

Una experiencia sobre la representación en la recta de números negativos

Alicia Bruno

Universidad de La Laguna, Espanha

Noemí Cabrera

Universidad de La Laguna, Espanha

Introducción

El papel de la recta en el aprendizaje de los números ha sido estudiado por diferentes autores. Ernest (1985) distingue tres usos principales que tiene la recta en la educación primaria: (1) como un modelo de enseñanza para ordenar números, (2) como un modelo para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, y (3) como contenido mismo del currículo de matemáticas. Carr y Katterns (1984) y Rathmell (1980) desarrollaron investigaciones sobre el uso (2) de la recta indicado por Ernest para los números enteros positivos, en las que se pusieron de manifiesto las dificultades de los alumnos para comprender la recta como modelo de las operaciones de suma y resta. Ambos estudios observaron la tendencia de los alumnos a responder simbólicamente cuando se les planteaban operaciones representadas en la recta.

La investigación que se presenta en este trabajo se refiere a los usos (1) y (2) de la recta que señala Ernest para el caso de los números negativos.

El uso de la recta en la enseñanza y aprendizaje de los números negativos es una cuestión controvertida. De hecho no hay un consenso sobre el modelo más adecuado para la enseñanza de estos números, aunque las diferentes investigaciones coinciden en señalar que las mayores dificultades se encuentran en la resta y multiplicación de números negativos (Janvier, 1985, Küchemann, 1981, Lytle, 1994). Gallardo y Romero (1999) utilizan la recta como un modelo para investigar las dificultades conceptuales de los estudiantes cuando operan con números enteros. En concreto, analizan las dificultades de los estudiantes cuando representan e interpolan números enteros en la recta. Los resultados de este estudio indican las dificultades en la escritura de los números, en el uso de la recta con escalas diferentes a la unidad y la tendencia a ignorar el cero como número en las representaciones.

Basándonos en trabajos previos (Bruno y Martínón, 1999; Peled, 1991; Vergnaud, 1982) consideramos la enseñanza y aprendizaje de los números negativos bajo tres dimensiones de conocimiento:

- *Dimensión abstracta*, que es el uso de los números y las operaciones a través de sus símbolos matemáticos abstractos.
- *Dimensión de recta*, que se refiere a la representación en la recta de los números y las operaciones.

- *Dimensión contextual*, que es el uso de los números y las operaciones en situaciones concretas.

Consideramos también las traducciones que se pueden establecer entre estas dimensiones, es decir, como se expresa la información dada en una dimensión en otra dimensión. Lo esquematizamos de la siguiente forma (Fig.1):

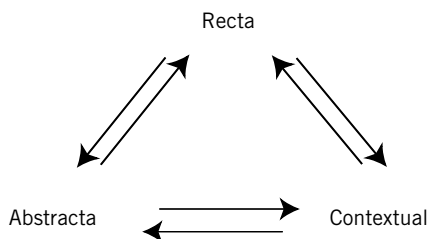


Figura 1 — Dimensiones de conocimiento y traducciones entre ellas

En Bruno y Martinón (1996) se estudiaron las dificultades de traducción entre las tres dimensiones y se encontró que la relación entre la dimensión abstracta y la de recta resultaba muy compleja para los estudiantes, siendo más fácil realizar las traducciones entre lo contextual y la recta. Por ello, se concluyó que una enseñanza de los números negativos que utilice la recta debería ir unida al uso de los números en situaciones contextualizadas.

En este trabajo nos centramos en las representaciones en la recta de números negativos realizadas por un grupo de *alumnos que presentaban dificultades en matemáticas*. En concreto, estos alumnos presentaban bajo rendimiento académico en todos los bloques de contenido matemático y también, algunos de ellos tenían necesidades educativas especiales. Desglosamos las dificultades conceptuales y procedimentales de estos estudiantes en el manejo de la recta después de seguir un aprendizaje de los números negativos en el que trabajaron actividades en las tres dimensiones de los números anteriormente citadas.

Presentamos un estudio de las principales dificultades de los alumnos en dos procesos diferentes, *cuando representan* en la recta y *cuando leen* una representación hecha en la recta, aspectos relacionados con los números negativos, en concreto, concepto, orden, suma y resta.

Objetivos

Como comentamos en el apartado anterior, entendemos que en la enseñanza y aprendizaje de los números es esencial el estudio de las tres dimensiones de conocimiento y las traducciones entre ellas. Por lo tanto, el proceso de enseñanza debe implicar un esfuerzo similar en todas las traducciones. El objetivo de este trabajo es analizar los errores que cometen alumnos con dificultades en matemáticas al realizar traducciones entre la dimen-

sión de recta y la contextual, así como entre la dimensión de recta y la abstracta, como resumimos en el siguiente esquema (Fig. 2):

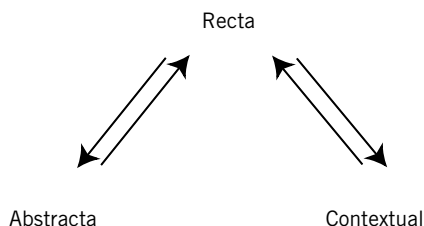


Figura 2 — Traducciones entre las dimensiones analizadas en esta investigación

El hecho de trabajar con alumnos con dificultades nos llevó a limitar el estudio a estas traducciones y dejar el análisis entre la dimensión abstracta y la contextual para futuras investigaciones.

El trabajo tuvo 2 fases, una primera fase en la que los alumnos trabajaron en el aula los números negativos siguiendo una secuencia diseñada con las tres dimensiones y una segunda fase, en la que se realizaron entrevistas a algunos de los alumnos participantes. En dichas entrevistas se plantearon actividades de concepto, orden, suma y resta con números negativos y los resultados se analizan en este trabajo. En concreto, se les pidió:

- sobre el *concepto* interpretar, leer o escribir números negativos (en las tres dimensiones).
- sobre la *suma* y la *resta*, interpretar, leer o escribir sumas y restas con negativos.
- sobre el *orden*, interpretar el orden de los números a partir de alguna de las tres dimensiones.

En el caso de las dimensiones de recta y contextual, distinguimos dos tipos de situaciones numéricas, *estados y variaciones*. Por ejemplo, como estado consideramos situaciones del tipo, ‘debo 2 euros’, y como variaciones, ‘el submarino descendió 2 metros’.

Para la suma y utilizamos principalmente situaciones aditivas de cambio, es decir, *estado inicial + variación = estado final*, como por ejemplo, ‘la temperatura era de -4° y subió 6° , ¿cuál es la temperatura después de esta subida?’. Para la resta se presentaron situaciones del tipo *estado final – estado inicial = variación*, como ‘la temperatura era de 5° por la mañana y de 2° bajo cero por la noche, ¿cuál fue la variación de la temperatura a lo largo del día’.

Los objetivos que nos planteamos fueron los siguientes:

Objetivo 1: Clasificar los errores que cometen los alumnos con dificultades en matemáticas al leer y representar en la recta situaciones sobre el concepto, orden, suma y resta de números negativos.

Objetivo 2: Analizar las traducciones entre las dimensiones de recta y abstracta, y entre las dimensiones de recta y contextual para el concepto, suma y orden de números negativos.

Metodología

Como se comentó en el apartado anterior, el trabajo constó de una fase de aula y otra fase de entrevistas. Ambas fases se explican con más detalles en este apartado.

Fase de experimentación en el aula

Previo a comenzar la fase de instrucción, las investigadoras diseñamos un material curricular específico para trabajar en el aula los números negativos. Las actividades de este material constaban de 8 partes: Concepto de número negativo, valor absoluto, ordenación y comparación de números enteros, opuesto de un número, suma, resta, multiplicación y división. Cada apartado contenía actividades en las tres dimensiones. Los contextos tratados en las actividades fueron: temperatura, dinero, nivel del mar y ascensor. Las actividades en la recta implicaban la lectura y representación en la misma. Los números se representaban en la recta con puntos y flechas. Las actividades eran de distinto tipo, como representar en la recta, redactar situaciones dados los números o las operaciones, resolver problemas aditivos y de multiplicación, completar tablas y hacer actividades de cálculo.

La experiencia se desarrolló durante el año académico 2001–2002 en un centro urbano-rural de secundaria en Tenerife (España). En España la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) consta de cuatro cursos, con alumnos de edades entre 12 y 16 años. Se divide en dos ciclos: el primer ciclo corresponde a los cursos 1º y 2º; el segundo ciclo se corresponde con 3º y 4º.

Los alumnos que participaron en este estudio cursaban 2º curso de ESO (13-14 años). En este centro, los alumnos de 2º de ESO se dividían en la hora de matemáticas en tres grupos según su rendimiento académico, de forma que había tres niveles diferentes: alto, medio y bajo. Este último nivel fue el objetivo de nuestro estudio. Participaron dos clases de nivel bajo con 10 y 11 alumnos donde había alumnos con problemas de concentración, de aprendizaje, de adaptación social y con necesidades educativas especiales (de estos últimos, dos en cada clase).

La fase de instrucción constó de 9 sesiones. La docencia fue impartida por las autoras de este trabajo, aunque en el aula permaneció el profesor habitual de matemáticas y en la mitad de las sesiones asistió la orientadora (pedagoga) del centro, cuya función era ayudar a los alumnos de necesidades educativas especiales y que se adaptó al seguimiento del material.

La metodología del aula fue en grupos, en parejas o de forma individual, dependiendo del tipo de actividad que se iba a desarrollar.

Fase de las entrevistas

Tres meses después de haber finalizado el periodo de instrucción se entrevistó a algunos alumnos de forma individual. Para ello, de los 21 alumnos que siguieron con regularidad la instrucción, se escogieron a 9 entre los que habían presentado peor rendimiento (nos referiremos a estos alumnos como A1, A2...A9). De los cuatro alumnos con necesidades educativas especiales se entrevistó a uno de ellos. Las entrevistas fueron videograbadas,

con un protocolo semiestructurado y tuvieron una duración de 30 minutos aproximadamente por alumno.

El protocolo de las entrevistas fue diseñado en base a lo trabajado en la fase de instrucción, es decir, con actividades en las que se pedía realizar las traducciones objeto de esta investigación.

	Recta→Contexto	Contexto →Recta	Abstracto→Recta	Recta→Abstracto
nº actividades	7	13	4	6
Concepto	Dime un ejemplo que se represente en la recta de la siguiente forma:	Representa en la recta: — Subí 5 pisos. — Estoy a 3 metros bajo el nivel del mar. — Debo 7 euros. — Perdí 6 fichas. — La temperatura bajó 4 grados.	Representa los siguientes números en la recta: $-4, -10, -6, 8, 1, -7$	Escribe los números representados en las rectas:
Suma y resta	Dime una situación que se represente de la siguiente forma:	La temperatura era de -4° y subió 6°. Representa en la recta la situación y averigua cuál era la temperatura de esta subida.	Representa en la recta: $8 - 10 = -2$	Elige la operación correcta que se represente de la forma: a) $2 - 5 = -3$ b) $3 + 2 = +5$ c) $2 - 3 = +5$ d) $-3 + (+5) = 2$
Orden	Ordena las temperaturas de las distintas ciudades de la más calurosa a la más fría			Ordena los siguientes números

Tabla 1 — Ejemplos de actividades de las entrevistas

En la tabla 1 se muestra una actividad de cada tipo de traducción. Hemos designado por Contexto→Recta a las actividades enunciadas con un contexto en las que se pide una representación en la recta numérica. De forma correspondiente para las notaciones: Recta→Contexto, Abstracto→Recta, Recta→Abstracto.

Análisis de resultados

En este apartado se expone el análisis de los resultados organizado en dos partes. En primer lugar presentamos una clasificación de los errores cometidos por los estudiantes. En la segunda parte se presenta un estudio global de las dificultades entre las dimensiones y se analizan diferentes aspectos de las traducciones entre las dimensiones.

Clasificación de errores

Al analizar las entrevistas realizamos una clasificación de los errores cometidos por los estudiantes y diferenciamos entre *errores de interpretación* y *errores de escritura*.

- *Errores de interpretación*: se producen cuando los alumnos no relacionan la representación que leen o que realizan en la recta con el concepto, la suma, la resta o el orden de números negativos. Son errores de tipo conceptual. Denominamos los errores encontrados de la siguiente manera:

Representación aislada

Escala

Traducción

Reversibilidad

- *Errores de escritura*: son errores de procedimiento o de hábitos de escritura que se cometen al escribir o al leer de la recta. Dentro de estos distinguimos:

Conteo

Colocación

Orientación

Flecha

A continuación, describimos cada tipo de error utilizando un ejemplo de las entrevistas.

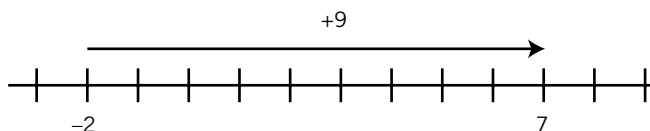
Errores de interpretación

Como hemos indicado, los errores de *interpretación* se deben a una falta de conocimiento conceptual sobre el uso de la recta. En concreto distinguimos entre errores de *traducción*, *representación aislada*, *escala* y *reversibilidad*.

Traducción. El error de traducción aparece cuando el alumno no asocia una representación en la recta como modelo de una situación concreta (concepto, suma o resta) o por el contrario, cuando a partir de una situación concreta no la representa en la recta. Cuando un alumno comete este error reiteradamente indica que la recta no es un modelo para él.

Se encontró este error al plantearles que dieran un ejemplo de una situación real que se correspondiese con una representación concreta, como en el siguiente ejemplo:

Dime una situación que se represente de la siguiente forma



En esta actividad, 6 de los 9 alumnos entrevistados expresaron una situación aditiva del tipo: *estado inicial + variación = estado final*, todos ellos de forma correcta. Una de las respuestas dadas fue la siguiente:

“Estaba en el piso -2 y subí 9 pisos. Me bajé en el piso +7”.

Sin embargo, a los otros 3 alumnos la representación en la recta no les evocó ninguna situación de las usuales. Así por ejemplo, hemos clasificado como error de traducción la respuesta de un alumno al decir:

“Me quitaron dos gomas, me compré 9 y tengo 7”

Este alumno utiliza los tres números que aparecen en la recta, pero describe una situación que no se corresponde con la representación.

Representación aislada. El error denominado *representación aislada* ya había sido catalogado en investigaciones previas (Bruno y Martínón, 1997) y aparece confirmado en esta investigación. Este error se produce cuando a partir de una situación aditiva se representan en la recta los tres números implicados con tres puntos aislados y sin establecer conexión en ellos.

Por ejemplo, se pidió a los alumnos la siguiente actividad en la que debían representar la situación concreta en la recta:

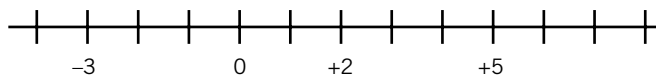
“Juan cogió el ascensor en el piso 3 del sótano y se bajó en el piso 5”. Representa en la recta la situación y averigua cuál fue el movimiento del ascensor.

La situación dada se corresponde con una del tipo:

$$\text{estado final} - \text{estado inicial} = \text{variación},$$

la cual no fue resuelta correctamente por ningún alumno de los entrevistados, pues todos hicieron una interpretación errónea del enunciado.

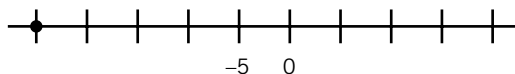
La representación que mostramos a continuación, realizada por un alumno, es un ejemplo de lo que hemos denominado error de *representación aislada*.



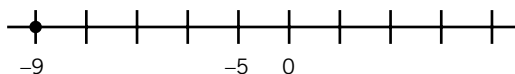
Para este alumno la situación aditiva dada no tiene una interpretación significativa en la recta, ya que los tres valores son puntos aislados en la recta.

Error de escala y error de reversibilidad. Gallardo y Romero (1999) muestran dificultades de los alumnos cuando representan números en la recta con escalas diferentes a la unidad. Indican que estas dificultades tienen repercusiones posteriores cuando los alumnos realicen representaciones gráficas en dos o tres dimensiones. En este trabajo hemos denominado error de *escala* cuando el alumno no interpreta una representación en la recta que se le da en una escala diferente a la unidad. Este error lo pudimos observar en la siguiente actividad:

Escribe el número representado en la recta con un punto

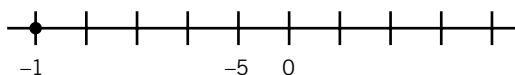


La respuesta de algunos alumnos fue la siguiente:



Estos alumnos no tuvieron en cuenta la escala a la que había sido dada la recta y supusieron que cada espacio representaba la unidad.

En esta misma actividad podemos observar el error de *reversibilidad*, que consiste en colocar los números negativos en orden contrario al correcto en la recta, es decir, de derecha a izquierda en orden creciente. Este error se corresponde con una respuesta como la siguiente en esta actividad:



Errores de escritura

Los errores de *escritura* son errores de procedimiento y no implican que el alumno no comprenda el significado conceptual de la representación en la recta. Hemos observado en este trabajo cuatro errores de escritura: *colocación*, *flecha*, *conteo* y *orientación*

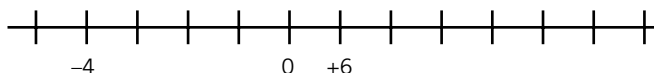
Colocación. El error de *colocación* aparece cuando se tiene que representar una flecha (una *variación*) y el valor de la misma no se coloca encima o debajo de la flecha, sino en el

extremo de la flecha. Esto puede llevar, en ocasiones, a la interpretación de la variación como un estado.

En la siguiente actividad:

“La temperatura era de -4° y subió 6° ”. Representa en la recta la situación y averigua cuál fue la temperatura después de esta subida.

un alumno responde de forma correcta y da como respuesta que la temperatura después de la subida era 2° . Sin embargo, la representación que hace en la recta es la siguiente:



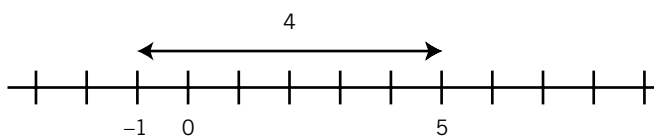
Aunque este alumno no dibuja la flecha, realiza el movimiento con la mano y coloca +6 en el lugar de +2. Como hemos dicho, eso no le impidió dar una respuesta correcta, sin embargo, la representación es incorrecta.

Flecha. El error de flecha tiene que ver, como el caso anterior, con las representaciones con flechas de las variaciones. Ahora el error se produce cuando se representa la variación con una flecha en la que se señalan los dos extremos con una punta de flecha. Con esta representación no es posible averiguar si es una variación positiva o negativa.

Con el siguiente ejemplo se ejemplifica este error. Se pidió a los estudiantes la actividad siguiente:

Mi hermano tiene 5 euros y yo debo 1 euro. Representa esta situación en la recta. ¿Cuántos euros tiene mi hermano más que yo?

La respuesta de un alumno en la que se observa el error de *flecha* fue la siguiente:



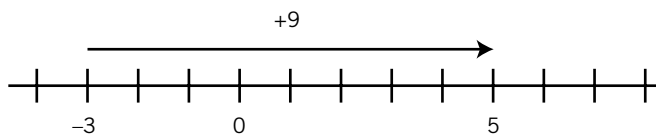
En este caso se puede observar también que la representación en la recta no ayudó al alumno a encontrar una respuesta correcta al problema. El alumno realizó mentalmente la resta $5 - 1 = 4$ y representó 4 en la recta, aunque la flecha tenía una longitud de 6 unidades.

Conteo. El error de *conteo* se produce cuando se cuentan de forma incorrecta los espacios entre los números en la recta.

En la actividad siguiente, ya comentada anteriormente, pudimos catalogar el error de *conteo*:

“Juan cogió el ascensor en el piso 3 del sótano y se bajó en el piso 5”. Representa en la recta la situación y averigua cuál fue el movimiento del ascensor.

La respuesta de un alumno fue:



En este caso, el alumno hace una correcta interpretación de la situación del enunciado y representa una situación aditiva. Sin embargo, comete un error de *conteo*, ya que indica que la *variación* es 9, siendo 8 la respuesta correcta. Este error se ha producido por que ha contado tanto la raya del origen como del extremo de la flecha.

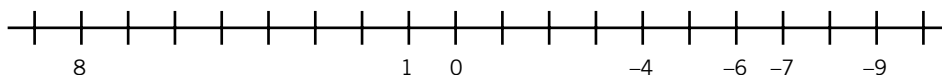
Orientación. Llamamos error de *orientación* cuando se invierten la posición de los números positivos y negativos en la recta y se colocan los positivos a la izquierda del cero y los negativos a la derecha.

Por ejemplo en la actividad:

Representa los siguientes números en la recta:

$-4, -9, -6, 8, 1, -7$

encontramos este error en la respuesta de un alumno:



Traducciones entre las dimensiones

En la tabla 2 mostramos los porcentajes de respuestas correctas en las diferentes actividades de traducciones entre las dimensiones de los 9 alumnos entrevistados.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
R→C	85	71	100	57	14	85	85	100	71
C→R	92	92	92	61	84	76	69	46	76
A→R	50	100	75	25	0	25	75	25	25
R→A	66	50	83	16	33	66	83	66	16

Tabla 2. Porcentaje de éxito en las traducciones entre dimensiones por cada alumno

Todos los alumnos entrevistados, excepto uno (el alumno A2), obtienen su más alto porcentaje de éxito en una de las dos traducciones: de la recta al contexto o del contexto a la recta. Además, 5 alumnos (A1, A3, A5, A6 y A8) tienen los porcentajes más bajos en las cuestiones donde se les pidió traducir desde lo abstracto a la recta y 3 alumnos (A2, A4 y A9) obtienen el porcentaje más bajo en la traducción de la recta a lo abstracto. Por lo tanto, las traducciones entre lo contextual y la recta resultan, en general, menos difíciles que las traducciones entre lo abstracto y la recta, lo cual coincide con anteriores investigaciones (Bruno y Martinón, 1999) (ver Fig. 3).

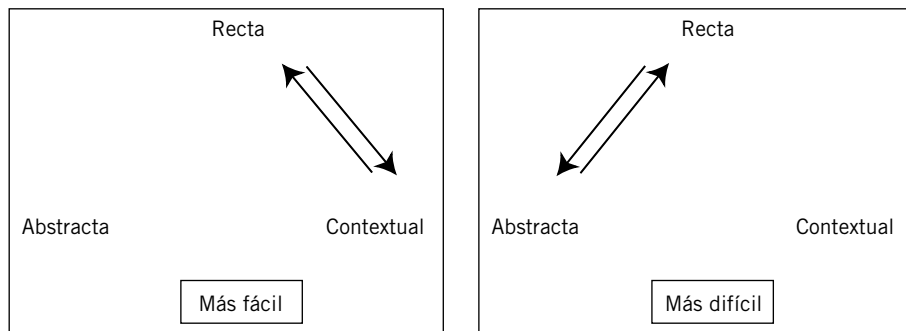


Figura 3 — Traducciones contextual-recta y abstracto-recta

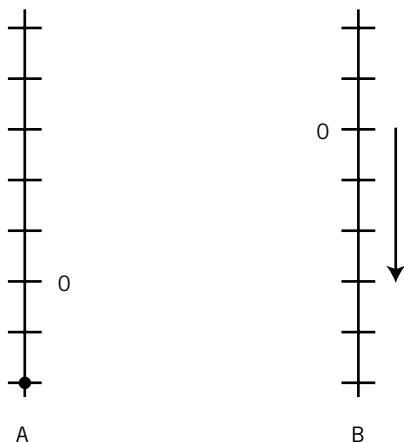
También hemos encontrado *asimetrías en las traducciones*, es decir, para un mismo alumno hay importantes diferencias entre el éxito que obtiene en las traducciones de lo contextual a la recta que de la recta a lo contextual (de igual forma, se produce esta asimetría entre las dimensiones abstracta y de la recta). Algunas de estas asimetrías son destacadas, como el alumno A5 que tiene un porcentaje del 14% en las actividades de la recta al contexto frente a un 84% en las del contexto a la recta, o el alumnos A8 que obtiene un 100% en las actividades de la recta al contexto frente a un 46% en las del contexto a la recta.

Concepto de número negativo

En la tabla 1 se muestran ejemplos de las actividades utilizadas para analizar aspectos del *concepto de número negativo*. Estas actividades no implican realizar operaciones con números negativos. El objetivo fue analizar si los alumnos distinguen la representación de los *estados* y las *variaciones* en la dimensión contextual y cómo se relaciona esto, con los puntos y las flechas en la dimensión de recta.

Al leer de la recta representaciones de puntos y flechas encontramos que los estudiantes tienden a expresar situaciones estáticas, con independencia de la representación de partida. Esto lo observamos en la siguiente actividad:

Dime un ejemplo que se represente en la recta de la siguiente forma:



Tanto en la representación A como en la B los alumnos expresaron mayoritariamente situaciones estáticas. Por ejemplo, para el caso B una situación estática expresada por los alumnos fue: *'la temperatura es de 3 grados bajo cero'*.

Al pedirles que representaran en la recta situaciones numéricas de estados y variaciones, lo hicieron con puntos, aunque admitían verbalmente que las variaciones las podían representar también con flechas.

Esta *tendencia* a usar puntos frente a las flechas lo observamos también en la siguiente actividad en la que, por ejemplo, para la situación estática: *'el pez está a 2 metros bajo el nivel del mar'*, aceptaron ambas representaciones, es decir, tanto el punto como la flecha.

Elige para cada situación la representación que utilizarías: A, B ó ambas.

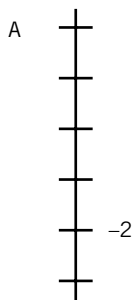


Fig. 7

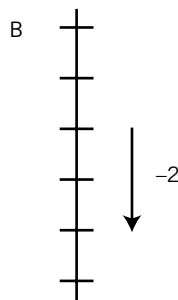


Fig. 8

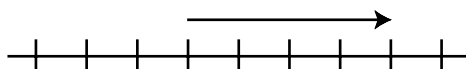
- a) Perdí 2 euros
- b) Debo 2 euros

- c) El pez está a 2 metros bajo el nivel del mar
- d) El submarino descendió 2 metros

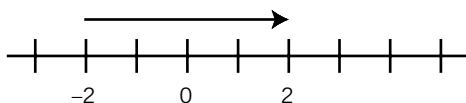
Cuando los números se dan en abstracto y se pide que lo representen en la recta, de nuevo se observó que tienden a representar puntos en lugar de flechas, lo cual se explica porque es lo que suelen realizar principalmente con números positivos. Las dificultades encontradas son de escritura, en especial el error de *orientación*.

En general, observamos que cuando se trata de leer de la recta y decir el número que está representado, los alumnos tienen más dificultad para interpretar las flechas que los puntos, además necesitan señalar el cero en el centro de la recta para, posteriormente, escribir el número. Veamos un ejemplo de una actividad de este tipo:

Escribe el número representado en la recta



La respuesta de un alumno aparece a continuación. Primero escribió el cero y luego el 2 y el -2 , pero no señaló el valor de la flecha que era el que se le pedía:



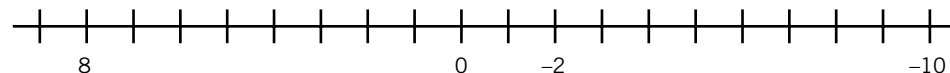
Suma y resta

En la tabla 1 se recogen ejemplos de actividades relativas a la suma y la resta de números negativos planteadas en las entrevistas. El análisis realizado indica que las actividades con números aislados y situaciones numéricas (es decir, lo que denominamos *concepto de número negativo*) son más fáciles que las operaciones y situaciones aditivas, tanto al representar como al leer la representación.

Al presentarles sumas o restas de forma abstracta no hicieron, en su mayoría, interpretaciones correctas en la recta, representando los números de forma aislada. Esto lo observamos en la siguiente actividad:

Representa en la recta: $8 - 10 = -2$.

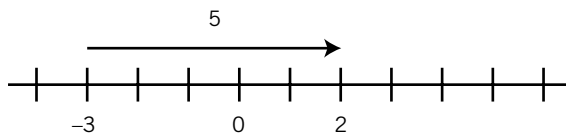
La respuesta de un alumno fue la siguiente en la que se puede observar que comete los errores de *representación aislada* y de *orientación*.



Planteamos también la actividad recíproca a la anterior, es decir, darles una representación en la recta de la que debían expresar una suma o una resta. En la siguiente actividad

se muestra una actividad de este tipo en la que se les facilitó las operaciones para que eligieran la más adecuada a la representación.

Elige la operación correcta que se represente de la siguiente forma:



a) $2 - 5 = -3$

c) $2 - 3 = +5$

b) $3 + 2 = +5$

d) $-3 + (+5) = 2$

En esta actividad los alumnos buscan una operación en la que aparezcan los números -3 , 2 y 5 . Las justificaciones de los alumnos para no admitir una operación como solución muestran sus confusiones entre el signo de la operación y el signo del número. Por ejemplo, una respuesta para justificar que el apartado a) $2 - 5 = -3$ no es la operación representada en la recta fue: '*5 es negativo en la operación y positivo en la recta*'. Otra justificación errónea es indicar que la flecha debe ser el resultado de la operación. Es el caso de un estudiante que explica que no puede ser el apartado a) porque la flecha debería tener el valor -3 .

Cuando se les da un problema de suma o resta en la dimensión contextual y se les pide representarlo en la recta, aparecen numerosas dificultades de las ya comentadas, por un lado los errores de traducción y de representación aislada, que indican una falta de conocimiento del modelo de la recta, y por otro, todos los errores de escritura explicados en el apartado anterior.

Expresar una situación de suma o resta a partir de una representación en la recta, provocó menos dificultades debido a que los alumnos se apoyan en situaciones de suma del tipo *estado inicial + variación = estado final*, en las que el resultado de la suma es el estado final.

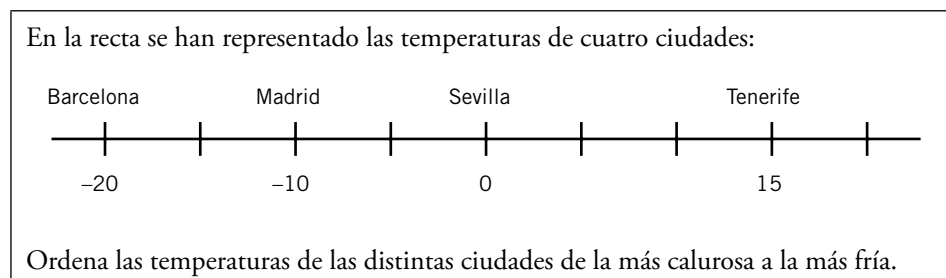
En general, los alumnos entrevistados no asocian la suma y la resta en la dimensión abstracta con la representación en la recta, en ninguna de las dos traducciones. Menor dificultad produce asociar una representación en la recta con una situación aditiva contextual, en concreto, los alumnos mostraron conocer y manejar con soltura la estructura *estado inicial + variación = estado final* asociadas a esas representaciones, sin embargo, no relacionaron la representación en la recta con un problema de resta. Por último, en la traducción del contexto a la recta, mostraron una falta de conocimiento del modelo de recta para situaciones aditivas.

Orden. Con respecto al orden de los números negativos, analizamos las dimensiones que utilizan los alumnos cuando los números se les presentan en la dimensión abstracta y

también cómo justifican el orden de los números cuando se les representan en la recta.

Al ordenar números en abstracto, observamos tres tipos de estrategias: utilizar la recta, mirar los signos de los números o utilizar un contexto. De las tres estrategias la recta proporcionó mejores resultados.

En el otro tipo de actividades les planteamos la siguiente:



En esta actividad 5 de los 9 alumnos utilizan en sus justificaciones la recta, los demás justifican sus razonamientos con el contexto de la temperatura, es decir, indican en qué ciudad hace más frío o más calor. Por lo tanto, no aparece una preferencia hacia alguna de las dimensiones para ordenar.

Conclusiones

Como ya comentamos, las características del alumnado con el que se realizó esta experiencia eran muy diversas. Entre los 21 alumnos participantes, había un grupo con bajo rendimiento académico en matemáticas que se manifestaba con ausencias en determinados conocimientos previos, otros alumnos presentaban problemas de tipo social (comportamiento, falta de motivación, etc.) que se reflejaba con una falta de atención en las clases y con un rechazo hacia las matemáticas, que fue derivando en un retraso en los contenidos que estaban adquiriendo. Otro tipo de alumnado era el que tenían dificultades de aprendizaje y estaban catalogados por los orientadores pedagógicos del centro como alumnos de *necesidades educativas especiales*. Aunque somos conscientes que la problemática era muy diversa, y que cada alumno necesitaba una adaptación curricular propia, todos tenían en común que no seguían el ritmo de aprendizaje general y que sus procesos de aprendizaje eran más lentos. Esta fue la razón por la que el centro optó por dividir los grupos de 2º de ESO en diferentes niveles según su rendimiento. De esta manera, por un lado, el grupo de alumnos era menos numeroso, con lo cual se podía hacer un seguimiento más personalizado, y por otro lado, se podían adaptar las actividades, presentando un mismo concepto desde diferentes enfoques o actividades.

A pesar de esta variedad de alumnado, en general, los alumnos con dificultades cognitivas suelen realizar con más éxito las actividades procedimentales, que impliquen la repetición de un proceso, que las actividades conceptuales. En este trabajo encontramos

múltiples ocasiones en las que el alumnado no comprendía el significado de la representación en la recta lo que les llevaba a representaciones incorrectas. Pero por otro lado, hemos observado situaciones en las que parecían entender la representación o el concepto que subyacía en la misma, pero los errores de escritura no les permitieron completar la tarea eficazmente.

Los alumnos obtuvieron un nivel aceptable en cuanto al concepto y al orden de los números negativos, y no ocurrió así en las operaciones de suma y resta. En el caso de utilizar una instrucción que tenga en cuenta las tres dimensiones, debe prestar atención a las actividades de traducción entre dimensiones para la suma y la resta. Las asimetrías que presentan los estudiantes entre las dimensiones indican la necesidad de que el proceso de instrucción reconozca y considere las traducciones más costosas para cada estudiante.

En la enseñanza de los números negativos no podemos obviar la importancia del conocimiento previo de los niños sobre los números positivos. En las actividades realizadas al inicio del periodo de instrucción, antes de introducir los números negativos, encontramos una falta de conocimiento del modelo de la recta para representar sumas y restas. Es claro que ello influyó en los resultados obtenidos en las operaciones con números negativos. Un segundo aspecto en el que pensamos ha influido el conocimiento previo es la preferencia de los estudiantes por expresar situaciones estáticas y por representar puntos en la recta. Creemos que en la enseñanza de los números positivos hay un predominio de lo estático frente a lo dinámico, tanto en lo contextual como en las representaciones.

Las dificultades encontradas para hacer traducciones entre lo abstracto y la recta nos permiten concluir que el uso del modelo de la recta en la enseñanza de los números negativos no lleva a éxito si se utiliza descontextualizado. Además pensamos que lo contextual se enriquece al representarlo en la recta.

Bibliografía

- Bruno, A., Martínón, A. (1996). Les nombre négatifs dans l'abstrait, dans le contexte et sur la droite. *Petit x*, 42, 59–78.
- Bruno, A., Martínón, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(2), 249–258.
- Bruno, A., Martínón, A. (1999). The teaching of numerical extension: the case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(6), 789–809.
- Carr, K., Katterns, B. (1984). Does the number line help? *Mathematic in School*, 113(4), 30–34.
- Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 411–424.
- Gallardo, A., Romero, M. (1999). Identification of difficulties in addition and subtraction of integers in the number line. *Proceedings of the XXI PME-NA*, vol 1, pp 275–282. Cuernavaca. México.
- Küchemann, D. E. (1981). Positive and negative number. En Hart, K. (ed.) *Children's Understanding of Mathematics: 11–16*, pp. 82–87. John Murray: Londres.
- Janvier, C. (1985). Comparaison of models aimed at teaching signed numebrs. *Proceedings of the IX PME*, 135–139.

- Lytle, P. (1994). Investigation of a model on neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction. *Proceedings of the XVIII PME*, 192–199. Lisbon.
- Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers. *Proceedings of the XV PME*, 145–152.
- Rathmell, E. (1980). Concepts of the fundamental operations: results and implications from national Assessment. *Arithmetic Teacher*, 28(3), 34–37.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (eds.) *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. LEA: New Jersey.

Resumo. Apresentamos os resultados de uma experiência de aula sobre a aprendizagem dos números negativos, com alunos do ensino secundário que apresentavam dificuldades gerais de aprendizagem em Matemática. O estudo centrou-se sobre a forma como os alunos realizam traduções da dimensão da recta para as dimensões abstracta e contextual, no que se refere ao conceito, à ordem, à adição e à subtração de números negativos. Realizou-se uma análise dos erros cometidos, distinguindo os erros de interpretação das representações que os alunos lêem ou fazem na recta, dos erros de escrita que cometem ao fazer as representações, analisando-se, para além disso, como os alunos realizam as actividades de tradução entre as várias dimensões.

Palavras-chave: Números negativos; Aprendizagem; Dificuldades dos alunos.

Abstract. We present the results of a teaching experiment about negative numbers with high school students with general mathematical learning difficulties. The focus of the study was the way students translate between the number line dimension and the abstract and contextual dimensions. We analyzed students mistakes, distinguishing interpretation mistakes about the representations when students read or make them, from mistakes in writing the representations. We further analyzed the way students translate between the mentioned dimensions.

Keywords: Negative numbers, Learning; Students difficulties.

■■■

ALICIA BRUNO

Universidad de La Laguna, Tenerife, Espanha
abruno@ull.es

NOEMÍ CABRERA

Universidad de La Laguna, Tenerife, Espanha