Proporcionalidade directa como função: da perfeição à realidade a bordo de um *robot*

Rui Oliveira[1]
Escola EB 2,3 / S Alfândega da Fé

Elsa Fernandes[2]
Universidade da Madeira

Eduardo Fermé[3]
Universidade da Madeira

Introdução

A preocupação com o problema do insucesso escolar tem originado uma constante e progressiva abordagem do tema pelos vários intervenientes e responsáveis pela Educação. Realizam-se investigações e reflexões a fim de compreender o processo de ensino/aprendizagem da Matemática em todas as suas vertentes, procurando-se novas metodologias e experiências educativas que promovam o desenvolvimento das competências definidas para a disciplina.

Neste sentido, tem sido fortemente incentivada a implementação e exploração das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), na sala de aula de Matemática. Desde a implementação dos programas de 1991, que admitem e incentivam o uso das TIC na aula de Matemática, têm sido realizados trabalhos de investigação cujo foco é o ensino/aprendizagem da Matemática utilizando as TIC (e.g. Carreira, 1992; Jorge, 1994; Fernandes, 1997; Piteira, 2001).

Vivemos num mundo cada vez mais informatizado e dependente das novas tecnologias de informação. Torna-se vital a valorização de novos objectivos educacionais e a redefinição dos processos de ensino e modos de actuação dos professores. É neste contexto que surge a utilização dos *robots* na aprendizagem da Matemática. A sua utilização como elemento mediador da aprendizagem apresenta-se como um novo desafio pedagógico que, além de permitir aos alunos desenvolverem as competências previstas para a disciplina no ensino básico, poderá aumentar o seu interesse e motivação para a Matemática, demonstrando-lhes a sua importância e permitindo-lhes apreciar a sua aplicabilidade. Assim, neste enquadramento, é pertinente realizar um estudo com o intuito de averiguar as potencialidades desta ferramenta para a aprendizagem da Matemática.

Esta investigação[4] tem como objectivo descrever, analisar e compreender o modo como os alunos aprendem Matemática tendo os *robots* como elementos mediadores da aprendizagem. Foram formuladas quatro questões que nortearam o estudo:

1. Qual o papel dos *robots* na resolução de problemas matemáticos envolvendo funções?
2. Como é que os alunos aprendem funções (no 8º ano) utilizando os *robots*?
3. Como é que os *robots* podem ajudar a desenvolver a representação de saberes matemáticos?
4. Qual o papel dos *robots* no desenvolvimento de competência matemática nos alunos?

Neste artigo, discutiremos a contribuição dos *robots* para a aprendizagem da Matemática, nomeadamente das funções de proporcionalidade directa.

Tecnologias na aula de matemática

As primeiras experiências de utilização de novas tecnologias no ensino da Matemática remontam aos anos 60 e o uso das calculadoras na aula de Matemática surgiu na década de 70, originando um grande debate sobre o seu papel no ensino da Matemática. Durante os anos 80 assistiu-se ao crescimento acentuado da introdução e exploração do uso do computador no ensino da Matemática e, no final dessa década, as novas tecnologias entram "de um modo mais directo" nas aulas da disciplina (Ponte & Canavarro, 1997).

Numa fase inicial, toda a aplicação da Matemática através do uso do computador era realizado por programação. Os alunos eram envolvidos na escrita de programas, supondo-se que isto lhes permitia aprofundar a compreensão dos conteúdos matemáticos subjacentes (Fey, 1991). Apesar de reconhecer que os estudos até então realizados não indicariam todas a vantagens da programação, Fey (1991) registou alguns aspectos positivos decorrentes da sua utilização. O autor considera que a aquisição da destreza de programação poderá desenvolver hábitos mentais úteis em diversos aspectos relacionados com a aprendizagem da Matemática: os alunos *programadores* poderão utilizar abordagens mais activas e sistemáticas na resolução de problemas e, mais frequentemente, corrigir os erros e verificar as potenciais soluções; implícito à aplicação do poder de programação, está a importância dos alunos de Matemática esboçarem algoritmos adequados, aprenderem algoritmos eficazes para a resolução de problemas e desenvolverem uma capacidade mais geral para criar soluções algorítmicas para problemas novos. Estas ideias são defendidas por Ponte (1997) que afirma que a aprendizagem da programação, independentemente da linguagem usada (dado tratar-se de um meio e não um fim) e desde que convenientemente dirigida, favorece uma atitude positiva face ao erro e um espírito sistemático no processo de detecção de erros e consequente aperfeiçoamento do conhecimento, ganhando "consciência do carácter relativo, transitório e sempre susceptível de aperfeiçoamento do nosso conhecimento" (p. 85). Salienta, também, o carácter organizado desse tipo de actividades que necessita da elaboração de planos e da sucessiva decomposição do problema em problemas menores, até atingir o estádio de tarefa de resolução relativamente simples.

Um dos exemplos mais conhecidos é a linguagem de programação LOGO objectivamente criada para a exploração de determinados tópicos disciplinares. Desenvolvida por Seymourt Papert e por pesquisadores do MIT, no final da década de 60, pretendia ser um meio para a concretização de projectos e de objectivos educacionais que não visavam a aprendizagem da programação (Chella, 2002; Ponte & Canavarro, 1997). O LOGO apresentava uma com os utilizadores baseada na metáfora de movimentação de uma pequena tartaruga. Esta linguagem poderia ser usada para resolver problemas de diversas índoles, nomeadamente relacionados com a simulação de processos físicos, ou biológicos (Ponte & Canavarro, 1997). Ao programar a tartaruga, os alunos estavam a aprender "a exercer controlo sobre um micro mundo excepcionalmente rico e sofisticado" (Ponte, 1997, p. 84).

Papert (em Ponte & Canavarro, 1997) defende esta abordagem de utilização do computador salientando que favorece um "tipo de aprendizagem natural em ambiente não escolar" (p. 32) e apela à participação activa dos alunos. Também destaca o papel que o computador poderá desempenhar no pensamento das pessoas, não por lhes fazer surgir conhecimento, de forma pronta a usar, mas como factor de confiança e motivação, levando os alunos a sentirem-se capazes de realizações anteriormente consideradas muito difíceis ou impossíveis (Ponte, 1997). Outro aspecto positivo decorrente da sua utilização é o processo de aperfeiçoamento sucessivo de um programa. De facto, constatou-se que este processo leva a uma melhoria da relação dos alunos com a disciplina de Matemática e cria maior disposição para a sua aprendizagem (Ponte & Canavarro, 1997).

Mais tarde, com o surgimento de programas de índole geral, como as folhas de cálculo e os programas de desenho assistido, e a criação de *softwares* com fins educativos, esmoreceu o interesse pela programação. Apareceram os programas tutoriais e os programas de prática, entre outros. Os primeiros visam a explicação de novos conteúdos e conhecimentos através da apresentação sucessiva de ecrãs segundo uma sequência preestabelecida, em que o aluno avança de acordo com o seu próprio ritmo. Os segundos visam o treino dos alunos na resolução repetitiva de exercícios subordinados a determinado conteúdo (Ponte & Canavarro, 1997; Ponte, 1997). Os resultados das investigações mostraram que este tipo de programas tinha um reduzido valor educacional, muito por culpa da posição passiva e dependente que os alunos mantêm na sua utilização, quando se pretenderia que assumissem a *responsabilidade* pela sua aprendizagem (Ponte, 1997).

Os últimos 25 anos foram ricos em contribuições para a compreensão e análise do uso das tecnologias na aula de Matemática. Carreira (1992) conduziu uma investigação com alunos do 10.º ano sobre o estudo da trigonometria realizado num contexto de aplicação e modelação de situações do mundo real usando a folha de cálculo; Jorge (1994) realizou uma investigação sobre o computador e a educação matemática abordando o conteúdo das sucessões do 11.º ano de escolaridade; Fernandes (1997) levou a cabo uma investigação com alunos do 12.º ano sobre os processos de aprendizagem do conceito de derivada em contextos computacionais. Piteira (2001) realizou um estudo cujo foco é a aprendizagem da Geometria, onde os alunos trabalham em ambiente dinâmico de Geometria dinâmica (ADGD), nas aulas de Matemática. Porventura, as aplicações mais usuais das tecnologias na aula de Matemática são ao nível do cálculo e das funções que estará associado à tecnologia mais desenvolvida e comum nas escolas. As calculadoras gráficas e os computadores com *software* de manuseamento de funções (parâmetros e desenho de gráficos) podem ter um papel importante no estudo das funções. Por exemplo, a sobreposição de gráficos de várias funções facilmente realizados com uma calculadora gráfica ou computador possibilita o estudo da influência dos diversos parâmetros numa família de funções. Também relacionado com as funções, mas não exclusiva deste conteúdo, está uma das principais vantagens associadas ao uso das tecnologias: as representações. Segundo Fey (1991), uma das grandes potencialidades dos computadores reside na facilidade em passar de uma forma de representação de informação para outra, enquanto se procura a compreensão conceptual de um problema e da sua solução. Esta perspectiva é, também, partilhada por Matos et al. (1994):

> O papel das novas tecnologias, e em particular do computador, na construção e exploração de modelos matemáticos passa naturalmente pelas potencialidades de manipulação de múltiplas representações matemáticas e simbólicas que advêm da introdução de tais ferramentas. (p. 9)

A utilização das tecnologias também permite aos professores de Matemática diversificarem as actividades que sugerem aos alunos. Estas podem contribuir fortemente para uma abordagem investigativa na aprendizagem da Matemática, isto é, para a realização de investigações e explorações que implicam o desenvolvimento da capacidade de observação, do espírito crítico, a formulação e teste de conjecturas, a criação de argumentos convincentes e o desenvolvimento do raciocínio matemático (Ponte & Canavarro, 1997). A tecnologia aumenta o alcance e a qualidade das investigações porque providência meios de visualização de ideias matemáticas de múltiplas perspectivas (NCTM, 2000). A resolução de problemas também é favorecida pelo uso de tecnologias dado que proporcionam novas estratégias de resolução e permitem a abordagem de problemas com maior complexidade, isto é, de mais e melhores problemas realistas e relevantes, capazes de estimular o interesse dos alunos pela Matemática (Matos, Carreira, Santos & Amorim, 1994; Ponte, 1997; Ponte & Canavarro, 1997). Da mesma forma, a simulação e modelação são aspectos importantes da utilização das tecnologias. Os alunos são encorajados a fazer, testar, conjecturar, criar e avaliar modelos matemáticos, experimentando uma actividade matemática muito próxima da dos matemáticos (Carreira, 1992; Fey, 1991). Contudo, as simulações e a modelação não devem substituir o estudo experimental (Ponte, 1997).

As tecnologias de informação e comunicação têm, geralmente, grande utilidade no desenvolvimento de trabalhos de projecto, funcionando como instrumento de apoio (elaboração de textos, realização de gráficos, etc.) ou mesmo de ferramenta principal se o objectivo do projecto passar, por exemplo, pelo desenvolvimento e aperfeiçoamento de um programa (Ponte, 1997). A utilização de tecnologias favorece a criação de novas dinâmicas na sala de aula, de ambientes de trabalho que estimulam a discussão e a partilha de ideias que incentivam a formulação de conjecturas e a comunicação matemática (oral e escrita), nomeadamente através do tipo de dados e de argumentos usados pelos alunos, assim como a sua capacidade crítica perante argumentos alheios (Ponte & Canavarro, 1997).

O uso eficiente da tecnologia nas aulas de Matemática depende maioritariamente do professor que deverá criar actividades matemáticas que tirem partido das vantagens do que a tecnologia faz bem e de forma eficiente (NCTM, 2000). No entanto, a tecnologia não pode substituir o professor de Matemática, nem tão pouco pode ser usada como uma substituição para compreensões básicas e intuições, e caberá sempre ao professor a importante decisão sobre quando e como usar tecnologia, assegurando-se que a sua utilização está a contribuir para o desenvolvimento e aperfeiçoamento do pensamento matemático dos alunos (NCTM, 2000; Ponte 1997).

Segundo o *Princípio da Tecnologia* estabelecido pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (2000), os alunos podem aprender mais e mais profundamente Matemática com o uso apropriado e responsável de tecnologia. Esta influencia o modo como a Matemática é ensinada e aprendida, assim como o que é ensinado e quando, atendendo a que os alunos podem debruçar-se sobre assuntos mais gerais, formular e testar conjecturas e modelar e resolver problemas mais complexos anteriormente inacessíveis para eles, trabalhando a níveis de generalização e abstracção mais elevados (NCTM, 2000). A tecnologia, para além de dar aos alunos a possibilidade e o poder necessário para resolver problemas mais difíceis, também permite relacionar de forma mais intuitiva os vários domínios da Matemática, como a Geometria, a Álgebra, a Estatística e as situações reais e seus correspondentes modelos matemáticos (Ponte, 1992).

A evolução tecnológica é vertiginosa e assoberba o nosso dia-a-dia com máquinas cada vez mais poderosas e de simples utilização que devidamente aproveitadas abrem novas possibilidades metodológicas, permitindo novas abordagens dos conteúdos curriculares. Os *robots* são um dos, ou mais recentes, exemplos dessa capacidade.

***Robots* no ensino de matemática**

Seymour Papert usou o trabalho de Piaget como fundamentação para o desenvolvimento da linguagem de programação LOGO. Na segunda metade da década de 80, decorrente de uma parceria que o MIT realizou com a *Lego*, aos conjuntos de construção da *Lego* foram acrescentados motores e sensores que permitiram aos alunos a construção de modelos cibernéticos que poderiam ser programados utilizando a linguagem LOGO (Zilli, 2004). Posteriormente, surgiu o *software Robolab*, seguindo-se a linguagem *RCX Code* incorporada nos *robots Robotics Invention System*™ 2.0 que não exige ao professor e aos alunos conhecimentos profundos de programação e é facilmente adaptável a vários níveis educativos.

Colorado (2003) realizou um trabalho de investigação sobre ambientes de aprendizagem com robótica pedagógica, prevendo três níveis estratégicos diferentes: criação e desenvolvimento de clubes de robótica; inserção da robótica na área da tecnologia e informática; e o desenvolvimento de uma experiência específica na área da Matemática.

No que diz respeito a este último nível, Colorado refere que o principal aspecto a destacar relaciona-se com as evidentes dificuldades que os professores encontraram para expressar conhecimentos teóricos através de aplicações práticas e concretas. Esta autora conclui que o seu estudo permitiu constatar que o uso da robótica desafia os docentes a repensar os seus modelos pedagógicos, favorece a integração de conhecimentos e ajuda a desmistificar o uso de tecnologias de ponta, valorizando-a como recurso de ensino/aprendizagem.

Outro projecto que utilizou a robótica para aprendizagem das Ciências foi o *World-Class Maths and Science* (Knudsen, 2000) desenvolvido na região de Copenhaga. Tratou-se de um projecto para um laboratório de aprendizagem com o intuito de desenvolver, testar e aplicar novos métodos e experiências de ensino e aprendizagem. Pretendia identificar novos conceitos em educação e flexibilizar os métodos de ensino a fim de melhorar, a um nível geral, a aprendizagem e as normas de aprendizagem, de modo que todos os alunos fossem capazes de compreender Matemática e Ciências e assim aumentar o seu grau de proficiência. Visava, assim, aumentar o interesse dos jovens pela ciência, e em particular, pelas disciplinas de Matemática, Química e Física, pretendendo colmatar as falhas no ensino destas ciências. Entre outras iniciativas, propôs a utilização de equipamento experimental da *Lego MindStorms (Robolab)* para o desenvolvimento de trabalhos em grupo. Pretendia-se testar até que ponto estes materiais contribuem para que os alunos executem experiências, realizem testes e estudos, tendo por base as próprias ideias e hipóteses, e de que modo promovem a assimilação de estratégias de resolução de problemas.

O projecto *Driving Math* (Limkilde, 2000) aplicou o *Mindstorms for Schools* nas aulas de Matemática. A ideia de utilização dos *robots* surgiu quando o autor decidiu introduzir o tópico de algoritmos. Esta utilização decorreu em quatro *pequenos* projectos em que os alunos teriam de construir um modelo robótico, o mais adequado possível à tarefa em questão, e proceder à programação, tendo sempre subjacentes importantes conceitos matemáticos. O tempo para a realização destes projectos era limitado e terminavam com a apresentação dos resultados. Conforme se avançava nos projectos, aumentava a sua dificuldade e a complexidade dos conceitos matemáticos envolvidos, assim como a exigência das respostas. No primeiro projecto proposto, os alunos tinham que explicar o programa e o algoritmo realizado, enquanto que no quarto projecto era pretendido que os alunos apresentassem um esboço do *robot* e do respectivo algoritmo e uma explicação completa de como é que o *robot* por estes proposto resolveria o problema apresentado. (Limkilde, 2000).

Segundo Limkilde (2000), o ambiente das aulas era caracterizado pelo desafio, competição, planeamento estratégico, surpresa, compromisso, criatividade e uma forte concentração, principalmente nos resultados. Estes projectos permitiram criar situações que originaram um sentido de competição, de grande envolvimento e motivação dos alunos.

Chella (2002) desenvolveu um projecto de Ambiente de Robótica Educacional (ARE) com LOGO para professores do ensino fundamental[5]. Os alunos trabalharam em projectos relacionados com conteúdos das disciplinas que leccionavam: Matemática, História, Geografia, etc. Alguns deles propiciaram a exploração de conceitos de Física e Matemática. A aplicação do ARE com os alunos-professores demonstrou a possibilidade de trabalhar concretamente e de forma contextualizada os diversos conceitos utilizados nas práticas da sala de aula.

Aprendizagem das funções

O NCTM (1991) considera que o conceito de função é uma importante ideia unificadora na Matemática. As recomendações referentes à importância e ênfase a dar a este conceito estendem-se pela história do ensino da Matemática do século passado, e são acompanhadas por indicações metodológicas relativas ao modo como deve ser ensinado (Wilson, 1991). De facto, dada a complexidade do conceito de função, o seu ensino não pode ser encarado de uma forma simplista e leviana.

A evolução das definições do conceito de função está intimamente relacionada com os modos de representação das funções: numérica, gráfica e algébrica. Ao iniciar-se, com os alunos, o estudo do tema, é fundamental ter-se em conta estes diferentes modos. No início do século XX, as recomendações para o ensino do conceito de função passavam pelo uso de situações reais com o intuito de o introduzir informalmente. Posteriormente, a meio do século, as recomendações indicavam a abordagem das funções como conjuntos de pares ordenados ou correspondências arbitrárias entre conjuntos, ou seja, a instrução inicial acerca de funções deveria decorrer dentro de uma estrutura matemática formal (Wilson, 1991).

Segundo Ponte (1992), o ensino das funções deve articular, de forma equilibrada, as suas três formas de representação. Seria uma má interpretação da importância histórica das representações analíticas e geométricas de função permitir subestimar o papel dos aspectos numéricos na sua aprendizagem, pois nas situações do mundo real, valores numéricos concretos estão subjacentes às expressões analíticas e às curvas geométricas. A este facto acresce as dificuldades que os alunos demonstram em trabalhar com gráficos cartesianos e expressões algébricas, corroboradas por estudos que confirmam que os alunos, perante a necessidade de interpretar relações funcionais representadas graficamente, habitualmente recorrem a estratégias e processos de raciocínio numéricos (Ponte, 1992).

As recentes tendências sugerem que se inicie o estudo das funções de um modo fortemente intuitivo e informal, adiando-se a introdução do conceito centrada na teoria dos conjuntos. Essa abordagem informal inicial passa pela exploração e representação de situações reais, concretas, através de gráficos e tabelas de valores (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Também Ponte (1992) se refere à importância do estudo de características das funções a partir dos seus gráficos cartesianos, onde ideias e outros conceitos como a variação (crescimento, decrescimento, etc.) ou a variação na variação (continuidade, descontinuidade, etc.) serão compreendidos de uma forma mais significativa por parte dos alunos.

Na sequência da integração equilibrada das diferentes formas de representação de uma função, proposta por Ponte (1992), o trabalho com as expressões analíticas não perde importância, pois, mais do que conseguir manipular correctamente expressões algébricas é, certamente, fundamental que se compreenda o significado dessas expressões em situações concretas, de preferência reais.

Outro aspecto essencial relativo às diversas representações é o estabelecimento de relações entre elas. A aprendizagem das funções deverá contemplar o estabelecimento e compreensão de relações entre vários tipos de representação matemática — tabelas de valores (dados numéricos), gráficos e expressões algébricas — dado que "ajuda os alunos a desenvolver diversos tipos de conexões e a compreender o conceito de função" (Abrantes et al., 1999, p. 118), aspectos importantes da competência matemática que interessa desenvolver.

As mais recentes recomendações educacionais assentam em considerações sobre o processo cognitivo dos alunos na construção dos conceitos sobre funções. Uma das abordagens propostas para o conceito de função é a teoria da reificação de Sfard (1989, em Fernandes, 1997; Mourão, 2002). Sfard considera que é possível observar duas formas diferentes de pensamento matemático na origem de grande parte dos conceitos matemáticos: uma concepção *operacional*, em que os conceitos são concebidos como um produto de certos processos ou são identificados com os próprios processos, e uma concepção *estrutural* em que as "noções matemáticas são tratadas como se se referissem a entidades como objectos reais, como estruturas estáticas permanentes que podem ser manipuladas e combinadas em estruturas mais complexas" (Mourão, 2002, p. 275). Segundo este modelo de desenvolvimento conceptual, a concepção operacional é a primeira a aparecer e é ela que permite depois, através da reificação dos processos, o desenvolvimento dos objectos matemáticos.

Na concepção operacional, os alunos pensam nos processos computacionais (cálculos algébricos) associados às funções, e na concepção estrutural pensam no conceito como um objecto. Este é um processo de desenvolvimento longo e difícil que decorre em três fases:

- Interiorização — os processos são realizados em objectos matemáticos elementares e previamente conhecidos, como, por exemplo, as manipulações algébricas; nesta etapa os alunos aprendem a noção de variável e adquirem "a capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável dependente" (Sfard, 1991, p. 19, em Mourão, 2002, p. 284);

- Condensação — os processos anteriores são transformadas em unidades compactas, daí emergindo em entidades independentes e de fácil manipulação; os alunos serão capazes de pensar num processo como um todo em termos de informação inicial e resultado final (*input-output*); nesta fase, os progressos dos alunos traduzem-se na facilidade em trabalhar com correspondências como um todo sem olhar para valores específicos, e estes poderão ser capaz de investigar funções, desenhar gráficos de funções e combinar pares de funções;

- Reificação — é alcançada uma aptidão para ver as novas entidades como objectos permanentes por direito próprio; os alunos reificaram o conceito de função quando compreenderem plenamente as diversas representações de uma função, alternando entre elas se necessário, quando resolverem equações funcionais, e quando revelarem "capacidade de falar acerca de propriedades gerais de diferentes processos realizados com funções (tais como composição ou inversão) e pelo derradeiro reconhecimento de que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções" (Sfard, 1991, p. 20, em Mourão, 2002, p. 285).

Mourão (2002) resume algumas dificuldades apontadas por Sfard como indicadores da não reificação do conceito de função, por parte dos alunos: a concepção de função como um processo e não como uma construção estática, as dificuldades em lidar com a função constante, a relutância em aceitar "correspondências arbitrárias" como funções e a tendência para identificar o conceito com uma das suas representações.

Percebe-se que as recomendações pedagógicas são no sentido de não definir função como um conjunto de pares ordenados (Mourão, 2002; Wilson, 1991; Ponte, 1992). Esta definição enfatiza uma perspectiva algébrica que, apesar de ser parte importante do estudo das funções, não é um apoio "sustentável para produzir uma teoria matemática elementar acessível, rica em resultados interessantes e em aplicações significativas" (Ponte, 1992, p. 8). Geralmente, nas aulas de Matemática, os professores sobrevalorizam a importância da manipulação algébrica que, no entanto, não é suficiente para resolver problemas reais. Sfard e Wilson (1991) indicam a ideia de dependência entre variáveis como a abordagem mais indicada para o início do estudo das funções e posterior definição do conceito.

Ponte (1992) defende a apresentação das funções como correspondências entre conjuntos numéricos, usando exemplos em que existe uma expressão analítica ou uma regra simples, e que não se deve dar demasiada importância ao facto de alguns alunos associarem o conceito de função ao de expressão analítica. Segundo Ponte (1992), as funções numéricas destacam-se pela simples e intuitiva representação geométrica e são úteis para descrever muitos tipos de situações diferentes, permitindo aos estudantes trabalhar a partir de uma base de conhecimento prévio e em representações variadas de situações com que já estão habituados.

O estudo das funções deverá ser iniciado de uma forma intuitiva e informal, prestando-se para tal a exploração de situações reais e concretas representadas em gráficos e tabelas de valores (numericamente). Os alunos deverão ter a oportunidade de reflectir e discutir sobre problemas significativos, reais, e elaborar estratégias adequadas para a sua resolução, usando processos como a modelação ou outros similares. Não podemos ignorar que a evolução da Matemática e, em particular, do conceito de função esteve intimamente ligada à resolução de problemas físicos, e que, assim, sempre que possível e com grau de dificuldade adequados, será importante que os alunos também os resolvam tendo em vista a sua construção do conceito.

O conceito de mediação

No contexto deste trabalho de investigação, a sala de aula de Matemática foi encarada como um sistema de actividade, no sentido de Engeström (1999). O sujeito faz parte de um colectivo e, como tal, não age individualmente no mundo que o rodeia. O sujeito faz parte de um sistema de relações sociais. Engeström conceptualiza um modelo de actividade formado por três elementos — o sujeito, o objecto e a comunidade — com relações de mediação entre eles.

O conceito de mediação desempenha um papel central na *Teoria da Actividade*[6]. Assenta no pressuposto de que o sujeito não age directamente com o meio ambiente, não tem acesso directo aos objectos. A relação entre aquele e um objecto do ambiente é mediada por artefactos (Wertsch, 1991). Os artefactos podem ser instrumentos, signos, linguagem, sistemas de contagem, técnicas mnemónicas, sistemas algébricos, diagramas, mapas que, entre outros, medeiam a actividade e são construídos pelas pessoas e existem numa relação dialéctica entre as pessoas e a actividade (Wertsch, 1991).

Dizer que uma ferramenta, e/ou um artefacto, é mediador significa que ela dá poder no processo de transformação dos objectos, ou seja, que o torna significativo, que é algo com o qual a pessoa pensa (Piteira & Matos, 2000).

Os *robots* podem ser artefactos mediadores da aprendizagem das funções. De facto, foram-no no contexto da investigação desenvolvida, como procuraremos fundamentar, mais à frente, neste artigo.

Metodologia

A metodologia de investigação adoptada, no estudo em que este artigo se baseia, para recolha e análise dos dados é de natureza qualitativa e de índole interpretativa "que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais" (Bogdan & Bicklen, 1994, p. 11). O principal objectivo de uma investigação qualitativa é compreender o comportamento e experiências humanas.

Na investigação qualitativa procede-se à recolha de dados, designados de qualitativos, constituídos por pormenores descritivos que visam a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação. A abordagem assume um forte cunho descritivo e interpretativo. Os dados e as provas não são recolhidos com o intuito de confirmar ou infirmar hipóteses determinadas à priori, pois as abstracções só são construídas à medida que se recolhem e agrupam os dados particulares (Bogdan & Biklen, 1994).

Participantes

A parte empírica desta investigação realizou-se no ano lectivo de 2005/06 numa escola do ensino básico do 2.º e 3.º ciclos da zona oeste da Região autónoma da Madeira. Todos os alunos eram provenientes da localidade onde se insere a escola.

As tarefas foram desenvolvidas em duas turmas do 8.º ano de escolaridade. Esta escolha decorreu do facto do investigador desempenhar as funções de professor de Matemática destes alunos pelo segundo ano consecutivo e de ser o director de turma de uma das turmas em questão. Estas circunstâncias proporcionaram um conhecimento e confiança mais aprofundados das duas partes. Uma turma era composta por 19 alunos e a outra era constituída por 16 alunos.

Materiais utilizados

Nas tarefas elaboradas e usadas nas aulas da unidade didáctica de funções (que serviram de campo empírico desta investigação) foram usados alguns materiais: fitas métricas, cartolinas, tabuleiros (especificamente elaborados) e *robots*. Considerando o papel central que os *robots* desempenharam nessas propostas de trabalho, interessa apresentá-los e descrever as suas principais características e potencialidades.

Os modelos robóticos usados nas tarefas, como é o caso do *Tanque*[7] (figura 1) e do *Todo-o-terreno* (figura 2), foram construídos com kits de montagem de *robots* da série *Robotics Invention System*™ 2.0 da *Lego Mindstorm*™.

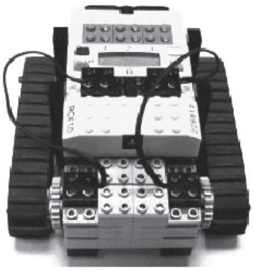


Figura 1 — *Tanque* (*Tankbot*)

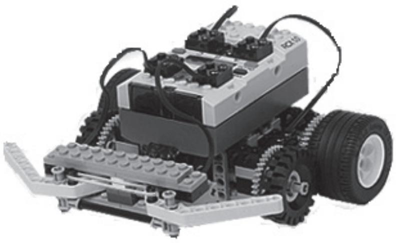


Figura 2 — *Todo-o-terreno* (*Roverbot*)

Os *robots Lego Mindstorm* consistem basicamente num bloco designado por RCX — *Robotics Command System* ou *tijolo*, o qual constitui o *cérebro* do *robot*. O tijolo pode armazenar até 5 programas diferentes. Ao tijolo podem ser conectados sensores (no nosso caso, de toque e luz), para percepcionar o ambiente, e motores que lhe permitem agir sobre ele (figura 3). Os restantes componentes do *robot* são peças *Lego*®.

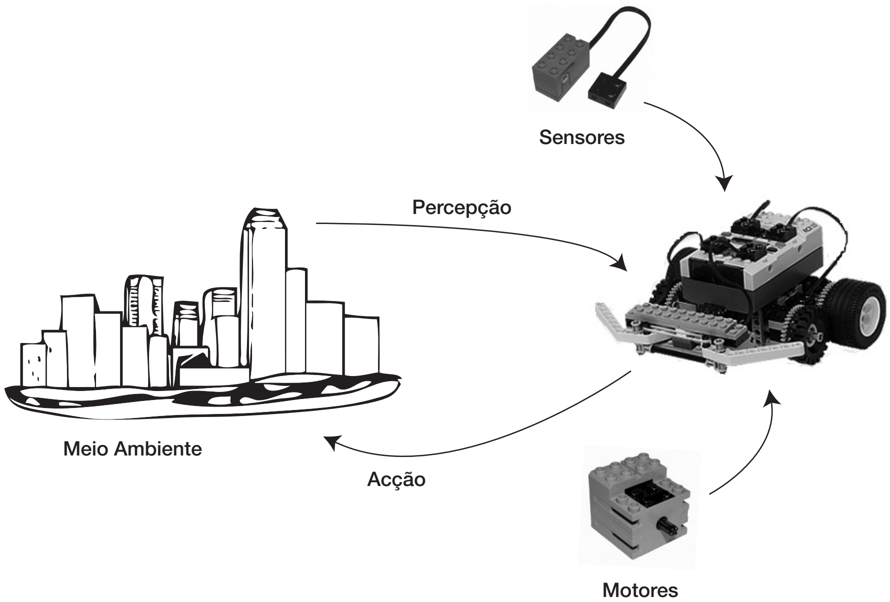


Figura 3 — RCX – *Robotics Command System*

Os programas são construídos com o *software* da *Robotics Invention System*™ 2.0 (figura 4) na linguagem de programação *RCX Code*. A interface permite programar a partir de blocos de instruções ao *robot* (avançar, recuar, etc.) e de sequências de controlo (*If*, *Repeat*). O *software* de programação é de fácil instalação e manuseamento, não sendo necessário que os alunos possuam noções de programação para poderem construir algoritmos na resolução dos problemas.

Após a elaboração do programa pretendido é possível descarregá-lo no *robot* através de uma torre de infravermelhos. A execução do programa pode ser iniciada e terminada no próprio RCX ou a partir do ambiente de programação.

Tarefas

Atendendo aos propósitos delineados para a investigação, foram propostas cinco tarefas, construídas tendo em mente diversos objectivos explicitados em seguida:

Tarefa 0 — Relembrar os conceitos essenciais para a iniciação do estudo das funções.

Tarefa 1 — Orientar, fundamentalmente, os alunos para a descoberta da noção de função a partir de uma situação de leitura e interpretação de gráficos.

Tarefa 2 — Possibilitar o contacto com diferentes formas de representação de uma função.

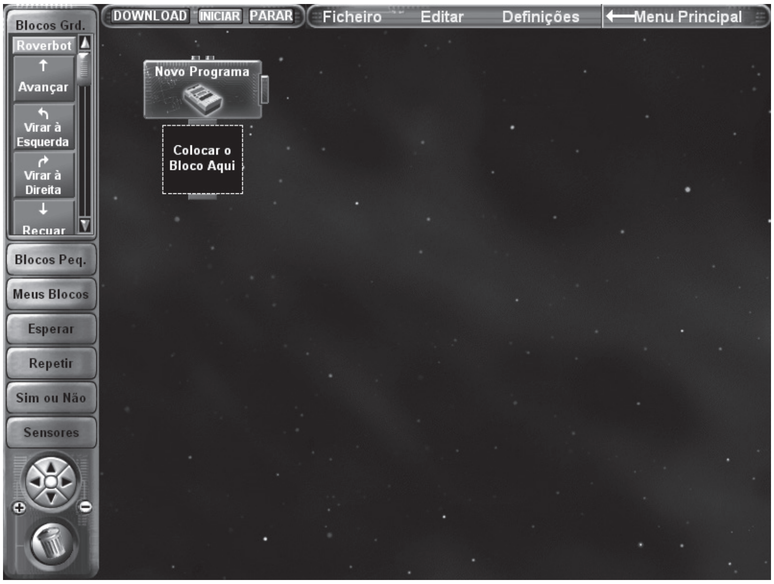


Figura 4 — Ambiente de programação *Robotics Invention System™ 2.0*

Tarefa 3 — Possibilitar o estudo das funções de proporcionalidade directa e consequentemente a definição de função linear.

Tarefa 4 — Permitir a interpretação e construção de tabelas e gráficos relativos a famílias de função afim.

As aulas em que as tarefas foram realizadas decorreram durante o segundo período, mais concretamente nos meses de Janeiro e Fevereiro. Toda a unidade didáctica — Funções, 8.º ano — foi trabalhada utilizando os *robots* e uma metodologia de trabalho centrada no aluno.

A recolha de dados

Uma das principais preocupações na definição da metodologia de investigação é a obtenção de um conjunto de dados que permita o aparecimento de conclusões fundamentadas acerca do problema em estudo. Assim, a recolha de dados foi efectuada através de: (1) Registos escritos feitos pelo investigador a partir da observação realizada durante as aulas; (2) Registos vídeo e áudio de dois grupos de trabalho escolhidos aleatoriamente em cada proposta de trabalho; (3) Recolha e análise dos trabalhos escritos de todos os alunos (propostas de resolução das tarefas de cada um dos grupos, relatório da segunda tarefa e testes de avaliação); (4) Um inquérito aplicado a alguns alunos depois da realização das tarefas.

No decorrer das aulas, foram efectuados registos áudio e vídeo, de dois grupos de trabalho, que posteriormente foram transcritos e analisados. A selecção dos grupos observados era aleatória e apenas se mantinham caso se tratasse de aulas referentes à mesma tarefa.

Durante a realização das tarefas, foi solicitado aos alunos que registassem as suas respostas, dúvidas e conclusões no próprio enunciado ou no caderno diário. No final de cada tarefa ou ficha de trabalho, previamente à apresentação e discussão dos resultados, o professor recolhia um exemplar da resolução de cada grupo, que depois de fotocopiar, devolvia na aula seguinte. Com a recolha e análise destes documentos, pretendia-se compreender a evolução, as dificuldades e os resultados das situações de aprendizagem proporcionadas pelas tarefas. Na tarefa 2, a recolha destes dados escritos também teve como objectivo a realização de uma avaliação com carácter mais formal. Após a conclusão das tarefas e a realização do teste de avaliação em duas fases, foi aplicado um questionário a alguns alunos das duas turmas com o propósito de compreender melhor as percepções dos alunos relativamente às tarefas desenvolvidas com os *robots*, o modo como estes os ajudaram e, de certo modo, aferir as suas concepções acerca da Escola, da Matemática e das aulas de Matemática.

Alguns resultados

Proporcionalidade directa como função

A tarefa 3, *A proporcionalidade directa como função* (ver anexo), foi trabalhada em dois blocos de 90 minutos e tinha como objectivo o estudo de funções do tipo $x \rightarrow kx$. O conceito de proporcionalidade directa não é novo para os alunos. Pretendia-se estender esse tipo de correspondência ao conceito de função e à sua linguagem básica.

Trata-se de uma proposta de trabalho que parte de um situação simples de programação de viagens curtas em linha recta, de dois *robots* com velocidades diferentes e posterior medição do espaço percorrido por cada um, no mesmo intervalo de tempo. A partir desta situação experimental, por comparação dos valores de cada um dos *robots*, a proposta de trabalho encaminha os alunos para a representação da função através de uma expressão analítica, para a reflexão sobre determinadas propriedades do tipo de gráficos associados a uma proporcionalidade directa, da constante de proporcionalidade e da sua relação (de forma intuitiva) com a inclinação da recta.

O professor distribuiu a tarefa e todo o material necessário: dois *robots* com velocidades diferentes, computadores com o ambiente de programação e fitas métricas. Seguidamente, pediu aos alunos que lessem atentamente a proposta de trabalho e alertou-os para dois aspectos: (1) A necessidade de serem o mais rigorosos possíveis nas suas experiências, principalmente nas medições; (2) A importância de terem em consideração o facto de os *robots* possuírem algum balanço e de não pararem de imediato quando termina o tempo programado, andando sempre um pouco mais.

Contrariamente às primeiras aulas e tarefas desenvolvidas com os *robots*, em que os alunos manipulavam, brincavam e experimentavam os *robots*, nesta aula começaram por iniciar o programa *RCX Code* de programação do *robot*, ler a proposta de trabalho e tomar decisões. Mostravam-se bastante empenhados e concentrados na tarefa que começavam a desenvolver. Na maioria dos grupos havia um elemento que lia a questão em voz alta e logo após o início da tarefa, era possível ouvir alunos a dizerem aos colegas: "o *robot* tem de andar 1 segundo para medirmos o que andou".

Contrariamente ao verificado em tarefas anteriores, os alunos compreenderam facilmente a introdução da tarefa e o que tinham que fazer. Para este facto, poderá ter contribuído decisivamente a formulação da primeira questão com base numa tabela (tipo de representação já abordado em tarefas anteriores), cuja leitura parece ser bastante intuitiva para a maioria dos alunos.

Os alunos tinham de programar os *robots* de forma a que cumprisse uma viagem em linha recta de acordo com os tempos indicados na tabela — 1, 3 e 6 segundos — e procedessem à medição e registos dos respectivos espaços percorridos. Todos os grupos demonstraram grande à-vontade na programação e utilização dos *robots*. O professor ia percorrendo os diversos grupos e verificou que todos haviam iniciado o trabalho. No entanto, foi necessário relembrar que os *robots* não paravam imediatamente e que esse facto poderia adulterar as medidas, que se pretendiam rigorosas. Perante isto, dois dos grupos optaram por reduzir ao tempo de viagem para compensar o espaço extra percorrido pelo *robot*: programaram a viagem para 2,8 segundos quando deveria ser de 3 segundos. Mas alguns alunos começaram a procurar um eventual comando de programação que travasse o *robot*. Dado que não o conseguiam encontrar, foi necessário o professor intervir junto dos grupos e indicar-lhes o comando. Apenas o fez junto de dois grupos porque os outros, por observação ou troca de informações, rapidamente o aplicaram. Quando este alerta surgiu, já os grupos haviam procedido a algumas medições, pelo que tiveram de repetir as experiências com as devidas alterações na programação e foram observando pequenas diminuições no espaço percorrido pelo *robot*.

Todos os elementos dos grupos desempenhavam um papel na realização da experiência. Espontaneamente, sem discutirem os papéis individuais a desempenhar, surgia uma organização de trabalho. Num dos grupos, um aluno preocupava-se em programar o *robot*, outro colocava o *robot* em funcionamento e os outros dois preparavam a mesa, assinalavam os pontos de partida e chegada e efectuavam as medições.

Os alunos utilizaram diversos métodos para proceder à medição. A maioria dos grupos decidiu aproveitar o início da mesa como ponto de partida; outros marcaram na mesa, com um lápis, a posição inicial e final do *robot*, o que tornava muito simples e prática a medição. Um dos grupos conseguiu prender a fita métrica no *robot* e depois fazia-o partir do início da mesa. Em seguida limitavam-se a registar o valor que observavam na fita métrica junto da borda da mesa. Por vezes, uma fita métrica não chegava para medir o espaço percorrido pelo *robot*. Então, a maioria dos alunos optou por pedir uma segunda fita métrica ao professor ou a um grupo vizinho para colocar no alinhamento da primeira e alcançar a posição do *robot*. Os alunos ajudavam-se e corrigiam-se mutuamente.

Os grupos procediam à programação do *robot* e realizavam as medições. Como um dos *robots* a usar era o *Tanque*, bastante mais rápido que o *Todo-o-terreno*, os alunos só conseguiram realizar em cima da mesa as experiências relativas a um e três segundos. Para os seis segundos tiveram de recorrer ao chão da sala de aula. Um dos grupos decidiu registar com giz, no chão junto da fita métrica, os segundos e o espaço percorrido em centímetros. Entretanto, discutiam os resultados:

> M: Dá 172 cm [referia-se ao espaço percorrido pelo *robot* em 6 segundos].
>
> P: 172?
>
> M: 172 ou 173.
>
> P: Mas não pode ser. Não dá certo. Devia dar 180 e o outro devia dar 90 [referia-se ao espaço percorrido em 3 segundos].
>
> Ma: Porquê?
>
> P: Fiz na máquina. Se num segundo o *robot* andou 30 cm, multipliquei por 3 e dá 90. E é para 6 segundos. Dá 180.
>
> M: Mas não dá. Não estás a ver a fita? Dá isto (apontava para os 173 cm).

Neste diálogo é possível constatar que um dos alunos do grupo tem presente a ideia de proporcionalidade directa[8] e aplica-a para comparar com os resultados da experiência, parecendo confiar mais no seu raciocínio do que nas evidentes medições efectuadas. O aluno P, o de maior poder em termos matemáticos que lhe é conferido pelo estatuto de bom aluno em Matemática, vai chamando à atenção do grupo para as indicações matemáticas expressas na ficha ou para a conveniência de efectuar os cálculos, ou seja, de ir *puxando* os restantes elementos do grupo para o contexto escolar da Matemática. Contrariamente ao P, outro elemento do grupo, o M, parece confiar mais nas experiências do que no raciocínio do colega.

Entretanto, os alunos que estavam a trabalhar no chão da sala deslocaram-se para a mesa do grupo e continuaram a discutir entre eles os resultados obtidos e os que suspeitavam ser os correctos:

> P: Estás a ver a 1.2? Para ser directamente proporcional tem que dar o mesmo resultado e não dá [referia-se ao quociente entre o espaço percorrido e o tempo].
>
> M: Então pomos esses valores [valores calculados].
>
> P: É 30, 90 e 180.

P continua a apresentar aos colegas evidências matemáticas (agora fala da organização da ficha de trabalho, como indiciadora da proporcionalidade directa) de forma a convencê-los de que devem apresentar os valores calculados e não os que obtiveram através das medições.

> [Entretanto o professor aproximou-se].
>
> Prof.: Já realizaram as medições necessárias?
>
> M: Já.
>
> Prof.: E concluíram esses valores certinhos?
>
> P: Não. Não foram estes.
>
> Prof.: Não? Expliquem.
>
> Ma: As medidas que tínhamos não davam pro… proporcionalidade directa e nós mudámos. E o *robot* também não andava direito…
>
> Prof.: E como chegaram a esses valores?
>
> M: Se num segundo anda 30 cm em 3 segundos tem de andar 90. E assim já dá o mesmo resultado.
>
> Prof.: Então acham que deveria dar proporcionalidade directa?
>
> P: Sim.
>
> Prof.: E com os valores que tiraram das medições não dava proporcionalidade directa?
>
> P: Não. Não dava o mesmo resultado.
>
> Prof.: Deveriam procurar saber porque é que o que experimentaram não condiz com que pensam… Talvez devessem experimentar de novo.

Os alunos aceitaram a sugestão do professor e voltaram ao chão da sala para realizarem de novo as suas experiências.

Os elementos deste grupo solicitaram a ajuda do professor, mas não foi necessário que este tivesse uma intervenção directa para que os alunos chegassem de forma rápida e autónoma à solução. No entanto, fica a ideia de que a presença do professor funcionou como catalisador da discussão e exposição de ideias.

Num dos grupos, os alunos começaram a discutir questão a questão e logo surgiu o conceito de proporcionalidade directa. Procuraram no caderno diário e no manual adoptado essa definição e, depois de constatarem que nenhum dos elementos do grupo recordava a definição formal de proporcionalidade directa, apelaram ao auxílio do professor:

> R: Não estamos a perceber.
>
> Prof.: O que significa serem directamente proporcionais?

R: São… [silêncio].

Prof.: Como é que uma variável está relacionada com a outra?

R: O tempo e distância têm de bater certo.

Prof.: De que forma?

[Silêncio].

Prof.: Quando aumenta o tempo o que acontece com a distância?

L: A distância também aumenta.

Prof.: Quanto andou num segundo?

Li: Andou 11 cm.

Prof.: E em dois segundos?

Li: Andou 22 cm.

Prof.: Como chegaram a esse resultado, se não mediram para 2 segundos?

R: É o dobro do tempo.

Prof.: E 3 segundos?

R.: São 33 cm.

Prof.: Então quando o tempo aumenta o que sucede com a distância?

Ru: Vai multiplicado por 11.

Prof.: Proporcionalidade directa. Conseguem agora explicar?

Ru: O *robot* anda 1 segundo faz 11 cm, anda 2 segundos faz 22 cm porque no segundo a seguir multiplica-se por 11.

L: Então há proporcionalidade directa.

Os alunos concluíram que existia proporcionalidade directa a partir do questionamento do professor. Este questionamento ajudou-os a pensarem sobre este conceito. No entanto, após esta passagem, os alunos começaram a aperceber-se que os resultados obtidos não condiziam com o que acabavam de concluir. Procederam a novas medições mas os resultados, ainda que mais próximos dos valores por eles idealizados, não garantiam um quociente igual; optaram por apresentar os valores calculados depois de saberem o espaço percorrido pelo *robot* num segundo, confiando menos na sua experiência com os *robots* e muito mais nos cálculos. As regras matemáticas do contexto escolar foram mais fortes do que a evidência empírica.

Mas na realização desta tarefa, outros alunos decidiram apostar nos valores que obtiveram nas medições e consideraram que os valores aproximadamente iguais obtidos no quociente eram suficientes para lhes garantir a existência de proporcionalidade directa. Vejamos o que aconteceu num grupo de três alunas, com um estatuto mais ou menos semelhante em termos matemáticos, ou seja, consideradas medianas em termos de desempenho matemático.

C programou o *robot* para avançar durante um segundo. Experimentaram e mediram a distância percorrida pelo *robot*. Registaram na tabela da ficha esse valor, 33 cm. S seguiu o mesmo processo e registaram 99 cm. Depois C programou o *robot* para avançar durante seis segundos. Experimentaram em cima da mesa, tal como fizeram para os outros dois casos. Mas a mesa era muito curta para o percurso do *robot*. Li sugeriu que experimentassem no chão. O resultado da medição da distância percorrida pelo *robot* no tempo de 6 segundos foi 178 cm. Voltaram para a mesa onde estavam a trabalhar e registaram, na tabela da ficha de trabalho, esse valor: 178 cm. Depois começaram a calcular os quocientes entre o espaço percorrido e o tempo gasto para o percorrer. Até este momento, as alunas do grupo quase não tinham falado:

> C: 33/1 = 33.
>
> [Registaram na ficha de trabalho].
>
> C: 99/3 = 33.
>
> Li: 178:6 = 29.6666.
>
> S: Não pode ser. Tinha que dar 33.
>
> C: Vamos programar o *robot* e medir de novo. Algo está mal.
>
> [Repetiram todo o processo e os valores voltaram a ser 33, 99 e 178 cm].
>
> S: Mas não pode ser. Tinha que dar 33 [referindo-se ao valor do quociente entre as duas variáveis].
>
> La: 33 vezes 6 é 198. Vamos colocar 198 na tabela.

Apagaram o valor que tinham escrito na tabela da ficha de trabalho, 178, e escreveram 198. O professor aproximou-se do grupo e reparou que tinham alterado o valor para 198:

> Prof.: O resultado da medição não foi 178?
>
> C: Sim, mas 33/1 é 33, 99/3 é 33.
>
> La: Então mudamos 178 por 198 porque 33 vezes 6 é 198.
>
> S: Vamos programar e medir de novo.

Entretanto o professor afastou-se do grupo para responder à solicitação de outros alunos, continuando, no entanto, as alunas a trabalhar e a programar o *robot* para avançar um segundo, medindo a distância percorrida, em cima da mesa.

> La: Oh! Já sei… Medimos em dois locais distintos. Temos que medir sempre no chão.

Depois de efectuarem todas as medições no chão, os resultados obtidos foram 30, 89 e 178 após o primeiro, terceiro e sexto segundo. Os quocientes foram respectivamente 30, 29.(6) e 29.(6). Estes resultados foram aceites pelas alunas do grupo e a sua resposta à questão 1.3 foi que o tempo e a distância são directamente proporcionais.

Os grupos de trabalho assumiram posições diferentes perante a inconsistência entre as regras matemáticas e a evidência empírica: uns decidiram apostar nos valores que obtiveram nas medições e consideraram que os valores aproximadamente iguais obtidos no quociente eram suficientes para lhes garantir a proporcionalidade directa; outros optaram por apresentar os valores calculados depois de saberem o espaço percorrido pelo *robot* num segundo.

A opção tomada por estes últimos parece evidenciar que o conhecimento dogmático da proporcionalidade directa está mais entrincheirado (*entrenched*[9]) do que a sua própria capacidade de experimentar e, consequentemente, negligenciaram a evidência das medições.

As informações explicitadas na tarefa, relativamente à relação entre o espaço percorrido e o tempo (o seu quociente é a velocidade), foram suficientes para que a maioria dos grupos descobrisse que a constante de proporcionalidade directa correspondia à velocidade do *robot*.

Num dos grupos, a solução surgiu espontaneamente, sugerida pelo elemento que leu a questão em voz alta e de imediato a escreveu, ainda antes dos colegas terem concordado. O professor, assistindo ao trabalho do grupo, decidiu questionar a decisão:

> Prof.: O que representa a constante?
>
> R: É que num segundo o *robot* anda 11 cm.
>
> Prof.: Todos concordam?
>
> Todos: Sim.

O ambiente criado à volta da resolução da tarefa facilitava a partilha de informação entre os grupos. Foi possível ouvir alunos perguntar a outros de grupos vizinhos a velocidade do *robot* que tinham usado, e que era diferente da sua.

A resolução das questões sucedia-se a bom ritmo, sempre acompanhada de alguma discussão. Entretanto, um dos grupos completava a expressão analítica da função (Espaço percorrido = ________ × tempo):

> Li: O espaço percorrido é igual a…

R: É igual ao tempo… vezes…

L: O tempo já está à frente. Não é a velocidade?

R: Velocidade?

L e Li: Sim, a velocidade.

[Entretanto o professor tinha-se aproximado].

R: Professor, já está.

Prof.: E qual é o valor da velocidade?

R: Não sei.

Prof.: Não?

R: 12.

Ru: É a velocidade [apontando para a resposta que tinham dado à questão 1.4].

Posteriormente, passou-se à apresentação e discussão dos resultados. Mais uma vez, no início os alunos estavam relutantes em participar mas, depois, todos queriam apresentar as suas ideias. Quando o professor os questionou sobre se a situação era de proporcionalidade directa, as suas respostas reflectiram as posições descritas: a aceitação da aproximação dos quocientes espaço percorrido/tempo como indicação de proporcionalidade directa e a alteração dos valores para que esses quocientes fossem iguais.

Prof.: Houve proporcionalidade directa nos vossos cálculos?

Li: Deu aproximadamente.

Prof.: E porque não deu? Acham que deveria dar?

R: Sim, tinha que dar.

Prof.: A que se deve então essas pequenas diferenças?

Cl: Porque no início a gente estava a medir na mesa e depois medimos no chão e o *robot* já não andava igual.

Outro grupo referiu que os *robots* nem sempre andavam da mesma forma (por vezes curvavam ligeiramente) e também os erros de medição que encontravam, pois iam obtendo resultados diferentes cada vez que experimentavam.

Tendo todos os alunos respondido correctamente às questões seguintes da ficha, o professor limitou-se a ouvir as suas respostas e a registá-las no quadro.

Considerações gerais

De acordo com Engeström (1999), na estrutura de uma actividade podemos identificar os sujeitos que agem sobre os objectos, num processo de transformações recíprocas até atingirem determinados resultados.

A figura 5 constitui uma representação da estrutura da actividade matemática escolar desta turma, aquando da utilização dos *robots* para estudar a proporcionalidade directa como função. O termo *sujeito* (figura 5), incluído nesta representação, refere-se ao indivíduo ou grupo de indivíduos cuja actividade é escolhida como ponto de vista para a análise. Neste caso concreto, o sujeito é colectivo, e é representado pelos diferentes grupos de alunos. Por *objecto* entende-se a *matéria-prima* sobre a qual a actividade é direccionada e que é moldada e transformada em resultados, com a ajuda de instrumentos mediadores, sejam eles físicos ou simbólicos, internos ou externos. Na situação em análise, o objecto é a proporcionalidade directa como função e os instrumentos foram os *robots*, a estrutura da ficha de trabalho e a forma como o professor questionou os alunos. A *comunidade* compreende os múltiplos indivíduos ou subgrupos que partilham o mesmo objecto e que se constroem, eles próprios, de forma diferente de outras comunidades. Em relação ao campo empírico do nosso estudo, a comunidade é a turma, com esta metodologia de trabalho.

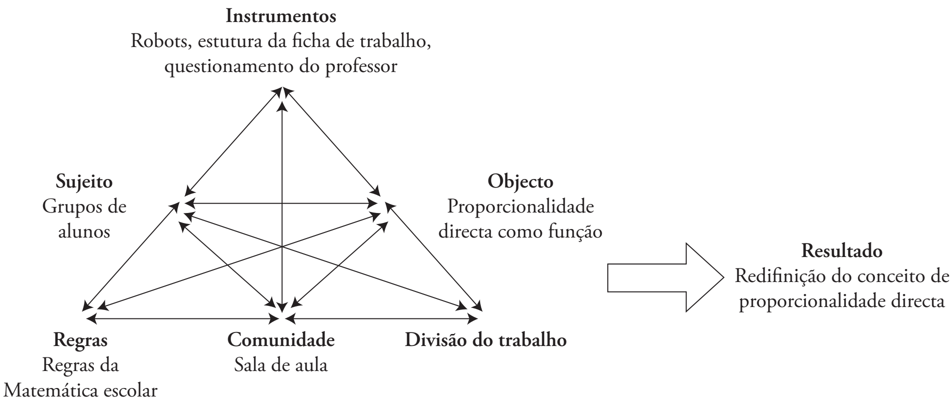


Figura 5 — A estrutura da actividade matemática escolar

Na sua acção, os grupos de alunos agiram sobre os *robots*, que foram elementos mediadores, entre eles e o objecto. Os *robots* constituíram um meio facilitador da actividade visto que deram poder aos alunos no processo de transformação do objecto.

A *divisão de trabalho* (figura 5) refere-se tanto à divisão horizontal, das tarefas entre os diferentes membros da comunidade, como à vertical, de poder e estatutos. Quanto a este aspecto, os episódios analisados evidenciam a divisão de trabalho horizontal que, como descrevemos e analisámos, surgiu naturalmente entre os diferentes elementos dos grupos e refere-se à forma como os alunos organizaram o seu trabalho com o propósito de resolver a tarefa proposta pelo professor. A divisão vertical prende-se com o facto de, dentro dos grupos, existirem alunos com maior poder (que lhes é conferido pelo seu desempenho na aula de Matemática, pela avaliação, pelos próprios colegas — caso do aluno P) e que conseguem liderar a procura do caminho a seguir na resolução de determinadas tarefas.

Finalmente, as *regras* (figura 5) referem-se à regulação explícita ou implícita, às normas e convenções que constrangem as acções e interacções no sistema de actividade. Aquilo que os alunos acreditam ser a aula de Matemática, o modo como vêem as regras matemáticas, a forma como interpretam o questionamento do professor e a estrutura da ficha (que se prende com o modo como vêem a aula de Matemática e a própria Matemática), impõem uma determinada forma de actuar dos alunos e dos respectivos grupos. Os episódios apresentados evidenciam a existência de duas situações distintas perante a inconsistência entre a exactidão das regras matemáticas e a inexactidão da evidência empírica — para uns alunos venceram as regras e para outros a evidência empírica.

Há uma constante construção e renegociação dentro do sistema de actividade. Há também um movimento incessante entre os nós da actividade. O que inicialmente aparece como objecto pode mais tarde ser transformado em resultado e mais tarde um instrumento e provavelmente mais tarde ainda regras (Engeström, 1996). Na situação em análise, o questionamento do professor e a estrutura da ficha foram instrumentos mas também foram regras.

Os *robots* ajudaram os alunos a atribuir um novo significado ao conceito de proporcionalidade directa, anteriormente visto como dependendo única e exclusivamente dos quocientes entre as grandezas. Segundo Ponte (1992), a pressão para lidar com entidades matemáticas abstractas sem considerar os seus fundamentos naturais ou referentes reais, está na base de muitas dificuldades dos alunos em Matemática. O trabalho desenvolvido permitiu-lhes concretizar e atribuir um significado ao conceito, contrariando o carácter teórico e abstracto da definição de proporcionalidade como a relação constante entre duas variáveis. Da mesma forma, os *robots* permitiram aos alunos associarem a constante de proporcionalidade a uma característica real e observável, no caso, à sua velocidade.

Os termos informais e a linguagem do quotidiano dos alunos foram substituídos naturalmente pelos termos formais das funções, depois da sua introdução como resposta à necessidade de simplificar processos (Abrantes et al., 1999).

Podemos afirmar que os alunos redefiniram o conceito de função de proporcionalidade directa com base no trabalho realizado na aula de Matemática e os *robots* tiveram um papel importante neste processo (Fernandes, Fermé & Oliveira, 2006, 2007) bem como o questionamento feito pelo professor aquando da resolução da ficha de trabalho e a organização desta. Apesar deste facto não ter sido planeado, foi um dos aspectos emergentes e importantes da prática matemática destes alunos aquando do estudo das funções utilizando os *robots*. Os alunos viajaram da perfeição da Matemática (definição da Matemática escolar de proporcionalidade directa) à realidade quotidiana (proporcionalidade directa em acção) a bordo de um *robot*.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores deste artigo pelos comentários feitos à sua versão preliminar e às editoras deste número da *Quadrante* pelos comentários à versão revista.

Agradecem também aos elementos do Projecto LEARN, em especial ao grupo da *Teoria da Actividade*, pelas discussões mantidas com um dos autores do artigo, as quais contribuíram para clarificar conceitos da *Teoria da Actividade* utilizados neste artigo.

Notas

1 Com o apoio do Centro de Ciência e Tecnologia da Madeira (CITMA).

2 Centro de Investigação em Educação da FCUL.

3 Com o apoio de FCT, POCTI-219, FEDER.

4 Conduziu a uma dissertação de mestrado (ver Oliveira, 2007) e surge no âmbito do Projecto DROIDE. http://www.uma.pt/DROIDE.

5 Ensino fundamental — etapa inicial da Educação Básica brasileira com a duração de nove anos.

6 Para uma visão geral sobre a Teoria da Actividade ver http://pparticipar-t-act.wikispaces.com/

7 Ambos os *robots* foram construídos a partir da Constructupedia (2000).

8 O conceito de proporcionalidade directa é estudado formalmente, nas aulas de Matemática, desde o 5.º ano de escolaridade e é trabalhado como uma relação constante entre duas variáveis. Normalmente não se discute o significado de *constante*. Mas tacitamente os professores evidenciam esse significado, no contexto da matemática escolar, quando lhes propõem tarefas como a que se segue para ilustrar um exemplo de não existência de proporcionalidade directa entre as variáveis *a* e *b*.

a	13	26	39	52.08
b	1	2	3	4

E de facto, através das experiências de vida, os alunos, sabem que quando se afirma que um veículo se desloca a 60 Km/h não significa que durante uma hora o carro se desloca sempre à velocidade de 60 km mas que, em média, durante aquele tempo, o carro anda àquela velocidade.

Este conceito matemático (o da proporcionalidade directa) tão usado no dia-a-dia dos alunos é, muitas vezes, trabalhado na aula de Matemática sem valorizar os contextos onde ele é usado, como se a aprendizagem da Matemática fosse impermeável aos contextos ou *context-free*.

9 O termo *entrenchement* é atribuído a Goodman (1954). Este autor afirma que o critério para decidir entre dois atributos (neste caso, a regra e a evidência) é o grau de entrincheiramento dos atributos. O entrincheiramento depende da história e das projecções passadas e do seu sucesso ou fracasso. No nosso caso, os estudantes têm mais registos históricos da aula de Matemática em que tiveram que abandonar as suas ideias quando confrontados com o conceito formal (saber do professor, livros de textos).

Referências

Abrantes, A., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação — Departamento da Educação Básica.

APM (1988). *Renovação do Currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Colecção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo.* Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Chella, M.T. (2002). Ambiente de Robótica Educacional com LOGO. Em *XXII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação*. Florianópolis. (http://www.nied.unicamp.br/~siros/doc/artigo_sbc2002_wie_final.PDF).

Colorado, M. (2003). *Ambientes de aprendizagem com robótica pedagógica.* (http://www.eduteka.org/RoboticaPedagogica.php).

Constructopedia (2000) *Robotics invention system 2.0.* LEGO.

Engeström, Y (1996). Developmental work research as educational research: Looking ten years back and into the zone of proximal development. *Nordisk Pedagogik: Journal of Nordic Educational Research*, 16, 131–143.

Engeström, Y. (1999). Expansive visibilization of work: An activity-theoretical perspective. *Computer Supported Cooperative Work* 8, 63–93.

Fernandes, E., Fermé, E., & Oliveira, R. (2006). Using robots to learn function in Math class. Em L. H. Son, N. Sinclair, J. B. Lagrange e C. Hoyles (Eds) *Proceedings of the ICMI 17 Study Conference: background papers for the ICMI 17 Study*. Hanoi, University of Technology.

Fernandes, E., Fermé, E. e Oliveira, R. (2007). Viajando com robots na aula de Matemática. *V Conferência internacional de tecnologias de informação e comunicação na Educação — Challenges 2007: Ambientes Emergentes, O Digital e o Currículo e Avaliação Online.* Universidade do Minho. Braga.

Fernandes, M. (1997). *Processos de aprendizagem do conceito de derivada em contextos computacionais.* Tese de Mestrado. Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: APM.

Fey, J. (1991). Tecnologia e educação matemática: Uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes. Em J. P. Ponte (Org.), *O computador na Educação Matemática.* Série Cadernos de Educação Matemática, n.º 2 (pp. 45–79). Lisboa: APM.

Goodman, N. (1954) *Fact, Fiction, and Forecast.* University of London: Athlone Press.

Jorge, F. (1994). *O computador e a Educação Matemática: Abordagens do tópico sucessões*. Tese de Mestrado. Universidade do Minho. Lisboa: APM.

Knudsen, C. P. (2000). *World-class Maths and Science — Learning lab in the Copenhagen region*. Project Description. Copenhaga.

Limkilde, P. (2000). *Driving Math — Using mindstorms for schools in a math class at business college.* Ringkjøbing Handelsskole & Handelsgymnasium. Ringkøbing: Dinamarca. (http://assets.lego.com/downloads/education/driving_math.pdf)

Matos, J. F., Carreira, S., Santos, M. & Amorim, I. (1994). *Ferramentas computacionais na modelação matemática*. Lisboa: Projecto Modelação no Ensino da Matemática, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ministério da Educação — Departamento do Ensino Básico (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais.* Lisboa: ME.

Mourão, A. P. (2002). A teoria da reificação de Anna Sfard: O caso das funções. Em J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Org.). *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*, pp. 275–289. Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em inglês, publicado em 1989).

NCTM. (2000). *Principles and standards for school Mathematics.* Reston: NCTM.

Oliveira, R. (2007). *A robótica na aprendizagem da matemática: Um estudo com alunos do 8º ano de escolaridade.* Tese de Mestrado. Universidade da Madeira.

Piteira, G. (2001) *Actividade matemática emergente com os ambientes dinâmicos de Geometria dinâmica.* Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa.

Piteira, G. & Matos, J.F. (2000) Ambientes dinâmicos de Geometria como artefactos mediadores para a Aprendizagem da Geometria. Em M.J. Saraiva, M. I. Coelho, J.M. Matos (Org). *Ensino e Aprendizagem da Geometria* (pp. 61–72). Lisboa: SPCE.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 3(2), 3–8. (http://math.coe.uga.edu/tme/Issues/v03n2/Ponte.pdf)

Ponte, J. P. (1997). *As Novas Tecnologias e a Educação.* Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J. P., & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias.* Lisboa: Universidade Aberta.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the Mind: A sócio-cultural approach to mediated action.* Hertfordshire, EUA: Harvester Wheatsheaf.

Wilson, M. R. (1991). A Model of secondary students construction of the concept of function. *The Mathematicas Educator*, 2(1), 6–12.

Williams, M. (2002). Generalization in interpretive research. Em T. May (Ed.) *Qualitative research in action.* (pp.126–143). Londres. Sage Publications..

Youschkevitch, A. P. (1976/77). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16, 37–85.

Zilli, S. R. (2004). *A Robótica educacional no ensino fundamental: Perspectivas e prática.* Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina: Florianópolis.

Resumo. Este artigo relata parte de um estudo cujo objectivo é descrever, analisar e compreender como os alunos aprendem Matemática tendo os *robots* como elementos mediadores da aprendizagem.

Esta investigação segue uma metodologia qualitativa, dispondo-se a descrever, analisar e compreender a actividade matemática de alunos do 8.º ano de escolaridade aquando da aprendizagem das funções. A proposta pedagógica foi constituída por cinco tarefas que compreendiam o uso de pequenos modelos robóticos, *Robotics Invention System*™ 2.0 da *Lego Mindstorm*™, duas fichas de trabalho e um teste de avaliação em duas fases. A análise dos dados e a disposição das conclusões foram estabelecidas conforme o papel desempenhado pelos *robots* na resolução de problemas matemáticos, na aprendizagem das funções e no desenvolvimento de competência matemática.

Neste artigo, discutiremos como é que os *robots* contribuem para a aprendizagem da Matemática, nomeadamente das funções de proporcionalidade directa.

Palavras-chave: Aprendizagem; Funções; Proporcionalidade Directa; *Robots.*

Abstract. This paper relates part of a research whose aim is to describe, analyse and understand how students learn mathematics having *robots* as mediators of learning.

A qualitative methodology was chosen, aiming the research at describing, analysing and understanding 8th grade students' mathematical activity while learning functions. The pedagogical proposal consisted in five tasks which included the use of simple *robots Robotics Invention System*, *Lego Mindstorm*, two worksheets and a two-stage written test. Data analysis and conclusions drawing were carried out bearing in mind the role played by *robots* in solving mathematical problems, in the construction of representations, in the learning of functions and in the improvement of mathematical competence.

In this paper we will discuss how *robots* contribute to the learning of mathematics, in particular direct proportionality functions.

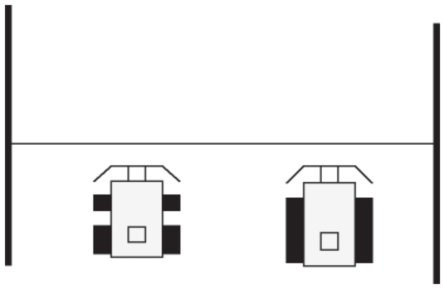
Keywords: Learning; Functions; Proportionality; *Robots*.

Anexo

Escola básica do 2.º e 3.º ciclos
Matemática — 2005/06

Capítulo: Funções
Tarefa 3

1. Vamos comparar a velocidade de dois *robots*: *Todo-terreno* e *Tanque*. Provavelmente a primeira ideia que nos ocorre é fazer uma corrida com os *robots* para descobrir o mais rápido, tal como mostra a figura. No entanto, não é certamente a melhor forma de determinar os valores das velocidades e compará-las correctamente, nem tão pouco a melhor forma de apresentar os resultados a outras pessoas.



1.1. Através da experimentação do *Todo-terreno* (programação, teste e registo de dados) completa a seguinte tabela:

Tempo (segundos)	1	3	6
Todo-terreno (cm)			

1.2. Calcula o quociente entre o espaço percorrido e o tempo gasto.

1.3. As grandezas *espaço percorrido* e *tempo* são directamente proporcionais? Justifica.

1.4. Indica a constante de proporcionalidade. Nesta situação, o que representa a constante de proporcionalidade? (Recorda da Física que $v = e/t$ em que v representa a velocidade do *robot*, e o espaço percorrido e t o tempo gasto no percurso).

1.5. Comenta a afirmação:

"A correspondência entre o espaço percorrido pelo *robot* e o tempo gasto a percorrê-lo é uma função".

1.6. Atendendo às alíneas anteriores, completa:

Espaço percorrido = ________ × tempo

A função pode ser definida pela expressão analítica e = ______ × t.

1.7. Representa num referencial cartesiano os pontos que têm por abcissa o tempo e por ordenada o espaço percorrido. Une os pontos e verifica que ficam alinhados entre si e com a origem do referencial.

1.8. Repete todo o processo para o *Tanque*. Representa a função obtida no referencial cartesiano feito na alínea anterior.

1.9. Observa os gráficos obtidos:

1.9.1. Qual é o tipo de gráfico associado a uma proporcionalidade directa?

1.9.2. Qual é o objecto cuja imagem é o valor da constante de proporcionalidade?

1.9.3. Quando a constante de proporcionalidade aumenta que variação se verifica no gráfico?

■ ■ ■

RUI OLIVEIRA
Escola EB 2,3 / S Alfândega da Fé
rmno@sapo.pt

ELSA FERNANDES
Universidade da Madeira
elsa@uma.pt

EDUARDO FERMÉ
Universidade da Madeira
ferme@uma.pt