Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas: Análisis de un caso

Carolina Rey
Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante, España

Carmen Penalva
Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante, España

Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante, España

Introducción

Durante la enseñanza de las matemáticas, los maestros combinan conocimiento desde diferentes dominios para interpretar la actividad matemática y las respuestas de sus alumnos y para planificar intervenciones futuras. En estas situaciones los maestros generan actividades cognitivas de análisis e interpretación de las situaciones de enseñanza de las matemáticas para tomar decisiones de acción (Llinares, 1998, 1999; Ponte & Chapman, 2006). En este sentido, la posibilidad de mejorar la práctica pasa por desarrollar en los profesores la competencia en realizar estas actividades. Así, ayudar a los maestros a desarrollar competencias en interpretar las producciones matemáticas de sus alumnos y en planificar la enseñanza se ha convertido en el foco de recientes propuestas en los programas de formación de profesores (Borko, 2004; Wilson & Berne, 1999). Las intervenciones en formación de profesores dirigidas a estos objetivos han puesto de manifiesto la importancia de la colaboración entre los profesores y la constitución de comunidades de práctica. Sin embargo, el conseguir estos objetivos se ha mostrado difícil debido a que los maestros tienen pocas oportunidades de analizar conjuntamente la enseñanza y el aprendizaje matemático de los alumnos (Llinares & Krainer, 2006). De ahí que se genera la necesidad de crear oportunidades para que los maestros puedan compartir sus experiencias y reflexionar sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de manera conjunta como una forma de desarrollar su competencia en analizar, interpretar y tomar decisiones de acción en relación a la enseñanza de las matemáticas. Esta situación es similar cuando hablamos de maestros que quieren formarse como asesores de matemáticas (Even, 1999).

Una forma de ayudar a los maestros que están formándose como asesores de matemáticas a implicarse en el análisis de la práctica de manera conjunta es a través del uso de casos (Llinares, 1994; Shulman, 1992). Los casos son registros contextualizados de la práctica de enseñar y aprender matemáticas que describen de manera detallada diferentes aspectos sobre los cuales los maestros y los asesores pueden centrar su análisis y considerar múltiples perspectivas y cursos de acción alternativos. Los casos pueden ser usados en la formación de profesores para ayudar a los maestros a dotar de sentido a lo que los alumnos comprenden y cómo llegan a comprenderlo, decidiendo qué es lo que se supone como evidencia de dicha comprensión. Además, este análisis se puede usar para considerar cuál debe ser el siguiente movimiento instruccional (Wilcox & Lanier, 2000). Desde este punto de vista, nuestra investigación se centra en analizar cómo un grupo de maestros, formándose como asesores de matemáticas, dotan de significado de manera colaborativa la información procedente de la Didáctica de la Matemática en el análisis de situaciones que describen las dificultades de alumnos de primaria con los algoritmos y la estructura aditiva-multiplicativa en los números naturales.

Marco teórico

Desde hace algunos años se está empezando a asumir que el aprendizaje que se genera en una situación está relacionado con la forma en la que los individuos interaccionan entre sí y con la manera en la que negocian los significados para dotar de sentido a las tareas que deben resolver. Este punto de vista, es decir, la manera en la que se usa el conocimiento como un medio para resolver las tareas propuestas es un indicativo del aprendizaje realizado (Llinares, 2002). Las perspectivas socioculturales sobre el aprendizaje asumen que el aprendizaje es aprender a hacer alguna cosa con los instrumentos, sean físicos o conceptuales. Con este enfoque, el conocimiento de Didáctica de la Matemática se ve como una ayuda al maestro para pensar y actuar. Así, el aprendizaje puede ser comprendido como el uso de un conjunto particular de instrumentos de una manera productiva y para propósitos particulares (Saljö, 1999).

Por otra parte, las perspectivas situadas del aprendizaje subrayan la importancia de la interacción y la colaboración entre los maestros como elementos que potencian el aprendizaje. Se asume que los maestros aprenden cuando tienen la oportunidad de tratar las situaciones de enseñanza desde una perspectiva investigativa, generando preguntas, buscando respuestas, y usando el conocimiento y la teoría producidos por otros como material generativo para plantear preguntas y desarrollar interpretaciones. Así, los maestros aprenden cuando dotan de sentido y se apropian de los elementos necesarios para pensar y actuar como tales (García, Sánchez, Escudero & Llinares, 2006). Este proceso les permite generar un conocimiento local sobre la práctica trabajando en comunidades de indagación para teorizar y construir conocimiento pertinente para la situación (Cochran-Smith

& Lytle, 1999; Wenger, 1998). De esta manera el aprendizaje se ve como la transformación del individuo a través de la participación creciente en las prácticas sociales y en términos de las tareas que realizan. Es decir, el aprendizaje del maestro podría verse como la participación progresiva en comunidades de práctica a través del uso de instrumentos conceptuales para comprender y manejar las diferentes actividades en que se organiza la práctica de enseñar matemáticas (Lave & Wenger, 1991; Van Guisen, Van Oers & Wubbels, 2005).

Esta perspectiva plantea a los formadores de profesores el reto de diseñar entornos de aprendizaje que permitan, a los maestros que quieren llegar a ser asesores, desarrollar el conocimiento de Didáctica de la Matemática para fundamentar sus competencias en relación con las tareas de interpretar la actividad matemática de los estudiantes y determinar y planificar nuevas líneas de actuación. En esta investigación se diseñó un entorno de aprendizaje que consistía en:

- el análisis colaborativo de un caso — entendido como un problema profesional —, y
- la participación en varios debates virtuales y presenciales como una manera de hacer operativa la idea de aprendizaje colaborativo.

Este diseño creaba oportunidades para maximizar la interacción entre los maestros como un medio de favorecer el uso progresivo de diferentes “instrumentos conceptuales” al resolver las tareas propuestas (Andriessen et al. 2003). Las preguntas específicas de investigación que nos planteamos fueron:

- ¿qué características tiene el aprendizaje colaborativo generado?
- ¿cómo los maestros usan el conocimiento de Didáctica de la Matemática para interpretar la actividad matemática de los alumnos y plantear nuevas líneas de actuación?
- ¿en qué medida las características del entorno potencian o limitan el aprendizaje generado?

Metodología

Participantes

Han participado 65 maestros de primaria en un curso de formación continua para recibir una certificación como asesores de Matemáticas y Lengua. La duración de este curso era de 90 horas, 45 de las cuales estaban centradas en Didáctica de la Matemática. Uno de los módulos de la Didáctica de la Matemática en este curso estaba centrado en *Dificultades de aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria*, y tenía como objetivo que los maestros aprendieran a identificar, explicar y justificar el origen de las dificultades de aprendizaje que los alumnos de Primaria tienen en relación con el contenido matemático. Dentro de este módulo se realizó la experiencia con una duración de 30 días. Ésta estaba organizada alrededor del análisis de un caso. El caso consistía en la descripción de una situación de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y en una serie de preguntas sobre dicha situación entendidas como "tareas" (ver anexo). Para realizar las tareas propuestas se proporcionó a los maestros la posibilidad de participar en debates virtuales y presenciales (Ellis et al., 2006). En este artículo analizamos las participaciones de grupos realizadas en los debates virtuales. Estas aportaciones son las resultantes de un acuerdo previo entre los miembros del grupo (debates presenciales). Lo que pretendemos es analizar el proceso de aprendizaje llevado a cabo mediante las diferentes interacciones entre los grupos. Los debates virtuales posibilitan que los estudiantes interaccionen, reflexionen sobre lo argumentado y puedan compartir experiencias y conocimiento (Penalva et al., 2002, 2003, 2004; Torregrosa et al., 2003; Valls et al., 2003).

Los maestros participantes mostraron de forma explícita y voluntaria un compromiso para trabajar colaborativamente en el análisis de los casos. Para ello los maestros formaron 11 grupos de entre cinco a siete participantes para realizar las tareas propuestas y participar en los debates virtuales. En este artículo utilizamos la participación de los grupos en los debates virtuales para mostrar cuáles eran las características del aprendizaje colaborativo generado. De esta manera, centramos nuestra atención en cómo influyen las aportaciones de ciertos grupos, como el grupo G5 o G10, en el desarrollo del debate, y en cómo aportaciones de otros grupos al debate influyen en sus respuestas. Para dar cuenta de las características del aprendizaje colaborativo generado usamos la idea de "cadena conversacional", entendida como secuencias de interacciones entre grupos que establecen un diálogo o discusión entre ellos. Los datos considerados aquí son las aportaciones escritas por diferentes grupos a los debates y las correspondientes cadenas conversacionales identificadas. El análisis de las características del aprendizaje colaborativo generado y de los procesos de construcción del conocimiento profesional identificados en distintos grupos se presenta como ejemplificaciones de los resultados obtenidos.

El diseño del entorno de aprendizaje

Diseñamos un *caso*, "El caso de David" (ver anexo), articulado a través de tres tareas: Tarea 1 (aproximación al diagnóstico); Tarea 2 (diagnóstico e intervención); y Tarea 3 (intervención y evaluación). Las tres tareas estaban centradas en las producciones matemáticas de un alumno de 5º de educación primaria (10–11 años) al realizar diferentes actividades con la división de números naturales. El caso tenía como objetivo presentar a los maestros las dificultades que tienen los alumnos de primaria en el uso del algoritmo de la división con números naturales y el papel que desempeñan las ideas de valor de posición y de agrupamiento que articulan la comprensión del sistema de numeración decimal, y la comprensión de la estructura multiplicativa de los números naturales. En particular el papel que desempeña la comprensión de la descomposición y equivalencia de las unidades de diferentes órdenes en dotar de sentido a los algoritmos de cálculo. Para estudiar el caso se proporcionó a los maestros documentos con información teórica sobre el papel de las diferentes sistemas de representación del sistema de numeración decimal y la relación que existe entre el desarrollo de los algoritmos y la comprensión de la descomposición y equivalencia de las unidades de diferentes órdenes (Llinares, 2001).

Para cada una de las tres tareas planteamos dos debates: uno presencial en el que cada grupo de maestros trabajaba de manera autónoma y un debate virtual en el que las participaciones debían realizarse como grupo. En el debate virtual, cada grupo de maestros exponía sus propuestas consensuadas previamente y proponían alternativas a las propuestas de los otros grupos (Rey, Penalva & Llinares, 2004). Con este planteamiento, la estructura metodológica del módulo constaba de 6 debates (3 presenciales y 3 virtuales). El objetivo de esta estructura era proporcionar a los profesores diferentes oportunidades para desarrollar un aprendizaje colaborativo con el fin de potenciar la negociación de los significados dados en la información teórica y facilitar su uso como instrumentos conceptuales.

Análisis

Se analizaron las producciones de los grupos participantes en los debates virtuales desde dos perspectivas: la forma en que se participaba en los debates y el contenido de las interacciones.

Análisis de la forma en que se participaba en los debates

En esta investigación vamos a entender por "interacción" la aportación de un grupo al debate generada por la aportación de otro grupo (Penalva, Rey & Llinares, 2003). La categorización de los "modos de participar en el debate" permitió obtener información sobre cómo se participa. La forma de participar en los debates se considera importante ya que proporciona indicios para poder caracterizar la manera en la se podía estar desarrollando la negociación de los significados que ayudaban a los maestros a interpretar las situaciones de aprendizaje de las matemáticas que se les presentaban. Teniendo en cuenta que las participaciones en los debates virtuales se realizan a través de texto escrito, el modo de participar nos indica "la actitud del hablante respecto al enunciado lingüístico" y por tanto aporta información sobre el papel que desempeñan las ideas en los procesos de interpretar las situaciones. Por otra parte, la identificación de cadenas conversacionales permite fijar la atención en aquello sobre lo que los estudiantes han centrado una negociación de significados (el tema de la conversación) y por tanto indican dónde se puede "mirar" para identificar lo que se está aprendiendo (Rey, Penalva & Llinares, 2004).

Para dar cuenta de manera descriptiva y cuantitativa de las interacciones generadas en los diferentes debates virtuales, se construyeron tablas de doble entrada correspondientes a cada una de las tareas. La figura 1 muestra la forma que adoptaban las tablas generadas. Cada asterisco (*) del gráfico indica el grupo que emite una aportación (eje horizontal) y el grupo al que va dirigida dicha intervención (eje vertical), también aparece como participante la moderadora (m). Esto implica que cada grupo al introducir su aportación indicaba a quién iba dirigida.

Recepciones ↑	m												
	11					*				*			*
	10				*								*
	9												*
	8				*				*				*
	7				*					*			*
	6					*							*
	5						*					*	*
	4											*	**
	3								*				*
	2						*						
	1												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	m

Emissiones →

Figura 1a: Tabla de interacciones entre los grupos
en el debate virtual vinculado a la tarea T1

Este tipo de tablas organiza la información del número de interacciones realizadas por cada grupo (emisiones de cada grupo, número y grupo al que se dirige) y de las recepciones del resto de los grupos (número y grupo que emite), y aporta información de la evolución de la participación a lo largo de los tres debates. De las 3 tablas que se muestran se puede observar el aumento gradual, por lo general, de participación en los debates virtuales, así como una mayor interacción con la moderadora.

Recepciones ↑	m				*	**	***			*	*		
	11		*								**		*
	10						*						*
	9	*	*								*	*	*
	8										*		*
	7				*								*
	6		***			*					*		*
	5	*	*								*		**
	4		*			*				*	**		**
	3		*		*	*					*		*
	2				**		**			*		*	
	1		*		*								*
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	m

Emissiones →

Recepciones →	m		*			*				**	***	***	
	11				*	*			*	*	***		**
	10	*	*		**	*				**		******	
	9			*	*	*	**				**	*	***
	8				*						*		
	7				*						**	**	
	6	*	**	*		*				**		*	
	5		*						*		***	*	*
	4	*					*		*	*	***		
	3	*			*	*	*				**	*	
	2	*			**	*			*				*
	1		*		*						*	*	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	m

Emissiones →

Figura 1b: Tablas de interacciones entre grupos en debates virtuales correspondientes a las tareas T2 y T3

El segundo aspecto que se ha considerado es la “forma de participar en los debates”. Para ello, cada una de las aportaciones se clasificó considerando la actitud del hablante (en este caso el “hablante” es un grupo, ya que las participaciones al debate se realizaban como grupo). Las categorías usadas han sido:

Respuesta (RS): aportación inicial referida a la propia tarea. Contestación a las preguntas realizadas por el moderador a lo largo del debate.

Preguntas de reflexión (PR): preguntas que inducen a una mayor reflexión sobre un tema en un momento dado a lo largo del debate: revisión de la aportación, ampliación de la información.

Preguntas de aclaración (PA): aportaciones que demandan la aclaración de un concepto — idea utilizado por un participante.

Respuestas de aclaración (RA): son las respuestas que emiten los grupos ante las preguntas de aclaración o las preguntas de reflexión realizadas por alguno de los participantes.

Disconformidad (D): manifiesta disconformidad hacia la aportación a la que se dirige.

Refutación (RF): manifiesta disconformidad hacia la aportación a la que se dirige, acompañándola con argumentos que apoyan su idea.

Refrendo (RD): manifiesta conformidad y apoyo hacia una aportación determinada.

Clarificación (CL): Amplía y/o refina alguna aportación anterior, bien sea propia o de otro participante, mediante el uso de nueva información, describiendo experiencias propias o aportando una opinión grupal.

En las diferentes aportaciones realizadas se ha considerado si se adoptaba una posición pasiva (recepción) o activa (construcción), si sus aportaciones son eficaces o ineficaces para el aprendizaje colaborativo, y si utilizan el proceso de comunicación como forma de regulación del aprendizaje (para con otros) o de forma autorreguladora poniendo de manifiesto sus inquietudes, preguntas, dudas y reflexionan sobre ellas (Sfard, 2001).

Finalmente, las diferentes interacciones en los debates han sido representadas mediante gráficos, los cuales muestran el orden de participación de cada uno de los grupos, así como el tipo de interacción. Este tipo de representación permite identificar las "cadenas conversacionales" (Rey, Penalva & Llinares, 2004) establecidas entre los distintos grupos, entendidas como secuencias de interacciones entre grupos los cuales establecen un diálogo o discusión entre ellos en relación a un tópico específico. En las cadenas conversacionales se identifica al grupo que realiza la aportación y el código de la categoría de la forma de participar asignada a dicha aportación. Las figuras 2 y 3 muestran cómo se representa una cadena conversacional.

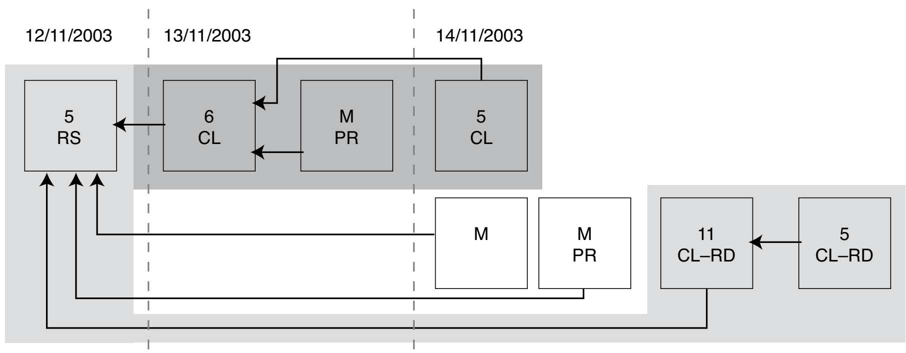


Figura 2. Representación gráfica de una cadena conversacional generada en el debate 1

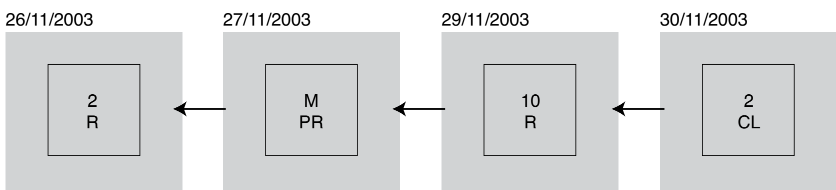


Figura 3. Representación gráfica de una cadena conversacional generada en el debate 3

Análisis de contenido de las interacciones

Para identificar cómo los profesores usaban y relacionaban las ideas teóricas en la resolución de las diferentes tareas hemos usado las cadenas conversacionales generadas alrededor de distintos "temas de conversación" en los debates. Para realizar este análisis se ha considerado como unidad de análisis las frases o grupos de frases que conllevan una idea pertinente para resolver la tarea. Las diferentes unidades de análisis se agruparon según una categoría y fueron interpretadas desde (1) la forma en la que los profesores parecían estar dotando de significado a las ideas teóricas procedentes de la Didáctica de la Matemática; y (2) la manera en que la información teórica desde la Didáctica de la Matemática era usada para resolver las tareas planteadas. Esta última parte del análisis es la que nos permite determinar cómo el conocimiento teórico de la Didáctica de la Matemática era transformado en instrumento conceptual para resolver las tareas propuestas y por tanto convertirse en conocimiento profesional.

Resultados

La participación de los maestros en los entornos de aprendizaje diseñados permitió identificar características del aprendizaje colaborativo como contexto en la formación de asesores en Matemáticas. El aprendizaje generado es descrito a través de la manera en la que los maestros relacionaban las ideas teóricas con la evidencia procedente de las situaciones reales. A través de los distintos debates realizados el número de participaciones y el número de interacciones entre los grupos fue aumentando, lo que generó un mayor número de cadenas conversacionales. Dos ideas han surgido del análisis de estas cadenas conversacionales:

- la interacción como factor importante en el aprendizaje colaborativo y en la construcción del conocimiento profesional, y
- la relación entre la experiencia, conocimiento y actitudes previas con la información teórica como aspecto característico del aprendizaje colaborativo.

Describiremos y desarrollaremos estas dos ideas usando como referente la participación del grupo G5 en los diferentes debates y las interacciones con los grupos G10 y G2. De esta manera los protocolos procedentes desde estos grupos conforman las evidencias empíricas que nos ayudan a caracterizar cómo se generó el aprendizaje colaborativo, y el papel de la interacción y el conocimiento previo y concepciones (creencias y actitudes) de los maestros en el proceso de construcción del conocimiento profesional.

Dotar de sentido a los instrumentos conceptuales: La interacción como factor importante en el aprendizaje colaborativo y en la construcción del conocimiento profesional

La forma de participar y el contenido de las aportaciones del grupo G5 han condicionado la participación de otros grupos en el sentido de introducir en el discurso ideas teóricas, y mostrar la necesidad de vincular la evidencia empírica a los principios teóricos. Sin embargo la necesidad de usar las ideas teóricas en la interpretación y análisis de las producciones de los alumnos de primaria no se consigue de manera simple. Esta característica del papel de la interacción en la constitución del aprendizaje colaborativo y en la construcción del conocimiento profesional se puso de manifiesto en los diferentes tópicos (temas de conversación) que se fueron generando a lo largo de los debates.

En la interpretación de la situación

Así por ejemplo, esta característica se observa en el primer debate sobre las dificultades que David parece tener con el algoritmo de la división y su posible interpretación. Con este objetivo el grupo G5 indicó:

> Pensamos que la dificultad comienza en cuanto en el divisor hay dos cifras y tiene que realizar una resta llevando. Este error se comete de forma sistemática. Suponemos que podría tener dificultades en la realización de la resta llevando y en la descomposición de los números naturales. (G5, Debate1, 12:28; 12/11/2003)

En esta aportación el grupo G5 identifica los errores de cálculo realizados por David con las divisiones con dos cifras en el divisor y se da cuenta de su carácter sistemático. Esta aportación al debate tiene un primer carácter descriptivo "la dificultad comienza en cuanto en el divisor hay dos cifras y tiene que realizar una resta llevando. Este error se comete de forma sistemática", que indica la competencia del grupo G5 en identificar los aspectos que considera relevantes. Apoyados sobre la identificación de esta evidencia, el grupo G5 realiza una primera inferencia (entendida en este momento como una interpretación de las causas de las dificultades con el algoritmo de la división) "Suponemos que podría tener dificultades en la realización de la resta llevando y en la descomposición de los números naturales". Este hecho parece llevarles a apuntar una posible causa de este tipo de errores vinculándolo a la comprensión de la descomposición de los números naturales y la idea de equivalencia entre las diferentes descomposiciones. Este hecho pone de manifiesto la manera en la que el grupo G5 intenta proporcionar un sentido a las respuestas dadas por David vinculando su explicación a la falta de comprensión conceptual de ideas del sistema de numeración decimal.

Motivados por esta aportación del grupo G5, el grupo G6 manifiesta su conformidad con las causas de las dificultades expuestas por el grupo G5 (la interpretación), y además indica otra posible causa de las dificultades que tiene David:

> Estamos totalmente de acuerdo con vuestro mensaje, todas las contestaciones realizadas en esta primera tarea del caso de David son correctas. Sin embargo, pensamos que el error cometido por el alumno puede ser debido también a que no tiene muy clara la concepción de inversión de la multiplicación-división. (G6, Debate 1, 16:01, 13/11/2003)

Esta interpretación puede ser entendida en un nivel conceptual ya que hace referencia a la inversión entre las operaciones de multiplicación y división. El grupo G6 considera como una causa de la dificultad la semántica del concepto. Es decir, el algoritmo de la división es visto desde un estatus conceptual ya que el grupo G6 añade la posibilidad de que David no tenga interiorizado la relación entre las operaciones de la multiplicación y división como otra causa de los errores cometidos cuando realiza las divisiones. En esta interpretación de las dificultades de David con el algoritmo de la división, el grupo G6 ha puesto de manifiesto la complejidad de los conceptos matemáticos.

Esta forma de interactuar en los debates la entendemos como el papel que desempeña la interacción como factor importante en el aprendizaje colaborativo entre los maestros y en la construcción del conocimiento profesional. Los maestros en los dos grupos complementan sus aportaciones, en este caso sus interpretaciones de las posibles causas de las dificultades de David con el algoritmo de la división.

Por ejemplo, ante la aportación del grupo G6, el grupo G5 exige una mayor claridad de la relación entre la interpretación realizada y la evidencia sobre la que se apoya:

> Cuando os referís a la dificultad de David en la concepción de inversión de la multiplicación-división, no tenemos muy claro de dónde habéis deducido esto. Si se le hubiera pedido que comprobase el resultado de las divisiones con otros algoritmos diferentes y no hubiera sabido utilizar la multiplicación y la SUMA, talvez. (G5, Debate 1, 20:25, 14/11/2003)

Esta necesidad de aclaración solicitada por el grupo G5 es un indicador de que la interacción centrada en el sentido dado a las ideas teóricas entendidas como instrumentos conceptuales se convierte en una característica del aprendizaje colaborativo. Esta interacción entre los grupos G5 y G6 muestra cómo la misma situación de aprendizaje de las matemáticas es interpretada desde diferentes perspectivas conceptuales por los maestros. El hecho de que el grupo G5 centrara su intervención en el papel que desempeña la comprensión del algoritmo de la resta en la realización del algoritmo de la división hizo que el grupo G6 planteara una perspectiva complementaria basada en otro de los niveles en los que opera el lenguaje de las matemáticas, el nivel semántico en el que los signos son dados con un significado claro y preciso.

La interacción generó la posibilidad de situar perspectivas alternativas permitiendo el uso de las ideas conceptuales para explicar evidencias de una situación real. De esta manera, la posibilidad de ver cómo otros interpretan los mismos hechos desde perspectivas diferentes, por ejemplo, el que se haya puesto de manifiesto los dos estatus integrantes de los objetos matemáticos, los objetos son vistos como un proceso y los objetos son vistos como una entidad conceptual, hace que consideremos la información teórica complementaria utilizada a través de la interacción como una característica de la generación del aprendizaje colaborativo.

Este aspecto de la forma en la que los maestros dotan de sentido a los instrumentos conceptuales que usan para interpretar los aspectos de la situación que consideran relevantes como una característica de la construcción del conocimiento profesional y la manera en la que la interacción se convertía en un factor importante en el aprendizaje colaborativo también se ponía de manifiesto en el debate vinculado a la tarea 2 centrado en la planificación de una intervención que facilite la superación de las dificultades de David.

En la justificación de planificación de la enseñanza

Por ejemplo, en este debate el grupo G5 usó la información sobre diferentes niveles de desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal para justificar el diseño de una intervención en el caso de David y su dificultad con las operaciones de dividir cuando el divisor tiene dos cifras. Para el Grupo G5 es necesario que los alumnos de Primaria comprendan la equivalencia entre las diferentes descomposiciones de los números para llegar a comprender el significado del algoritmo (por ejemplo, que el alumno llegue a comprender que 345 = 300 + 40 + 5 = 200 + 140 + 5 = 300 + 30 + 15 = …) y por eso justificaba su planificación de la siguiente manera:

> … La intervención debe partir de la comprensión del sistema numérico decimal ya que parece que David todavía no ha superado la fase de descomposición canónica. Si se trabajara antes la resta con llevadas, seguiríamos situando a David en la tercera fase. (G5, Debate 3, 00:03, 28/11/2003)

Esta aportación genera otra aportación del grupo G10 respecto a la manera de considerar las características de la comprensión de las ideas de agrupamiento y valor de posición en la planificación de la enseñanza de los algoritmos de cálculo.

> Más que de descomposición canónica deberíamos hablar de descomposición no canónica, ya que es la que realmente se utiliza en la resta con llevadas. Nosotros planteamos que la descomposición canónica ya la tiene adquirida (fase 1) y está empezando con la canónica que no la tiene dominada, tal y como expresamos en la tarea anterior. En la sustracción del modelo de la última actividad de la tarea dos dijimos que David debía saber que: 651 = 5 Centenas, 10 Decenas y 15 unidades (que es una descomposición no canónica, pues utiliza dígitos diferentes al número de origen). (G10, Debate 3, 13:05 29/11/2003)

> Es cierto lo que decís en cuanto a la realización del algoritmo de la resta con llevadas. Pero si nos fijamos, tiene errores cuando debe restar 31 – 28, lo cual podría hacerse a través de una simple aritmética informal: de 28 a 31 van 3. Según Resnick, en la 1ª fase de descomposición canónica, los niños deben utilizar la aritmética informal, entre otras cosas utilizando el 10 como unidad iterativa. La no utilización de esta aritmética informal puede hacernos pensar que aún no haya superado esta fase. (G5, Debate 3, 14:14 29/11/2003)

El diálogo establecido entre estos dos grupos pone de manifiesto una característica del aprendizaje colaborativo que se está generando en los debates y por consiguiente un apoyo para la construcción del conocimiento profesional relativo a las dificultades de los alumnos de Primaria con los algoritmos de cálculo y la relación de dichas dificultades con la comprensión del sistema numérico decimal. El grupo G5 en diferentes aportaciones al primer debate pone de manifiesto otro "tema de conversación" que es secundado y utilizado por otros grupos en debates posteriores para dar respuesta a las tareas demandadas a los grupos de estudiantes relativas al tipo de estrategias que debería proponer Rosa, la asesora de la situación de aprendizaje planteada en el caso, con el fin de intervenir para ayudar a David a superar sus dificultades relativas al aprendizaje del algoritmo de la división. Cuando se les pregunta acerca de la naturaleza de las tareas que resuelve David, el grupo G5 indica:

> … No emplea material manipulativo que facilite la construcción del conocimiento matemático. (G5, Debate 1, 12:28, 12/11/2003)

Y posteriormente, cuando el grupo G5 aclara al grupo G6 su aportación en la que sitúa las dificultades de David en "la resta con llevadas", expone:

> … Seguimos pensando que debe haber una intervención pedagógica que parta del trabajo de la descomposición de números naturales con material manipulativo y gráfico, después la resta con llevadas… (G5, Debate 1, 20:25, 14/11/2003)

El uso de sistemas de representación diferentes de los contenidos numéricos es mencionado por el grupo G5 como elemento favorecedor de la comprensión del sistema de numeración decimal. Esta información teórica es usada y debatida por otros grupos con el fin de planificar la intervención acerca de la comprensión del sistema de numeración decimal en el caso de David y genera "el tema de conversación" de una nueva cadena conversacional. En ella tienen un papel relevante las aportaciones de los grupos G2 y G10. El grupo G2 propone una serie de aspectos para ayudar a David a superar sus dificultades:

> Trabajar lo relativo a la primera fase de Resnick (consiste en la comprensión de descomposiciones de la forma 345 = 300 + 40 + 5) que indica:
> • Ayudarle a comprender la noción de agrupamiento y valor de posición.
> • Las relaciones establecidas entre los dígitos y las cantidades.
> • Relación entre unidades de distinto orden.
> • Descomposiciones canónicas de los números.
> • Usar el número 10 como unidad iterativa.
>
> Concretándose en las siguientes tareas:
> • Situaciones de recitar oralmente la sucesión numérica, tareas de lectura y escritura de números (contexto oral).

> • Tareas de establecer la cantidad, es decir, decir qué número está representando de manera concreta con diferentes concretos (ejemplo los bloques multibase) y utilizar dicha representación para realizar operaciones de manera concreta (contexto cardinal).
> • La aritmética informal a través de los procedimientos inventados por el alumno para resolver problemas numéricos (G2, Debate 3, 17:25, 26/11/2003)

En el protocolo mostrado se observa cómo, tras describir los contenidos a trabajar con el alumno de educación primaria, el grupo G2 propone tareas donde se pone de manifiesto el uso de distintos sistemas de representación, como el lenguaje natural, el lenguaje simbólico y los materiales manipulativos. Cuando el grupo G2 propone situaciones en la que los alumnos tengan que recitar sucesiones numéricas (de dos en dos, o de diez en diez) y su posterior escritura, está facilitando que el alumno construya la secuencia numérica y sea capaz de realizar agrupaciones numéricas. El uso del lenguaje natural y el lenguaje simbólico de manera paralela promueve la relación entre diferentes sistemas de representación de un mismo concepto y por ello su comprensión. También el grupo G2 propone, usar los bloques multibase en un contexto cardinal. Este material manipulativo ha sido diseñado, básicamente, para favorecer el desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal. Por último, cuando el grupo G2 propone promover la aritmética informal, ofrece a David la posibilidad de desarrollar estrategias no estándares de realización de las operaciones aritméticas. Esta propuesta del grupo G2 aporta información teórica que permite fomentar la flexibilidad para operar con números de varios dígitos e introducir a los alumnos de educación primaria en el sistema simbólico.

Ante la aportación del grupo G2, el grupo G10 explica su propuesta relativa a la planificación de una intervención centrada en las dificultades de aprendizaje de David de la siguiente manera:

> Basándonos en la teoría de Resnick, podríamos facilitar la comprensión de la noción de agrupamiento y el valor de posición mediante la descomposición y recomposición canónica (1ª fase Teoría de Resnick) o no canónica (2ª fase Teoría de Resnick), refiriéndonos con:
> • descomposición (no canónica); 354 = 2C 13D 24U
> • descomposición (canónica); 354 = 3C 5D 4U
> • recomposición (no canónica); 2c 13D 24U = 354
> • recomposición (canónica) 3C 5D 4U = 354
>
> Es más, para llevar a cabo la intervención de David en el algoritmo de la división, consideramos que es fundamental que estos conocimientos estén adquiridos para utilizar el modelo propuesto por Beattle (Modelando las operaciones y los algoritmos, AT, Febr., 1986) ya que tras analizar diferentes métodos, hemos concluido que este es el que mejor favorece el aprendizaje significativo del alumno en lo que respecta al algoritmo de la división (G10, Debate 3,17:33, 29/11/2003)

El grupo G10 además de la información teórica referida a las fases de la comprensión del sistema de numeración decimal propuesta por el grupo G2, hace referencia a la correlación que debe existir entre la manipulación de materiales concretos, el lenguaje natural y el simbólico para comprender las operaciones y los algoritmos. La aportación de este grupo no sólo indica el énfasis por trabajar con sistemas manipulativos para el aprendizaje de los algoritmos sino que al poner de forma explícita descomposiciones múltiples de un número y al expresarlas de forma simbólica aporta al debate una forma diferente de representar una cantidad. El proponer actividades de descomposición y recomposición no canónica de un número ofrece una faceta del número que fomenta la flexibilidad en el uso de los números y por tanto el desarrollo del sentido numérico. El grupo G10 introduce y utiliza nueva información acerca del uso de sistemas de representación alternativos que no habían sido tenidos en cuenta por el grupo G2, al menos de forma explícita.

Ante la respuesta del grupo G10, el grupo G2 interacciona con él, refrendando su propuesta y ampliando su información:

> Le ayudamos (a David) tal y como nos ha contestado el grupo G10 y además añadimos:
> • con el uso de concretos para representar números,
> • con la traslación de concretos a símbolos y a contexto oral,
> • comunicando el proceso seguido y por qué eso es así,
> • con actividad por ejemplo: ¿cuál es el valor de posición del 5 en los siguientes números: 588, 56?
> • con actividad por ejemplo: inscribe el número formado por dos decenas y 9 unidades" (G2, Debate 3, 17:38 30/11/2003)

El grupo G2 aporta tareas de intervención diferentes a las propuestas por el grupo G10 haciendo referencia al modelo propuesto por este grupo, demandando la verbalización del proceso de resolución de los distintos algoritmos, de la resta y la división.

Consideramos que la interacción de los grupos G2 y G10 es un indicador de la negociación de significados entre grupos generado por la situación de interacción y un indicador de cómo el aprendizaje colaborativo apoyaba la construcción de conocimiento profesional. En esta interacción podemos observar cómo los dos grupos se ven en la necesidad de justificar sus decisiones en la planificación de las actividades a proponer a David integrando en su discurso las ideas derivadas de la información procedente de la Didáctica de la Matemática como dominio científico. De esta manera esta interacción es interpretada como un ejemplo de la manera en la que los maestros estaban transformando la información teórica en "*instrumentos conceptuales*" para intentar resolver un problema profesional. En particular cuando usan la información relativa a la relación entre los dígitos y las cantidades, descomposición de números, de agrupación de diez en diez, de múltiples descomposiciones, valor de la posición de un número, conversión entre sistemas de representación… para justificar sus decisiones instruccionales. Las interacciones generadas muestran cómo los maestros integran la información teórica desde la Didáctica de la Matemática en su discurso y le dan un carácter de instrumento conceptual al usarla de manera operativa al caso de David. Por todo ello consideramos que es un indicador del aprendizaje colaborativo realizado al mostrarse cómo la información aportada por ambos grupos se complementa.

La relación entre la experiencia previa y la información teórica: La reflexión sobre la propia práctica

Otro aspecto que el análisis de las aportaciones de los grupos a los tres debates virtuales ha mostrado es el papel que desempeña la experiencia previa de los maestros, sus conocimientos y concepciones, en caracterizar la manera en la que se desarrollan las diferentes interacciones y por tanto el aprendizaje colaborativo. En este sentido el conocimiento y concepciones previas de los maestros han condicionado en cierta medida la manera en la que se interactuaba y se participaba en los debates, y en la manera en la que la información teórica era transformada en un instrumento conceptual para resolver el problema profesional que se les presentaba.

Por ejemplo, en la cadena conversacional mostrada en la Figura 2 relativa a la interpretación de los errores que comete David generada por la intervención del grupo G5 (Debate 1, 12:28), intervienen también otros grupos, que con sus preguntas y demandas de clarificación al grupo G5 hacen que este grupo ponga de manifiesto hechos de la práctica docente basándose en su experiencia de maestros de educación primaria. En esta aportación el G5 hace alusión al escaso uso de materiales manipulativos utilizados por Jorge, el profesor de David en el caso planteado, para facilitar la construcción del conocimiento matemático. El grupo G11 ante dicha aportación pregunta:

> … Una de las posibles causas de la dificultad de David era la realización de las restas, siendo así ¿por qué trabaja el maestro los algoritmos de la división y la multiplicación? ¿y no el de la resta? Al igual en la utilización de los materiales manipulativos como método que facilita la comprensión alejándose de trabajar las matemáticas de forma mecánica. (G11, Debate 1, 17:48, 14/11/2003)

El grupo G5 responde poniendo de manifiesto como la participación en el debate y el análisis del caso se convierte en un contexto idóneo para reflexionar sobre la propia práctica:

> Os preguntáis por qué David no trabaja la resta con llevadas, cuando parece ser éste el problema que tiene con las divisiones. Puede ser que el maestro no lo haya detectado. Aunque a veces, los maestros solemos (somos maestros en activo todos los componentes del grupo) conocer la dificultad de algunos de nuestros alumnos, y no se plantean por diversos motivos actividades que vayan al origen de la actividad y con una adecuada metodología (que incluye siempre aspectos manipulativos y no sólo gráficos) se puedan paliar. (G5, Debate 1, 20:36, 14/11/2003)

En la respuesta del grupo G5 se indica también el poco uso que hace el profesorado del material manipulable, supliendo estas estrategias con otras de tipo gráfico, uso de dibujos y pictogramas. La respuesta del grupo G5 pone de manifiesto de manera explícita que la reflexión sobre la práctica motivada por la participación en este tipo de tareas le ha permitido darse cuenta que aunque ellos como maestros en ejercicio pueden llegar a identificar dificultades de aprendizaje en sus alumnos, algunas veces no se explicita lo suficiente y no se ponen los medios adecuados para que los alumnos de primaria superen esas dificultades.

En este sentido, el contexto de reflexionar de manera colaborativa en la resolución de problemas profesionales les ha permitido pensar sobre su propia práctica e integrar la información teórica con la descripción de su propia práctica como maestros. Así, en el debate 2, las interacciones producidas por el G5 y el G1 ofrecen una evidencia de la integración de los instrumentos teóricos con su experiencia profesional. El grupo G5, reflexionando desde su propia práctica, hace alusión a la falta de significatividad del aprendizaje del algoritmo de la resta y de la división para los alumnos de primaria. Esta falta de significado de los algoritmos de cálculo que estos maestros reconocen desde su propia práctica les hace plantearse cuestiones sobre la posibilidad de utilizar la calculadora para obtener resultados y dedicar tiempo a la enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos de forma contextualizada y significativa.

> Resulta contradictorio que se haya extendido en las escuelas la enseñanza mecánica y de un único modo posible de cada algoritmo, sobre todo en Primaria, lo cual conlleva una enorme dedicación de tiempo para conseguir "resultados correctos". Mientras tanto, se pierde la oportunidad de dotar de sentido a estos algoritmos en un contexto cercano al niño, y se pierde la oportunidad de utilizar los algoritmos (según Beattle), no como procedimientos rutinarios, sino para comprender las propiedades del sistema de numeración (lo que a su vez conlleva una mejora en el manejo del cálculo). ¿Por qué ese miedo entonces a utilizar una calculadora o un ordenador para resolver un algoritmo, paso necesario para solucionar un problema de la vida real?… (G5, Debate 2, 18:10, 22/11/2003)

Ante esta reflexión sobre la propia práctica y con referencias a su experiencia como profesores el grupo G1 introduce la siguiente aportación:

> No sería descabellado que se dedicara el tiempo necesario al empleo de nuevos materiales (calculadora, ordenador), pero creo que a muchos profesores les resulta más cómodo enseñar los algoritmos de forma mecánica como nos los han enseñado a nosotros, y también por la necesidad de reciclaje que deberíamos tener muchos de los profesores para la aplicación de las nuevas tecnologías. (G1, Debate 2, 15:50 23/11/2003)

Estas aportaciones e interacciones ponen de manifiesto cómo el contexto de interacción propiciado por los debates virtuales y el análisis del caso propuesto permiten a los maestros relacionar las informaciones teóricas con su experiencia profesional. Llama la atención el hecho que todas estas alusiones a su experiencia estén referidas al uso de distintos sistemas de representación en su proceso de enseñanza, más concretamente al uso de materiales manipulativos en el aula.

Discusión y conclusiones

En trabajos anteriores (Penalva et al., 2003, 2004) hemos puesto de manifiesto que el uso de los debates virtuales fomenta la participación entre los estudiantes con las siguientes características: las participaciones son asíncronas, las aportaciones son más reflexivas y argumentadas, los estudiantes pueden leer las participaciones de sus compañeros y reflexionar sobre las de su grupo y las suyas propias en momentos y sitios diferentes, permitiendo al mismo tiempo una interacción fluida y no condicionada a los participantes. En este sentido el entorno de aprendizaje diseñando ha facilitado el proceso de construcción del conocimiento centrado en la práctica de intervención curricular de las matemáticas escolares a través de un aprendizaje colaborativo. El análisis de las intervenciones en los debates virtuales nos ha permitido identificar dos características del proceso de construcción del conocimiento que se genera a través del aprendizaje colaborativo: (i) cómo la interacción se convierte en un factor importante en la constitución del aprendizaje colaborativo y por tanto en fundamento en la transformación de la información teórica de Didáctica de la Matemática en instrumento conceptual en la resolución de problemas profesionales, y (ii) cómo la reflexión sobre la propia práctica se convierte en un eslabón importante en la constitución de la información teórica en instrumento conceptual.

La forma en la que los grupos han participado ha sido identificada a partir de las interacciones puestas de manifiesto en las cadenas conversacionales. Hemos observado un importante cambio en el proceso de participación de los grupos de trabajo, desde la primera a la tercer tarea propuesta en relación al aumento gradual de las interacciones de los participantes y de las dobles interacciones en los tres debates (Rey & Penalva, 2005). El aumento de las interacciones implica aumento de conversaciones entre los grupos, elemento que, entre otros, consideramos clave en el proceso de enseñanza – aprendizaje de los estudiantes, y por ello, esencial en el desarrollo profesional de los profesores (Sfard, 2001).

Por otra parte, la secuenciación de la tarea ha permitido que los grupos usen aspectos del conocimiento teórico como instrumentos conceptuales referidos a la interpretación y a la intervención de dificultades de aprendizaje del algoritmo de la división. Tal es el caso del grupo G5 que, por ejemplo, ha puesto de manifiesto la importancia que tiene el uso de distintos sistemas de representación en el aprendizaje significativo de las matemáticas escolares, situando como ámbitos de actuación profesional: el alumno (dificultades de aprendizaje), el profesor de matemáticas (concepciones), las matemáticas escolares (sistemas de representación) y las interacciones que se producen entre ellos. El aprendizaje del grupo G5 ha sido progresivo: en la tarea1 ofrece indicios de uso de instrumentos conceptuales, que se refuerzan notablemente en la tarea2. Este hecho indica que a lo largo de la resolución de las diferentes tareas que configuran el caso, el grupo G5 va integrando los conocimientos necesarios y asignando significados a los elementos teóricos.

Pensamiento y discurso se consideran dos aspectos inseparables de un mismo fenómeno (Sfard, 2001) por lo que consideramos que las aportaciones de los grupos son indicativas de su *forma de aprender*. El análisis de los diálogos de los distintos grupos ha permitido identificar cómo el grupo G5 utilizando su discurso de forma activa y eficaz, regulando y autorregulado las discusiones ha conseguido generar un aprendizaje resolviendo progresivamente una situación de intervención en el aprendizaje del algoritmo de la división.

Tras el análisis de los datos se observa además cómo el grupo G5 realiza también un aprendizaje generativo, según las características que proponen Franke, Carpenter, Levi y Fennema (2001), puesto que podemos considerar las siguientes particularidades del aprendizaje:

a. generador (los maestros aplican sus conocimientos para adquirir nuevo conocimiento que les permite resolver situaciones problemáticas no familiares),

b. creador de estructura (el nuevo conocimiento se relaciona y se incorpora a redes existentes) y

c. el conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje se concibe como constructivo, creado por uno mismo y que cambia continuamente (los maestros perciben que pueden construir conocimiento a través de su propia actividad).

Es decir, el grupo G5 estructura el conocimiento, utiliza sus experiencias como punto de partida en la resolución de la tarea propuesta e incorpora nuevos conocimientos a los existentes, y genera nuevos conocimientos utilizando cuestiones reflexivas que requieren ampliación de información para la resolución de la tarea.

Los datos de la investigación sugieren que las colaboraciones entre profesores, insertos en una comunidad de aprendices, pueden fomentar su aprendizaje. Por ejemplo, el grupo G11 manifiesta explícitamente la modificación de sus ideas acerca del uso de determinados instrumentos conceptuales (el uso de representaciones alternativas para facilitar la intervención de las dificultades de aprendizaje del algoritmo de la división) gracias a la reflexión establecida por el grupo G5 en el debate. De la misma manera, se observa cómo el grupo G5 al tener que explicar sus aportaciones durante el desarrollo de la resolución del caso propuesto va modificando la forma de utilizar las informaciones teóricas, ofreciéndoles el estatus de instrumentos conceptuales.

Los análisis realizados nos han aportado información sobre cómo el diseño de un determinado entorno de aprendizaje organizado a través del estudio de casos y la incorporación de debates virtuales para facilitar la interacción ha permitido favorecer el aprendizaje colaborativo entre maestros que quieren formarse como asesores de matemáticas. En este sentido la reflexión sobre la propia práctica se ha integrado con el significado dado a la información teórica procedente de la Didáctica de la Matemática para apoyar la construcción de conocimiento profesional.

Nota

Agradecemos los comentarios y sugerencias realizados por los asesores de la Revista a una versión previa de este artículo.

Esta investigación se ha realizado con el apoyo en parte del proyecto SEJ2004-05479, financiado por Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid, España.

Referencias

Andriessen, J., Baker, M., & Suthers, D. (Eds.) (2003). *Arguing to learn. Confronting cognitions in computer-supported collaborative learning environments.* Dordrecht: Kluwer.

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, *33*(8), 3–15.

Cochram-Smith, M., & Lytle, S. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, *24*, 249–306.

Ellis, R. A., Goodyear, P., Prosser, M., & O'Hara, A. (2006). How and what university students learn through online and face-to-face discussion: conceptions, intentions and approaches. *Journal of Computer Assisted Learning*, *22*, 244–256.

Even, R. (1999). The development of teacher leaders and inservice teacher educators. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *2*(1), 3–24.

Franke, M., Carpenter, T., Levi, L, & Fennema, E. (2001). Capturing teachers' generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Educational Research Journal*, *38*(3), 653–689.

García, M., Sánchez, V., Escudero, I., & Llinares, S. (2006). The dialectic relationship between research and practice in mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 109–128.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Llinares, S. (1994). El estudio de casos como una aproximación metodológica al proceso de aprender a enseñar matemáticas. In L. Blanco & L. Casas (Eds.), *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas.* Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática-Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO — Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *17*, 51–64.

Llinares, S. (1999). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. In J. P. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Italia.* (pp.109–132). Lisboa, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educação.

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. In E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la educación secundaria* (pp. 151–175). Madrid: Síntesis.

Llinares, S. (2002). Participation and reification in learning to teach: The role of knowledge and beliefs. In G. Leder, E Pehkonen & G. Törner (Eds.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 195–219). Dordrecht: Kluwer.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429–460). Rotterdam/Taipei: Sense.

Penalva, M. C., Llinares, S., & Torregrosa, G. (2002). Learning to teach mathematics in virtual learning environment (VLE): Performance cognitive and technical tools. In A. Méndez & J. A. Mesa (Coords.), *Educational Technology. International Conference on ICT's in Education*, *4* (pp. 1431–1435). Badajoz: Junta de Extremadura.

Penalva, M. C., Llinares, S., Torregrosa, G., & Valls, J. (2004). Entornos virtuales de aprendizaje en la formación de maestros en el área de Didáctica de la Matemática. In M. A. Martínez (Ed.), *Investigar en docencia universitaria* (pp. 243–264). Alcoy: Marfil.

Penalva, M. C., Rey, C., & Llinares, S. (2003). Virtual learning environments and in-service primary teachers' conceptions. In A. Méndez; J. A. Mesa & J. Mesa (Eds.), *Advances in Technology-Based Education: Towards a Knowledge-Based Society* (pp. 1165–1169). Badajoz: Junta de Extremadura.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461–494). Rotterdam/Taipei: Sense.

Rey, C., & Penalva, M. C. (2005). Desarrollo profesional del profesor de Matemáticas a través del discurso: Un caso práctico. *V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Porto. (Publicación en CD ROM)

Rey, C., Penalva, M. C., & Llinares, S. (2004). Multientorno de aprendizaje como estrategia didáctica. *Tercer Congreso Internacional*. Docencia Universitaria e Innovación. ICE Universitat de Girona (publicación CD ROM).

Säljo, R. (1999). Concepts, cognition and disclurse: From mental structures to discursive tools. In W. Schnotz, S. Vosnidou & M. Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change* (pp. 81–90) Amsterdam: Pergmaon-EARLI.

Shulman. J. H. (Eds.) (1992). *Case methods in teacher education.* New York, NY: Teachers College Press.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 13–57.

Torregrosa, G., Llinares, S., & Penalva, M. C. (2003). Diseño de entornos de aprendizaje integrando las TIC: Construcción de conocimiento necesario para enseñar Matemáticas. *Comunicación y Pedagogía*, *190*, 29–33.

Valls, J., Cos, A., & Llinares, S. (2003). Virtual debate vs in-public debate as learning environments for mathematics education. In A. Méndez; J. A. Mesa & J. Mesa, *Advances in Technology-Based Education: Towards a Knowledge-Based Society, M-ICTE2003* (pp. 1386–1390). Badajoz: Junta de Extremadura.

Van Huizen, P., Van Oers, B., & Wubbels, Th. (2005), A Vygostkian perspective on teacher education. *Journal of Curriculum Studies*, *37*(3), 267–290.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity.* New York, NY: Cambridge University Press.

Wilcox, S. K., & Lanier, P. E. (Eds.) (2000). *Using assessment to reshape mathematics teaching: A casebook for teachers and teacher educators, curriculum and staff development specialists.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Wilson, S. W., & Berne, J. (1999). Teacher learning and the acquisition of professional knowledge: An examination of research on contemporary professional development. *Review of Research in Education*, *24*, 173–210.

Anexo

El caso de David

Jorge, maestro de 5º curso de un centro escolar, se ha reunido con la psicopedagoga, Rosa, para informarle de los errores que comete David, uno de sus alumnos, cuando realiza determinadas operaciones numéricas. Según el maestro las dificultades que tiene el alumno están haciendo que retrase su aprendizaje y pierda interés por el mismo. David antes vivía en otra ciudad y por tanto es el primer año que cursa en este centro. Es un chico de carácter abierto con sus compañeros que ha hecho muy pronto nuevos amigos y participa en las tareas que se le demandan en otras asignaturas, pero suele ser poco comunicativo en clase de Matemáticas, sobre todo cuando tiene que resolver tareas aritméticas. El maestro comenta que David sabe las tablas de multiplicar de memoria y suele hacer bien problemas verbales cuya resolución requiera realizar una multiplicación que tenga un factor de una sola cifra o de dos cifras, por ejemplo 152 × 32 o una división exacta con números sencillos, 56 × 7. Realiza correctamente, también, otras divisiones, como 5750 : 2 que la resuelve de la forma siguiente:

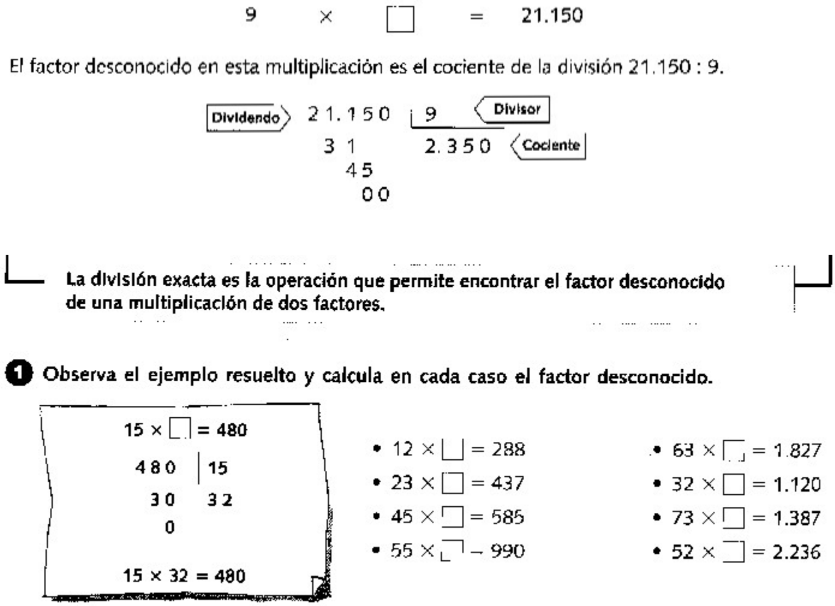
```
5750 |2
     -------
17     287
 15
  10
   0
```

pero en algunas divisiones comete errores. Jorge le expone a Rosa que ha tratado de explicar a David cómo debe hacer la división en otros casos, pero parece que David se bloquea y no es capaz de seguir sus explicaciones. Como primera toma de contacto con la problemática expuesta Rosa le ha dicho al maestro si puede asistir a su clase y observar a David sin que el se dé cuenta.

Al día siguiente Rosa asiste al aula de Jorge, y observa que se dirige a sus alumnos y les dice:

> "Aunque algunos de vosotros ya sabéis hacer divisiones cuando el divisor es un número de 2 y de 3 cifras, hoy vamos a repasar esas operaciones. Sabéis que la multiplicación y la división son operaciones inversas, es decir que cuando en una multiplicación falta un factor lo podemos obtener haciendo una división. Quiero que consultéis vuestro libro por la página…. y hagáis el ejercicio 1"

En el texto se muestra:



9 × □ = 21.150

El factor desconocido en esta multiplicación es el cociente de la división 21.150 : 9.

```
Dividendo  21.150 | 9        Divisor
            3 1     2.350    Cociente
              45
               00
```

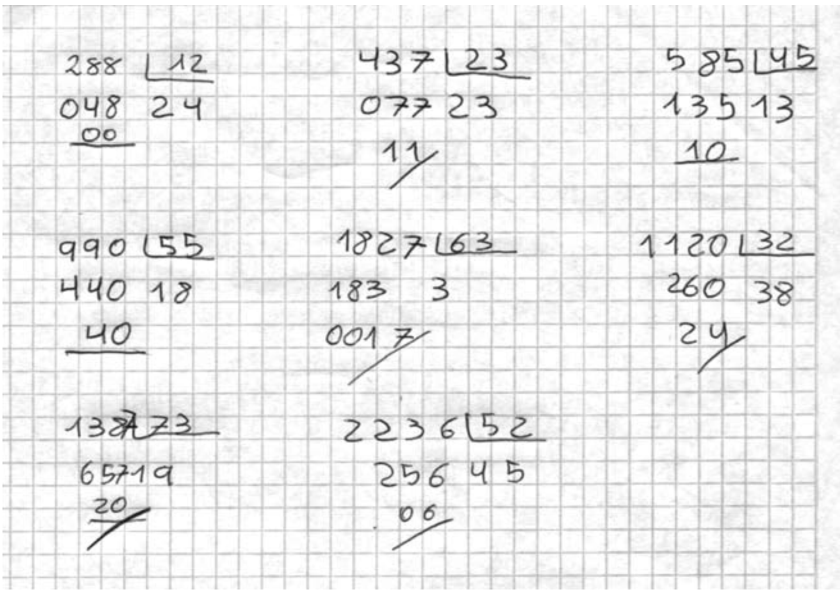
La división exacta es la operación que permite encontrar el factor desconocido de una multiplicación de dos factores.

1 Observa el ejemplo resuelto y calcula en cada caso el factor desconocido.

```
15 × □ = 480

480 | 15
 30   32
  0

15 × 32 = 480
```

- 12 × □ = 288
- 23 × □ = 437
- 45 × □ = 585
- 55 × □ = 990
- 63 × □ = 1.827
- 32 × □ = 1.120
- 73 × □ = 1.387
- 52 × □ = 2.236

A continuación, Rosa y Jorge observan que David y sus compañeros se han puesto a realizar individualmente la tarea. Una vez finalizada la clase Jorge y Rosa recogen el trabajo realizado por David:



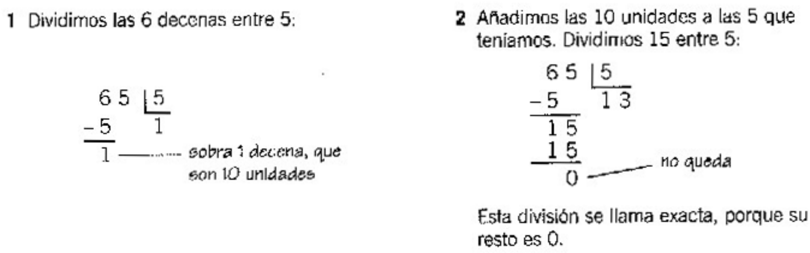
```
288 |12      437 |23      585 |45
048  24      077  23      135  13
 00           11           10

990 |55      1827 |63     1120 |32
440  18      183   3       260  38
 40          001 7          24

1387 |23     2236 |52
 657  19      256  45
  20           06
```

Tarea 1.

Ante la situación descrita
¿Qué se puede decir de las dificultades que tiene David?
¿Son útiles este tipo de tareas?
¿Qué tipo de información ha obtenido realmente Rosa?
¿Por qué?

Tarea 2.

Rosa ha identificado como una de las causas de las dificultades de aprendizaje de David, el algoritmo de la división usado por el profesor en clase y que aparece en el libro de texto. La psicopedagoga, en horario de refuerzo, explica a David la "división larga" utilizando el siguiente procedimiento que aparece en otro libro de matemáticas, por ejemplo para dividir 65 × 5



Tras unas sesiones de trabajo individual con Rosa, David realiza con éxito divisiones como: 68 : 6, 178 : 2, 465 : 3, 193 : 4 y también divisiones por dos cifras como 678 : 13, pero comete errores en algunas divisiones, por ejemplo en las divisiones 115 : 6, 1517 : 4, 1215 : 9. Rosa se pregunta:

1. ¿El hecho de que David realice con éxito determinadas divisiones quiere decir que es capaz de indicar qué tipo de unidad es, por ejemplo, el 1 que aparece marcado en negrita en la división que se muestra a continuación?

2. ¿David dota de significado a la operación de la división?

$$\begin{array}{r|l} 178 & 2 \\ \cline{2-2} -16 & 89 \\ \cline{1-1} \mathbf{1}8 & \\ -18 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

3. ¿En qué medida ha podido influir el tipo de representación utilizado para promover el aprendizaje del algoritmo de la división? Trata de explicar las respuestas que daría Rosa a las cuestiones planteadas.

Una vez que Rosa ha situado la principal causa de los errores que comete David para realizar determinadas operaciones en el cálculo de restas "con llevadas", se pide:

4. ¿Qué se podría decir de los contenidos (conceptuales y procedimentales) de las actividades/ tareas planteadas a David?
5. ¿Cuál es la demanda cognitiva que se le exige al resolutor cuando tiene que realizar la siguiente sustracción: 615 – 378? ¿Por qué?

Caso David: Tarea 3

Parte I. Para participar en el debate del Campus Virtual (aportaciones de grupo)

Responde a las siguientes preguntas y justifica tus aportaciones desde el ámbito de la Didáctica de la Matemática:

1. ¿Tendría que haber actuado con anterioridad Rosa?
2. ¿Qué enfoque organiza el fragmento de enseñanza de las Matemáticas que se muestra en la situación descrita? ¿En ella, las Matemáticas son objeto de enseñanza o de aprendizaje? ¿Se facilita la construcción del conocimiento matemático?
3. ¿Qué tipos de problemas se le han planteado a Rosa?
4. ¿Qué acciones debe realizar Rosa encaminadas a ayudar a David?

Parte II. Para entregar un informe escrito por grupo a la profesora correspondiente (Fecha límite de entrega: día 27 de noviembre de 2003, a las 19 h.)

1. Indica cuáles son las dificultades y errores más comunes que conlleva el aprendizaje significativo del algoritmo de la división.
2. Diseña una *tarea base* para promover el aprendizaje del algoritmo de la división y señala las características de dicha tarea. Modifica una de las variables y obtén otra tarea de la misma *familia de tareas*.

Resumo. Neste estudo analisamos como professores do ensino primário atribuem sentido à informação procedente da àrea da Didáctica da Matemática num curso de orientadores, quando envolvidos num ambiente de aprendizagem interactiva. Este ambiente articula-se em torno da reflexão sobre um problema profissional e mediante a participação em debates virtuais e presenciais. Os problemas profissionais em que incidiu a reflexão foram: diagnosticar as dificuldades de aprendizagem dos alunos do ensino primário e planificar uma intervenção focando o ensino do algoritmo da divisão tendo em conta as causas dessas dificuldades. Os resultados obtidos indicam que os professores fazem um uso progressivo da informação teórica sobre a aprendizagem matemática quando descrevem e justificam as dificuldades que os alunos têm com esse algoritmo. Neste contexto, a construção do conhecimento profissional evidencia-se pelo modo como os professores negociavam o significado das ideias teórias e o modo como relacionavam as diferentes ideias para explicar as dificuldades dos alunos. Uma implicação destes resultados é que a interacção colaborativa entre professores na resolução de problemas profissionais é um apoio à operacionalização das ideias teóricas e à sua aprendizagem.

Palavras-chave: Apendizagem colaborativa; Orientadores; Conhecimento profissional; Formação de professores; Instrumento conceptual; Interacção; Reflexão sobre a prática.

Abstract. This study analyses how primary teachers making sense the information from Didactics of Mathematics as a evidence of the building professional knowledge. 65 primary teachers enrolled in a professional program of education leader training participated in an interactive learning environment designed in the mathematics education subject. An goal of the learning environment was to solve professional problems using online discussions and face-to face debates. The professional problems used in the interactive learning environment were to diagnostic primary students' learning difficulties and to design an instructional intervention focused on the teaching of the division algorithm taking in account the origin of primary students' difficulties. The findings indicate primary teachers were able to use progressively the information on how primary students come to understand the ten-based numeration system when noticing and interpreting the difficulties of primary students about algorithm of division. In this context, building professional knowledge was evidenced by the way in which primary teachers interacting when negotiating the meanings of theoretical information and connected these ideas to justify their interpretations of primary students' difficulties. This findings suggest that collaborative interaction among primary teachers when solving professional problems supported the instrumentalization of theoretical ideas and so their learning.

Keywords: Collaborative learning; Generative learning; Teacher leaders; Professional knowledge; Teacher education; Conceptual tools; Interaction; Reflection on practice.

CAROLINA REY
Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante, España
carolina.rey@ua.es

CARMEN PENALVA
Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante, España

Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante, España