhar essas decisões, tendo em consideração a opinião dos colegas, comunicar e expor raciocínios, quer aos colegas, quer à professora (na fase de discussão de cada tarefa), desenvolvendo assim a confiança em si próprio. Alguns alunos dão testemunho disso durante as entrevistas realizadas:

> Em relação aos trabalhos de grupo, eu tinha algum receio, pois por vezes estes trabalhos levam a que uns trabalhem mais do que outros e haja mesmo gente que não trabalha nada. Na realização das tarefas de investigação, no início, eu pensei que também fosse assim, mas com o passar das aulas vi que não. Todos se empenharam e tentaram descobrir. Depois, comecei a ver que eu aprendia melhor a discutir com os outros e a descobrir em conjunto, pois todos tinham sempre alguma coisa a dizer acerca da tarefa que estávamos a resolver.
>
> *(Mariana, do Grupo 3, Entrevista, 12/06/03)*

> Como nós estávamos num grupo e estávamos todos em pé de igualdade, porque perante uma investigação ninguém sabe mais do que o outro, não senti medo de não conseguir fazer! Por outro lado, todos se ajudavam entre si e como o trabalho era em grupo, mesmo que cometêssemos um erro muito grave a responsabilidade não era só de uma pessoa!
>
> *(Bruna, do Grupo 5, Entrevista, 12/06/03)*

Este estudo evidenciou também que a actividade matemática dos alunos em torno das tarefas de investigação permitiu-lhes estabelecer conexões matemáticas. Elas ocorreram durante a resolução e discussão das várias tarefas de investigação do estudo. Como exemplo, relativamente à primeira tarefa (*As Sequências de Fibonacci*), os alunos desenvolveram diferentes formas de representação de uma sucessão através do uso das representações esquemática, gráfica e tabelar (ver figura 11).

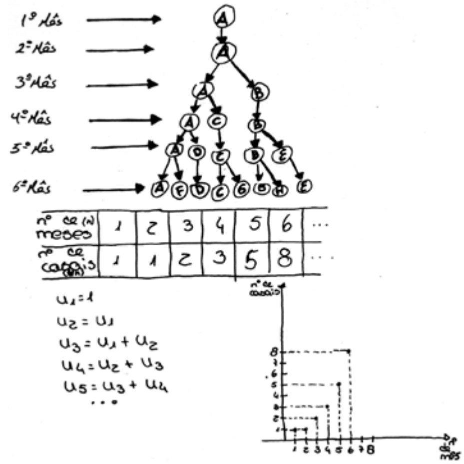


Figura 11 — Sequência de Fibonacci, do Grupo 3.

Nesta resolução, os alunos fazem uma conexão clara entre a representação esquemática, tabelar, analítica e gráfica.

As apresentações e discussões colectivas e a aprendizagem dos alunos

Este estudo mostra que a discussão colectiva das resoluções dos alunos permitiu que fossem esclarecidas dúvidas e que fosse realizada uma partilha das resoluções realizadas em cada grupo. Por exemplo, no âmbito da terceira tarefa de investigação, *Viagens pelo Mundo*, assistiu-se ao seguinte diálogo (ver figuras 12 e 13):

> *Célia* (do Grupo 3): Nós não conseguimos saber o que é que funciona como termo e como ordem! O número de caminhos que liga as cidades dá origem aos termos pretendidos? Ou não?
> *Professora:* Imaginem que têm uma cidade. Têm algum caminho para a unir a outra?
> *Alunos* (de um modo geral): Não!
> *Professora:* E se tiverem duas cidades?
> *Alunos* (de um modo geral): Há um percurso (que é o caminho mais curto)!
> *José* (do Grupo 2): Então para uma cidade não há percurso, para duas cidades há um percurso e assim sucessivamente, então já percebi!

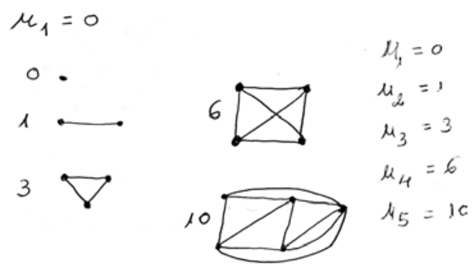


Figura 12 — Representação esquemática da tarefa *Viagens pelo Mundo*, do Grupo 2.

> *Inês* (do Grupo 1): Professora, já reparou que se tivermos três cidades podemos construir com um esquema um triângulo, com quatro cidades uma pirâmide triangular, com cinco cidades uma pirâmide, e por aí em diante até chegarmos a sólidos geométricos com muitos vértices e muitos lados?
> *Professora:* Esquematizem essa situação no vosso relatório.

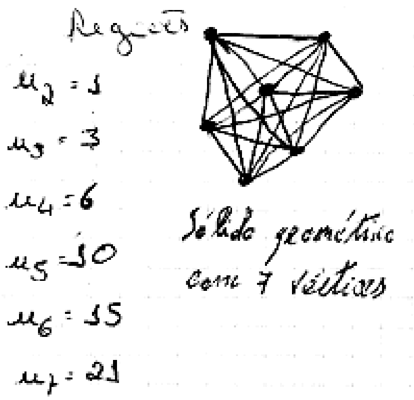


Figura 13 — A tarefa *Viagens pelo Mundo* e a Geometria, do Grupo 1.

(Aula, 05/05/03)

Por este diálogo, para além da partilha das conexões matemáticas realizadas, assiste-se também ao esclarecimento de dúvidas.

Estas discussões colectivas, para além de permitirem a participação de todos os alunos, independentemente do grupo de pertença, facilitaram o processo de formalização. Um exemplo pode ser encontrado durante a resolução da tarefa *Os Números Pitagóricos*. A partir da resolução do Grupo 4 (ver figura 14), assiste-se a um diálogo conducente à formalização da resolução dos alunos:

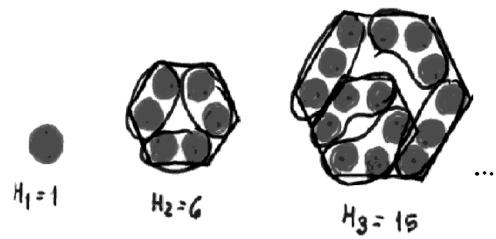


Figura 14 — Resolução do Grupo 4.

Professora: Porque é que na sucessão dos hexágonos vocês agrupam as bolas em cada termo?
Luís (do Grupo 4): Verificámos que num hexágono formado com uma unidade (u_1) temos um grupo de uma unidade; num hexágono formado com seis unidades (u_2) temos três grupos de duas unidades; num hexágono formado com quinze unidades (u_3) temos cinco grupos de três unidades; e por aí em diante.
Professora: Então e no termo de ordem n como funcionariam esses agrupamentos?

Luís: É fácil! No termo de ordem n temos um hexágono formado com $2n - 1$ grupos de n unidades cada.
Professora: Muito bem!

(Aula, 19/05/03)

Um outro exemplo pode observar-se aquando da resolução da quinta tarefa de investigação, *Tabela de Números*, onde se exploravam as regularidades de números pares e ímpares. A resolução dos alunos do Grupo 1 (ver figura 15) permitiu uma discussão colectiva que conduziu à formalização do esquema que os alunos haviam apresentado:

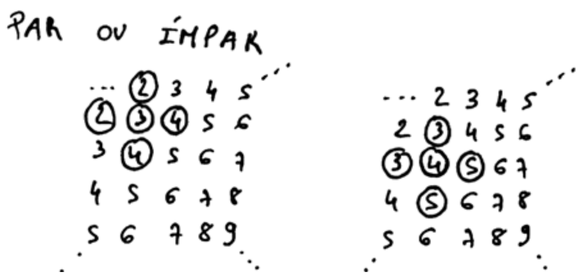


Figura 15 — A exploração de números pares e ímpares, do Grupo 1.

Professora: Como é que poderiam generalizar as vossas conclusões acerca dos pares e ímpares?
José (do Grupo 2): Tínhamos que ler a tabela de duas formas, em linha ou em coluna.
Professora: Sim, como?
José: Consideremos qualquer número da tabela, suponhamos que é par, então sabemos que o número que o antecede e o número que o sucede são ímpares. E o raciocínio é análogo se o valor considerado inicialmente for ímpar.
Professora: Muito bem! E também é análogo quer fazendo a leitura por linhas quer por colunas?
José: É! Tanto faz ler da direita para a esquerda, como da esquerda para a direita (no caso das colunas) e ler de cima para baixo ou de baixo para cima (no caso das linhas).
Professora: Exactamente! Mas, como é que representamos estas conclusões analiticamente?
José: Pois, analiticamente é mais complicado!
Professora: Vamos escrever passo por passo o que acabaste de dizer! Como é que vocês localizam as posições no jogo da "batalha naval"?
André (do Grupo 1): Pela posição da linha e da coluna.
Professora: Então vamos fazer aqui a mesma coisa! Consideremos $u_{l,c}$ o número da tabela que figura na linha l e na coluna c, então:

$$\begin{cases} u_{l+1,c} & \text{é par, se } u_{l,c} \text{ é ímpar} \\ u_{l-1,c} & \text{é par, se } u_{l,c} \text{ é ímpar} \\ u_{l,c+1} & \text{é ímpar, se } u_{l,c} \text{ é par} \\ u_{l,c-1} & \text{é ímpar, se } u_{l,c} \text{ é par} \end{cases}$$

> *José:* Pois, assim já consideramos as linhas e as colunas ao mesmo tempo, realmente é como na batalha naval!
>
> *(Aula, 29/05/03)*

As apresentações dos alunos e as discussões colectivas, para além de permitirem que os alunos vissem que é possível existirem diferentes formas de resolver a mesma questão, facilitaram a criação de condições para a formalização das situações inventadas e imaginadas pelos alunos em cada grupo.

Conclusões

Nesta secção são apresentadas as conclusões do estudo relativas à forma como as investigações matemáticas se podem articular com outro tipo de tarefas e à consequente aprendizagem e desempenho dos alunos.

Verificou-se, neste estudo, que a resolução de tarefas de investigação nas aulas de Matemática, articulada com a resolução de exercícios, de problemas e momentos de exposição dialogante de conceitos, possibilitou o cumprimento do programa, no que respeita à unidade didáctica das Sucessões. A exposição dialogante, a resolução de exercícios e de problemas ajudaram a criar condições para o sucesso da actividade matemática desenvolvida em torno das investigações matemáticas. Foi possível introduzir conceitos matemáticos e promover algumas estratégias e o treino de algumas técnicas com impacto na resolução das tarefas de investigação. Perspectiva semelhante é apresentada por vários autores (Ponte e outros, 2003; Teixeira e outros, 2003), ao reconhecerem a importância de desafiar os alunos com tarefas de investigação, realçando, porém, a necessidade de promover a realização de outras actividades como, por exemplo, as de resolução de exercícios e de problemas.

No presente estudo registou-se um ganho de experiência no trabalho com tarefas de natureza mais aberta. Este aspecto também é referido por Brocardo (2001), para quem, os alunos, com a experiência continuada da realização de novas tarefas de investigação adquiriram uma maior capacidade em interpretar os dados iniciais e em estabelecer estratégias de resolução, acabando por alcançar uma boa compreensão deste tipo de trabalho e obter um bom desempenho. É reforçada, assim, a perspectiva da persistência e do não desânimo às contrariedades surgidas quando se introduzem tarefas de investigação na aula de Matemática.

Pôde observar-se também, ao longo deste estudo, o desenvolvimento da autonomia, da responsabilidade, da cooperação e do espírito crítico dos alunos, tal como concluiu Segurado (1997) no estudo que realizou. Inicialmente, os alunos mostraram-se dependentes e receosos, mas com o decorrer do trabalho com investigações revelaram-se bastante autónomos e comunicativos.

Neste estudo também se observou o desenvolvimento da capacidade dos alunos fazerem face a novas situações, pois a natureza aberta de uma tarefa de investigação permite seguir diversos caminhos e estratégias, aquando da sua resolução. Perspectiva semelhante é a de Goldenberg (1996).

Este estudo mostrou que foi possível estabelecer conexões entre vários temas da Matemática, como as Sucessões/Funções, a Geometria e o Cálculo, como tem sido salientado por diversos autores (Goldenberg, 1996; Ponte, 2003; Segurado, 1997). Investigar em Matemática é descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos, procurando identificar e provar as respectivas propriedades. As investigações permitem explorar e descobrir conexões matemáticas entre conceitos e conteúdos que são postos à consideração e discussão. Os alunos evidenciam uma evolução visível ao estabelecerem ligações entre temas matemáticos leccionados em fases anteriores à implementação de tarefas de investigação.

Neste estudo verificou-se que as discussões geradas colectivamente conduziram ao esclarecimento de dúvidas que não tinham sido esclarecidas na fase de resolução das tarefas, auxiliando, assim, a própria capacidade de investigar. Há, deste modo, uma concordância com Bishop e Goffre (1986), quando estes autores referem que a discussão, a partilha e a negociação de resultados auxiliam a investigação e a exploração matemáticas.

No presente estudo verificou-se ainda que as apresentações dos alunos das resoluções realizadas, e a consequente discussão colectiva, facilitaram a formalização analítica de algumas representações esquemáticas (não formalizadas na fase de resolução das tarefas nos diversos grupos). Este aspecto é salientado por diversos autores (NCTM, 1991; Schoenfeld, 1996; Teixeira et al., 2003). A aprendizagem da Matemática deve fazer-se de forma significativa e as apresentações a toda a turma que os alunos efectuaram, bem como as discussões colectivas realizadas, contribuíram para isso.

A apresentação e discussão colectiva dos resultados das investigações realizadas nos grupos permitiram, ainda, a comparação dos distintos processos de resolução de uma mesma situação investigativa (efectuados pelos diferentes grupos de alunos da turma), promovendo a aprendizagem matemática. Este aspecto mostra-se concordante com diversos autores (Goldenberg, 1996; Ponte & Serrazina, 2000), quando afirmam que, pelo facto de os alunos nas investigações recorrerem à visualização e à discussão com os colegas da actividade realizada, é introduzida alguma variedade na *dieta* da aula de Matemática. A representação de ideias matemáticas, aquando da resolução de uma tarefa matemática, assume um papel vital no modo como essas ideias são compreendidas e usadas pelos alunos. Por seu lado, proceder a uma comparação e discussão de vários processos e representações de uma tarefa matemática, escolhendo os mais adequados, desenvolve o pensamento matemático do aluno.

Finalmente, este estudo permitiu um ganho na convicção sobre a importância e pertinência de propor aos alunos tarefas de investigação nas aulas de Matemática. A sua utilização, num enquadramento curricular estudado e bem preparado (com problemas, exercícios e exposição dialogante), de forma contínua e progressiva, quer ao nível de um tema, quer ao nível de um ano de escolaridade, quer ao nível de um ciclo escolar, pode assumir uma função importantíssima no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Referências

Almeida, P. (1994). Imaginar para Aprender. O caso da Matemática. *NOESIS*, 29-–32.

Barbedo, J., & Simões, M. (2003). Aula interactiva de Matemática –– uma visita à exposição de simetrias, jogos e espelhos. Em M. J. Saraiva (org.), *Tarefas de investigação matemática na sala de aula — uma realidade* (pp. 28–45). Covilhã: Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior.

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Dinâmica e Organização da Sala de Aula. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 309–365). Dordrecht: D. Reidel.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação — Uma introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre Investigação Matemática e o seu papel na Aprendizagem da Matemática. Em J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de Investigação — na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 5–24). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática. Um projecto curricular no 8º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Cunha, H., Oliveira, H, & Ponte, J.P. (1995). Investigações Matemáticas na sala de aula. Em P. Abrantes, L. C. Leal, J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para Aprender Matemática*, 1996 (pp. 173–181). Lisboa: APM.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Goldenberg, E. P. (1996). Quatro Funções da Investigação na Aula de Matemática. Em P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, 1999 (pp. 35–49). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Lüdke, M., & André, M. E. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Ministério da Educação (1995). *Programa de Matemática 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário.

Ministério da Educação (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais. Lisboa: Departamento do Ensino Básico.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Pires, M. (1999). O Professor e o Currículo. *Educação e Matemática*, *55*, 3–6.

Poincaré, H. (1996). A Invenção Matemática. Em P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para Aprender Matemática* (pp. 7–15). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5–28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003). Investigar sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação* (pp. 93–169). Lisboa: DIF, CIE e FCUL.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte – MG: Autêntica Editora.

Schoenfeld (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? Em P. Abrantes. L. C. Leal e J. P. Ponte (eds.), *Investigar para Aprender Matemática*, pp. 61–70. Lisboa: Projecto MPT e APM.

Schön, D. A. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. Em A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 79–92). Lisboa: Dom Quixote.

Segurado, I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo. (*Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Em R.I Charles & E.A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Teixeira, A., Pereira, M., Saraiva, M., Marques, M., & Xistra, O. (2003). Tarefas de Investigação matemática na sala de aula — Uma realidade. Em *Actas do ProfMat2003* (pp. 319–326). Lisboa: APM.

Anexo

A tabela da tarefa *A Tabela de Números*

…	2	3	4	5	6	7	8	9	8	7	6	5	4	3	2	…
2	3	4	5	6	7	8	9	8	9	8	7	6	5	4	3	2
3	4	5	6	7	8	9	8	7	8	9	8	7	6	5	4	3
4	5	6	7	8	9	8	7	6	7	8	9	8	7	6	5	4
5	6	7	8	9	8	7	6	5	6	7	8	9	8	7	6	5
6	7	8	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9	8	7	6
7	8	9	8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8	9	8	7
8	9	8	7	6	5	4	3	2	3	4	5	6	7	8	9	8
9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	9	8	7	6	5	4	3	2	3	4	5	6	7	8	9	8
7	8	9	8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8	9	8	7
6	7	8	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9	8	7	6
5	6	7	8	9	8	7	6	5	6	7	8	9	8	7	6	5
4	5	6	7	8	9	8	7	6	7	8	9	8	7	6	5	4
3	4	5	6	7	8	9	8	7	8	9	8	7	6	5	4	3
2	3	4	5	6	7	8	9	8	9	8	7	6	5	4	3	2
…	2	3	4	5	6	7	8	9	8	7	6	5	4	3	2	…

Resumo. Este artigo baseia-se num estudo em que um dos seus objectivos era analisar a forma como as investigações matemáticas se poderiam articular com outro tipo de tarefas e estudar a aprendizagem e o desempenho dos alunos daí resultante. Usou-se uma metodologia qualitativa, onde a professora (a primeira autora do presente artigo) assumiu também o papel de investigadora, actuando como agente reflexiva da sua própria prática profissional. Foram elaboradas cinco tarefas de investigação e implementadas numa das suas turmas do 11º ano, no capítulo das Sucessões, no ano lectivo 2002/03. Recolheram-se e analisaram-se relatórios e reflexões críticas dos alunos sobre a sua actividade matemática em torno das tarefas de investigação, bem como reflexões registadas pela professora no seu diário de registos. Foram feitas ainda entrevistas a cinco grupos de dois alunos, gravadas em áudio e depois transcritas. Os resultados do estudo reforçam a perspectiva de que é possível cumprir o programa de Matemática mesmo implementando tarefas de investigação na sala de aula, desde que as aulas com investigações sejam alternadas com outras com exposição dialogante, com resolução de problemas e com a resolução de exercícios. Reforçam, também, a perspectiva de que as tarefas de investigação, com as suas resoluções apresentadas e discutidas com toda a classe, podem promover uma actividade matemática que conduza ao desenvolvimento conceptual e de competências transversais e ao estabelecimento de conexões matemáticas.

Palavras-chave: Tarefa; Investigação matemática; Resolução de problemas; Aprendizagem; Sucessão; Conexões matemáticas.

Abstract. This article is based on a study which objective was to analyse the way how mathematical investigations can be articulated with other type of mathematical tasks, and to study the students' learning and performance. A qualitative methodology was used, where the teacher (the first author of the present article) also assumed the investigator role, acting as reflexive agent of her own professional practice. Five mathematical investigation tasks were elaborated and implemented in a 11^{th} grade class of the teacher, in the theme Sequences, during 2002/03. Students' reports and critical reflections on its mathematical activities around the mathematical investigation tasks were collected and analysed the, as well as the teacher's reflections from her professional diary. The researcher made interviews to five groups of two students, recorded them in audio and later transcribed them. The results of the study stress the perspective that it is possible to execute the mathematical program even implementing mathematical investigation tasks in the classroom, since the lessons with investigations are alternated with lessons with other type of mathematical tasks, such as the expositive dialogue between the teacher and the students, problem-solving and exercises. They, also, stress the perspective that the open nature of mathematical investigation tasks and the collective discussion in the classes, around the resolutions, can promote a mathematical activity that facilitates the development of transverse competences and the establishment of mathematical connections.

Keywords: Tasks; Mathematical investigations; Problem solving; Learning; Sequences; Mathematical connections.

■ ■ ■

MAGDA PEREIRA
Escola EB1 c/JI da Amareleja

MANUEL JOAQUIM SARAIVA
Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior
Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
venturasaraiva@clix.pt