Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao início do século XXI: Uma análise de sete manuais escolares

João Pedro da Ponte
Grupo de Investigação DIFMAT
Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Carmen Salvado
ES Eça de Queirós e Externato Champagnat, Lisboa

Ana Fraga
ES Soares Basto, Oliveira de Azeméis

Teresa Santos
ES Ferreira de Castro, Oliveira de Azeméis

Elisa Mosquito
ES D. José I e Colégio S. Francisco Xavier, Lisboa

Introdução

A equação do 2.º grau constitui um tópico importante da Álgebra escolar. Na maior parte dos países, o seu estudo surge logo depois da equação do 1.º grau, expressões algébricas, sistemas de equações do 1.º grau e funções linear e afim. No entanto, tal como acontece com muitos outros assuntos, conhece-se mal o modo como a equação do 2.º grau tem sido abordada ao longo das diversas épocas. O facto da teoria das equações algébricas não ter tido uma evolução significativa desde o fim do século XIX[1] leva naturalmente a perguntar se o mesmo terá acontecido no ensino deste tema.

Neste artigo analisa-se o modo como a equação do 2.º grau é tratada em sete manuais portugueses publicados entre o fim do século XIX e o início do século XXI. O objectivo é verificar até que ponto existem ou não mudanças significativas no tratamento deste tópico pelos manuais, no momento em que se fez a sua primeira abordagem na escola. Seis dos manuais considerados foram usados por alunos que, sem repetências, teriam 14 anos de idade.[2] O sétimo manual foi usado com alunos um ano mais velhos, alteração determinada durante um certo período pelos programas oficiais.

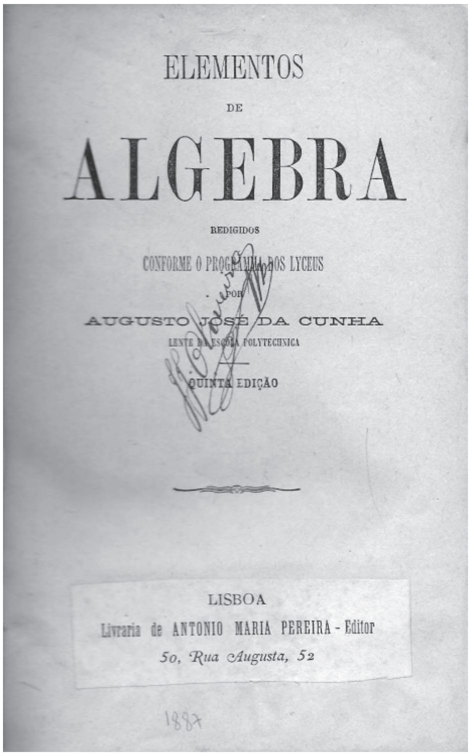
Escolheram-se para análise manuais que no seu tempo tiveram grande utilização, alguns deles com o estatuto de “livro único”[3]. Todos eles foram elaborados em conformidade com os programas em vigor. A metodologia é semelhante à usada por Ponte (2004), num trabalho referente à equação do 1.º grau. Assim, para contextualizar cada manual, é feita uma pequena apresentação da obra e do lugar que nela ocupa a equação do 2.º grau. É feita, também, uma breve referência à linguagem e grafismo utilizados — ilustrados pela capa do manual e por uma ou outra imagem. Depois, o foco de atenção centra-se nos aspectos didácticos do manual que constituem o cerne deste artigo: (i) como é feita a abordagem do tópico (incluindo o grau de formalização, a consideração de equações incompletas e as aplicações ao estudo de outros tópicos como inequações e números complexos); (ii) como é apresentada a fórmula resolvente; (iii) qual a natureza dos exemplos (resolvidos) apresentados aos alunos; e (iv) qual a natureza das tarefas propostas para os alunos resolverem. Estes quatro aspectos foram seleccionados por se entender que eles fornecem indicadores significativos relativamente ao estudo que se propõe que os alunos façam a partir do manual. Em cada manual, documentam-se as afirmações realizadas com imagens e extractos de texto. O grau de formalização da linguagem de um manual é apreciado pelo uso que este faz das linguagens algébrica (natureza e complexidade das expressões algébricas) e lógica (uso da terminologia "definição", "teorema", etc. e de símbolos lógicos) e da linguagem da teoria dos conjuntos (termos como "conjunto-solução" e símbolos como chavetas para designar conjuntos). Presta-se especial atenção à linguagem usada para apresentar as tarefas propostas. Para cada manual, faz-se, então, uma breve análise onde se salientam os conceitos e questões tratadas, grafismo, abordagem, natureza das tarefas e eventual referência a aspectos históricos. Na secção final, retomam-se as análises feitas para cada manual, identificam-se as principais mudanças que ocorreram ao longo deste período de mais de um século e reflecte-se sobre o seu significado em termos da evolução do ensino da Matemática.

Augusto José da Cunha (*Elementos de Álgebra*)

Apresentação. Começamos com um manual publicado em 1887, época final da monarquia, pela Livraria de António Maria Pereira (5.ª edição), sendo o seu autor Augusto José da Cunha, apresentado como "Lente da Escola Polytechnica"[4] (figura 1). Trata-se de um volume com 338 páginas, que se destina a alunos dos 4.º e 5.º anos do liceu[5], sendo a parte relativa às equações do 2.º grau destinada aos alunos do 5.º ano.

O manual está dividido em cinco "livros", sendo o livro III dedicado ao tema "Equações do segundo grau" (52 pp.).[6] Este livro, organizado por parágrafos numerados (§§ 212–278), encontra-se organizado em quatro capítulos: "I. Radicaes do segundo grau" (16 pp.); "II. Equação do segundo grau a uma incognita" (26 pp.); "III. Equações que se reduzem ao 2.º ou ao 1.º grau" (14 pp.); e "IV. Problemas do segundo grau" (10 pp.). No fim de cada capítulo surgem exercícios e respectivas soluções.

O manual tem dimensões reduzidas (12,3 cm × 19,2 cm). O texto está escrito de forma densa, com letra pequena e entrelinhamento apertado (figura 2). Não são apresentadas tabelas ou diagramas. Existe um único esquema, referente à divisão de polinómios,

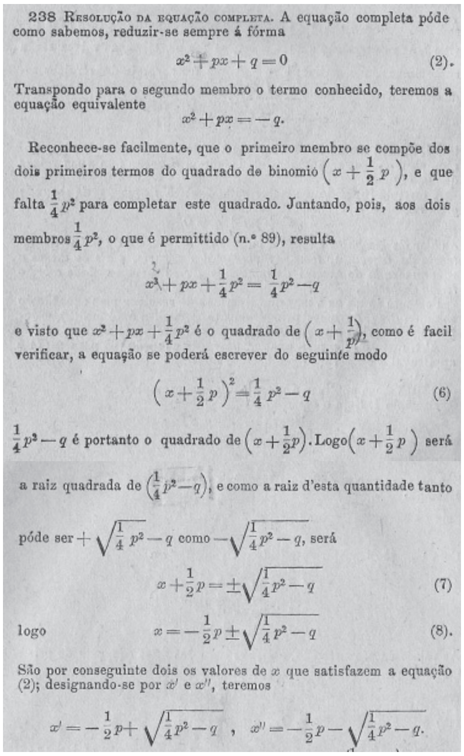


ELEMENTOS
DE
ALGEBRA
REDIGIDOS
CONFORME O PROGRAMMA DOS LYCEUS
POR
AUGUSTO JOSÉ DA CUNHA
LENTE DA ESCOLA POLYTECHNICA
QUINTA EDIÇÃO

LISBOA
Livraria de ANTONIO MARIA PEREIRA - Editor
50, Rua Augusta, 52

1887

Figura 1 — Página de rosto



238 Resolução da equação completa. A equação completa póde como sabemos, reduzir-se sempre á fórma

$$x^2+px+q=0 \qquad (2).$$

Transpondo para o segundo membro o termo conhecido, teremos a equação equivalente

$$x^2+px=-q.$$

Reconhece-se facilmente, que o primeiro membro se compõe dos dois primeiros termos do quadrado do binomio $\left(x+\frac{1}{2}p\right)$, e que falta $\frac{1}{4}p^2$ para completar este quadrado. Juntando, pois, aos dois membros $\frac{1}{4}p^2$, o que é permittido (n.º 89), resulta

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2-q$$

e visto que $x^2+px+\frac{1}{4}p^2$ é o quadrado de $\left(x+\frac{1}{2}p\right)$, como é facil verificar, a equação se poderá escrever do seguinte modo

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=\frac{1}{4}p^2-q \qquad (6)$$

$\frac{1}{4}p^2-q$ é portanto o quadrado de $\left(x+\frac{1}{2}p\right)$. Logo $\left(x+\frac{1}{2}p\right)$ será a raiz quadrada de $\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)$, e como a raiz d'esta quantidade tanto póde ser $+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ como $-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, será

$$x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q} \qquad (7)$$

logo

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q} \qquad (8).$$

São por conseguinte dois os valores de x que satisfazem a equação (2); designando-se por x' e x'', teremos

$$x'=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\ ,\quad x''=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

Figura 2 — Dedução da fórmula resolvente

e são indicadas duas figuras muito simples no capítulo dos problemas, ambas para ilustrar questões geométricas. O tipo de letra é sempre o mesmo, mudando de tamanho nos títulos e subtítulos. Como se vê no excerto apresentado na figura 2, o texto contém uma combinação de linguagens natural e algébrica. Este capítulo, como de resto todo o manual, está redigido num tom formal, procurando situar-se sempre num plano de grande generalidade, e faz o tratamento em paralelo de equações com coeficientes numéricos e literais.

Descrição. O livro III começa por referir[7] que a resolução de equações do 2.º grau conduz à extracção da raiz quadrada de expressões literais ou numéricas e daí a necessidade de incluir o capítulo I, sobre radicais do 2.º grau. Este capítulo indica que a raiz quadrada tem um duplo valor e faz referência às quantidades imaginárias, ao quadrado e raiz quadrada de monómios e polinómios e ao cálculo de radicais do 2.º grau. Por exemplo, apresenta e demonstra o seguinte teorema: "O quadrado de um monomio obtem-se elevando ao quadrado o seu coeficiente e multiplicando por 2 os expoentes dos factores literaes" (p. 187).

O capítulo II, sobre a resolução da equação do 2.º grau a uma incógnita, é o mais extenso. Começa por indicar que esta equação tem a forma geral $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c quantidades conhecidas. Refere, também, as equações incompletas $ax^2 + c = 0$ e $ax^2 + bx = 0$ cuja resolução exemplifica (§§ 235–237). Só depois deduz as duas soluções da equação completa escrita na forma simplificada $x^2 + px + q = 0$, utilizando a técnica de completar o quadrado do binómio (figura 2). Enuncia a resolução da equação sob a forma de regra e aplica-a a alguns exemplos, sendo de notar a complexidade de que se reveste logo o primeiro:

$$3x^2 - 8x - \frac{65 + x}{2} = \frac{3x^2 - 5x}{2} - 1.$$

Mais adiante, apresenta a fórmula resolvente para a equação geral do 2.º grau $ax^2 + bx + c = 0$, que aplica a dois exemplos, dos quais o segundo é a equação literal

$$\frac{m+n}{x+n} + \frac{m-n}{x-n} = 1 + \frac{n}{2n},$$

também de assinalável complexidade. Os §§ 243–247 são dedicados à discussão da equação geral na forma reduzida, evidenciando os casos em que as raízes são reais ou imaginárias, positivas ou negativas e diferentes ou iguais. De seguida, nos §§ 248–253, apresenta a "composição da equação", onde demonstra diversos teoremas relativos às propriedades das raízes. O primeiro destes teoremas é o seguinte: "Se x' é raiz da equação $x^2 + px + q = 0$, o seu primeiro membro é divisível por $x - x'$" (p. 215). Finalmente, nos §§ 254–259, mostra algumas propriedades do trinómio do 2.º grau sob a forma de teoremas e exemplifica a sua aplicação à resolução de inequações do 2.º grau.

O capítulo III, referente a equações que se reduzem ao 2.º ou ao 1.º grau, dá atenção especial às equações irracionais (§§ 260–267), às equações biquadradas (§§ 268–270) e à transformação das expressões da forma

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} \qquad \text{(§§ 271–275).}$$

Por exemplo, na parte relativa às equações irracionais mostra como resolver a equação

$$\sqrt{2x - 4\sqrt{x+1}} = 2 + \sqrt{2x}.$$

O capítulo IV, respeitante a problemas do 2.º grau, é todo ele dedicado à resolução de três problemas, um de Geometria e dois de Física:

> I. Dividir uma recta em media e extrema rasão, isto é, em duas partes, das quaes a maior seja meia proporcional entre a menor e a recta inteira. (p. 238)
>
> II. Decorrem t segundos entre o instante em que deixamos cair uma pedra n'um poço, e o instante em que ouvimos o som que ella produziu batendo

> no fundo. Pretende-se saber qual é a profundidade do poço. Despreza-se a resistencia do ar. (pp. 240–1)
>
> III. Determinar na linha que une dois focos luminosos A e B, o ponto igualmente illuminado por cada um d'elles. (p. 243)

No fim dos três primeiros capítulos surgem exercícios do tipo: "Resolver as seguintes equações"; "Decompor o trinómio em dois factores do 1.º grau"; "Acha a raiz quadrada do polinómio"; "Simplificar a expressão"; "Valor de"; "Demonstrar as seguintes igualdades" (figuras 3 e 4). É de notar a grande complexidade dos exercícios propostos, desde os primeiros de cada capítulo, bem como o facto de todos eles serem questões de cálculo. No fim do capítulo IV, o manual indica oito problemas para resolver (figura 5), dos quais quatro são geométricos, dois são numéricos[8], um é sobre progressões e outro respeita a uma situação do quotidiano.

Análise. Como vimos acima, este manual aborda a equação do 2.º grau numérica e literal, resolve os casos das equações incompletas e completa, enuncia e prova as propriedades das raízes, discute as propriedades do trinómio do 2.º grau, aborda as equações biquadradas e com radicais e inequações do 2.º grau cuja resolução depende da resolução de uma equação do 2.º grau, e exemplifica o uso desta equação na resolução de problemas. A apresentação é extremamente sóbria, como se verifica nas figuras 1–5.

EXERCICIOS

Resolver as seguintes equações :

I. $\frac{2x-3}{x-3}=\frac{5x-4}{x}-\frac{3}{2}$ $\quad \left[x=\frac{23\pm\sqrt{241}}{6}\right]$

II. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}$ $\quad [x=3\pm\sqrt{2}]$

III. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+3}{x-3}=2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ $\quad [x'=5\,,\ x''=0]$

IV. $\frac{x+16}{5}+\frac{11}{x}=\frac{4x-17\frac{1}{3}}{3}$ $\quad \left[x'=9\,,\ x''=-\frac{55}{51}\right]$

V. $\frac{7}{x^2+4x}+\frac{21}{3x^2-8x}=\frac{22}{x}$ $\quad \left[x'=3\,,\ 'x'=-3\frac{23}{33}\right]$

XIII. $\frac{a}{b+x}+\frac{a}{b-x}=c$ $\quad \left[x=\pm b\sqrt{1-\frac{2a}{bc}}\right]$

XIV. $\frac{x^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})x=\frac{\sqrt{a^3b^3}}{\sqrt{a^2b}+\sqrt{ab^2}}$ $\quad [x'=a\,,\ x''=-b]$

XV. Decompor o trinomio

$$x^2-\frac{a^2b^2+a^2-b^2}{a^2b+ab^2}x+\frac{a-b}{a+b}$$

em dois factores do primeiro grau.

XVI. Decompor em dois factores do primeiro grau o trinomio

$$3x^2+\frac{3a^2-4b^2}{2ab}x-1.$$

Figura 3 — Os primeiros e os últimos exercícios do capítulo II

EXERCICIOS

Resolver as seguintes equações

I. $\sqrt{1+\sqrt{7+8x^2}}=4x.$

Acha se $x'=+\frac{1}{3}$, $x''=-\frac{1}{2}$, $x'''=+\sqrt{-\frac{3}{32}}$, $x^{\text{IV}}=-\sqrt{-\frac{3}{32}}$

Só o valor de x' convem á equação proposta, tomando o signal $+$ para os dois radicaes. Os outros tres valores convem á equação mudando os signaes aos radicaes.

II. $\sqrt{\frac{2x+1}{2}}=\sqrt{x+\frac{\sqrt{1+9x^2}}{3}}$ $\quad \left[x=\pm\frac{\sqrt{5}}{6}\right]$

VIII. $\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}+\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}=a$ $\quad \left[x=\pm\frac{4}{a^2}\sqrt{a^2-4}\right]$

IX. $\frac{a+x}{\sqrt{a-x}}+\frac{a-x}{\sqrt{a+x}}=2\sqrt{a}$ $\quad \left[x=\pm a\sqrt{\pm 8\sqrt{2}-11}\right]$

X. $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=$

$\frac{3}{5}\sqrt{\frac{10x}{x+\sqrt{2x-1}}}$ $\quad \left[x'=\frac{5}{2},\ x''=\frac{5}{8}\right]$

XI. Transformar a expressão $\sqrt{13+\sqrt{69}}$

$\left[\text{Acha-se } \frac{\sqrt{46}+\sqrt{6}}{2}\right]$

XII. Transformar a expressão $\sqrt{10+\sqrt{-44}}$

[Acha-se $\sqrt{11}+\sqrt{-1}$].

Figura 4 — Os primeiros e os últimos exercícios do capítulo III

EXERCICIOS

Resolver os seguintes problemas :

I. Achar 5 numeros em progressão arithmetica, sabendo que a sua somma é 35, e que o seu producto é 10395.

A formula $\frac{a+u}{2} \times 5 = 35$ dá $a + u = 14$: e portanto o termo do meio é 7. A rasão r é dada pela equação

$$(7-2r) \cdot (7-r) \cdot 7 \cdot (7+r) \cdot (7+2r) = 10395.$$

II. Um polygono convexo tem 170 diagonaes. Pretende-se saber quantos lados tem.
[Resposta : 20 lados.]

III. Dividir a area de um circulo de raio R em media e extrema rasão.

IV. Calcular os tres lados de um triangulo rectangulo, sendo dado o primeiro e a area.

V. Achar os lados do angulo recto de um triangulo rectangulo, sendo dada a hypothenusa a, e a altura h abaixada do vertice do angulo recto sobre a hypothenusa.

VI. A differença dos cubos de dois numeros consecutivos é 397. Quaes são os numeros ?
[Resposta : 11 e 12].

VII. Achar um numero de dois algarismos tal que o algarismo das dezenas seja o triplo do das unidades, e que, subtrahindo ao numero 12 unidades, o resto seja igual ao quadrado do algarismo das dezenas.
[Resposta : 93].

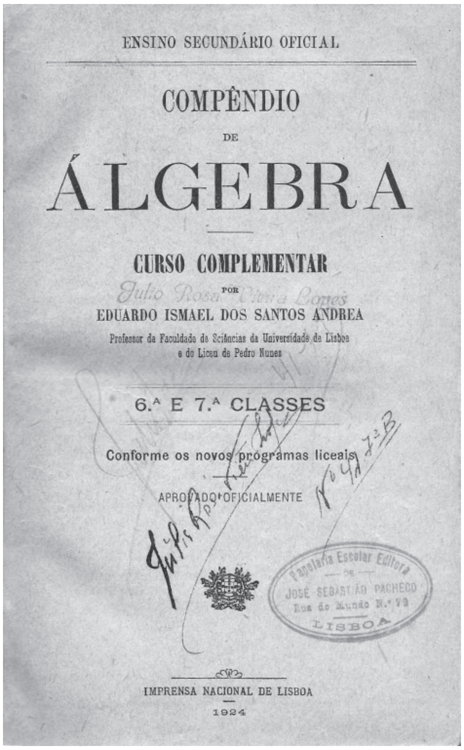
VIII. Dois asylos distribuiram, cada um, 120$000 réis de esmolas. O primeiro soccorreu 40 pobres mais que o segundo; mas este deu a cada pobre 500 réis mais do que aquelle. Quantos foram os pobres soccorridos por cada asylo ?
[Resposta : o primeiro asylo soccorreu 120 pobres e deu a cada um 1$000 réis; o segundo soccorreu 80 pobres e deu a cada um 1$500 réis].

Figura 5 — Problemas do capítulo IV (indicados como “Exercícios”)

O manual segue uma abordagem com um elevado nível de abstracção e de formalização. Enuncia e demonstra numerosos teoremas. Analisa todos os casos com uma formulação tanto quanto possível geral e depois apresenta diversos exemplos. A lógica de tratamento dos assuntos vai do geral para o particular. Ou seja, primeiro, o manual indica a terminologia e as regras de cálculo com expressões; depois, apresenta as regras e técnicas para a resolução das equações do 2.º grau, com a respectiva demonstração; e, por fim, mostra exemplos de aplicação dessas regras. No entanto, no caso das equações do 2.º grau, indica primeiro como resolver as equações incompletas e só depois aborda a resolução da equação completa. Todas as tarefas são apresentadas como exercícios. Como se vê nas figuras 3–5, na sua maior parte são questões de cálculo, com um carácter estritamente matemático e grande nível de complexidade. Existe um capítulo à parte dedicado à resolução de problemas, entre os quais se encontram situações geométricas e do quotidiano. Para este manual, os problemas são um tipo especial de exercício, que envolve um enunciado em linguagem natural, e onde é necessário começar por traduzir as condições indicadas por uma equação. Os exercícios são as questões matemáticas propostas para o aluno resolver no fim de cada capítulo. O grau de dificuldade dos exercícios propostos é muito elevado. O manual não contém qualquer referência a aspectos da História da Matemática.

Eduardo Ismael dos Santos Andrea (*Compêndio de Álgebra*)

Apresentação. Este manual, com 173 páginas, foi publicado em 1924, no fim da I República, pela Imprensa Nacional de Lisboa e destina-se aos alunos das 6.ª e 7.ª classes do curso complementar do ensino secundário oficial[9]. O autor é apresentado como sendo "Professor da Faculdade de Sciências da Universidade de Lisboa e do Liceu de Pedro Nunes". A página de rosto informa que o manual foi "aprovado oficialmente" e está "conforme os novos programas liceais".



ENSINO SECUNDÁRIO OFICIAL

COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA

CURSO COMPLEMENTAR

Julio Rosa Vieira Lopes

POR EDUARDO ISMAEL DOS SANTOS ANDREA

Professor da Faculdade de Sciências da Universidade de Lisboa e do Liceu de Pedro Nunes

6.ª E 7.ª CLASSES

Conforme os novos programas liceais

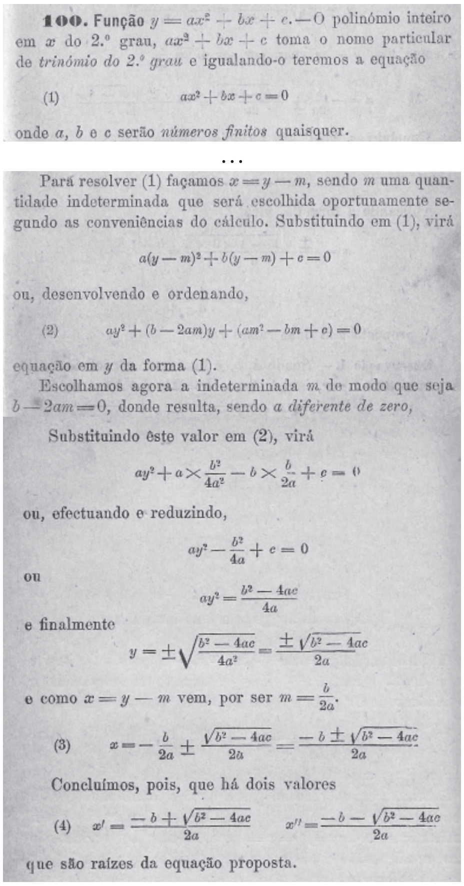
APROVADO OFICIALMENTE

Papelaria Escolar Editora — DE — JOSÉ SEBASTIÃO PACHECO Rua do Mundo N.º 79 LISBOA

IMPRENSA NACIONAL DE LISBOA

1924

Figura 6 — Folha de rosto



100. Função $y = ax^2 + bx + c$. — O polinómio inteiro em x do 2.º grau, $ax^2 + bx + c$ toma o nome particular de *trinómio do 2.º grau* e igualando-o teremos a equação

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c serão *números finitos* quaisquer.

…

Para resolver (1) façamos $x = y - m$, sendo m uma quantidade indeterminada que será escolhida oportunamente segundo as conveniências do cálculo. Substituindo em (1), virá

$$a(y-m)^2 + b(y-m) + c = 0$$

ou, desenvolvendo e ordenando,

$$(2) \qquad ay^2 + (b - 2am)y + (am^2 - bm + c) = 0$$

equação em y da forma (1).

Escolhamos agora a indeterminada m de modo que seja $b - 2am = 0$, donde resulta, sendo a *diferente de zero*,

Substituindo êste valor em (2), virá

$$ay^2 + a \times \frac{b^2}{4a^2} - b \times \frac{b}{2a} + c = 0$$

ou, efectuando e reduzindo,

$$ay^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

ou

$$ay^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

e finalmente

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e como $x = y - m$ vem, por ser $m = \frac{b}{2a}$.

$$(3) \qquad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Concluímos, pois, que há dois valores

$$(4) \qquad x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que são raízes da equação proposta.

Figura 7 — Dedução da fórmula resolvente

Descrição. Neste manual, a parte referente às equações numéricas e problemas do 2.º grau a uma incógnita, surge nos capítulos VIII e IX (26 pp.). O capítulo VIII é composto por nove parágrafos numerados (§§ 100–108), alguns dos quais com subtítulos, e encontra-se dividido em duas secções: a primeira designada por "Função $y = ax^2 - bx + c = 0$. Equações do 2.º grau a uma incógnita" (6 pp.) e a segunda por "Propriedades do Trinómio do 2.º grau" (13 pp.). O capítulo IX tem o título "Problemas do 2.º grau. Discussão" (3 pp.) e é composto por quatro parágrafos numerados (§§ 109–112). Este capítulo termina com "exercícios" (termo usado pelo manual) que se referem ao próprio capítulo e ao anterior e indica as respectivas soluções (4 pp.). O capítulo X estuda equações "cuja resolução se reduz a uma equação do 2.º grau" (p. 117), as equações biquadradas e irracionais.

O manual tem dimensões reduzidas (12,6 cm $\times$ 19,5 cm), não inclui esquemas ou tabelas e a letra é pequena e condensada. As soluções de um dos problemas resolvidos (uma desigualdade do 2.º grau) são apresentadas por meio de um quadro (§ 107). O texto representa uma combinação de linguagem natural e linguagem algébrica (como se vê na figura 7). Os exemplos apresentados são, quase todos, de equações com coeficientes numéricos, o que constitui uma grande simplificação em relação ao manual de Augusto José da Cunha.

Logo no primeiro parágrafo do capítulo VIII (§ 100), o manual faz a dedução das soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$ (figura 7), usando para isso uma técnica complexa de mudança de variável, e resolve, a título de exemplo, a equação $3x^2 - 5x + 2 = 0$. De seguida, apresenta expressões simplificadas para o caso em que $b = 2k$ e ainda $b = 2k$ e $a = 1$. Passa, então, à discussão das soluções das equações do 2.º grau em função do "binómio discriminante" $b^2 - 4ac$ (§§ 101–103).

Na segunda secção do capítulo VIII, o manual refere as propriedades do trinómio do 2.º grau e das respectivas raízes, sob a forma de teoremas. O primeiro destes teoremas é o seguinte: "O primeiro membro da equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode sempre escrever-se na forma: $a(x - x')(x - x'')$, sendo x' e x'' as raízes da equação" (p. 97). Como aplicação destes teoremas, discute diversos exemplos de equações, tais como: $2x^2 + 13x + 2 = 0$, $5x^2 - 14x - 3 = 0$, $4x^2 - 4x + 1 = 0$ e $7x^2 - 5x = 0$. Enuncia e resolve, também, diversos problemas como o seguinte: "Dada a soma S de dois números e o seu produto P, achar os números" (p. 100). Os §§ 106–108 são dedicados à resolução de inequações do 2.º grau e o § 108 à representação gráfica da função $y = ax^2 + bx + c$.

O capítulo IX, dedicado aos problemas do 2.º grau, começa com um pequeno parágrafo em que adverte que "é necessário reconhecer se as raízes da equação podem ser soluções do problema", e que inclui "não só a investigação das condições de possibilidade, mas também os casos que se podem apresentar" (p. 110). De seguida, enuncia e resolve três problemas:

> I. Uma soma de 400 escudos deve ser distribuída em partes iguais por um certo número de pessoas, mas no momento da divisão faltam 4, o que aumenta de 5 escudos a parte de cada uma das outras. Pergunta-se quantas eram as pessoas que primitivamente estavam para receber.

II. Sendo dado um cone de revolução de raio R e altura h, determinar a quantidade x de que será preciso diminuir a altura e aumentar o raio para que o volume não varie.

III. Um corpo é lançado verticalmente no vácuo, de baixo para cima, com uma velocidade inicial v_0. ¿No fim de que tempo atingirá a altura h?

Os exercícios propostos são de natureza variada, incluindo questões como: "Resolver a equação" (1–21); "Formar as equações cujas raízes são:" (22–25); "Discutir, *a priori*, as equações:" (26–29); "Resolver a desigualdade" (33) e outros (figuras 8 e 9). Os dois primeiros são relativamente simples, mas a partir daí a complexidade aumenta rapidamente. O conjunto dos exercícios termina com dois problemas para resolver (figura 10), ambos de natureza geométrica, tal como acontece com o problema II acima indicado.

Resolver as equações:

1. $2x^2 - 3x - 2 = 0$

2. $x^2 + \frac{7}{20}x - \frac{3}{10} = 0$

3. $3x^2 = \frac{2}{5}\left(x + \frac{4}{5}\right) + 2x^2$

4. $\frac{x+1}{x} + 1 = \frac{x}{x-1}$

5. $x + \frac{1}{x-3} = 5$

Figura 8 — Primeiros cinco exercícios do capítulo IX

16. $4a^2x = (a^2 - b^2 + x)^2$

17. $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0$

18. $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{2c}{x-c}$

19. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$

20. $\frac{(a-x)^2 - (x-b)^2}{(a-x)\,(x-b)} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

Figura 9 — Cinco exercícios adicionais do capítulo IX

35. Sendo dada uma circunferência de raio R e uma recta situada no seu plano à distância d do centro, pretende-se construir um quadrado de lado $2x$, no qual um dos lados seja uma corda da circunferência, e cujo lado oposto esteja na recta dada. Discussão.

36. Cortar um hemisfério de raio R por um plano paralelo à base, de modo que o segmento esférico de uma base obtido tenha um volume igual ao do cilindro cuja base é a secção e cuja altura é a distância x dos planos paralelos. Discussão.

Figura 10 — Problemas propostos do capítulo IX

Análise. Como se indicou, este manual aborda a equação numérica do 2.º grau em conjunção com a função $y = ax^2 + bx + c$. Começa por solucionar, desde logo, o caso geral da equação completa do 2.º grau (sem abordar previamente as equações incompletas), discute a natureza das raízes em função do binómio discriminante. Estuda as propriedades do trinómio do 2.º grau, analisa as propriedades das raízes e aplica-as à resolução de inequações do 2.º grau e à representação gráfica da função quadrática. Além disso, mostra como resolver problemas que envolvem equações do 2.º grau e estuda, igualmente, equações biquadradas e irracionais. Tal como o manual anterior, tem uma apresentação muito sóbria (ver as figuras 6–10).

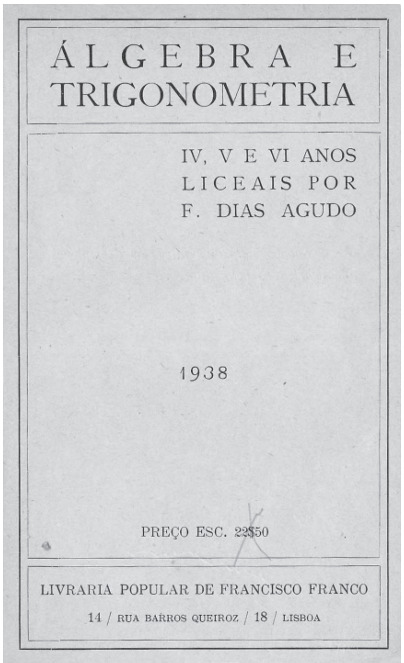
Tal como acontecia no manual de Augusto José da Cunha anteriormente analisado, também este manual apresenta os assuntos segundo um caminho que vai do geral para o particular e a sua abordagem tem um elevado nível de abstracção e formalização. Primeiro estabelece o processo para encontrar as soluções da equação e depois apresenta exemplos e exercícios de aplicação. O processo usado para dedução da fórmula resolvente envolve uma técnica sofisticada de mudança de variável (figura 7) e todos os exemplos indicados assumem um carácter estritamente matemático. Todavia, os problemas dos §§ 110 e 112 e do capítulo IX, invocam situações de Geometria, de Física e do quotidiano. O nível de complexidade dos exercícios propostos é bastante elevado. Todos se revestem de um carácter estritamente matemático, e mesmo os dois últimos, que são indicados como problemas, constituem questões de cunho geométrico. Deste modo, tal como no manual anterior, são designados como exercícios todas as questões propostas no final do capítulo, independentemente da sua dificuldade. Problemas são os exercícios cujo enunciado envolve predominantemente a linguagem natural. Não existem quaisquer referências a aspectos históricos.

Francisco Dias Agudo (*Álgebra e Trigonometria*)

Apresentação. Trata-se de um manual publicado em 1938, em pleno Estado Novo, pela Livraria Popular de Francisco Franco, para os alunos dos IV, V e VI anos liceais. O manual tem 256 páginas numeradas e dez páginas não numeradas e uma página de errata, surgindo as equações do 2.º grau na parte destinada ao V ano[10]. Não são apresentadas informações sobre o autor[11] e o verso da página de rosto contém a sua rubrica, apresentada como condição de autenticidade do livro. A página seguinte informa que o manual foi "aprovado oficialmente".

No V ano, o capítulo I é dedicado às "Equações e Problemas do 2.º grau" (24 pp.) e encontra-se dividido em duas secções. A primeira tem o título "Equações" (16 pp.) e está subdividida em; "A. Nota histórica" (um curto §); "B. Resolução gráfica" (2 pp.); "C. Resolução algébrica" (14 pp.). A segunda secção, "Problemas do 2.º grau" (4 pp.), apresenta exemplos de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau. O capítulo termina com um pequeno quadro que resume as principais ideias que o aluno deve ter presente na resolução de uma equação do 2.º grau (designadas por "tópicos"), seguido por exercícios (4 pp.).

Embora um pouco maior que os anteriores, o manual é ainda de pequeno formato (14,7cm × 20,8 cm). Tem uma letra de corpo usual, com entrelinhamento reduzido e o texto organizado por parágrafos numerados. Contém figuras relativas à "resolução gráfica" das equações (§§ 1 e 2) e apresenta no "plano de eixos" a representação geométrica



ÁLGEBRA E TRIGONOMETRIA

IV, V E VI ANOS LICEAIS POR F. DIAS AGUDO

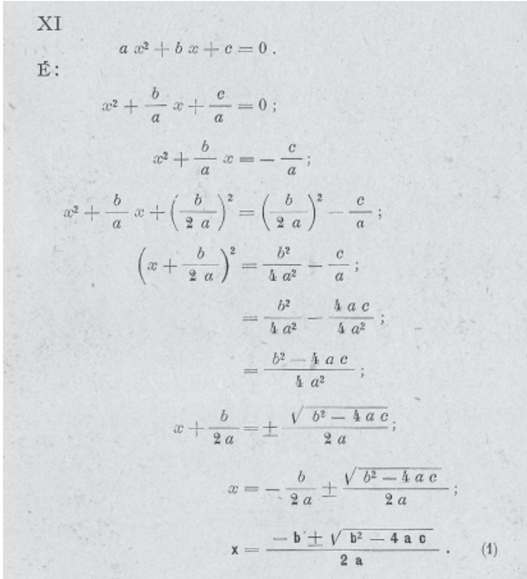
1938

PREÇO ESC. 22$50

LIVRARIA POPULAR DE FRANCISCO FRANCO

14 / RUA BARROS QUEIROZ / 18 / LISBOA

Figura 11 —— Página de rosto



XI

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0\,.$$

É:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0\,;$$

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x = -\,\frac{c}{a}\,;$$

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{c}{a}\,;$$

$$\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{c}{a}\,;$$

$$= \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{4\,a\,c}{4\,a^2}\,;$$

$$= \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\,;$$

$$x + \frac{b}{2\,a} = \pm\,\frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,;$$

$$x = -\,\frac{b}{2\,a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,;$$

$$x = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,. \qquad (1)$$

Figura 12 — Dedução da fórmula resolvente

dos números complexos (§§ 9 e 10). Em termos de escrita, regista-se o aparecimento das perguntas "porquê?" "por que razão…", " como se descobriu essa parcela?" (§§ 4 e 7). Este tipo de perguntas, que não se encontram em nenhum dos manuais anteriormente analisados, apelam ao aluno para justificar, ele próprio, os raciocínios.

Descrição. A abrir o capítulo, a "Nota histórica" refere que a resolução das equações do 2.º grau se fazia geometricamente até ao século XVI, altura que Viète inventou os métodos algébricos para determinar as raízes desta equação.

De seguida, o ponto B (§§1–2) expõe uma "Resolução gráfica" das equações do 2.º grau, tendo por base a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Esta resolução consiste em construir um quadrado com dimensões apropriadas, em função dos dados, no qual se identifica geometricamente o valor das raízes.

O ponto C apresenta a "Resolução algébrica". Começa por indicar a forma normal $ax^2 + bx + c = 0$ e distinguir as equações completa e incompleta (§ 3). De seguida, resolve diversas equações do 2.º grau, primeiro incompletas e depois completas:

$$x^2 = 16,\, x^2 = 3,\, x^2 - 1 = 3,\, (x+1)^2 = 25,\, x^2 + 2x + 1 = 25,$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25,\, x^2 + 6x + 8 = 25,\, x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 1,$$

$$x^2 + \frac{3}{5}x - 1 = 0,\, 2x^2 + 3x - 10 = 0.$$

Finalmente, resolve a equação completa $ax^2 + bx + c = 0$, de onde deduz a fórmula resolvente (§ 4) (figura 12). É de notar que esta dedução é feita por simples sequenciação de equações umas debaixo das outras, sem qualquer explicação complementar em linguagem natural. De seguida, apresenta uma regra para a resolução de uma equação do 2.º grau (§ 5), seguida de um exemplo (§ 6). Seguem-se, depois, os casos de simplificação da fórmula resolvente para certos coeficientes particulares ($a = 1$, $b = 2k$, $a = 1$ e $b = 2k$, $c = 0$, $b = 0$, $b = c = 0$) (§ 7). Além disso, discute em pormenor o caso das raízes imaginárias, que serve de motivação para a introdução dos números complexos (§§ 8–11).

A segunda secção, "Problemas do 2.º grau" (4 pp.), analisa exemplos de resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau. O primeiro exemplo é numérico e foi extraído do *Livro de Álgebra* de Pedro Nunes; o segundo é do quotidiano, o terceiro é de Física e o quarto é de Geometria (este acompanhado por uma figura):

> I. Busquemos um número cujo quadrado de metade e do seu têrço, e do seu quarto, todos juntos façam tanta soma como é o mesmo número.
>
> II. Um passageiro pagou por um percurso de automóvel a importância de 240\$00. Se o curso por quilómetro fosse menos \$05, êle poderia ter percorrido mais 20 km. pela importância que pagou. Calcular o prêço por quilóm.
>
> III. A Terra exerce, ao nível do mar, uma atracção, sobre um corpo, expressa por 1000 kg. ¿A que altitude seria necessário colocar o mesmo corpo para que a fôrça atractiva se reduzisse a 999 kg?
>
> IV. A diagonal BE dum rectângulo ABDE, Fig. 6, mede 30^{m} e dista do vértice A, 10m. Calcular a área do menor triângulo — ABC — em que a altura AC divide o triângulo ABE.

O capítulo termina com um pequeno quadro que resume as principais ideias que o aluno deve fixar na resolução da equação do 2.º grau e de problemas do 2.º grau. Apresenta então uma lista de 33 exercícios para resolver, com e sem fórmula resolvente (figuras 13 e 14), sendo de notar que os primeiros são simples e os últimos bastante complexos. Apresenta, igualmente, 14 problemas para resolver, dos quais alguns são numéricos, outros geométricos e outros do quotidiano (figura 15).

Análise. Como se mostrou atrás, este manual lida, desde o início com a resolução de equações completas e incompletas, apresenta uma resolução gráfica de natureza geométrica, aproveita para introduzir os números complexos e, finalmente, discute a resolução de problemas do 2.º grau. Exceptuando-se os problemas, todos os outros exemplos têm um carácter estritamente matemático. Ao contrário dos dois manuais anteriores, não discute as propriedades das raízes nem as aplicações à resolução de inequações e de equações irracionais. A apresentação é sóbria (como mostram as figuras 11–15), mas, pela primeira vez, aparece uma caixa destacando ideias a fixar pelo aluno.

Exercícios I

Resolver as seguintes equações com e sem fórmula resolvente:

1. $x^2 = 100$ 2. $x^2 - 5 = 0$ 3. $2x^2 = 7$

4. $4x^2 + 4x + 1 = 16$ 5. $x^2 - 7x + 12 = 0$

6. $x^2 + x - 2 = 0$ 7. $x^2 + 29x - 30 = 0$

8. $x^2 - 24x + 63 = 0$ 9. $6x^2 + x - 2 = 0$

10. $25x^2 - 25x + 6 = 0$ 11. $80x^2 - 24x + 1 = 0$

Figura 13 — Primeiros onze exercícios do fim do capítulo I

29. $$\frac{x+1}{x-1} + \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(x+7)}{x^2-1} + \frac{1}{4}$$

30. $$\frac{y-3}{y(y-4)} + \frac{1}{y+4} = \frac{5y-1}{y^2-16}$$

31. $$\frac{z}{z-1} + \frac{z-1}{z} = 1 + \frac{\frac{2}{z} - 1}{3}$$

32. $$\frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{k}{x}} = \frac{\frac{1}{k} - \frac{k}{x}}{4}$$

33. $$\frac{q^2}{2-x} + \frac{4p^2}{2+x} + \frac{q^2 - 4p^2}{x(4-x^2)} = 0$$

Figura 14 — Seis dos exercícios mais complexos do fim do capítulo I

46. Um combóio parte de A para B e, ao mesmo tempo, outro de C para B, ficando C entre A e B à distância de 20 km. de A. Sabendo-se que o segundo gasta mais dois minutos para cada 18 km. e que ambos chegam ao fim de 5 horas a B, pergunta-se a distância $A\,B$.

47. Um grupo de 56 excursionistas pagou pelo seu transporte 2880\$00 sendo o custo total referente aos adultos igual ao das crianças. Sabendo que cada uma destas pagou 15\$00 menos que um adulto, calcular o número de crianças do grupo.

Figura 15 — Dois últimos problemas do fim do capítulo I

A abordagem tem um nível de abstracção e formalização elevados. No entanto, o manual apresenta um "método gráfico" (na verdade, geométrico) para a resolução da equação do 2.º grau e faz a representação geométrica dos números complexos. Resolve equações particulares sucessivamente mais complicadas, até chegar à dedução da fórmula resolvente. Segue, portanto, um caminho que, em alguns aspectos, vai do particular para o geral. Ao contrário dos manuais anteriores, os enunciados dos princípios de equivalência e de outras propriedades já não surgem na forma de teoremas. Os exercícios propostos neste manual no final do capítulo vão do bastante simples ao muito complexo (figuras 13 e 14) e são designados por problemas aqueles exercícios em cujo enunciado predomina a linguagem natural. A maior parte das situações trabalhadas reveste-se de um carácter estritamente matemático. No entanto, na secção "Problemas do 2.º grau", para além dos problemas numéricos e geométricos, existem dois que invocam situações do quotidiano e de Física. Inclui uma breve referência histórica sobre a natureza dos métodos de resolução de equações do 2.º grau usados em diferentes épocas.

J. Jorge G. Calado (*Compêndio de Álgebra*)

Apresentação. O manual é publicado em 1960[12], também no Estado Novo, sendo a sua depositária a Livraria Popular de Francisco Franco. Trata-se de um livro único, como atesta o carimbo aposto, que se destina a alunos do 2.º ciclo do liceu e tem 419 páginas. A parte relativa às equações do 2.º grau surge no 5.º ano[13]. O autor é J. Jorge G. Calado, apresentado como "Professor do Liceu Normal de Pedro Nunes".

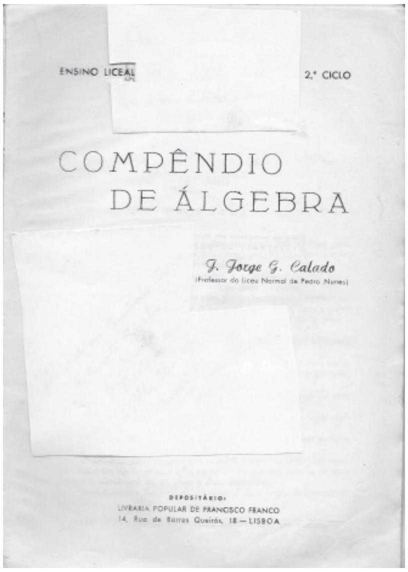


Figura 16 — Folha de rosto

309 — Fórmula resolvente — Consideremos agora a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

na qual supomos $a \neq 0$.

Para resolvermos esta equação, podemos proceder como foi indicado no número anterior e, para isso:

1) Comecemos por dividir ambos os seus membros por a — coeficiente de x^2.

Obteremos então a equação equivalente

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2) ou

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

3) Adicionemos agora a ambos os membros da equação a expressão $\frac{b^2}{4a^2}$ — *quadrado de metade do coeficiente de* x.

Deste modo se obterá a equação

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

ou ainda

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

4) Ora o 1.º membro desta equação é o desenvolvimento do quadrado do binómio $x + \frac{b}{2a}$, donde resulta que a equação anterior se pode escrever sob a forma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

5) Se $b^2 - 4ac$ *for* **positivo** ou **nulo**, a equação anterior é equivalente à equação:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 = 0$$

ou

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

donde resulta

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \text{ e portanto } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou então

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \text{ e portanto } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vemos assim que a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

admite duas raízes x_1 e x_2 dadas pelas fórmulas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que podem ser reunidas na única fórmula

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \ldots\ldots (1)$$

Figura 17 — Dedução da fórmula resolvente

Neste livro existem dois capítulos (XX e o XXI) referentes às equações do 2.º grau e sua aplicação à resolução de problemas. O capítulo XX, "Equações do 2.º grau a uma incógnita" (25 pp.), está dividido em três secções intituladas "Equações Numéricas" (3 pp.), "Resolução Algébrica" (16 pp.) e "Equações Literais" (2 pp.) e termina com exercícios e soluções (5 pp.). O capítulo XXI é dedicado aos problemas do 2.º grau (8 pp.). Contém uma secção denominada "Problemas literais — condições de possibilidade" (4 pp.) e um conjunto de exercícios e soluções (3 pp.). O manual está organizado por parágrafos, alguns dos quais com subtítulos, sendo o capítulo XX composto por 15 parágrafos (§§ 299–313) e o XXI por 5 (§§ 314–318).

As dimensões deste manual (16,8 cm × 23,7 cm) são bastante maiores do que as dos anteriores. Também a letra é de corpo maior mas e o entrelinhamento continua a ser apertado. O texto envolve uma mistura de linguagens natural e algébrica (figura 17). Em nenhum dos capítulos aparecem figuras, tabelas, gráficos ou diagramas.

Descrição. No capítulo XX, a primeira secção inicia-se com um parágrafo onde se refere o facto das equações surgirem naturalmente quando se pretende resolver problemas em áreas como Geometria, Física e outras ciências. Além disso, afirma-se que "o estudo das equações [é] o objectivo fundamental [da] Álgebra" (p. 345). O parágrafo seguinte é um problema de Física: "Um avião percorre num certo tempo e com movimento uniforme a distância de 1440 km. Se a velocidade horária aumentasse de 120 km, o avião levaria menos uma hora a fazer o referido percurso. Calcule a velocidade do avião" (p. 345). Este problema conduz à equação $v^2 + 120v - 172000 = 0$, que serve de exemplo para a definição de equação do 2.º grau, apresentada como "toda a equação inteira que se pode reduzir à forma (canónica) $ax^2 + bx + c = 0$ em que a, b e c são números reais quaisquer, contando que $a \neq 0$" (p. 346). O § 302 define equação do 2.º grau a uma incógnita incompleta e refere os três casos possíveis $b = 0$, $c = 0$, e $b = 0$ e $c = 0$.

O § 303 apresenta um problema numérico que conduz a uma equação do 2.º grau incompleta: "Qual é o número cujo quadrado é igual ao seu triplo?" (p. 347).

A segunda secção do capítulo — "Resolução algébrica" — inicia-se com o § 304 que apresenta a resolução dos três casos de equações do 2.º grau incompletas $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 = 0$. Para cada caso, resolve-se a equação e dá-se um exemplo. Os §§ 305–311 apresentam a resolução da equação completa, começando com casos particulares onde se reconhecem casos notáveis de multiplicação de polinómios e se dão exemplos com coeficientes numéricos. O § 309 faz a dedução da fórmula resolvente pela técnica de completar o quadrado do binómio (figura 17).

O § 310 apresenta três exemplos de aplicação da fórmula resolvente, os dois últimos com significativa complexidade:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0,\ \frac{1}{x-2} + 1 - \frac{6-x}{3(x^2-4)} - \frac{1}{2-x} = 0 \text{ e } x(x-2) = \sqrt{3}(x-2)$$

O § 311 apresenta a simplificação da fórmula resolvente para os casos em que "o coeficiente b é um número par" (p. 360) e o "coeficiente b é par e o coeficiente a é igual a 1" (p. 361). Para cada um dos casos, apresenta exemplos. O § 312 chama a atenção numa "nota importante" (p. 362) para a possibilidade de uma rápida resolução de certas equações do 2.º grau, sem as reduzir à forma canónica nem aplicar a fórmula resolvente, usando propriedades da multiplicação de polinómios.

A terceira secção do capítulo XX — "Equações literais" — é constituída pelo § 313, onde se define equação literal e se resolvem as equações $y^2 = p(y + 2p)$ e $dx - 2d - x^2 = -2x$, através da fórmula resolvente.

O capítulo XXI inicia-se com o § 314 que define problema do 2.º grau a uma incógnita como aquele que, "posto em equação, conduz a uma equação do 2.º grau com uma só incógnita" (p. 370). O § 315 indica quatro passos para resolver um problema: "I) Escolher as incógnitas; II) Pôr o problema em equação; III) Resolver a equação obtida; e IV) Discutir o problema" (p. 370). Estes passos são explicitados com detalhe no § 316 a que se seguem, no § 317, quatro problemas e respectiva resolução. O primeiro envolve relações entre números, o segundo medidas de lados de um rectângulo, o terceiro a compra de laranjas por diversos preços e o quarto a distribuição de uma certa quantia por um certo número de pobres:

> I. Calcule o número tal que a diferença entre o seu quadrado e o seu triplo seja igual a –2.
>
> II. Os lados não paralelos de um rectângulo medem, respectivamente, 8 m e 6 m. Quanto se deve adicionar ao menor dos lados para que, subtraindo ao outro lado o mesmo comprimento, se obtenha um rectângulo de área igual a 45 m^2?
>
> III. Comprei um certo número de laranjas por 36$00. Se cada laranja me tivesse custado menos $50, poderia ter comprado com o mesmo dinheiro, mais 6 laranjas. Quantas laranjas comprei?
>
> IV. Tínhamos 800$00 para distribuir, em partes iguais, por um certo número de pobres. Se tivessem comparecido menos 3 pobres, cada um receberia mais 54$00. Quantos eram os pobres?

O § 318 indica ser vantajoso formular os problemas em termos gerais, como problemas literais, de modo a poder obter uma "solução geral (fórmula)". Refere, ainda, a necessidade da "chamada investigação das condições de possibilidade do problema" (p. 375). Além disso, resolve o seguinte exemplo: "Dá-se o perímetro $2p$ e a altura h dum triângulo isósceles. Calcular os lados do triângulo" (p. 375).

O capítulo XX termina com oito exercícios (cada um dos quais com numerosas alíneas) e as suas soluções, incluindo exercícios de resolução de equações do 2.º grau numéricas e literais, primeiro sem a utilização da fórmula resolvente e depois com o uso da fórmula resolvente (figuras 18 e 19). Os primeiros exercícios são simples mas os últimos revestem-se de assinalável complexidade. O capítulo XXI termina com 33 problemas — de grau de dificuldade bastante diverso — e as suas soluções (figuras 20 e 21).

EXERCICIOS

Equações numéricas

1. Resolva as seguintes equações sem utilizar a fórmula resolvente:

a) $x^2 - 9 = 0$ *b)* $4y^2 = 25$ *c)* $3x^2 - 12 = 0$ *d)* $7x^2 = 0{,}9583$

e) $x^2 - 40 = 9$ *f)* $4x^2 - 300 = 100$ *g)* $\frac{x}{16} = \frac{4}{x}$ *h)* $3x^2 + 2x = 0$

i) $4x = 3x^2$ *j)* $z^2 = z$ *l)* $\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{4}$

m) $\frac{2x^2-1}{x-3} = x + 3 + \frac{17}{x-3}$ *n)* $(x-2)^2 = 25$ *o)* $(3z-2)^2 = 4$

p) $9(3x+5)^2 = 16$ *q)* $\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$ *r)* $(x-1)(x+2) = 0$

s) $5x\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ *t)* $x(x-2) - 3(x-2) = 0$

u) $2x\left(x + \frac{1}{3}\right) - 3\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$ *v)* $4x(1-2x) - (2x-1) = 0$

Figura 18 — Primeiro conjunto de exercícios do capítulo XX

8. Resolva *em ordem* a x as seguintes equações:

a) $x^2 - \frac{b^2+1}{b}x + 1 = 0$ *b)* $\frac{x-m}{a-m} = \frac{a}{x}$ *c)* $3bx\left(x - \frac{1}{3b}\right) = \frac{2}{3b}$

d) $x^2 - \frac{b-a}{ab}x - \frac{1}{ab} = 0$ *e)* $\frac{x}{b}(x-a) + \frac{a-x}{a} = 0$

f) $ax + \frac{a}{x} = a^2 + 1$ *g)* $\frac{3x+a}{x-2a} - 13 = \frac{x+3a}{a-x}$

h) $\frac{x+2a}{x-2a} - \frac{x-2a}{x+2a} = \frac{8a}{a^2-4}$ *i)* $\frac{a+4b}{x+2b} - \frac{a-4b}{x-2b} = \frac{4b}{a}$

j) $\frac{a}{x+a} - \frac{a}{x} + \frac{1}{6} = 0$ *l)* $\frac{ax}{x^2-a^2} = 1 + \frac{x}{2x-2a}$

Figura 19 — Último conjunto de exercícios do capítulo XX

Resolver os seguintes problemas:

I) A soma dos inversos de dois números inteiros consecutivos é igual a $\frac{15}{56}$. Calcule os números. *(Exame de 1939)*.

II) A diferença entre dois números positivos é 3 e a soma dos seus inversos é $\frac{1}{2}$. Calcule os números.

III) Calcule dois números sabendo que o seu produto é 84 e que a sua soma é 20.

IV) Calcule os lados dum triângulo rectângulo sabendo que as suas medidas são expressas por três números inteiros consecutivos.

V) Qual é o comprimento de cada um dos ponteiros de um relógio sabendo que, ao meio-dia, as suas extremidades distam 4 cm e às 9 horas tal distância é de 20 cm?

VI) Um campo tem uma forma quadrada. Qual é o lado do quadrado, sabendo que, adicionando 2 metros a um dos lados e subtraindo 10 metros ao outro lado, se obtém um rectângulo que tem uma superfície igual a 88 ares. *(Exame de 1942)*.

Figura 20 — Primeiro conjunto de problemas do capítulo XXI

XXIX) Um comerciante comprou garrafas de vinho do Porto por 750$00, mas, ao desencaixotá-las, partiu 5 garrafas.

Quantas garrafas comprou, sabendo-se que teve de vender cada um das restantes por mais 6$00 do que lhe haviam custado para que perdesse no negócio apenas 30$00?

XXX) Uma torneira enche um tanque em mais 3 horas do que outra, mas, vertendo conjuntamente, as duas torneiras enchem o tanque em duas horas.

Em quanto tempo cada uma das torneiras enche o tanque?

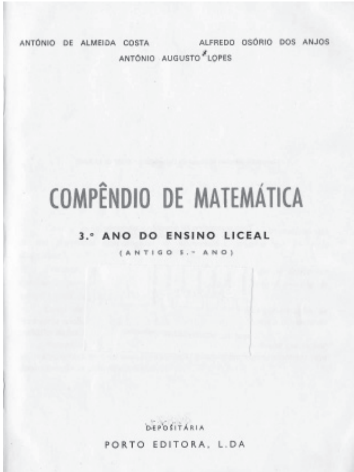
XXXI) Duas máquinas em laboração simultânea produzem um certo trabalho em 18 dias. Calcule o tempo que cada uma das máquinas levará sòzinha a produzir o referido trabalho sabendo que uma delas leva mais 15 dias do que a outra.

XXXII) A diferença entre os quadrados das diagonais de dois rectângulos com a mesma altura é igual a s^2. Calcular as bases desses rectângulos sabendo que estão entre si como 5 está para 3.

Figura 21 — Último conjunto de problemas do capítulo XXI

Análise. Neste manual, o tratamento das equações do 2.º grau aparece consideravelmente simplificado em relação aos manuais anteriores. Estuda as equações incompletas e a equação completa, faz a dedução da fórmula resolvente (incluindo as versões simplificadas) e inclui, apenas, uma breve discussão sobre equações de coeficientes literais. Os assuntos que aborda são semelhantes aos tratados no manual anterior, excepto quanto ao facto de não se fazer referência aos números complexos. A apresentação continua a ser sóbria (figuras 16–21), tal como acontecia nos três manuais analisados anteriormente.

Na abordagem apresentada neste manual, reconhecem-se movimentos do particular para o geral e do geral para o particular. Exemplos do primeiro movimento são o modo como apresenta a equação geral do 2.º grau a partir de um caso concreto e a discussão das equações incompletas antes da equação completa. Como exemplos de movimentos do geral para o particular, podemos apontar a dedução da fórmula resolvente da equação do 2.º grau, bem como várias outras situações em que se faz uma discussão em termos gerais, seguida da apresentação de um exemplo. É de notar que o capítulo se inicia com algumas observações sobre o significado e papel das equações. O nível de formalização da linguagem é elevado, sendo apresentadas definições explícitas para conceitos como "equação" e "problema do 2.º grau". Para as diversas técnicas, são referidos exemplos de aplicação algébricos, geométricos, numéricos ou respeitantes a situações do quotidiano. Os exercícios propostos no fim do capítulo são numerosos, indo dos relativamente simples até aos relativamente complexos. No capítulo XX todos os exercícios têm um carácter matemático, envolvendo apenas a resolução de equações. Os exercícios incluídos no fim do capítulo XXI são indicados como problemas, sendo uns numéricos, outros geométricos e outros ligados ao quotidiano. Neste capítulo, não se apresentam quaisquer esquemas ou figuras, nem se faz referência a aspectos da História da Matemática.



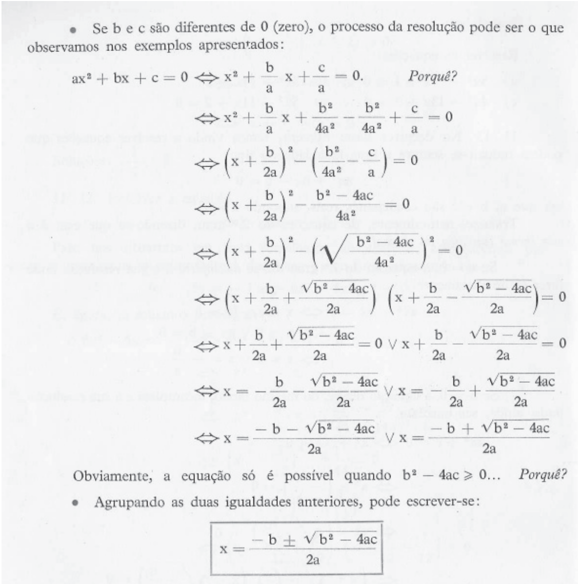
ANTÓNIO DE ALMEIDA COSTA ALFREDO OSÓRIO DOS ANJOS
ANTÓNIO AUGUSTO LOPES

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

3.º ANO DO ENSINO LICEAL
(ANTIGO 5.º ANO)

DEPOSITÁRIA
PORTO EDITORA, L.DA

Figura 22 — Folha de rosto



• Se b e c são diferentes de 0 (zero), o processo da resolução pode ser o que observamos nos exemplos apresentados:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \qquad \textit{Porquê?}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \vee x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obviamente, a equação só é possível quando $b^2 - 4ac \geqslant 0$... *Porquê?*

• Agrupando as duas igualdades anteriores, pode escrever-se:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Figura 23 — Dedução da fórmula resolvente

António de Almeida Costa, Alfredo Osório dos Anjos e António Augusto Lopes (*Compêndio de Matemática*)

Apresentação. Este manual, com 280 páginas, foi publicado pela Porto Editora, em 1974, e foi produzido, ainda, durante o Estado Novo. Trata-se do único livro existente na altura para os alunos do 3.º ano do ensino liceal[14], contendo no verso da página de rosto a informação: "Todos os exemplares são numerados e autenticados pelo Ministério da Educação Nacional". Os autores são António de Almeida Costa, Alfredo Osório dos Anjos e António Augusto Lopes, acerca de quem não é dada qualquer informação[15].

O tópico das equações do 2.º grau é apresentado no capítulo I, com o título "Questões de linguagem, Inequações do 1.º grau, Equações do 2.º Grau". Trata-se de um grande capítulo com 47 páginas, onde se incluem, também, diversos outros assuntos de índole algébrica e de lógica[16]. O capítulo é composto por 12 secções numeradas, com subtítulos. A secção 11 (subdividida nos pontos 11.1 a 11.14) intitula-se "Equações numéricas do 2.º grau" (12 pp.) e a secção 12 (pontos 12.1 a 12.5), é designada por "Problemas do 2.º Grau" (2 pp.).

Este manual tem um formato um pouco mais reduzido que o anterior (16,3 cm × 22,9 cm). Está escrito em linguagem natural muito sintética e fortemente impregnada de linguagem algébrica, com elementos da simbologia lógica e da teoria dos conjuntos como $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\{\ \}$, $\in$ (figura 23). Usa-se, por vezes, a terminologia "conjunto das soluções" (pp. 42 e 44). O corpo de letra é o usual e o entrelinhamento reduzido. Não existem figu-

Exercícios

Resolver as equações seguintes:

a) $x^2 - \sqrt{3}x = 0$; *b)* $x^2 = 4x$

c) $3x^2 + \sqrt{3}x = 0$; *d)* $5x^2 - 1{,}4x = 0$

Figura 24 — Exercícios (1.º conjunto)

Exercícios:

Resolver as equações seguintes:

a) $x^2 - 4 = 0$; *b)* $x^2 - 5 = 0$

c) $9x^2 - 2 = 0$; *d)* $x^2 = 2$

Figura 25 — Exercícios (2.º conjunto)

Exercícios:

Resolver as equações:

a) $x^2 - 9x + 14 = 0$; *b)* $x^2 - x - 6 = 0$; *c)* $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Figura 26 — Exercícios (3.º conjunto)

Exercícios:

Resolver as equações:

a) $5x^2 - 7x + 1 = 0$; *b)* $3x^2 + 4x = 2$

c) $4x^2 - 13x + 3 = 0$; *d)* $5x^2 - 11x + 2 = 0$

Figura 27 — Exercícios (4.º conjunto)

Exercícios:

Resolva as equações seguintes:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$; *b)* $x^2 - 8x - 20 = 0$

c) $4x^2 + 9 = 0$; *d)* $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$

Figura 28 — Exercícios (5.º conjunto)

ras, tabelas ou diagramas e o grafismo, embora sóbrio, começa a denotar algum cuidado, surgindo a vermelho forte certos subtítulos como "Problema", "Exercícios", "Soluções", bem como uma caixa envolvendo a fórmula resolvente (figuras 23 a 28).

Descrição. O primeiro ponto da secção 11 inicia-se com a resolução de um problema numérico: "Penso num número positivo. De uma vez, subtraio-lhe três unidades; de outra, adiciono-lhe duas. Multiplicando os resultados obtidos, obtenho, como produto, o número zero. Em que número penso eu?" (p. 40). O problema conduz à escrita de uma equação que é resolvida usando a "propriedade de anulamento do produto". De seguida, o ponto 2, apresenta um novo problema e uma nova equação para resolver e no ponto 3 surge, desde logo, uma equação ($2x^2 + \sqrt{2}x = 0$), que é resolvida tirando partido da decomposição em factores para aplicar a referida propriedade. No decurso das resoluções coloca-se, por vezes, a pergunta porquê?, estabelecendo-se, deste modo, um registo de "diálogo com o leitor". Os três primeiros pontos desta secção encerram com quatro exercícios para resolver (figura 24). O ponto 4 inclui duas novas equações ($x^2 - 9 = 0$ e $4x^2 - 3 = 0$), que são resolvidas por aplicação dos casos notáveis da multiplicação de polinómios, vindo depois mais quatro exercícios (figura 25).

Segue-se, no ponto cinco, a resolução de equações completas, recorrendo à aplicação dos casos notáveis da multiplicação de polinómios. Apresenta-se, também, a resolução das equações $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x^2 + 6x + 8 = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 - 2x - 4 = 0$ e $x^2 + 4x - 9 = 0$, terminando com a seguinte observação (indicada "para meditar"): "na resolução de uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$, pode começar por escrever-se

$$x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2} + c = 0$$

para, depois se adicionar e subtrair ao 1.º membro o quadrado de $b/2$, isto é, *o quadrado de metade do coeficiente de* x" (p. 45). Estes 5 pontos encerram com três exercícios para resolver (figura 26). Os 2 pontos seguintes continuam a apresentar exemplos de equações já resolvidas, de complexidade crescente, e terminam propondo mais quatro exercícios (figura 27).

No ponto 13, diz-se que as "equações que podem reduzir-se sempre a uma igualdade do tipo $x^2 + bx + c = 0$ em que a, b e c são coeficientes reais, supondo $a \neq 0$" (p. 47) são equações do 2.º grau e faz-se referência à forma canónica ou normal. Apresentam-se os casos em que $c = 0$ e $b = 0$, como equações incompletas e mostra-se como os resolver deduzindo uma regra prática. Refere-se, ainda, que a solução deste tipo de equações "só existe quando

$$-\frac{c}{a} \geq 0, \text{ pois, em } \mathbb{R},$$

não existem raízes quadradas de um número negativo" (p. 47). De seguida, surge a demonstração da fórmula resolvente (p. 48) (figura 28), usando a técnica de completar o binómio e sem qualquer recurso à linguagem natural. No final da demonstração diz-se: "Obviamente, a equação só é possível quando $b^2 - 4ac \geq 0$ … Porquê?", pergunta que se deixa para o aluno responder. Utiliza-se, também aqui, um registo de diálogo com o leitor. Finalmente, este ponto apresenta dois exemplos resolvidos e quatro exercícios para resolver.

O ponto 14 contém a simplificação da fórmula resolvente para o caso em que $b = 2k$, fazendo a respectiva dedução e apresenta um exemplo já escrito na forma canónica ($3x^2 + 8x - 3 = 0$). O ponto termina sem propor exercícios para resolver.

Na secção 12, o manual propõe quatro problemas, que resolve por diversos processos (nem sempre por aplicação da fórmula resolvente). O primeiro é um problema numérico, o segundo de idades, o terceiro de compras de papel e lápis e o quarto de Geometria:

> 1. Ao quadrado de um número adicionou-se o triplo da metade do número; a soma obtida é 115. Calcular esse número.
>
> 2. Interrogado sobre a sua idade, disse o Paulo: Se ao quadrado do número de anos que tenho adicionares o triplo da metade desse número, obterás a soma 115. Quantos anos tem o Paulo?
>
> 3. Comprámos cadernos e lápis. Por cada lápis, pagámos tantos escudos quantos os lápis comprados e, da mesma forma, por cada caderno tantos

escudos quantos os cadernos comprados. Sabendo que a despesa total foi de 68$00 e que o número de cadernos excede o dos lápis em 6, determinar o preço de cada lápis.

4. Num triângulo rectângulo, a hipotenusa e a altura a ele referente têm, respectivamente, 15 cm e 6 cm de comprimento. Determinar os comprimentos das projecções de cada um dos catetos sobre a hipotenusa.

A secção encerra com cinco problemas para resolver e suas soluções (figura 29).

12 . 5 Resolver os seguintes problemas:

1) Determinar dois números inteiros consecutivos, sabendo que a soma dos seus quadrados é 61.

2) Num prisma quadrangular recto de bases quadradas, o comprimento de uma aresta lateral excede em 1 cm o comprimento de qualquer aresta da base. Sabendo que a superfície do prisma tem 170 cm^2 de área, determinar a altura do prisma (comprimento das arestas laterais).

3) Um número é igual ao quadrado da soma dos seus dois algarismos. Determinar o número sabendo que o algarismo das dezenas excede em 7 o das unidades.

4) Num trapézio rectangular a diferença dos comprimentos das bases é de 2 cm. Determinar a altura do trapézio, sabendo que ela é igual ao comprimento da base menor e que a área do trapézio é 156 cm^2.

5) A área de uma sala pode ser coberta com 3000 ladrilhos quadrados ou com 2500 ladrilhos rectangulares. Determinar as dimensões dos ladrilhos rectangulares sabendo que o comprimento excede em 2 cm a largura e que esta é igual à dos ladrilhos quadrados.

Figura 29 — Problemas propostos

Análise. Como vimos, em termos dos assuntos apresentados, este manual representa uma nova simplificação, na medida em que não fala em equações do 2.º grau literais. A sua maior novidade é a utilização, na abordagem do tema, da linguagem da lógica e da teoria dos conjuntos, característica do período da Matemática moderna, nomeadamente para representar a equivalência de equações e a disjunção de condições (figura 23). O grafismo é muito sóbrio, não apresentando figuras ou esquemas (figuras 22–29).

A linguagem deste manual é bastante formal, sobrecarregada de expressões algébricas e símbolos lógicos, como mostra a figura 23. Interpela, por vezes, o aluno, colocando-lhe a pergunta "porquê?", para justificação de alguns passos. Introduz o tema a partir de um problema numérico, explorando os exemplos num registo de diálogo com o leitor. Os exercícios são pouco numerosos e têm um grau de dificuldade muito reduzido (figuras 24–28). Uma inovação importante é que estes exercícios são propostos à medida que os assuntos são abordados, e não no fim do capítulo, diferentemente do que acontecia nos manuais anteriormente analisados. Outra diferença em relação a estes, é que os problemas não são apresentados como exercícios. No entanto, pelos exemplos dados, depreende-se que, tal como anteriormente, consideram-se como problemas questões onde predomina a linguagem natural e onde é necessário começar por traduzir por uma equação as condições indicadas. Alguns dos problemas envolvem situações de Geometria e do quotidiano. Não se fala de outras ciências, nem se referem elementos de carácter histórico.

António de Almeida Costa, Alfredo Osório dos Anjos e António Augusto Lopes (*Matemática Jovem*)

Apresentação. Este manual, com 327 páginas, foi publicado pela Porto Editora em 1983, já em pleno regime democrático pós-25 de Abril, informando estar de acordo com os programas vigentes para o ensino secundário unificado[17]. Destina-se a alunos do 9.º ano de escolaridade, foi, na sua época, muito usado. Os autores são, de novo, António de Almeida Costa, Alfredo Osório dos Anjos e António Augusto Lopes, acerca de quem não são dadas informações[18].

As equações do 2.º grau são apresentadas no capítulo 5, com o título "Problemas e Equações do 2.º Grau" (15 pp.). O capítulo encontra-se dividido em quatro partes, começando com "Equações do 2.º Grau em $\mathbb{R}$" (8 pp.) e "Problemas do 2.º Grau" (2 pp.), a que se segue um conjunto de tarefas designadas por "Actividades complementares" (3 pp.) e um novo conjunto intitulado "Actividades de revisão" (2 pp.), bem como as respectivas soluções.

Este manual tem o mesmo formato do anterior (16,3 cm $\times$ 22,9 cm). Não existem parágrafos numerados, mas os diversos assuntos são identificados por pontos, de 1 a 12. O texto desenvolve-se num registo que mistura a linguagem natural (muito abreviada) com linguagem algébrica (dominante). Usam-se, com muita frequência, os símbolos $\Leftrightarrow$ e $\vee$. O corpo de letra é o usual e o entrelinhamento reduzido. O grafismo continua sóbrio, mas denota uma maior atenção, surgindo a azul forte certos subtítulos e a azul fraco diversas frases e enunciados, bem como a caixa que enquadra a fórmula resolvente. Apresenta uma tabela em que estão compiladas sete equações dos 1.º e 2.º grau, indicando os coeficientes do polinómio do 1.º membro e um quadro sem cor de fundo, onde se indica a definição de equação do 2.º grau.

Descrição. A primeira parte do capítulo — "Equações do 2.º Grau em $\mathbb{R}$" — inicia-se com a resolução de um problema a partir da qual se define equação do 2.º grau. Nos segundo, terceiro e quarto pontos resolvem-se equações do tipo $x^2 + c = 0$, num quinto ponto equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, num sexto ponto equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ recorrendo aos casos notáveis e, finalmente, num sétimo ponto apresenta-se a fórmula resolvente (figura 31) que é aplicada em dois exercícios. Curiosamente, não denomina as equações $x^2 + c = 0$ e $ax^2 + bx = 0$ como "incompletas", mas sim equações "com aspecto mais simples" (p. 136). Num oitavo ponto, sintetiza os vários tipos de equações do 2.º grau e a sua resolução e possibilidade em $\mathbb{R}$, fazendo, ainda, referência ao caso $b = 2k$ e indicando a forma resolvente simplificada.

Na segunda parte — "Problemas do 2.º Grau" — apresentam-se quatro problemas resolvidos (o primeiro e o segundo muito parecidos aos do manual anterior e o último totalmente idêntico):

> 1. Se ao quadrado de um número adicionarmos o seu triplo, obtemos como resultado 70. Qual é esse número?
>
> 2. Interrogado sobre a sua idade, disse o Paulo: "o quadrado de metade dos anos que já fiz é igual ao seu quíntuplo. Quantos anos tem o Paulo?

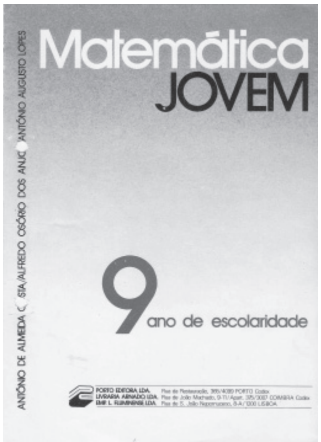
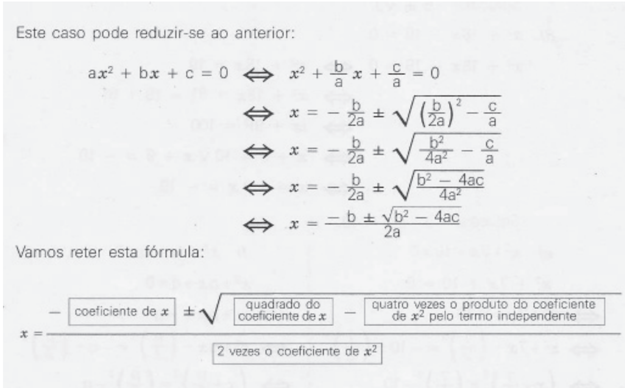


Figura 30 — Folha de rosto



Este caso pode reduzir-se ao anterior:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vamos reter esta fórmula:

$$x = \frac{-\boxed{\text{coeficiente de } x} \pm \sqrt{\boxed{\text{quadrado do coeficiente de } x} - \boxed{\text{quatro vezes o produto do coeficiente de } x^2 \text{ pelo termo independente}}}}{\boxed{2 \text{ vezes o coeficiente de } x^2}}$$

Figura 31 — Dedução da fórmula resolvente

3. A soma dos quadrados de dois números que diferem de seis unidades é igual a 68. Quais são esses números?

4. Num triângulo rectângulo, a hipotenusa e a altura a ele referente têm, respectivamente, 15 cm e 6 cm de comprimento. Calcular os comprimentos das projecções de cada um dos catetos sobre a hipotenusa.

Na terceira parte, na secção intitulada "Actividades complementares", propõe a resolução de nove conjuntos de questões envolvendo a resolução de equações e cinco problemas (figuras 32 a 34) e indica as respectivas soluções. É de notar a complexidade das equações apresentadas nas duas últimas alíneas da questão 8 (figura 33).

O capítulo finaliza com uma secção 5.4 — "Actividades de revisão" — constituída por questões que envolvem matérias anteriores como inequações, sistemas, decomposição de polinómios em factores, resolução de equações, resolução de problemas e simplificação de radicais.

Análise. Este manual, sendo dos mesmos autores que o anterior, apresenta com ele muitas semelhanças. No entanto, como vimos acima, tem também algumas diferenças. Uma das mais importantes respeita ao facto de definir equação do 2.º grau logo na primeira página do capítulo, enquanto que no manual anterior isso só acontecia na nona página e de modo mais indirecto. Deste modo, enquanto que no manual anteriormente analisado havia um percurso de trabalho até chegar à definição geral e consequente resolução da equação do 2.º grau, neste isso é feito logo no início, acentuando-se uma abordagem do geral para o particular. Outra diferença é que estabelece logo desde o início, uma conexão entre equações e polinómios, o que anteriormente não acontecia.

1. Resolver as equações em $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 49 = 0$ *b)* $x^2 - 27 = 0$ *c)* $x^2 = 63$

d) $x^2 + 9 = 0$ *e)* $1000 = x^2$ *f)* $x^2 - 3^2 = 4^2$.

2. Verificar que, em $\mathbb{R}$:

a) $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$ *b)* $x^2 = 0{,}64 \Leftrightarrow x = 0{,}8 \vee x = -0{,}8$

c) $x^2 = 12 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3}$ *d)* $x^2 = -14 \Leftrightarrow x^2 = -1$.

3. Resolver, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $x^2 - 7x = 0$ *b)* $x^2 + 7x = 0$ *c)* $3x^2 - 2x = 0$

d) $4x^2 = 10x$ *e)* $x^2 - 2{,}5x = 0$ *f)* $x^2 = x$

g) $0{,}1x^2 - 0{,}01x = 0$.

Figura 32 — Três primeiros conjuntos de exercícios sobre equação do 2.º grau

8. Resolver, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

a) $5x^2 - 50x + 80 = 0$ *b)* $2x^2 + 24x + 70 = 0$

c) $0{,}6x^2 - 2x - 5 = 0$ *d)* $0{,}7x^2 - x + 0{,}3 = 0$

e) $(x + 4)(x + 5) - 3x = 27$ *f)* $x(x - 6) = 16$

g) $(x - 2)(x + 5) = 22 - x$ *h)* $(x - 4)^2 + (x - 1)(x + 1) = 25$

*i)** $\dfrac{6}{x} - 5 = x$ *j)** $x - \dfrac{3}{x - 1} = 3$.

9. Verificar que:

a) $x^2 + (x + 2)^2 = 10^2 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -8$

b) $x(2x - 1) = (x + 1)^2 + 3 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$.

Figura 33 — Dois últimos conjuntos de exercícios sobre equação do 2.º grau

10. Resolver os problemas seguintes:

a) Determinar dois números inteiros consecutivos, sabendo que a soma dos seus quadrados é 61.

b) Num prisma quadrangular recto de bases quadradas, o comprimento de uma aresta lateral excede em 1 cm o comprimento de qualquer aresta da base. Sabendo que a superfície tem 170 cm^2 de área, determinar a altura do prisma (comprimento das arestas laterais).

c) Um número é igual ao quadrado da soma dos seus dois algarismos. Determinar o número sabendo que o algarismo das dezenas excede em 7 o das unidades.

d) Num trapézio rectangular a diferença dos comprimentos das bases é de 2 cm. Determinar a altura do trapézio, sabendo que ela é igual ao comprimento da base menor e que a área do trapézio é 156 cm^2.

e) A área de uma sala pode ser coberta com 3000 ladrilhos quadrados ou com 2500 ladrilhos rectangulares. Determinar as dimensões dos ladrilhos rectangulares sabendo que o comprimento excede em 2 cm a largura e que esta é igual à dos ladrilhos quadrados.

Figura 34 — Problemas do 2.º grau propostos

Tal como o anterior, este manual tem uma apresentação condensada e a sua abordagem envolve um nível de abstracção e formalização elevado — em particular, a dedução da fórmula resolvente é feita de modo extremamente abreviado (figuras 31 e 32). Não surge o termo "exercício", que é substituído pelo termo "actividade". O número de questões propostas ao aluno para resolver aumentou muito em relação ao manual anterior, passando de novo para o fim do capítulo. É de notar que duas das equações propostas ao aluno têm alguma dificuldade, apresentando a incógnita em denominador (figura 33). Os problemas continuam a ser enunciados em linguagem natural que é preciso começar por traduzir por uma equação e envolvem situações aritméticas, geométricas e do quotidiano (figura 34). Não se fala de outras ciências nem se referem elementos históricos.

Maria Augusta F. Neves, Luís Guerreiro e Armando Neves (*Matemática 9*)

Apresentação. Este manual foi publicado em 2004, pela Porto Editora, no Portugal democrático do século XXI. Destina-se aos alunos do 9.º ano de escolaridade e é constituído por dois volumes. O primeiro volume, com 128 páginas, contém quatro capítulos (Probabilidades e Estatística; Números reais e inequações; Sistemas de equações; Equações do 2.º grau) e o segundo volume, com 144 páginas contém outros quatro capítulos (Proporcionalidade inversa e representações gráficas; Trigonometria; Circunferência, polígonos e rotações; Sólidos geométricos). Trata-se de um dos mais usados, senão mesmo o mais usado, nesta época. Os autores são Maria Augusta Neves, Luís Guerreiro e Armando Neves de quem não é feita qualquer apresentação[19].

Cada capítulo inicia-se com um separador de duas páginas. O capítulo "Equações do 2.º grau" (22 pp.) está dividido em quatro secções (todas elas com 4 pp.): (i) "Operações com polinómios. Casos notáveis da multiplicação de polinómios. Decomposição em factores (Revisão)"; (ii) "Resolução de equações de 2.º grau incompletas. Lei do Anulamento do Produto (Revisão)"; (iii) "Resolução de equações do 2.º grau completas. Fórmula Resolvente"; e (iv) "Resolução de problemas do 2.º grau". Cada uma das secções apresenta uma explicação do respectivo tópico, diversos exemplos resolvidos de questões relativas a esse tópico e uma pequena síntese de 7 a 10 linhas (2 pp.) a que se segue um conjunto de "Problemas propostos", o último dos quais apresentado como "Reflexão/Discussão" (2 pp.). O capítulo termina com duas secções designadas "Palavras-chave/Conhecimentos e Capacidades Específicas" (4 pp.) e "Avaliação" (4 pp.).

Este manual tem um formato maior que todos os anteriores (20,3 cm $\times$ 28,6 cm), sem pontos ou parágrafos numerados. As frases são predominantemente curtas e directas (por exemplo: "efectua-se o produto de polinómios"; "reduzem-se os termos semelhantes"). O texto está redigido numa mistura de linguagem natural e linguagem algébrica, com predomínio desta última. Usam-se com frequência o símbolo $\Leftrightarrow$ e também $\vee$. O corpo de letra é o usual e o entrelinhamento reduzido. Apresenta numerosas figuras e um grafismo bastante trabalhado, com espaços diferenciados dentro da página, bastantes cores, marcas especiais, etc.. Todos os tópicos são abordados do mesmo modo e no mesmo número de páginas (basicamente 2 pp. com exposição e exemplos e 2 pp. com exercícios).

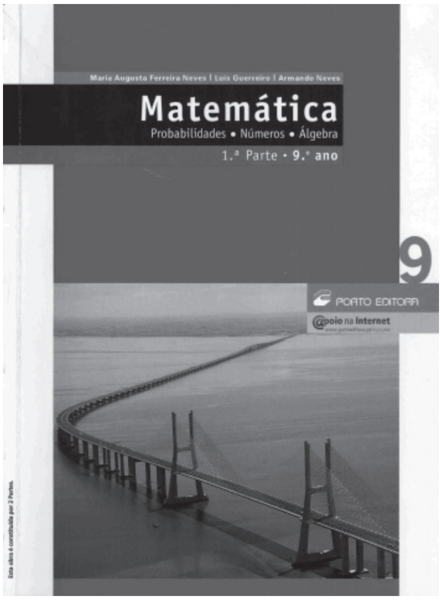


Figura 35 — Folha de rosto

Nota

Será difícil deduzir a fórmula resolvente?

Acompanhe esta dedução.

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ \ a \neq 0$$

Dividem-se por a os termos da equação:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Adiciona-se a cada membro $\frac{b^2}{4a^2}$ de modo a formar o quadrado de um binómio.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Aplica-se a definição de raiz quadrada.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Simplifica-se a expressão.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Fórmula resolvente de qualquer equação do 2.º grau

Figura 36 — Dedução da fórmula resolvente, numa nota à margem do texto

No final de cada secção, aparece uma pequena síntese de 7 a 10 linhas sobre o assunto tratado.

Descrição. O separador do capítulo contém uma breve referência aos assuntos a aprender e indica o que os alunos já devem saber: "Operar com polinómios; Aplicar os casos notáveis da multiplicação de polinómios; Decompor em factores um polinómio e Resolver equações do 2.º grau incompletas" (p. 86). A margem da segunda página do separador contém uma breve "Nota Histórica" com uma pequena frase alusiva ao trabalho com a equação do 2.º grau de Diofanto, Aryabhata, Al-Khwarizmi e Viète e apresentando um exemplo da resolução (geométrica) de uma equação por Al-Khwarizmi.

Depois, o capítulo inicia-se com duas secções com "revisões" de assuntos já conhecidos dos alunos (acima indicados) (pp. 88-95). Em seguida, numa terceira secção introduz, através de um problema geométrico, as equações do 2.º grau completas e a fórmula resolvente. Chama a atenção para a expressão $b^2 - 4ac$, relacionando o facto de ser maior, igual ou menor que zero com o número de raízes da equação (p. 97). Esta secção apresenta, sob a forma de nota, a dedução da fórmula resolvente (figura 36), pela técnica de completar o binómio, usando linguagem algébrica fortemente apoiada pela linguagem natural.

1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

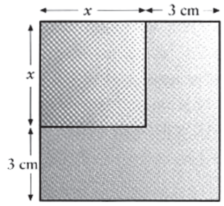
(A) A equação $(x-3)^2 = x^2$ é uma equação do 2.º grau.

(B) A equação $3x^2 - 3x = 5$ está escrita na forma canónica.

(C) Uma equação do 2.º grau pode não ter solução.

(D) A equação $(x-5)^2 = 16$ tem as soluções 4 e -4.

2. A figura representa dois quadrados, sendo um interior ao outro.
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?



(A) Se o lado do quadrado duplica, a área duplica.

(B) Sabendo que área do quadrado maior é 64 cm^2, então, $x = 8$ cm.

(C) A expressão $(x-3)^2 - x^2$ representa a área da parte colorida a verde.

(D) Se $x = 5$, a área da parte colorida a verde é 39 cm^2.

Figura 37 — As duas primeiras questões do final do capítulo

A quarta secção diz respeito à resolução de problemas do 2.º grau. Refere que na "resolução de um problema, [deve-se] fazer um desenho ou um esquema que pode ajudar a formar uma equação que relacione os dados e a incógnita. Em seguida resolve-se a equação e interpreta-se as suas soluções" (p. 100). Apresenta a resolução de três problemas, dois geométricos e um numérico, sistematizando, de novo, as sugestões anteriormente indicadas:

> 1. Ampliou-se um terreno quadrado aumentando 8 m ao lado. A área do terreno ampliado é 625 m^2. Qual era o comprimento do lado do quadrado inicial?
>
> 2. O produto de um número pela sua terça parte é 48. Qual é o número?
>
> 3. Um engenheiro tem 130 m de rede e com ela pretende vedar um jardim-infantil com a forma de um rectângulo de 1000 m^2 de área. Será que é possível? Se sim, explique as suas razões e indique as dimensões do jardim.

A secção termina propondo problemas para resolver, um numérico, quatro geométricos, dois relativos a funções e um do estilo adivinha[20] (2 pp.).

2. Resolva cada uma das seguintes equações não recorrendo à fórmula resolvente.

2.1 $x^2 - 9 = 0$; 2.2 $(x - 5)^2 = 0$;

2.3 $-x^2 + 7 = 0$; 2.4 $2x^2 = -\frac{1}{2}x$;

2.5 $(x + 3)^2 = 0$; 2.6 $(x - 2)^2 = 9$;

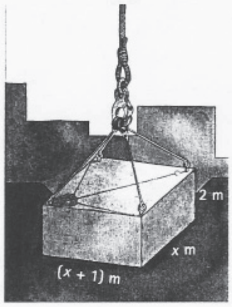
2.7 $(x - 4)^2 = 5$; 2.8 $x^2 - 2x + 1 = 16$.

Escreva o 1.º membro na forma de um quadrado de um binómio.

3. Observe a figura.
O volume do paralelepípedo que a grua está a levantar é de 24 m^3 .

3.1 Determine as dimensões do paralelepípedo.

3.2 Qual é a massa do paralelepípedo se 5 m^3 do mesmo material têm a massa de 7500 kg ?



4. Para cada uma das seguintes equações, escreva-a na forma canónica e use a fórmula resolvente para determinar as soluções.

4.1 $2x^2 + 3x = -2$; 4.2 $x(x + 2) = 8$;

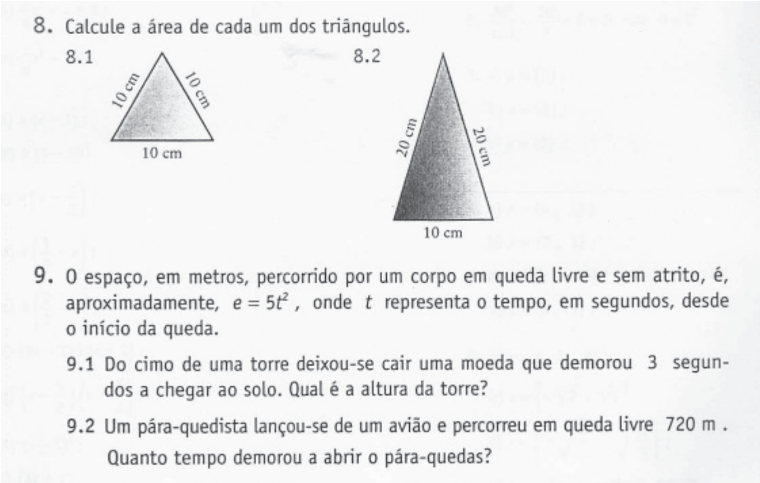
4.3 $x^2 - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x$; 4.4 $\frac{x-2}{2} - x(x + 1) = -19$.

Figura 38 — Três das questões de maior complexidade do final do capítulo

O capítulo apresenta, ainda, uma síntese da matéria, com palavras-chave e conhecimentos e capacidades específicas — traduzir um problema por uma equação do 2.º grau, escrever uma equação do 2.º grau na forma canónica, resolver equações do 2.º grau incompletas, aplicar a fórmula resolvente na resolução de uma equação do 2.º grau, e resolver problemas formando e resolvendo equações.

A secção "avaliação", que encerra o capítulo, tem tarefas de dois tipos: cinco "Questões de escolha múltipla" (2 pp.) (figura 37) e nove "Questões de desenvolvimento" (2 pp.), que incluem tanto equações como problemas para resolver (figuras 38 e 39). No final do livro, são apresentadas as soluções de todas as questões propostas em todos os capítulos.

Análise. Este manual apresenta uma extensa revisão de assuntos já estudados anteriormente — operações com polinómios, casos notáveis da multiplicação de polinómios, decomposição em factores e resolução de equações de 2.º grau incompletas, usando, se necessário, a lei do anulamento do produto. Introduz depois dois novos temas — resolução de equações do 2.º grau completas através da fórmula resolvente e resolução de problemas do 2.º grau. Contém numerosas figuras e esquemas de suporte à resolução das questões propostas como exemplos.



8. Calcule a área de cada um dos triângulos.

8.1

10 cm 10 cm 10 cm

8.2

20 cm 20 cm 10 cm

9. O espaço, em metros, percorrido por um corpo em queda livre e sem atrito, é, aproximadamente, $e = 5t^2$, onde t representa o tempo, em segundos, desde o início da queda.

9.1 Do cimo de uma torre deixou-se cair uma moeda que demorou 3 segundos a chegar ao solo. Qual é a altura da torre?

9.2 Um pára-quedista lançou-se de um avião e percorreu em queda livre 720 m . Quanto tempo demorou a abrir o pára-quedas?

Figura 39 — Duas últimas questões do final do capítulo

Na primeira parte de cada secção, os conceitos são introduzidos através de situações ou problemas numéricos, geométricos ou do quotidiano e apresentam-se diversos exemplos resolvidos. Na segunda parte, surgem questões para resolver, algumas das quais puramente matemáticas e outros contextualizadas. O final do capítulo apresenta, de novo, exemplos resolvidos e questões para resolver, bem como questões de dois níveis de dificuldade distintos (as mais simples são de escolha múltipla). A maior parte das questões são de complexidade reduzida (figuras 37–39). No entanto, nunca surge a designação "exercício". Em contrapartida, o termo "problema" aparece profusamente. No início do capítulo, existe uma referência a aspectos históricos, comentando os métodos usados por diversos matemáticos em diferentes épocas na resolução de equações do 2.º grau.

Discussão

Verificamos que, nos últimos 120 anos em Portugal, existem mudanças muito significativas no modo como os alunos vêem tratadas, pelos manuais, as equações e problemas do 2.º grau. Em primeiro lugar, o grande formalismo e pendor abstracto do livro de Augusto José da Cunha, que se colocava sempre que possível num ponto de vista geral, organizando o seu discurso a partir da consideração de equações literais envolvendo expressões algébricas complexas, deu origem a abordagens mais simples, em que se parte de equações numéricas de reduzida complexidade. Naquele manual, começava-se por estudar expressões envolvendo radicais do 2.º grau e o quadrado e a raiz quadrada de monómios e polinómios e só depois se passava ao estudo das equações do 2.º grau a uma incógnita. Posteriormente, o estudo desta equação passou a assentar apenas em conhecimentos prévios sobre a equação do 1.º grau, operações com polinómios e casos notáveis.

Nos manuais mais recentes, nota-se um reforço dos elementos contextuais (em especial, situações de "pensar em números" e exemplos do quotidiano), usa-se uma linguagem mais simples e toma-se como ponto de partida a discussão de exemplos concretos. Deixaram de se enunciar "definições" e "teoremas". Tudo isto representa uma evolução no sentido da simplificação e desformalização. No entanto, este movimento de desformalização foi em parte interrompido com a Matemática moderna. A partir do manual de 1974 de António Almeida Costa, Alfredo Osório dos Anjos e António Augusto Lopes, começam a ser usadas a terminologia e as notações da lógica matemática e da teoria de conjuntos, tais como os sinais de equivalente, conjunção e disjunção, bem como as chavetas { } e a expressão "conjunto-solução". O manual analisado mais recente, de 2004, combina um forte uso da linguagem algébrica com alguns elementos da linguagem lógica e podemos perguntar-nos se está realmente ajustado à capacidade de compreensão da generalidade dos aluno a que se destina.

Em segundo lugar, as questões trabalhadas na primeira abordagem a este tópico foram progressivamente simplificadas. Desapareceram ou foram remetidas para mais tarde certas "aplicações" da equação do 2.º grau como o estudo da existência e número de raízes, usando o binómio discriminante. As equações literais do 2.º grau, que surgem nos quatro primeiros livros considerados, deixam de aparecer. O mesmo acontece com assuntos que são abordados nos três livros mais antigos, como a relação entre a equação do 2.º grau e o trinómio do 2.º grau, a função quadrática e os números complexos.

Em terceiro lugar, há uma evolução muito interessante nas tarefas propostas aos alunos para resolverem. Por um lado, as questões apresentadas diminuem progressivamente na sua complexidade e, por outro lado, para além da técnica de cálculo, começam a requerer também compreensão de conceitos e interpretação de situações. Em todos os manuais, o estudo da equação do 2.º grau e dos problemas do 2.º grau aparecem associados, seja incluídos no mesmo capítulo, seja em capítulos contíguos. Como se constata pelos problemas de cada um dos manual anteriormente apresentados (resolvidos ou por resolver), durante todo este período, os mais frequentes são os problemas numéricos, geométricos e do quotidiano, surgindo, de vez em quando, um ou outro problema de Física. Nos problemas numéricos, geométricos e de Física não se nota muita evolução, a não ser na construção frásica. Pelo contrário, nos problemas do quotidiano nota-se uma assinalável mudança de temas, tendo desaparecido, por exemplo, os problemas de repartição de dinheiro.

É de notar que, inicialmente, todas as tarefas eram designadas por "exercícios", e tinham grande complexidade. Também eram propostos "problemas", sendo estes enunciados em linguagem natural que era necessário traduzir por uma equação, a resolver pelos métodos entretanto aprendidos. O termo "exercício" desapareceu no manual de 1983, sendo substituído por "actividade" e o termo "problema" continua bem presente, mas designa tarefas dos mais diversos tipos, incluíndo algumas que a maioria dos educadores matemáticos consideraria exercícios simples. Deste modo, nem nos manuais do passado nem no que está mais próximo, o significado dos termos "exercício" e "problema" corresponde ao que é hoje usual em educação matemática.

Ao longo deste período de mais de um século, nota-se um movimento progressivo de didactização, ou seja, uma procura de tornar os assuntos mais compreensíveis. Isso é visível, por exemplo, pelo modo de apresentação do processo de resolução das equações do 2.º grau. Nos manuais mais recentes (a partir do de Dias Agudo), a resolução de equações do 2.º grau envolvendo a aplicação da fórmula resolvente só aparece após algum trabalho com equações numéricas incompletas ou completas, recorrendo à transformação do primeiro membro num caso notável e à lei do anulamento do produto. Só depois se abordam as equações completas e se dão orientações e regras práticas para a resolução de equações de qualquer tipo. Outro aspecto deste movimento de didactização é a opção por partir de problemas (em vez de apresentar as equações sem qualquer motivação), bem visível nos quatro manuais mais recentes. É de registar, por fim, a inclusão de uma síntese com os pontos principais a recordar pelo aluno, que surge já no manual de Dias Agudo de 1938 e que se torna num dos pontos recorrentes do manual de Augusta Neves, Luís Guerreiro e Armando Neves de 2004.

A natureza do texto muda com a época em que é escrito. Até à década de 50, os manuais apresentam um texto coeso e revelam um grande cuidado na escrita, passando para um texto mais informal com o livro de 1974, que frequentemente questiona o aluno ao longo da apresentação dos assuntos, e daí evoluindo para um texto segmentado em frases muito curtas e directas, como o manual de 2004.

No grafismo adoptado nos quatro primeiros manuais, sobressai a grande densidade do texto. De um modo geral, os manuais mais antigos distinguem-se por não apresentarem esquemas, tabelas e figuras. Verifica-se uma evolução gradual no tamanho da letra e no aligeiramento da mancha escrita. A partir dos manuais de António Almeida Costa e colegas, nota-se uma atenção crescente ao grafismo, com a introdução de uma segunda cor. Este movimento dá lugar a um grafismo elaborado, recheado de cores e figuras, bem patente no último manual considerado e que exige um grande esforço de produção gráfica. Neste manual, deixam de existir parágrafos numerados ou divisão por pontos, passando a organização a ser por subtemas tratados de forma padronizada.

Note-se, ainda, que nos quatro primeiros manuais (um do século XIX e três do século XX), os autores são apresentados como sendo figuras importantes do meio académico e profissional e têm um papel preponderante. Trata-se, pois, de “livros de autor”. Isso já não acontece nos três últimos manuais analisados, em que os autores assumem um lugar mais discreto e que aparecem, sobretudo, como “livros de editora”.

Conclusão

Em suma, concluímos que os conteúdos leccionados e a sua abordagem sofreram grandes alterações. O leque dos assuntos tratados diminuiu consideravelmente. A complexidade dos exemplos discutidos e das tarefas propostas para o aluno resolver diminuiu visivelmente. Existe presentemente uma maior preocupação em ir de encontro ao aluno, apresentando-lhe situações próximas da sua experiência e do seu quotidiano. Existe também uma grande preocupação em tornar atractivo o estudo da Matemática à custa de elementos visuais, o que deu origem, no manual mais recente, uma grande profusão de elementos decorativos. A própria natureza dos manuais muda consideravelmente: de livros de autor tornam-se livros de editora, sujeitos às leis do mercado, disputando a preferência do público consumidor. Verificamos, assim, que muito mudou neste período na abordagem da equação do 2.º grau, quer em termos do conteúdo matemático propriamente dito (conceitos chave estudados, sua articulação, seu nível de abstracção), quer nos exemplos e tarefas propostas (sobretudo na diminuição do nível de complexidade) e nas abordagens didácticas (maior recurso a exemplos, maior variedade de exercícios, profusão de sínteses), quer ainda na natureza do discurso escrito (que se tornou mais sintético) e do grafismo (que se tornou exuberante). As potencialidades das novas tecnologias, que começam agora a ser exploradas, e as novas exigências curriculares, obrigarão, certamente, a que esta evolução continue, talvez de forma ainda mais acentuada, procurando corresponder às necessidades e interesses dos alunos.

É de salientar, finalmente, as diversas re-significações que os termos "exercício" e "problema" assumem ao longo do tempo. Nos primeiros manuais, os exercícios são tarefas de grande complexidade e os problemas são um tipo particular de exercícios, com um enunciado em linguagem natural. Com o tempo, os exercícios passam a incluir uma grande diversidade de tarefas que, de um modo geral, vão assumindo uma complexidade cada vez menor. Mais tarde, o termo "exercício" é substituído pelo termo "actividade" e, no último manual, o termo mais abrangente que designa todo o tipo de tarefa é "problema". Nesta evolução, nota-se o efeito da educação matemática, que desvaloriza o conceito de exercício (contribuindo para o seu desaparecimento dos manuais) e valoriza o conceito de problema (contribuindo para o reforço da sua visibilidade). A tendência para a simplificação das tarefas propostas aos alunos é certamente consequência de mudanças no papel da escola, nomeadamente com o seu alargamento a novos públicos escolares. Finalmente, evidencia-se, também, a grande capacidade de adaptação dos próprios manuais, que se apropriam de termos usados em educação matemática, como "actividade" e "problema", resignificando-os de acordo com os seus objectivos.

Notas

1 O "teorema fundamental da Álgebra" e o "teorema da Galois" sobre a resolubilidade das equações algébricas, ambos demonstrados no século XIX, constituem o culminar da teoria das equações algébricas, encerrando o chamado período da "Álgebra clássica".

2 Esses alunos frequentariam actualmente 9.º ano de escolaridade.

3 No sistema de livro único, o Governo escolhe um manual para ser usado em todas as escolas do país por um certo período.

4 Nas expressões indicadas entre aspas, mantivemos o grafismo original.

5 O que corresponde actualmente aos 8.º e 9.º anos de escolaridade.

6 O número de páginas indicado para cada § ou ponto é aproximado às unidades, pelo que, por vezes, a sua soma não coincide com o número de páginas do capítulo.

7 Ao longo de todo o artigo, por opção de estilo, usa-se com frequência a linguagem "o manual refere…", "o capítulo indica…", "a secção apresenta…", em vez de "o autor indica…"

8 Neste artigo designa-se por "problema numérico", um problema cujo enunciado indica a existência de certas relações entre diversos números, sem fazer qualquer outra referência a elementos contextuais.

9 O que corresponde aos actuais 10.º e 11.º anos de escolaridade.

10 O que corresponde ao 9.º ano de escolaridade actual.

11 Francisco Dias Agudo foi professor do ensino liceal, tendo sido, a partir de 1941, Reitor do Liceu de Pedro Nunes.

12 O manual não informa de que edição se trata, mas a primeira edição, num formato de página menor, data de 1952.

13 Correspondente ao 9.º ano de escolaridade actual.

14 Actual 9.º ano de escolaridade.

15 António de Almeida Costa foi um matemático português, professor na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto entre 1928 e 1952 e na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa entre 1952 e 1973, ano em que se jubilou. Alfredo Osório dos Anjos e António Augusto Lopes foram professores no ensino liceal, o primeiro no Liceu de Pedro Nunes, em Lisboa, e o segundo no Liceu de D. Manuel II, no Porto.

16 Por exemplo: "Termos e proposições; Expressões designatórias; Expressões proposicionais; Conjunção de condições; Relação de ordem em R; Inequações do 1.º grau; Disjunção de condições; Decomposição de polinómios em factores.

17 Em 1987 foi publicada a 3.ª reimpressão da 2.ª edição, que é exactamente igual a esta 1.ª edição.

18 Ver nota na secção anterior.

19 Maria Augusta Neves é professora no Instituto Superior de Contabilidade e Administração do Instituto Politécnico do Porto. Luís Guerreiro e Armando Neves são professores do ensino secundário.

20 "Nós, os burros, somos muito sociais. O quadrado da décima parte de nós vai à feira acompanhar os respectivos donos; a quinta parte de nós passeia as criancinhas pela serra e os 15 restantes mostram a aldeia antiga aos turistas. Afinal, quantos burros somos?" (p. 103).

Referências

Agudo, F. D., (1938). *Álgebra e Trigonometria.* Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Andrea, E. I. S., (1924). *Compêndio de Álgebra.* Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa.

Calado, J. J. G. (1960). *Compêndio de Álgebra.* Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Costa, A. A., Anjos, A. O., & Lopes, A. A. (1970). *Compêndio de Matemática.* Porto: Porto Editora.

Costa, A. A., Anjos, A. O., & Lopes, A. A. (1987). *Matemática Jovem.* Porto: Porto Editora.

Cunha, A. J. (1887). Elementos de Álgebra (5ª edição). Lisboa: Livraria de António Maria Pereira.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L., & Neves, A. (2004). *Matemática 9* (1ª edição). Porto: Porto Editora.

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *4*(8), 149–170.

Resumo. Este artigo analisa o modo como as equações do 2.º grau são abordadas em sete manuais escolares publicados entre o fim do século XIX e o início do século XXI, escolhidos entre os mais utilizados em cada período. Analisamos a forma como este assunto é apresentado em cada manual, incluindo a abordagem do tema, os exemplos e as tarefas propostas para o aluno resolver, bem como os contextos utilizados e a linguagem e grafismo. A análise realizada mostra que o assunto foi tendo um tratamento cada vez mais simplificado, tanto nos conteúdos como nas tarefas propostas e na linguagem, notando-se a influência da Matemática moderna com a introdução de elementos da lógica e da teoria dos conjuntos. Ressalta, ainda, uma evolução muito interessante no uso dos termos "exercício" e "problema". Numa primeira fase, os exercícios tendiam a ter grande complexidade e designavam-se por problemas os que tinham um enunciado em linguagem natural. Mais tarde, o termo "exercício" é substituído por "actividade". No manual mais recente, o termo "exercício" desaparece e o termo "problema" passa a designar tarefas de tipo muito diversificado, incluindo tarefas extremamente simples.

Palavras-chave: Álgebra; Equações; Tarefas; Manuais; História do Ensino da Matemática.

Abstract. This paper analyses the way 2nd degree equation are studied in seven school mathematics textbooks published between the end of the XIXth century and the beginning of the XXIst century, chosen among the most used in each period. We analyze the way this subject is presented in each textbook, including the way the theme is approached, the examples and the tasks proposed to the student, as well as the contexts used and the language and graphic style. The analysis undertaken shows that the topic had an approach increasingly simplified, in its content, in tasks proposed and in the language, and it can be noted an influence of modern mathematics with the introduction of elements of logic and set theory. It also stands a very interesting in the use of the terms "exercise" and "problem". In a first phase, the exercises had a great complexity. Those that were phrased in natural language were called problems. Later, the term "exercise" is substituted by "activity". In the more recent textbook, the term "exercise" disappears and the term "problem" begins designating tasks of a much diversified nature, including very simple tasks.

Key words: Algebra; Equations; Tasks; Textbooks; History of Mathematics Teaching.

■ ■ ■

JOÃO PEDRO DA PONTE
jponte@fc.ul.pt
Grupo de Investigação DIFMAT
Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

CARMEN SALVADO
carmen.salvado@sapo.pt
ES Eça de Queirós e Externato Champagnat, Lisboa

ANA FRAGA
fragaana@yahoo.com.br
ES Soares Basto, Oliveira de Azeméis

TERESA SANTOS
mtdossantos@yahoo.com
ES Ferreira de Castro, Oliveira de Azeméis

ELISA MOSQUITO
elisamlmosquito@iol.pt
ES D. José I e Colégio S. Francisco Xavier, Lisboa