Da *colinearidade* no ensino secundário à *dependência linear* no ensino superior: Que descontinuidades?

Cecília Costa
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, UIMA da Universidade de Aveiro.

Paula Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, UIMA da Universidade de Aveiro.

Introdução

A Álgebra Linear é uma das disciplinas comuns ao plano de estudos das mais variadas licenciaturas, nomeadamente de Matemática e de Engenharias, desde as clássicas até às ligadas às Ciências da Vida. Esta disciplina é uma ferramenta para outras subsequentes e, além disso, são conhecidas aplicações e contributos da mesma nas referidas áreas.

O ensino da Álgebra Linear tem sido preocupação de investigadores em Educação Matemática, em parte motivada pelas dificuldades que os alunos apresentam na Matemática. A pesquisa nessa área teve o seu principal desenvolvimento a partir da década de noventa do século XX e concentra-se, essencialmente, em três pólos principais: França (sendo a figura de referência J. L. Dorier), Estados Unidos da América (com os investigadores G. Harel e D. Carlson) e Canadá (com J. Hillel e A. Sierpinska).

Neste estudo, pretendemos dar um pequeno contributo no sentido de perceber algumas das razões das dificuldades, apresentadas pelos alunos, relativas aos conceitos de *colinearidade/dependência linear* e, a partir dessa identificação, elaborar um diagnóstico. Além disso, pretende-se apresentar sugestões didáctico-pedagógicas que possam ser experimentadas, procurando uma melhoria no ensino da Álgebra Linear.

Dada a complexidade inerente à pesquisa sobre ensino e aprendizagem da Matemática e, em particular, da Álgebra Linear, os estudos de investigação podem ser de vários tipos, nomeadamente de diagnóstico das dificuldades dos alunos, de ensino experimental, focados nas *perfomances* de alunos ou de professores, etc.. Nós optámos por ir a montante, analisar documentos orientadores (programas oficiais e livros de texto), procurando aí identificar descontinuidades na ligação entre o conceito de *colinearidade* (abordado no ensino não superior) e o de *dependência linear* (abordado no ensino superior). Estamos conscientes de que se trata apenas de um de vários modos de abordar esta temática.

A metodologia de pesquisa adoptada é do tipo qualitativa. Na parte relativa ao ensino superior, esta reflexão baseia-se na análise dos manuais indicados na bibliografia desta disciplina para o ano lectivo de 2003/2004 em várias universidades públicas portuguesas e nos respectivos programas[1]. A saber[2]: Agudo (1992), Anton e Rorres (1994), Blyth e Robertson (1998), Calliolli *et al.* (1991), Carreira e Pinto (1999), Fraleigh e Beauregard (1990), Giraldes *et al* (1995), Goloviná (1980), Greub (1975), Halmos (1976), Jänich (1994), Lang (1966), Leon (1998), Luís e Ribeiro (1985), Magalhães (1989), Mansfield (1976), Monteiro (2001), Perry (1988), Queiró (2001), Santos (2003), Schneider e Barker (1989), Strang (1980) e Vitória e Lima (1998).

Tomando como referência o trabalho de Bardin (1977), na análise de conteúdo por nós efectuada aos manuais para o ensino superior, tivemos em linha de conta dois momentos. O primeiro, de tratamento descritivo da obra, com ênfase na informação matemática relativa ao conceito de *dependência linear*. O segundo, de análise categorial, tendo como referências Sierra *et al* (1999) e Gonçalves (2005). Adaptámos de Gonçalves (2005) as categorias por nós utilizadas, a saber:

— Apresentação dos conceitos: é indicado de uma forma esquemática, a sequência do aparecimento de definições, exemplos, propriedades, teoremas ou exercícios;

— Estrutura do desenvolvimento: é evidenciado tanto o grau de interligação entre os conceitos de *colinearidade* e de *dependência linear*, como o tipo de linguagem utilizada na sua definição. As definições são diferenciadas segundo o tipo de linguagem. Consoante a presença ou ausência de símbolos ou caracteres matemáticos na definição, dir-se-á que esta tem um cariz (essencialmente) *simbólico* e/ou *verbal*[3].

No que respeita ao ensino não superior, este estudo baseia-se na análise dos programas oficiais de Matemática para o 3.º ciclo do Ensino Básico e para o Ensino Secundário, identificando os diferentes momentos onde o conceito de *colinearidade* surge e quais as indicações metodológicas indicadas para a sua abordagem.

Como referimos, a nossa opção foi a de analisar o que se passa a montante da implementação dos programas. Nesta fase, é elemento preponderante o programa. Ora, o programa oficial de Matemática para o ensino não superior é definido pela tutela, enquanto que o programa de Álgebra Linear é delineado localmente. Consequentemente, os manuais escolares adoptados no ensino não superior deverão estar de acordo com o programa oficial. Em contrapartida, no ensino superior são, muitas vezes, os manuais que sugerem a estrutura da disciplina. Estas razões justificam a nossa opção metodológica de dar mais ênfase aos manuais ou ao programa consoante se trata do ensino superior ou não superior, respectivamente.

A *colinearidade* e a *dependência linear*

Nesta secção, vamos analisar dois conceitos interligados, sendo um — a *colinearidade* — abordado no ensino não superior e o outro — a *dependência linear* — abordado no ensino superior.

As próximas subsecções são dedicadas à contextualização de cada um destes conceitos no nível de ensino correspondente e à forma como é sugerida a sua abordagem nos documentos orientadores, em Portugal.

Quando e como se aborda a *colinearidade* no ensino não superior?

Do programa oficial da disciplina de Matemática A, 10.º ano de escolaridade do ensino secundário, faz parte o tópico "*colinearidade* de dois vectores", o qual se insere no Tema 1, "Geometria no Plano e no Espaço I", na secção de "Geometria Analítica" (Ministério da Educação, 2001–02, pp. 24–25). É este o primeiro momento em que é feita referência explícita a este conceito. Nas indicações metodológicas refere-se:

> A equação vectorial da recta surge naturalmente associada ao produto de um escalar por um vector e à colinearidade de dois vectores. (Ministério da Educação, 2001–02, p. 25)

Seguindo esta directriz, temos o conceito de "*vectores colineares*" como sendo aqueles (não nulos) que têm a mesma direcção, ou (como é sabido) de um modo mais formal: Dois vectores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dizem-se colineares se e só se existe um número real $k \neq 0$, *tal que* $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Este conceito surge após a introdução de operações com vectores, em particular, na multiplicação de um número real por um vector, aquando do estudo de vectores livres no plano e no espaço. Posteriormente, é usado aquando da introdução à equação vectorial de uma recta no plano e no espaço, tal como se pode encontrar, a título meramente ilustrativo, em Costa e Rodrigues (2007):

> (…) para qualquer ponto P da recta r existe um número real k tal que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{u}$ (...) Uma equação do tipo $P = A + k\overrightarrow{u}, k \in \mathbb{R}$ (...) designa-se por uma ***equação vectorial*** da recta r. (p. 151)

Esta noção é encontrada, pontualmente, nos níveis de escolaridade do 11.º e 12.º anos na disciplina de Matemática A (Ministério da Educação, 2001–02), e, nestes níveis, não se constitui como pré-requisito fundamental à introdução de conceitos apresentados.

No que diz respeito à formação anterior ao 10.º ano de escolaridade, convém referir que, em geral, a noção de paralelismo, que está subjacente ao conceito aqui em análise, é referida em todos os ciclos de ensino. No 3.º ciclo do ensino básico (Ministério da Educação, 1991), aparecem conceitos elementares associados à *colinearidade*, embora sem qualquer referência explícita a essa ligação. Referimo-nos, designadamente, a translações e equações (indeterminadas) no 8.º ano de escolaridade e sistemas de equações no 9.º ano de escolaridade.

Quando e como se aborda a *dependência linear* no ensino superior?

O conceito de *dependência linear* é um dos conteúdos programáticos da disciplina de Álgebra Linear do ensino superior de várias licenciaturas, habitualmente, leccionada no 1.º ano. Os conteúdos programáticos desta disciplina nestas licenciaturas, são essencialmente os mesmos, em alguns casos abordados com maior desenvolvimento do que noutros, sendo incontornável o tópico *dependência linear*.

Gonçalves (2005), na pesquisa efectuada aos diversos programas desta disciplina nas universidades públicas portuguesas e ainda pela análise dos compêndios de Álgebra Linear aí referenciados, constatou:

> (…) a existência de uma estrutura de desenvolvimento semelhante, sobretudo ao nível dos temas abordados. Os temas Espaços Vectoriais, Aplicações Lineares, Matrizes e Sistemas de Equações Lineares constituem o padrão da sequência de ensino estabelecida nos diversos cursos. Por sua vez não é unânime a ordem segundo a qual são expostos. A alteração principal é relativa ao facto de o programa contemplar primeiramente o estudo dos espaços vectoriais em detrimento do estudo das matrizes, ou vice-versa. (p. 17)

Tendo em conta que os temas tratados são os mesmos, embora possam existir variações relativamente à sua sequência, neste estudo vamos considerar apenas duas possibilidades:

A) Espaço vectorial sobre um corpo; aplicações lineares; matrizes; sistemas de equações lineares;

B) Sistemas de equações lineares; matrizes; espaço vectorial sobre um corpo; aplicações lineares.

No que respeita à sequência A, o tópico *dependência linear* aparece de forma geral e abstracta, após a introdução dos conceitos de espaço vectorial sobre um corpo[4] e vector combinação linear de um conjunto de vectores, ligado à noção de base de um espaço vectorial.

Na sequência B, o conceito de *dependência linear* aparece de um modo transversal aos temas desta sequência e aplicado de forma restrita aos mesmos. Por exemplo, no tema "sistemas de equações lineares" este conceito emerge ao fazer-se referência a equações linearmente dependentes e, analogamente, no estudo de determinantes ao abordar-se linhas e/ou colunas linearmente dependentes. Mais tarde, a noção de característica volta a envolver directamente o conceito em análise. Só aquando do estudo de "espaço vectorial" é que aparece a definição geral e formal do conceito.

Consoante se opta pela sequência A ou B, este tópico é introduzido de uma forma mais abstracta e, consequentemente, mais abrangente (incluindo a sequência B como casos particulares), ou de forma faseada e adaptada aos tópicos matemáticos que vão sendo estudados (sistemas de equações, matrizes, determinante, característica, etc.), respectivamente.

Na sua forma mais abstracta, o conceito aqui em análise, é, habitualmente, definido por

> Let V be a vector space over the field K, and let $v_1, \ldots, v_n$ be elements of V. We shall say that $v_1, \ldots, v_n$ are ***linearly dependent*** over K if there exists

> elements $a_1, \ldots, a_n$ in K not all equal to 0 such that $a_1 v_1 + \ldots a_n v_n = 0$. (Lang, 1987, p. 10)

o que, tal como é referido em Monteiro (2001), "se prende com o número diferente de maneiras de escrever um dado vector como combinação linear de outros" (p. 41).

Ligação entre os dois conceitos

Existe uma estreita ligação entre os conceitos aqui em análise, no sentido de a *colinearidade* ser um caso particular do conceito de *dependência linear*. Trata-se do caso em que se considera o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ambos sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais e munidos das operações habituais de adição de vectores e multiplicação de um número real por um vector.

A definição de *colinearidade* anteriormente referida, é equivalente a afirmar-se que dois vectores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dizem-se *colineares* se e só se existe um número real $k \neq 0$, tal que $\overrightarrow{v} - k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (vector nulo), o que é ainda equivalente a afirmar que $\overrightarrow{v} + k'\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ para algum $k' = -k \neq 0$. Note-se que esta última afirmação é equivalente a afirmar que dois vectores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são *linearmente dependentes*.

Obstáculos e descontinuidades na aprendizagem do conceito de *dependência linear*

Segundo Brousseau (1983), o obstáculo caracteriza-se por um conhecimento, uma concepção, e não por uma dificuldade ou uma falta de conhecimento. Dependendo do contexto, podem produzir-se respostas correctas ou não. Eventualmente, cada conhecimento pode constituir um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos. Os obstáculos foram considerados, por Brousseau, de origem ontogenética, didáctica e epistemológica.

Tendo em conta os objectivos e metodologia utilizada neste estudo, os dois últimos tipos de obstáculos serão aqueles que nos merecerão atenção. Os obstáculos de origem didáctica, uma vez que são os que estão ligados à escolha de um projecto educativo ou de uma estratégia de ensino. Os obstáculos de origem epistemológica, porque são inerentes ao saber, visto que cada assunto matemático possui um estatuto epistemológico próprio que depende da história e da sua evolução no desenvolvimento da Matemática.

No caso particular do ensino de Álgebra Linear, têm vindo a ser identificados diversos obstáculos à aprendizagem. Com base em inquéritos e entrevistas efectuadas a alunos, Dorier (2000b) refere, para a Álgebra Linear em geral, que

> (…) the main criticisms made by the students toward linear algebra concern the use of formalism, the overwhelming amount of new definitions and the lack of connection with what they already know in mathematics (p. 1)

e ainda que

> (…) one of the main difficulties in learning linear algebra has to do with the variety of languages, semiotic registers of representation, points of view and settings through which the objects of linear algebra can be represented. (Dorier 2002, p. 877)

Destas citações ressaltam alguns obstáculos existentes na aprendizagem da Álgebra Linear, designadamente, o formalismo, o número de definições e resultados envolvidos na aprendizagem de um conceito, a falta de ligação com aquilo que os alunos já conhecem e os diferentes tipos de abordagem que podem ser adoptados.

Quer a invenção matemática, quer a aprendizagem da Matemática, pressupõem o estabelecimento de conexões entre conceitos. Quanto mais finas forem as redes (matemáticas e mentais) criadas, mais efectiva se torna a aprendizagem. Neste sentido, consideramos existir uma *descontinuidade* quando, nessa rede, não se realiza ligação explícita entre conceitos matematicamente interligados. Esta interligação pode ser de diferentes tipos, por exemplo, histórica, de simbolismo, de abordagem, etc..

Entendemos que a existência de descontinuidades pode implicar que conceitos já apreendidos possam constituir-se como obstáculos à aprendizagem de outros que lhe são subsequentes.

Estes aspectos também se manifestam no estudo aqui apresentado sobre o conceito de *dependência linear* como adiante explicitaremos.

Descontinuidades

Do estudo efectuado foi possível identificar vários tipos de descontinuidades na abordagem dos conceitos de *colinearidade* e de *dependência linear*. De acordo com o já exposto, organizamos as descontinuidades encontradas na ligação entre o conceito de *colinearidade* no ensino não superior e o conceito de *dependência linear* no ensino superior nas seguintes categorias com origem na sequência histórica, no uso de simbolismo e no tipo de abordagem (geométrica/algébrica).

Na sequência histórica. É nosso propósito nesta subsecção discutir as implicações da evolução histórica do conceito de *dependência linear* no seu ensino e aprendizagem actual, em particular no que respeita à sequência do ensino. Para tal, começamos por apresentar de forma resumida a evolução histórica do conceito de *dependência linear* que começa a delinear-se no século XVIII.

Ao longo do tempo, vários matemáticos se debruçaram sobre o problema da resolução de equações com o objectivo de encontrarem um processo que fosse aplicável a equações de qualquer grau. Só no início do século XVIII foi formulado e demonstrado o resultado conhecido por Teorema Fundamental da Álgebra. Euler (1707-1783) foi um dos matemáticos que questionou o facto (na altura aceite como verdadeiro) de qualquer sistema de n equações lineares com n incógnitas ter uma única solução. A reflexão sobre este aspecto levou-o a estabelecer que:

> *Quand on soutient que pour déterminer n quantités inconnues il suffit d'avoir n équations qui expriment leur rapport mutuel, il y faut ajouter cette restric-*

> *tion que toutes les équations soient différentes entr'elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit renfermée dans les autres*. (Euler, 1750, em Dorier, 2000a)

Na linguagem actual, a expressão *qu'il n'y en ait aucune qui soit renfermée dans les autres* pode ser interpretada como *as equações não podem ser linearmente dependentes* (Dias, 2006). No entanto, há que sublinhar que Euler apenas se refere ao contexto das equações enquanto que o conceito de *dependência linear* é mais geral. Foi esta a razão pela qual Dorier (2000), para este facto, usa a expressão *dependência inclusiva* e não *dependência linear*. Este trabalho de Euler teve implicações importantes no desenvolvimento da Teoria de Espaços Vectoriais. O aparecimento da Teoria de Determinantes com Cramer (1704–1752), eficaz para a resolução de sistemas de equações lineares, remeteu para segundo plano questões de tipo mais qualitativo e descritivo como a de Euler, que quase caíram no esquecimento. Só cerca de um século mais tarde, entre 1840 e 1879, é que surge o conceito de *característica*, tendo rapidamente sido associado o conceito de *dependência inclusiva* de Euler com o conceito de *determinante principal* de um sistema com n equações e n incógnitas.

Frobeniüs (1849-1917) foi quem definiu em termos modernos o conceito de *dependência linear* (e *independência linear*), simultaneamente para equações e *n*-uplos, em 1875 no estudo intitulado *Über das Pfaffsche Probem*. A partir desta altura, alguns matemáticos começam a dedicar-se ao estudo de estruturas abstractas, nomeadamente a de grupo e a de espaço vectorial.

Actualmente, faz parte dos conteúdos programáticos dos programas do 3.º ciclo do ensino básico, o estudo das equações algébricas do 1.º e 2.º grau e o estudo de sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. Tendo em conta a evolução histórica, estes conteúdos estão envolvidos com o conceito de *colinearidade/dependência linear*. Pela análise dos programas oficiais, constata-se que tal ligação não é explicitada.

No ensino superior quando se opta pela sequência B, está a seguir-se a evolução histórica (em particular a do conceito de *dependência linear*), enquanto que, se a opção for pela sequência A, esta acarreta descontinuidade no que respeita à sequência histórica. Além disso, esta última opção provoca também descontinuidade relativamente ao que os alunos aprenderam no ensino secundário, ao criar um fosso histórico de mais de um século ao "saltar" do conceito de equações indeterminadas para o de espaços vectoriais.

Quando há descontinuidade na sequência histórica, a opção tomada pode ser devida a uma intenção consciente de evitar obstáculos epistemológicos inerentes ao aparecimento e evolução do conceito de *dependência linear*. Esta estratégia é discutível, visto que os obstáculos de origem epistemológica são inerentes ao saber e nem sempre devem ser evitados uma vez que fazem parte do processo de aprendizagem (Brousseau, 1983).

No uso de simbolismo. Uma característica da Álgebra, e em particular da Álgebra Linear, é o recurso sistemático ao uso de formalismo. Este aspecto é referido pelos alunos como um dos obstáculos à aprendizagem (Dorier, 2002; Gonçalves, 2005). A evolução histórica ilustra a necessidade da criação de uma escrita específica da Matemática, embora seja certo que esta formalização levanta questões à aprendizagem. Como sintetizam Davis e Hersh (1995),

> Em matemática os símbolos servem essencialmente para designar com rigor e clareza e para abreviar. (…) A existência do discurso matemático é, na verdade, praticamente impossível sem abreviaturas. (p. 124)
>
> A clareza exige que o significado de cada símbolo e da sequência de símbolos seja perfeitamente definido e inequívoco. (p. 125)

Ponte (2006), por seu turno, refere:

> Por outro lado, o simbolismo acarreta grandes perigos para o processo de ensino-aprendizagem, pois caímos no formalismo quando perdemos de vista o significado do que os símbolos representam e apenas damos atenção aos símbolos e ao modo de os manipular. (p. 14)

No caso particular aqui em estudo, através da análise de conteúdo identificamos aspectos de descontinuidade ligados ao uso e significado de símbolos, no contexto da *colinearidade/dependência linear*, que a existirem, podem levar a que conhecimentos prévios dos alunos se venham a constituir como obstáculos à aprendizagem deste último conceito. Em seguida, destacamos alguns exemplos respeitantes aos conceitos em análise.

Mudança de símbolo. Na abordagem ao tópico *colinearidade*, um dos símbolos, habitualmente, usado para representar um vector (do plano ou do espaço) é constituído por uma letra minúscula do alfabeto latino com uma seta em cima. Por exemplo, $\vec{u}$, representa o vector u. Já na abordagem ao tópico *dependência linear*, as setas são omitidas e, portanto, o vector representa-se apenas pela letra.

Neste exemplo verifica-se o uso de símbolos diferentes para representar o mesmo conceito. A mudança de simbologia coincide com a passagem do ensino não superior para o ensino superior.

Mudança de configuração. Segundo Fritz Schweiger (2007),

> The appearance of symbols is quite typical for mathematical texts. (…) The correct use of mathematical signs follows ‘grammatical’ rules which very often are learned without being taught in explicit way. (…) Many of these rules are rooted in history and follow general semiotic principles (…): similarity of configuration and alphabetic correspondence. (p. 1)

Tal como Schweiger indica para a escrita matemática em geral, também a configuração das expressões matemáticas (e, em particular, a ordem lexicográfica) constitui uma característica da notação em Álgebra Linear. De facto, no ensino não superior são usados, frequentemente, grupos de letras (normalmente, não mais do que quatro) do alfabeto latino por ordem lexicográfica para representar *incógnitas* (por exemplo, x, y, z), *constantes* (por exemplo, a, b, c), vectores (por exemplo, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$), entre outros. No ensino superior, em parte devido a uma maior generalização dos conceitos, a notação preferencial recorre a índices, entre outras simbologias, para além de serem utilizadas estratégias que possibilitam a indicação de que não é possível representar todos os elementos. Por exemplo, $v_1, \ldots, v_n$ é usado para designar um conjunto de n (n um número natural) vectores de um espaço vectorial.

Mudança de significado. Com este sentido, encontramos duas ocorrências diferentes: *colinearidade/dependência linear* e *vector* (livre do plano ou do espaço)/*vector* (elemento de um espaço vectorial). Em ambas, o primeiro conceito pode ser entendido como um caso particular do segundo. Em *colinearidade/dependência linear* são usados termos distintos, enquanto que na segunda situação se usa o mesmo termo. Salienta-se, ainda, que, nos livros de texto analisados, não é feita explicitamente qualquer ligação entre estes termos.

Estas descontinuidades de simbolismo na desejável articulação e conexão entre os temas matemáticos abordados no ensino não superior e, posteriormente, no ensino superior, a existirem podem levar a que conhecimentos prévios dos alunos se venham a constituir obstáculos de origem didáctica.

Tal como é sabido em geral, no caso particular da aprendizagem do conceito de *dependência linear* é necessário entender como ocorre a reorganização intelectual de modo que este novo conhecimento entre em harmonia com os anteriores (colinearidade, vector, entre outros). É nesse momento que as descontinuidades atrás mencionadas (de mudança de símbolo, mudança de configuração e mudança de significado) podem provocar obstáculos de origem didáctica.

No tipo de abordagem (geométrica/algébrica). A introdução ao conceito de *colinearidade* pode ser feita através de uma abordagem algébrica ou geométrica, estando neste último caso intimamente ligado com a noção de paralelismo. Como foi referido na subsecção *quando e como se aborda a colinearidade no ensino não superior*, a abordagem deste tópico insere-se no Tema 1, "Geometria no Plano e no Espaço I", na secção de "Geometria Analítica". Assim, torna-se plausível a abordagem a adoptar na aprendizagem deste conceito no ensino não superior: uma abordagem essencialmente geométrica com uma linguagem algébrica.

No caso do conceito de *dependência linear* a abordagem geométrica só existe para casos muito particulares que coincidem com os estudados no ensino não superior (estudo no plano e no espaço). Como foi detalhado na subsecção *quando e como se aborda a dependência linear no ensino superior*, na disciplina de Álgebra Linear, este conceito é abordado de um modo abstracto, usando uma linguagem algébrica e inserido no tema "Espaços vectoriais". Neste contexto, não existe interpretação geométrica, a não ser quando se particulariza para os casos dos espaços vectoriais reais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (com as operações usuais de adição e multiplicação por um escalar).

Mais uma vez se reconhece uma descontinuidade na abordagem utilizada nos ensinos não superior e superior relativamente aos conceitos aqui referidos. Estamos novamente perante a possibilidade de ocorrência de obstáculos de origem didáctica e também de origem epistemológica. De origem didáctica, ligados às escolhas curriculares para estes dois graus de ensino e de origem epistemológica inerentes à própria natureza dos conceitos envolvidos no tema "Espaços vectoriais".

Existem diversos estudos que sustentam que é discutível a existência, ou não, de vantagens na utilização da geometria no ensino da Álgebra Linear. Por exemplo, Gueudet-Chartier (2004) concluiu que o uso da geometria nos cursos de Álgebra Linear deve ser feito com muito cuidado. Também no nosso estudo de análise documental, este aspecto emerge, uma vez que a ênfase dada à abordagem geométrica no ensino não superior pode vir a causar dificuldades quando se avança para o ensino superior. Por exemplo, uma das conclusões de Gonçalves e Costa (2006b) acerca das dificuldades de aprendizagem dos alunos nos conceitos de "subespaço gerado e conjunto de vectores geradores" foi a seguinte:

> One of the concerns to the geometric approach seems to be connected to the limitation of drawings. The students tend to be limited to the drawing, merely to what they see. (…) It seems that the students are unable to attain a superior level, this concerning the ability of visualizing the concept. The doubt remains if this limitation is related with the fact that this type of approach wasn't mostly encouraged. (Gonçalves & Costa, 2006b, p. 89).

Neste estudo foram identificadas dificuldades, pelos alunos, resultantes do facto de terem recorrido ao apoio de representações geométricas no ensino não superior.

Pontos de reflexão

Após a identificação das descontinuidades atrás referidas, a proposta natural de remediação parece-nos ser contribuir para, tanto quanto possível, as minorar. Neste sentido, seria desejável que:

(i) Nos livros de texto fossem explicitados e tidos em consideração os tópicos matemáticos previamente estudados e associados, quer ao conceito de *colinearidade*, quer ao de *dependência linear*, tal como também defendem Gonçalves e Costa, (2006a) relativamente a outros conceitos de Álgebra Linear:

> Ao ouvir o termo vector, o aluno associará um conjunto de imagens mentais que construiu anteriormente. Era, por isso, importante que os alunos fossem sensibilizados para a relação entre o que já sabem com os novos conceitos. Aproveitava-se algo a que o aluno atribui um certo significado e partia-se para a construção de novos conhecimentos. (p. 291)

(ii) Se procurasse uma uniformização de terminologia e simbologia nos diferentes níveis de escolaridade (no ensino não superior e no ensino superior) e a introdução, ainda que pouco aprofundada, de designações alternativas que, por vezes, só são usadas no ensino superior.

(iii) Se usasse de forma explícita a história da evolução do conceito de *dependência linear* na abordagem, quer do conceito *colinearidade*, quer do de *dependência linear*.

(iv) Se incentivasse o uso, em simultâneo, da abordagem geométrica e da algébrica no ensino e aprendizagem destes conceitos, servindo o estudo relativo aos espaços vectoriais reais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ como ponte de ligação entre o estudo feito no ensino não superior e o a desenvolver no ensino superior (tal como é proposto em alguns livros de texto para o ensino superior).

Conclusão

As ideias apresentadas anteriormente sugerem a necessidade de repensar os programas de modo a minorar descontinuidades, as referidas ou outras, que podem vir a constituir obstáculos à aprendizagem de certos conceitos, em particular, o de *dependência linear*. Dependendo do que se passa a jusante, isto é na fase de aprendizagem dos conceitos, estas descontinuidades poderão ou não emergir.

O estudo efectuado permitiu-nos identificar algumas das razões para as dificuldades, apresentadas pelos alunos, relativas aos conceitos de *colinearidade/dependência linear*. A reflexão efectuada permitiu-nos ainda enumerar alguns pontos que podem constituir-se como pontos de partida para futuros trabalhos de investigação baseados na recolha de dados empíricos.

Notas

1 Utilizamos as informações recolhidas por Gonçalves (2005) para identificação da listagem dos manuais e dos programas indicados para esta disciplina no ano lectivo de 2003/2004 nas universidades públicas portuguesas.

2 A referência completa das obras analisadas encontra-se na bibliografia.

3 No sentido de ilustrar, sem sobrecarregar o texto, a metodologia por nós utilizada na análise dos manuais para o ensino superior, incluímos um exemplo em anexo.

4 Para simplificar a linguagem, passaremos a mencionar apenas espaço vectorial, omitindo a expressão "sobre um corpo".

Referências

Agudo, F. R. Dias (1992). *Introdução à Álgebra Linear e geometria analítica.* Lisboa: Livraria Escolar Editora.

Anton, H., & Rorres, C. (1991). *Elementary linear algebra*. New York: John Wiley & Sons Inc..

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Blyth, T. S., & Robertson, E. F. (1998). *Basic linear algebra*. New York: Springer-Verlag.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4* (2), 236–268.

Calliolli, C. Domingues, R., & Costa, R. C. F. (1991). *Álgebra Linear e aplicações*. São Paulo: A Tua Editora.

Carreira, A., & Pinto, G. (1999). *Cálculo matricial, Volume I — Teoria elementar*. Lisboa: Instituto Piaget.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2007). *Espaço 10 A (Vol. 1), Ensino Secundário, 10º Ano.* Porto: ASA Editores.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Dias, C. J. S. (2006). *Uma reflexão histórico —didáctica sobre o conceito de dependência linear.* Tese de Mestrado não publicada: Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

Dorier, J-Luc. (2000a). *On the teaching of linear algebra.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J-Luc. (2000b). Teaching and learning linear algebra in first year of French Science University. (Retirado em 20/03/2004 de http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html)

Dorier, J-Luc. (2002). Teaching linear algebra at University. In Li Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Matehmaticians*. Vol. III, (pp. 875–884). Pequim (Retirado em 20/03/2004 de http://www.fing.edu.uy/~omargil/gal1/referencias/teachingLA.pdf).

Fraleigh, J. B., & Beauregard, R. A. (1990). *Linear algebra.* Amesterdam: Addison-Wesley.

Giraldes, E, Fernandes, V. H., & Smith, P. M. (1995). *Curso de Álgebra Linear e geometria analítica.* Lisboa: Editora MacGraw-Hill.

Goloviná, L. I. (1980). *Algebra lineal: Algunas de sus aplicaciones.* Madrid: Editorial Mir.

Gonçalves, R. (2005). *Três estudos sobre o ensino e a aprendizagem dos conceitos de subespaço gerado e conjunto de vectores geradores (Contributo para a formação de professores de Matemática)*. Tese de Mestrado não publicada: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Gonçalves, R., & Costa, C. (2006a). Os conceitos de subespaço gerado e de conjunto de vectores geradores na formação de professores de Matemática. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 273–293). Lisboa: SEM-SPCE.

Gonçalves, R., & Costa, C. (2006b). On students difficulties of learning the concepts of generated subspace and spanning set of vectors. *Proceedings of the ICMSE 2006 — Internacional Conference in Mathematics, Sciences and Science Education*, (pp. 83–90). Aveiro.

Greub, W. (1975). *Linear Álgebra*. New York: Springer-Verlag.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry?. *Linear Algebra and its Applications*, *379*, 491–501.

Halmos, P. (1976). *Finite dimensional spaces.* New York: Springer-Verlag.

Jänish, K. (1994). *Álgebra Linear.* New York: Springer-Verlag.

Lang, S. (1966). *Linear algebra.* Amesterdam: Addison-Wesley.

Lang, S. (1987). *Linear algebra (undergraduate texts in Mathematics)*. New York: Springer-Verlag.

Leon, S. (1998). *Álgebra Linear com aplicações.* Rio de Janeiro: LTC.

Luís, G. & Ribeiro, C. S. (1985). *Álgebra Linear.* Lisboa: Editora MacGraw-Hill.

Magalhães, L. T. (1989). *Álgebra Linear como introdução à Matemática aplicada.* Lisboa: Texto Editora.

Mansfield, L. E. (1976). *Linear algebra with geometric applications.* New York: Marcel Dekker.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário (retirado em 27/07/2007 de http://www.dgidc.min-edu.pt/programs/prog_hm.asp).

Ministério da Educação (2001-02). *Matemática A (10.º, 11.º, 12.º anos)*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário (retirado em 27 de Julho de 2007 de http://www.dgidc.min-edu.pt/programs/prog_hm.asp).

Monteiro, A. (2001). *Álgebra Linear e geometria analítica.* Lisboa: Editora McGraw-Hill.

Perry, W. L. (1988). *Elementary linear algebra.* New York: MacGraw-Hill.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5–27). Lisboa: SEM-SPCE.

Queiró, J. F. (2001). *Apontamentos de Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Universidade de Coimbra.

Santos, V. (2003). *Apontamentos de Álgebra Linear e Geometria Analítica I*, Universidade de Aveiro.

Schneider, H. & Barker, G. P. (1989). *Matrices and linear algebra.* New York: Dover Publications.

Schweiger, F. (2007). *The implicit grammar of mathematical symbolism.* Livro de resumos de 5th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education, 19–24 July, Praga.

Sierra, M. et al (1999). Evolución historica del concepto de limite funcional en los libros de texto de bachillerato y C.O.U.: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciências*, *17* (3), 463–476.

Strang, G. (1980). *Linear algebra and its applications*. New York: Academic Press.

Vitória, J., & Lima, T. P. (1998). *Álgebra Linear.* Lisboa: Universidade Aberta.

Anexo

Exemplo da análise de conteúdo efectuada ao manual para o ensino superior *Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica* (Giraldes et al., 1995)

Tratamento descritivo:
No capítulo "Espaços vectoriais" existe um sub-capítulo denominado "Dependência e independência linear" com 16 páginas. Este sub-capítulo aparece posteriormente à introdução dos conceitos de espaço vectorial, de vectores e de escalares, à demonstração de algumas propriedades elementares de espaço vectorial e à apresentação de exemplos de espaço vectorial e exercícios relacionados com esta temática.

Como abordagem ao conceito de dependência linear, os autores começam por introduzir a definição de "vector combinação linear", oferecendo de seguida ao leitor a apresentação de alguns exemplos que o conduzem ao conceito de "combinação linear trivialmente nula" e, também, ao de "combinação linear nula", sendo a primeira um caso particular da segunda. Através de alguns dos exemplos apresentados, é-se conduzido à constatação de que, em qualquer espaço vectorial, o vector nulo é uma combinação linear de quaisquer vectores do espaço e mostra-se que essa combinação linear pode, eventualmente, não ser a trivialmente nula. Segundo os autores, são estes os factos que estão na base dos conceitos de dependência linear e de independência linear. O conceito de "dependência linear" aparece como negação do conceito de "independência linear". A definição é apresentada como se segue:

> Sejam E um espaço vectorial sobre um corpo IK e $x_1, \ldots, x_n$ n vectores de *E*. Diz-se que os vectores $x_1, \ldots, x_n$ são linearmente independentes (ou livres) se a ***única*** combinação linear nula de $x_1, \ldots, x_n$ é a trivialmente nula, i. e., se para quaisquer escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,
>
> $$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$
>
> Os vectores $x_1, \ldots, x_n$ dizem-se linearmente dependentes (ou ligados) se não são linearmente independentes, ou seja, se o vector nulo se pode exprimir como combinação linear de $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes ***não todos nulos***, i. e., se
>
> $$(\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in IK)(\exists i \in \{1, \ldots, n\})(\lambda_i \neq 0 \wedge \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E)."$$

Quanto às notações aqui utilizadas, tem-se que $x_1, \ldots, x_n$ designa um conjunto de n (n um número natural) vectores do espaço vectorial E, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ é usado para designar um conjunto de n (n um número natural) escalares do corpo IK, 0 o escalar "zero" e 0_E representa o vector nulo do espaço vectorial E.

Posteriormente, seguem-se quatro exemplos sobre conjuntos de vectores linearmente independentes ou linearmente dependentes em determinados espaços vectoriais. Os espaços vectoriais contemplados nestes exemplos são o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ (com as operações usuais), o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3[x]$ dos polinómios de grau menor ou igual a três na variável x com coeficientes reais (também com as operações usuais), o espaço ordinário E_O dos segmentos orientados aplicados num ponto O (com a adição definida pela regra do paralelogramo e a multiplicação por um escalar associando ao par $(\lambda, \overrightarrow{OP})$ um vector com a direcção de $\overrightarrow{OP}$, com comprimento igual a $|\lambda|$ vezes o comprimento de $\overrightarrow{OP}$ e com o sentido de $\overrightarrow{OP}$, se $\lambda > 0$, ou o seu contrário, se $\lambda < 0$) e o espaço vectorial real $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (com as operações usuais).

Após a apresentação destes exemplos seguem-se duas observações, tendo a primeira como objectivo principal chamar a atenção para o facto de que, embora na definição de dependência (independência) linear se assuma implicitamente uma ordenação dos vectores considerados, na verdade, tendo em conta a comutatividade generalizada da adição no espaço vectorial, a dependência ou independência linear dos vectores mantém-se, qualquer que seja a ordem pela qual os consideramos. A segunda observação dá-nos conta, primeiramente, de uma condição necessária e suficiente para que um único vector de um espaço vectorial seja um vector linearmente dependente e, em seguida, de uma condição necessária e suficiente para que um conjunto de dois vectores de um espaço vectorial seja um conjunto de vectores linearmente dependentes.

No final do sub-capítulo, consta uma lista de exercícios, a maioria dos quais relacionados com os conceitos de dependência e independência linear. Convém realçar que esta lista de exercícios é precedida por um conjunto de resultados, sob a forma de proposições e teoremas relacionados com dependência ou independência linear de um conjunto de vectores.

Critérios da sequência de aprendizagem adoptada: Esta obra segue a sequência A. O conceito de dependência linear aparece em diferentes momentos e em diferentes enquadramentos. Os momentos diferentes reportam à sua abordagem, quer no sub-capítulo sobre dependência e independência linear, quer no sub-capítulo sobre conjuntos de vectores geradores, quer ainda no sub-capítulo sobre os conceitos de base e de dimensão. Nesta obra o conceito de dependência linear precede o de base.

A abordagem ao conceito em estudo é iniciada com a definição de combinação linear de vectores, pelo que a esquematização da apresentação da informação está presente na sequência: Definição → Exemplos → Observações → Teoremas → Exercícios.

No desenvolvimento do conceito de dependência linear aqui apresentado não existe qualquer referência directa ao conceito de colinearidade. O tipo de linguagem usada na definição de dependência linear é, essencialmente, verbal e simbólica. No corpo do texto e nos exemplos, o termo vector é usado com dois sentidos diferentes e com duas notações diferentes ("com seta" para os elementos do espaço ordinário E_O e "sem seta" para os elementos de um espaço vectorial genérico). Existe apenas uma representação geométrica aquando da apresentação do exemplo relativo ao espaço ordinário E_O.

Resumo. O conceito de *dependência linear* é uma constante nos conteúdos programáticos da disciplina de Álgebra Linear do 1.º ano de diversas licenciaturas nas universidades públicas portuguesas. Trata-se de um conceito onde os alunos apresentam, habitualmente, dificuldades de aprendizagem. Neste artigo, procuramos perceber algumas das razões dessas dificuldades ao identificarmos várias descontinuidades na ligação entre o conceito de *colinearidade* (abordado no ensino não superior) e o de *dependência linear* (abordado no ensino superior). Classificamos essas descontinuidades em: de sequência histórica, de simbolismo e de abordagem (geométrica/algébrica).

Palavras-chave: Ensino da Álgebra Linear; Dependência linear; Colinearidade; Dificuldades dos alunos; Ensino secundário.

Abstract. The notion of *linear dependence* of vectors is one of the contents of the Linear Algebra syllabus introduced in the first university year in Portugal. It is well known that the students find this notion difficult. In this paper we present some reasons that justify those difficulties through the identification of some disconnections between the notion of *colinearidade* taught at secondary school and the notion of *linear dependence* of vectors in first university year. We classify those disconnections in: historic sequence, symbolic and approach.

Keywords: Teaching of Linear Algebra; Linear dependence; Colinearidade; Students difficulties; Secondary school.

■ ■ ■

CECÍLIA COSTA
Departamento de Matemática
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
UIMA – Unidade de Investigação Matemática e Aplicações (GHM) da Universidade de Aveiro.
mcosta@utad.pt

PAULA CATARINO
Departamento de Matemática
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
UIMA – Unidade de Investigação Matemática e Aplicações (GAG) da Universidade de Aveiro.
pcatarin@utad.pt