A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico

Dina Alvarenga
EB1 de Abelheira/Escola Superior de Educação de Viana do Castelo

Isabel Vale
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo

Introdução

A discussão em torno da competência matemática de que os jovens de hoje precisam para a sua vida profissional e para uma cidadania activa num mundo cada vez mais matematizado, tem confluído em vários consensos. O desenvolvimento de capacidades rotineiras, objectivo matemático importante para o tipo de sociedade da era industrial, é hoje considerado bem menos relevante. Pelo contrário, a actual sociedade tem necessidade de indivíduos com grande capacidade de adaptação, prontos a aprender novas técnicas, capazes de formular problemas decorrentes de situações com que se deparem e de os resolver habilmente, isto é, de indivíduos que pensem de uma forma flexível, crítica, eficaz e criativa. Neste contexto, a aprendizagem da Matemática não deve ser encarada como um processo em que os alunos apenas têm contacto com o produto final. Pelo contrário, deve incluir oportunidades destes se envolverem em momentos genuínos de actividade matemática.

Os programas de Matemática em vigor reflectem também, de certo modo, esta maneira de pensar. Ao valorizarem, de igual forma, a aquisição de conhecimentos, o desenvolvimento de capacidades/aptidões e as atitudes/valores, ao mesmo tempo que privilegiam metodologias de ensino centradas no aluno, indiciam que aprender Matemática deve ir mais além do que a aprendizagem de conceitos, procedimentos e suas aplicações. De acordo com as orientações fornecidas pelos documentos programáticos nacionais e internacionais, os professores devem ajudar os alunos a investigar, discutir, questionar e provar. Simultaneamente, devem dar maior incidência às explorações, nomeadamente à exploração de padrões e à comunicação, tornando a Matemática acessível a todos os alunos, ao mesmo tempo que lhes mostram o seu valor e beleza. Estes são, assim, incentivados a olhar para a Matemática como uma ciência que estuda padrões e não apenas números (Schoenfeld, 1992).

A introdução de tarefas envolvendo a exploração de padrões é justificada por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) por um conjunto de razões, nomeadamente o facto de contribuírem para o desenvolvimento do raciocínio e para o estabelecimento de conexões entre as diversas áreas da matemática. Por isso, os alunos, desde os primeiros anos de escolaridade, podem e devem ser encorajadas a observar padrões e a representá-los tanto geométrica como numericamente, iniciando o estudo da Álgebra de um modo fortemente intuitivo e informal.

Também para Howden (1990), os alunos que, desde os primeiros anos de escolaridade, são incentivados a explorar padrões em diferentes acontecimentos, formas e conjuntos de números, desenvolvem a disposição para uma visão mais alargada da Matemática e para o estudo da Álgebra. Desta forma, a exploração de padrões, revela-se como um tema unificador, que permite estabelecer conexões entre vários conceitos, que motiva e dá significado à matemática que os estudantes aprendem.

Como referem Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2006), quando se apela aos padrões no ensino da Matemática é normalmente porque se pretende ajudar os alunos a aprender uma Matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem, facultando-lhes um ambiente onde aprender tem algo a ver com a sua realidade e experiências. De acordo com estes autores, o estudo de padrões vai de encontro a estes aspectos "apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões" (p. 197).

O estudo que serve de base a este artigo (Alvarenga, 2006)[1], teve como principal objectivo analisar o trabalho de alunos em tarefas que envolvem a exploração de padrões, assim como as implicações de tais tarefas no desenvolvimento e consolidação de conceitos matemáticos ao nível do 5.º ano do Ensino Básico. Para aprofundar e contextualizar o problema, definiram-se algumas questões orientadoras da investigação das quais destacamos as analisadas neste artigo: Que processos são utilizados pelos alunos na resolução de tarefas problemáticas que envolvam a descoberta de padrões?; Qual o papel das diferentes representações na resolução de tarefas problemáticas que envolvam a descoberta de padrões e de que forma essas representações são articuladas?; Que relações se podem estabelecer entre a descoberta de padrões e os conceitos matemáticos subjacentes? Assim, daremos especial atenção às representações e aos processos utilizados pelos alunos para chegar à generalização, entendendo esta como componente essencial do pensamento algébrico.

A resolução de problemas

O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas constitui uma das finalidades estabelecidas para o ensino da Matemática nos programas em vigor e é um dos objectivos gerais neles definidos. De acordo com o *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* (ME-DEB, 2001), a competência matemática a ser desenvolvida pelos alunos ao longo da Educação Básica apela fortemente ao trabalho não rotineiro e exige, por exemplo, "explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, (…), discutir com outros e comunicar descobertas" (p. 57). Assim, o objectivo é fazer com que os alunos se envolvam em momentos genuínos de actividade matemática, aproximando o trabalho do aluno do trabalho do matemático.

A resolução de problemas vai muito além de resolver um problema. Trata-se de um conceito complexo e, por isso, é importante olhar para ele a partir de diferentes perspectivas. É através dos problemas que o aluno pode seguir, tal como os matemáticos, um processo de envolvimento e interesse pela descoberta que leva a conseguir, em primeiro lugar, intuir os resultados e só depois prová-los. A resolução de problemas surge, pois, como uma forma, entre outras, de colocar os alunos numa situação de *fazer Matemática* e ainda contribui para uma maior motivação, permitindo reduzir o insucesso nesta disciplina. A ligação entre a realidade e a sala de aula pode ser estabelecida através da resolução de problemas e, sobretudo, podemos trabalhar diferentes conceitos matemáticos ao mesmo tempo.

Nas últimas décadas, tem-se escrito muito sobre esta temática e não é objectivo deste trabalho retomar essa discussão. É consensual que se está perante um problema quando a situação não pode ser resolvida pelo recurso imediato a processos conhecidos e estandardizados. A procura da solução envolve o recurso adicional de processos mentais que podem ajudar a chegar à solução e que constituem um apoio para que os alunos consigam, com entusiasmo e sucesso, resolver problemas. Estes processos são vulgarmente designados por estratégias de resolução de problemas e estão mais associados à criatividade e à curiosidade, que à aplicação rotineira de um conjunto de técnicas sem significado.

No estudo desenvolvido, o conceito de resolução de problemas representa um modo de entender o ensino-aprendizagem da Matemática e a própria Matemática (Serrazina, Vale, Fonseca & Pimentel, 2002). É visto como um processo que envolve activamente os alunos na formulação de conjecturas, na investigação e exploração de ideias, que os leva a discutir e a questionar a sua própria maneira de pensar e a dos outros, a validar resultados e a construir argumentos convincentes (APM, 1988; NCTM, 1989). Defendemos a resolução de problemas como um processo matemático central para o ensino da Matemática, onde os problemas são um facilitador da aprendizagem, quer para introduzir conceitos matemáticos, quer para os consolidar. Entre as várias estratégias para resolver problemas, destacamos a procura de padrões como uma estratégia poderosa a incentivar e a desenvolver nos alunos. Desta forma, os problemas que envolvem a descoberta de padrões, contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e para o estabelecimento de conexões entre diferentes temas matemáticos. Em particular, é um modo de envolver os alunos nalgumas das componentes fundamentais do pensamento algébrico como sejam o particularizar, o conjecturar, o generalizar e, eventualmente, o simbolizar das relações encontradas (Vale & Pimentel, 2005).

A exploração de padrões

Cada vez mais, educadores e matemáticos mostram-se interessados em analisar o papel dos padrões no ensino-aprendizagem da Matemática. A definição da Matemática como *a ciência dos padrões* parece mesmo ser consensual entre a maioria dos matemáticos. Esta forma de entender a Matemática acabou, também, por provocar alterações no modo como a disciplina é vista por alunos e professores. Deixa de ser considerada apenas como um produto, um corpo de conhecimentos altamente abstracto e especializado, e começa a ser entendida como um processo, onde os alunos podem aceder a uma profunda compreensão da *sua* Matemática e sejam capazes de explicar e justificar os seus procedimentos e pensamentos. Com base nesta perspectiva, vários investigadores apontam a exploração de padrões como uma actividade que proporciona contextos de aprendizagem bastante ricos e motivantes para os alunos, onde o seu poder matemático pode ser explorado e a apreciação pela beleza matemática pode ser desenvolvida (Kilpatrick, Martin & Schifter, 2003; NCTM, 1993, 2000; Orton, 1999; Vale & Pimentel, 2005).

A natureza multifacetada do conceito de padrão, assim como as suas múltiplas utilizações, fazem com que possa ser caracterizado e representado de diferentes formas, o que dificulta também a sua descrição. Efectivamente, o termo *padrão* pode ser utilizado com diferentes significados. Por um lado, pode ser usado simplesmente em relação a uma disposição ou arranjo particular de formas, cores ou sons, sem uma regularidade evidente. Por outro lado, pode ser exigido que esse arranjo possua algum tipo de regularidade evidente, por exemplo através de simetria ou repetição (Orton, 1999).

Para Vale et al. (2006) "o conceito de padrão tem-se revelado bastante fluído, com definições muito díspares, consoante a utilização que é pretendida" (p. 195). Mais do que pretender definir padrão em Matemática, situação que tem sido contornada pela literatura, será mais útil perguntar o que é que o caracteriza. Vários autores, entre eles Smith (2003), referem que identificamos um padrão nas situações em que vemos ou imaginamos a possibilidade de repetição ou um modo de continuação. Como este autor indica, as componentes de mudança, repetição ou extensão são centrais na ideia de padrão.

De modo geral, as ideias manifestadas pelos vários autores referidos apontam que ao conceito de padrão estão associados termos tais como: regularidade(s), sequência, regra e ordem. Tendo em conta que um dos objectivos deste estudo é analisar o papel desempenhado pelas diferentes representações, os padrões aqui explorados referem-se tanto a arranjos particulares de números, como de figuras ou objectos, onde podem ser detectadas regularidades. À medida que os exploram, os alunos terão oportunidades de continuar o padrão, detectar a regra de formação (baseada, por exemplo, na repetição ou nas características geométricas), formular uma lei geral de formação e chegar, assim, à generalização. Neste estudo demos, pois, atenção aos padrões que possibilitam, pela análise da sequência que envolvem, identificar uma lei de formação que permita continuar essa sequência e chegar à generalização.

Como Goldin (2002) salienta, o poder matemático consiste não só em ser capaz de detectar, construir, inventar, compreender, ou manipular padrões, mas também em comunicar, verbalmente ou por escrito, esses padrões para os outros, representando-os das mais variadas formas. As diferentes representações acabam por influenciar o modo como o conceito de padrão é interpretado.

Ao analisar a literatura verifica-se que vários autores consideram que aprender e compreender Matemática significa ter a capacidade de trabalhar com diferentes representações de uma mesma ideia, realizando conexões entre elas e sabendo identificar as limitações de cada uma. As representações devem, por isso, ser usadas como ferramentas para a aprendizagem da Matemática, como é sugerido pelo NCTM (2000).

Neste trabalho, em relação às representações, optou-se por seguir a terminologia apresentada por Orton, Orton e Roper (1999), sendo, por isso, exploradas as representações concretas, pictóricas e numéricas. Por representações concretas, entendam-se as que recorrem a qualquer tipo de material; representações pictóricas são as relativas a figuras e, por último, as representações numéricas são as que utilizam números. O presente estudo pretendeu dar aos alunos a oportunidade de utilizar diferentes representações, sejam elas concretas, pictóricas ou numéricas, para assim representar e caracterizar o padrão envolvido em cada uma das tarefas a explorar. A procura de ordem e de padrões é, pois, uma das forças orientadoras de todo o trabalho matemático com alunos jovens. Esta procura deve ser diversificada e incentivada nos primeiros anos de escolaridade, uma vez que ajuda a desenvolver a observação e a intuição dos alunos. Estes devem ser encorajados a observar padrões, a representá-los de diferentes modos, quer em contextos geométricos quer numéricos, a comunicar as suas ideias, manifestando maior segurança na formulação de conjecturas e no estabelecimento de generalizações.

Os padrões e a Álgebra

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) ao dar relevância ao estudo dos padrões na norma Álgebra, que atravessa todos os níveis de escolaridade, recomenda que se deve investigar se os padrões são uma estratégia adequada para introduzir os jovens alunos no estudo dos conceitos da Álgebra.

Hargreaves, Threlfall, Frobisher e Taylor (1999) referem que o trabalho com sequências numéricas permite reconhecer, descrever, prolongar e criar padrões, além de poder ser considerado um importante percursor da Álgebra. Esta é aliás uma ideia defendida por outros autores (e.g. NCTM, 1989, 2000; Vale et al., 2006). Ao pedir aos alunos para observar e caracterizar verbalmente os padrões, podemos estar a ajudar na transição da Aritmética para a Álgebra (Schoenfeld & Arcavi, 1999). Também Orton e Orton (1999) identificam a exploração de padrões como um caminho para a Álgebra. Consideram que, ao generalizar uma variedade de padrões, e sendo a generalização um caminho para a Álgebra, estes também o serão.

Segundo Blanton e Kaput (2005), o raciocínio algébrico é um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir da observação de um conjunto de evidências, estabelecendo essas generalizações através de argumentações, expressando-as de modos cada vez mais formais de acordo com a idade. Assim, a Álgebra é vista como uma ferramenta para expressar tais generalizações. Consideremos, por exemplo, o problema dos apertos de mão. Este problema tem várias versões, em que uma delas pode ser: "Numa sala encontram-se 10 amigos que se cumprimentam todos com um aperto de mão. Quantos apertos de mão são trocados entre os 10 amigos?" Dizemos que um aluno está envolvido em raciocínio algébrico quando este descobre o número total de apertos de mão que cada pessoa dá a cada uma das outras num determinado grupo e passa de seguida à generalização, isto é, descreve como se obtém o número total de apertos de mão a partir de um número qualquer de indivíduos. Dependendo da maturidade do aluno, a generalização pode ser expressa por palavras ou recorrendo à simbologia; pode ser baseada, por exemplo, na análise de padrões recursivos (hip.1) ou na descoberta de padrões que estabelecem relações entre o número total de pessoas no grupo e o total de apertos de mão (hip.2 e hip.3) (tabela1).

<table>
<tr><td colspan="2">Nº de amigos</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>…</td><td>n</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Nº de apertos de mão</td><td>hip. 1</td><td>0 +1</td><td>1 +2</td><td>3 +3</td><td>6 +4</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>hip. 2</td><td>0</td><td>1</td><td>1+2</td><td>1+2+3</td><td>1+2+3+4</td><td></td><td>1+2+3+4+…+n</td></tr>
<tr><td>hip. 3</td><td>0</td><td>$\frac{2 \times 1}{2}$</td><td>$\frac{3 \times 2}{2}$</td><td>$\frac{4 \times 3}{2}$</td><td>$\frac{5 \times 4}{2}$</td><td></td><td>$\frac{n \times (n-1)}{2}$</td></tr>
</table>

Tabela 1 — Alguns modos de resolução do problema dos apertos de mão

Assim como Hargreaves et al. (1999), também Orton e Orton (1999) consideram o método das diferenças finitas, baseado num entendimento recursivo do padrão, o mais popular entre os alunos. Além desse método, identificam também o método da contagem — apenas aplicado na presença de figuras —, o método baseado na proporcionalidade directa — baseado numa tentativa de encontrar a solução rapidamente — e o método linear — segundo o qual os alunos têm uma maior consciência das operações envolvidas. Os autores referem que esses métodos são usados tanto em alunos mais velhos, como nos mais novos. A diferença é que os primeiros conseguem obter melhores resultados.

Orton e Orton (1999) verificaram que o tipo de generalização exigida, próxima ou distante, faz com que os alunos alterem os seus métodos. Essa mudança pode ocorrer de uma forma correcta, ou não. Assim, pode acontecer que, quando confrontados com questões relacionadas com os termos mais distantes da sequência, os alunos passem de um método correcto para um método baseado na proporcionalidade directa, que acabará por levar a uma resposta errada. Segundo os autores, a dificuldade em reunir todos os dados e em dominar toda a informação pode conduzir a esse erro. Por outro lado, a regra geral de formação do padrão pode ser apresentada de vários modos. Alguns alunos podem apenas conseguir apresentar mais dados numéricos, outros podem descrever a relação encontrada usando palavras e alguns poderão conseguir converter essa relação numa fórmula algébrica.

Na sua dissertação de mestrado, Modanez (2003) propôs-se analisar o modo como uma estratégia de ensino baseada na procura de padrões em sequências que utilizavam motivos geométricos poderia proporcionar aos alunos a introdução ao pensamento algébrico. Na realização das primeiras tarefas, a autora verificou que os alunos tiveram algumas dificuldades na descrição e justificação de respostas. No entanto, com o decorrer do tempo, e devido às características das tarefas aplicadas, foram-se tornando mais autónomos, além de levantarem hipóteses e justificarem conjecturas com mais facilidade. Assim como aconteceu no trabalho desenvolvido por Amaral (2003), também Modanez verificou que os alunos não utilizaram os conteúdos trabalhados anteriormente para resolver as tarefas. Em particular, a maioria não recorreu aos seus conhecimentos sobre área e perímetro durante a resolução das tarefas. Além disso, a autora refere que os alunos não sentiram dificuldades em utilizar os diferentes tipos de registo, conseguindo converter os dados presentes nas figuras em dados numéricos. Desta forma, depois de analisar o desempenho dos alunos, Modanez considera que a metodologia adoptada contribuiu, de uma maneira significativa, para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Nesta ordem de ideias, o trabalho com padrões, apesar de não eliminar todas as dificuldades associadas à introdução da Álgebra, representa certamente um caminho a seguir (Orton & Orton, 1999). Por conseguinte, não é de estranhar que chegue até nós o relato de várias experiências onde os padrões desempenharam um importante papel na introdução da Álgebra. É o caso de Pegg e Redden (1999), que consideram que muitas das críticas associadas à Álgebra poderiam ser ultrapassadas se esta fosse introduzida através da exploração padrões. Também Ferrini-Mundy, Lappan e Phillips (1999) descrevem como o conhecimento matemático pode ser desenvolvido através do estudo de problemas envolvendo padrões e como a Álgebra surge como um modo de generalizar e representar esse conhecimento. Por sua vez, Schultz (1999) descreve uma forma diferente de apresentar a Álgebra aos alunos. Segundo este autor, assim que estes completam diferentes tipos de sequências, baseadas em objectos, figuras ou números, e comunicam aquilo que estão a fazer, estão a desenvolver a linguagem algébrica. Curcio, Nimerofsky, Perez e Yaloz (1997) também relatam o trabalho desenvolvido com os seus alunos, procurando descrever o entusiasmo por eles sentido quando lhes é dada oportunidade para resolver problemas, explorar padrões e formular conjecturas. Estes autores acreditam que, assumindo uma abordagem indutiva na generalização de padrões, estes fornecem-se aos alunos experiências significativas começando-se a desenvolver o raciocínio algébrico.

Os casos descritos anteriormente são apenas alguns exemplos resultantes de experiências onde os padrões aparecem associados à Álgebra. É de realçar que a relação entre os padrões e a Álgebra atinge, cada vez mais, os diferentes níveis de ensino, deixando para trás a ideia de que a Álgebra apenas deveria ser abordada nos anos mais avançados. A concluir, podemos dizer que vários autores (e.g. Hebert & Brown, 1999; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Pegg & Redden, 1999; Usiskin, 1999) defendem que a generalização de padrões é um veículo com potencialidades para fazer a transição do pensamento numérico para o algébrico, porque permite dar significado à generalização sem ter que recorrer, obrigatoriamente, a variáveis e a fórmulas. A compreensão da generalização de padrões é a base do sucesso em Álgebra, entendendo esta como a linguagem da generalização, isto é, a linguagem na qual descrevemos os padrões. É dentro desta perspectiva que se situa este trabalho em que os alunos se envolveram num processo exploratório de problemas de padrão.

Opções metodológicas

Atendendo ao objectivo do estudo, este foi enquadrado numa abordagem de cunho qualitativo na forma de estudo de caso múltiplo, de acordo com Stake (1995). Acompanharam-se, durante um ano lectivo, dois alunos do 5.º ano de uma escola do Ensino Básico quando envolvidos em tarefas de exploração de padrões, em contexto da turma a que pertenciam. Durante a realização da investigação, utilizaram-se várias técnicas de recolha de dados, que se podem agrupar em três grandes grupos: observação, entrevistas e documentos. Estas são, aliás, algumas das técnicas usualmente utilizadas em estudos que seguem o paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994).

A investigadora, tendo em conta a natureza do problema em estudo e o tipo de questões para as quais, como professora, gostava de obter alguma compreensão, optou por desempenhar o duplo papel de professora-investigadora. Uma vez que se pretendia obter uma informação rica e pormenorizada a respeito do problema em estudo, foram definidos alguns critérios para a escolha dos alunos caso: ter aproveitamento escolar diferente; apresentar uma razoável capacidade de expressão escrita e oral; ter facilidade de reunir com a investigadora fora das aulas; e ter predisposição para participar no estudo. Desta forma, depois de analisar as informações recolhidas sobre os alunos da turma, seleccionou-se a *reivindicativa* Raquel e o *acanhado* David.

A escolha das tarefas foi feita a partir de um conjunto diversificado de propostas de natureza investigativa, envolvendo a procura de padrões e cuja resolução não dependesse unicamente da utilização de processos rotineiros. Depois de formar esse conjunto de tarefas, seleccionaram-se as que estavam mais adequadas à turma, onde iria decorrer o estudo, e de acordo com os temas desenvolvidos nesse ano de escolaridade. No presente artigo, discutem-se apenas três das seis tarefas[2] aplicadas, por se considerar serem as mais representativas do trabalho dos alunos aqui analisado.

Todas as aulas em que foram realizadas as tarefas foram gravadas em vídeo. Durante estas aulas, assim como nas de discussão das tarefas, a investigadora tomava as suas notas. Posteriormente, as informações recolhidas pela visualização da gravação das aulas, a leitura das notas e a análise da resolução da tarefa, pelos alunos, permitiram organizar cada entrevista efectuada aos alunos caso. Só depois da realização das entrevistas é que as tarefas eram discutidas na turma. A figura 1 descreve o processo seguido ao longo da aplicação das diferentes tarefas.

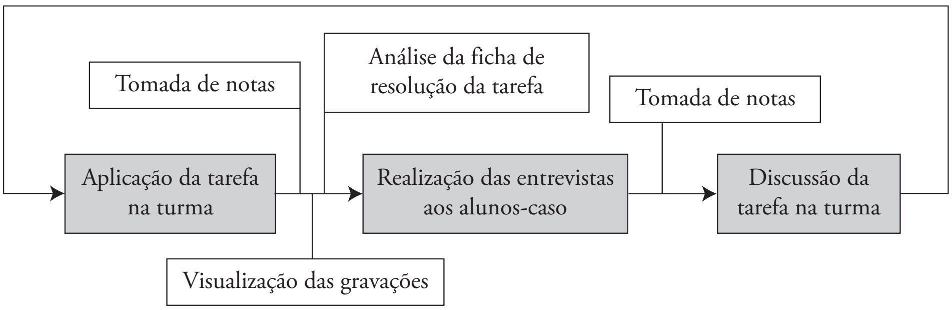


Figura 1 — Sequência das tarefas e realização das entrevistas

Raquel

Raquel vive com os pais numa zona bastante próxima da escola e sonha vir a ser veterinária para assim poder ajudar os animais. Nos seus tempos livres, gosta de ver televisão e ajudar a mãe nas tarefas domésticas. A sua preocupação em ajudar os outros, assim como o facto de ser uma aluna responsável, esteve, por certo, presente na sua eleição, pelos colegas, para delegada de turma.

Raquel leva o seu papel de aluna muito a sério, procurando ser sempre a melhor da turma. É este esforço constante que faz dela uma boa aluna. As suas disciplinas favoritas são a Língua Portuguesa e História e Geografia de Portugal, não fazendo qualquer referência às que menos gosta. Relativamente ao seu modo de estar na aula, é uma aluna atenta e organizada que tem uma certa facilidade em expressar-se quer oralmente, quer por escrito, e que gosta de participar e de apresentar as suas ideias. A sua relação com os colegas é boa. No entanto, não gosta de se ver ultrapassada pelos outros. Assim, é normal ver Raquel a ajudar os colegas mas quando é ela a precisar de ajuda quer que seja dada pela professora e não pelos colegas.

Relativamente à disciplina de Matemática, revela-se uma aluna preocupada com as dificuldades que as novas matérias podem provocar nos testes e considera-se uma aluna "média, porque ainda não sei resolver problemas sozinha". Para Raquel existem as "matérias fáceis", onde se sente bem, e as "matérias difíceis", que a deixam "envergonhada por não saber bem". Apesar disso, não especifica o tipo de conteúdos que considera fáceis ou difíceis.

A experiência com tarefas envolvendo exploração de padrões

Ao analisar o trabalho realizado por Raquel em torno das seis tarefas seleccionadas para o estudo, verifica-se que o mesmo apresenta características diferentes, de tarefa para tarefa. O facto das propostas de trabalho recorrerem ao uso de diferentes materiais e de possuírem um maior ou menor grau de estruturação, contribuiu, em grande medida, para algumas das diferenças ocorridas ao nível do desempenho de Raquel. Descreve-se, em seguida, o envolvimento de Raquel nas tarefas seleccionadas para este artigo, o que poderá permitir compreender as características do trabalho que desenvolveu.

A tarefa *Organizando mesas* conseguiu despertar um grande entusiasmo em Raquel. Logo após a leitura, começou a trabalhar independentemente, atitude que manteve ao longo de toda a resolução da tarefa, pois nunca solicitou a ajuda da professora. Mesmo quando esta se aproximava da sua carteira para tirar algumas dúvidas à sua colega, Raquel continuava confiante com o seu trabalho.

Esta foi uma das tarefas em que Raquel obteve melhor desempenho, conseguindo responder correctamente, de um modo mais, ou menos completo, a todas as questões e terminando a tarefa dentro do tempo previsto. Para a resolução das diferentes questões, baseou-se sempre na utilização de esquemas de modo a ganhar uma maior consciência das regras de colocação das mesas e da localização das pessoas. A resposta às questões a) e b) surgiu baseada exclusivamente nos dados geométricos (ver figura 2 e figura 3).

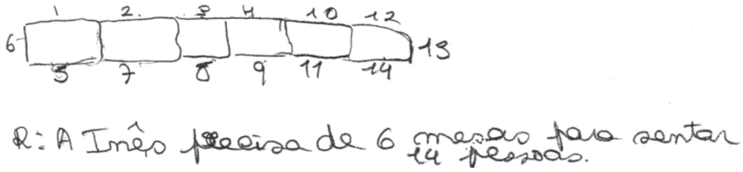


Figura 2 — Resolução apresentada por Raquel para a alínea a) da tarefa *Organizando mesas*

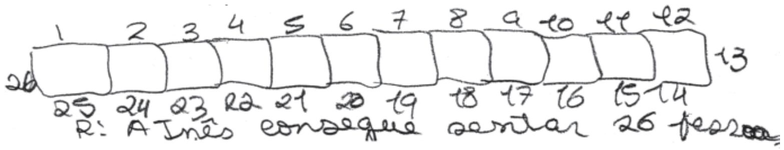


Figura 3 — Resolução apresentada por Raquel para a alínea b) da tarefa *Organizando mesas*

Para conhecer o número de mesas necessárias para sentar um determinado número de pessoas, Raquel desenhou várias mesas, até atingir o número de pessoas pretendido, utilizando, assim, uma estratégia de contagem e tentativa e erro. Do mesmo modo, para saber o número de pessoas que era possível sentar com a justaposição de um determinado número de mesas, desenhou unicamente as mesas e distribuiu as pessoas respeitando as regras estabelecidas. Ao analisar a distribuição das pessoas no esquema da alínea a), verifica-se que, inicialmente, Raquel desenhou apenas quatro mesas, pois só até aí o tipo de distribuição se mantém. Ao verificar que essas mesas não eram suficientes, continuou a desenhar até conseguir sentar as 14 pessoas.

Já na alínea c), Raquel alterou o seu processo de resolução, como mostra a figura 4. Deixou de desenhar as mesas para apenas desenhar o rectângulo formado pela união das mesas, associando a cada lado o número total de pessoas que aí se podem sentar.

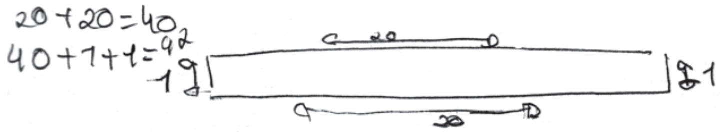


Figura 4 — Resolução apresentada por Raquel para a alínea c) da tarefa *Organizando mesas*

Durante a entrevista, quando questionada sobre o que representava cada número, Raquel ainda associou o 20 à medida da mesa. No entanto, a ideia mais firme era que esses números representavam o número de pessoas sentadas em cada lado ou o número de mesas unidas:

> Professora: O que representa o 20?
> Raquel: O 20 representa o número de pessoas em cada lado!

> Professora: Não pode representar mais nada?
> Raquel: O 20 também pode ser os metros da mesa.
> Professora: Que metros?
> Raquel: A medida da mesa, mas eu penso que são as pessoas.

Desta forma, Raquel não se baseou unicamente nas características geométricas do problema para resolver a questão. Também se baseou na respectiva tradução numérica dos dados. A associação com o perímetro foi apenas feita durante a entrevista e durante a aula de discussão. Para responder à questão d) Raquel baseou-se, também, no processo de resolução adoptado na alínea anterior. Durante a entrevista, por exemplo, quando questionada, rapidamente fez referência à paridade dos números. Não podiam estar sentadas 33 pessoas "Porque o 33 é impar e 32 é par! Só pode ser par."

A tarefa *O super chocolate* foi a preferida de Raquel, o que não significa ter sido aquela em que obteve melhores resultados. Inicialmente solicitou a ajuda da professora por diversas vezes, para assim esclarecer se o objectivo era calcular os bombons e caramelos de cada uma das caixas representadas. Foi necessário reforçar a ideia de que o que se pretendia era encontrar uma forma de calcular os chocolates existentes numa qualquer caixa. Vendo que a professora não acrescentava mais nenhuma informação, Raquel desistiu de a chamar e começou a resolver o problema. Começou por calcular os bombons e caramelos existentes nas caixas representadas, como se pode ver na figura 5, explicitando também a relação entre as linhas de bombons e as linhas de caramelos. Assim que acabou, pediu novamente a presença da professora para lhe explicar o que já tinha feito e para que esta validasse o seu trabalho. Voltou-se novamente a referir que se pretendia encontrar uma forma de calcular os bombons e caramelos de uma qualquer caixa, sabendo apenas as suas dimensões. Deram-se, mesmo, alguns exemplos de caixas com diferentes dimensões.

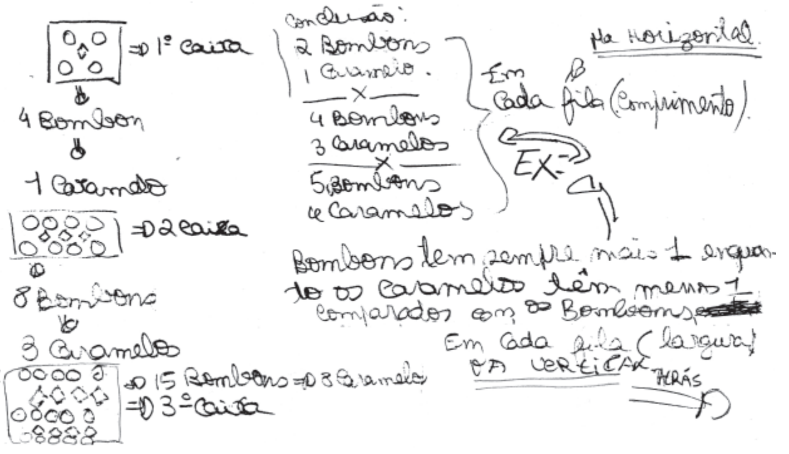


Figura 5 — Parte da resolução apresentada por Raquel para a tarefa *O super Chocolate*

Apercebendo-se de que o que tinha feito não era suficiente, Raquel continuou a apresentar o mesmo tipo de resultados para caixas de diferentes tamanhos. Desta forma, procurava que um elevado número de exemplos justificasse a conclusão a que tinha chegado.

Mesmo durante a entrevista, Raquel continuou a apresentar o mesmo tipo de raciocínio e a convicção com que o fazia era enorme. Utilizava as dimensões das caixas para desenhar as figuras. No entanto, não conseguia utilizar directamente essa informação para calcular o número de bombons e caramelos. À semelhança de outros colegas, estava convencida que ao encontrar a relação entre o número de bombons e de caramelos tinha resolvido o problema. Assim, foi só depois de alguma insistência que Raquel começou a apresentar algumas formas de calcular o número de caramelos e de bombons:

> Professora: Mas eu quero saber como devemos fazer para calcular o número de caramelos e de bombons. A isso ainda não respondeste!
> Raquel: Somamos.
> Professora: Como?
> Raquel: Contamos os bombons em cada linha e os caramelos em cada linha.
> Professora: Mas então tens que desenhar as caixas!
> Raquel: Não, podemos calcular mentalmente. Imaginamos.

Apesar de responder com alguma certeza, quando lhe foi pedido para imaginar algumas caixas e descobrir o número de caramelos e bombons, Raquel sentiu algumas dificuldades. Mesmo assim, conseguiu apresentar o resultado correcto e passar das adições sucessivas para a multiplicação, como uma forma de simplificar os cálculos.

Quando, no final da entrevista, se procurou associar o cálculo dos caramelos e bombons à área da caixa, Raquel revelou alguma desconfiança. Para ela, ao calcular a área da caixa estávamos a calcular tudo o que se encontrava no seu interior, tanto os bombons como os caramelos. Esta confusão estava relacionada com as unidades de medida adoptadas e acabou por ser esclarecida na turma durante a aula de discussão da tarefa. Apesar das suas dificuldades para trabalhar o problema do ponto de vista geométrico, a aluna conseguiu estabelecer diferentes relações e expressá-las de uma forma geral, aproximando-se, assim, do tratamento algébrico do problema.

A tarefa *Figuras com palitos* foi recebida por Raquel com algum entusiasmo. Tal como aconteceu com os seus colegas, também ela ficou um pouco admirada com a utilização de palitos. Durante a realização desta tarefa, Raquel praticamente não pediu a ajuda da professora. Apenas na alínea c) teve a preocupação de confirmar se o que estava a fazer era o correcto. Como forma de responder à sua dúvida, tentou-se recordar um pouco o conceito de área, para assim Raquel ganhar consciência daquilo que estava a fazer.

Embora não sendo pedido para construir a quarta figura, Raquel optou por fazer essa construção e, antes disso, efectuou a construção das três figuras anteriores. Como explicou, construiu todas as figuras para assim "ver bem o esquema, como é que iria ser montada a quarta". Este tipo de estratégia fez com que a primeira explicação de Raquel sobre a construção das figuras, se baseasse numa lógica recursiva, dizendo que se acrescentava "mais um palito em baixo e do lado e mais dois nas escadas". Apesar disso, não se baseava nas figuras anteriores para construir a seguinte, ou seja, construía cada figura desde o início. Desta forma, para responder à alínea a), Raquel baseou-se na construção efectuada e no desenho que fez posteriormente. A resposta à alínea b) seguiu o mesmo processo. No entanto, enquanto na alínea a) não apresentou nenhuma expressão numérica, na alínea b), devido à imposição da questão, apresentou uma expressão baseada nos dados da figura. Além disso, enquanto na construção da quarta figura recorreu à construção com palitos, na questão b) recorreu apenas ao desenho (ver figura 6). Por outro lado, ao contrário do que tinha acontecido inicialmente, neste caso Raquel não sentiu a necessidade de desenhar também a quinta figura, conseguindo, por isso, estabelecer a relação entre o número de ordem e as características da figura.

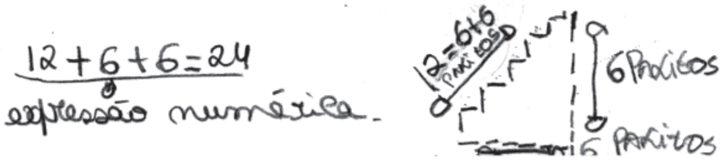


Figura 6 — Resolução apresentada por Raquel à alínea b) da tarefa *Figuras com palitos*

As dificuldades de Raquel começaram a surgir na alínea c). Mais uma vez esqueceu a unidade de medida de área que estava a ser utilizada, preocupando-se, apenas, em aplicar a fórmula. Como referiu "eu baralhei-me um bocadinho porque normalmente é costume pôr a área do rectângulo ou do quadrado e aqui tinha três lados, tinha o nível das escadas e depois na vertical e na horizontal". Inicialmente Raquel ainda tentou contar os quadrados. No entanto, o facto de apenas utilizar a adição no cálculo da área, causou-lhe alguma estranheza: "era isso que me baralhou muito, normalmente a área é uma multiplicação não é uma soma!". Acabou, por isso, por arranjar uma forma de utilizar a multiplicação no cálculo da área, multiplicando o número de ordem (correspondente também ao número de palitos da base), pelo seu dobro (correspondente ao número de palitos das escadas), como pode ser observado na figura 7. O mesmo tipo de expressão foi também utilizado nas alíneas d) e e), fazendo com que os resultados obtidos fossem incorrectos.

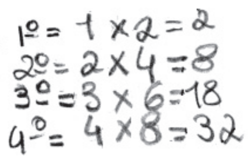


Figura 7 — Expressões numéricas apresentadas por Raquel na alínea c)
da tarefa *Figuras com palitos*

Quando, durante a entrevista, foi questionada sobre o significado do resultado das operações anteriores, Raquel não conseguiu fornecer nenhuma explicação. Como forma de a incentivar a identificar o seu erro, procurou-se recordar o significado de "unidade de medida de área", dando como exemplo algumas tarefas efectuadas com o tangram em aulas anteriores. Só depois disso, é que Raquel reconheceu que "tinha de ser a soma", apresentando como resposta as expressões numéricas correspondentes. Nesta altura, relacionou também as expressões obtidas com as utilizadas durante a resolução de uma tarefa realizada em aulas anteriores, onde eram construídas escadas recorrendo à utilização de policubos. Deste modo, o facto de Raquel não ter ainda consolidado o conceito de área, acabou por influenciar o seu desempenho na tarefa. Em contrapartida, foi possível verificar o entendimento do conceito de perímetro. Nesse caso, Raquel não teve dificuldade em descobrir a regra geral de formação do padrão, conseguindo aplicá-la no cálculo do perímetro do termo de ordem 20. Compreendeu que o número de palitos usado na base e no lado direito da figura coincide com o seu número de ordem e que os palitos usados na construção dos "degraus" correspondem ao dobro do número de ordem.

É de realçar que nesta tarefa Raquel preocupou-se mais com a organização dos dados. Tal como fez nas tarefas anteriores, também nesta procurou explicar todo o seu raciocínio. No entanto, além dessa preocupação, aqui tentou que as informações fossem colocadas de uma forma mais metódica, o que também se verificou nas tarefas seguintes.

David

David vive com os pais e o seu irmão numa freguesia próxima da escola. Filho de dois taxistas, sonha vir a ser cientista, pois assim pode "descobrir coisas novas". Nos seus tempos livres, gosta de jogar *playstation* e de jogar futebol com os seus amigos. É um rapaz de poucas palavras que se relaciona apenas com um núcleo reduzido de alunos. Com os restantes colegas não se sente tão à vontade, acabando por se afastar.

Como aluno pode dizer-se que é responsável, ainda que durante as aulas revele algumas atitudes contraditórias. São muitas as situações em que parece estar "na lua", não prestando atenção ao trabalho desenvolvido. Outras vezes, começa a falar sem que lhe tenha sido dada autorização, o que acontece sempre que quer mostrar à professora e aos colegas que domina determinado assunto. Mesmo não sendo um aluno que dedica muito tempo ao estudo, David diz que gosta de andar na escola e de estudar, elegendo Ciências da Natureza como a sua disciplina favorita. Caso investisse mais algum tempo no estudo, poderia obter melhores resultados.

David é um rapaz bastante reservado e um pouco inseguro. Ainda que possa ser considerado um bom aluno a Matemática, vê-se como um aluno médio e considera esta disciplina "uma seca".

A experiência com tarefas envolvendo exploração de padrões

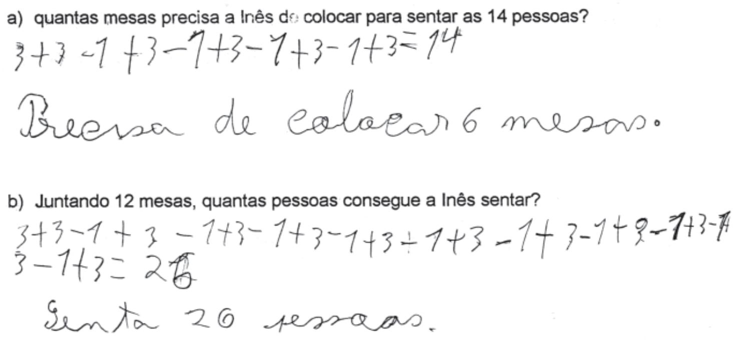
Depois de analisar o trabalho desenvolvido por David ao longo das seis tarefas envolvendo exploração de padrões, verifica-se que este conseguiu responder com sucesso à maioria das questões. Na verdade, ainda que, por vezes, as respostas não fossem as mais completas, conseguiu resolver correctamente praticamente todas as tarefas. Descreve-se, em seguida, o envolvimento de David nas tarefas seleccionadas para este artigo, o que poderá permitir compreender as características do trabalho que desenvolveu.

A tarefa *Organizando mesas* foi a preferida de David e aquela que ele considerou mais fácil, tendo conseguido responder com sucesso à totalidade das questões. Durante a aula praticamente não pediu a ajuda da professora, mantendo-se concentrado no seu trabalho. Por vezes, era ela que se aproximava e, ao ver que a resolução dele se afastava da dos seus colegas, pedia-lhe algumas explicações adicionais.

Ao contrário da maioria dos seus colegas, que recorreram ao desenho para resolver as questões, David recorreu a uma expressão numérica. Quando, durante a entrevista, foi confrontado com esta situação, explicou que era uma forma de poupar tempo:

> Professora: Os teus colegas utilizaram vários desenhos mas tu não quiseste. Porquê?
> David: Porque levava muito tempo.
> Professora: Dava muito trabalho?
> David: Não é por dar muito trabalho mas é que ia desenhar e ia ficar isto tudo cheio…
> Professora: Então não quiseste encher a folha.
> David: Não, não fazia falta, tentei logo resolver através da expressão numérica.

Assim, para responder à questão a) David apresentou uma expressão baseada em algoritmos simples e repetitivos, seguindo o mesmo processo para responder à questão b) (ver figura 8).


a) quantas mesas precisa a Inês de colocar para sentar as 14 pessoas?

3+3 -1 +3-1+3-1+3-1+3= 14

Precisa de colocar 6 mesas.

b) Juntando 12 mesas, quantas pessoas consegue a Inês sentar?

3+3-1+3-1+3-1+3-1+3-1+3-1+3-1+3-1+3-1+3-1
3-1+3= 26

Senta 26 pessoas.

Figura 8 — Resolução apresentada por David às questões a) e b) da tarefa *Organizando mesas*

Durante a entrevista David explicou melhor o significado da expressão:

> Professora: Podes-me explicar o significado destes números?
> David: É que, a partir daqui há quatro pessoas numa mesa só que só po-

> demos contar três porque se formos juntar uma mesa essa pessoa já não se consegue sentar aí.
> Professora: E então?
> David: Então fui fazendo sempre 3 – 1.
> Professora: E como fazes para contar as mesas?
> David: Conto os três, e deu seis.
> Professora: Mas na b) sabias as mesas e não sabias as pessoas.
> David: Sim, mas fiz os 3 e fui contando as mesas até ter 12. Depois parei, fiz a conta e vi que dava 26.

Desta forma, para resolver as duas primeiras questões, David não recorreu a nenhum dos processos previstos durante a caracterização da tarefa. No entanto, ainda que não utilizasse o desenho durante esta fase, certamente imaginava o modo como estavam colocadas as mesas e as características da mesa formada, o que lhe facilitou a chegada à resposta nas duas últimas questões.

Ao constatar que, na questão c), a sua expressão "ficava muito grande", David optou por alterar a sua estratégia. Passou a analisar o problema do ponto de vista geométrico e calculou o perímetro da mesa formada pela justaposição das mesas quadradas. Deste modo, a generalização surgiu da análise dos dados geométricos e não dos numéricos. Ainda que na ficha de trabalho apenas apresentasse as operações (20 + 20 = 40 e 40 + 2 = 42), durante a entrevista referiu claramente que a mesa grande era um rectângulo e que bastava "fazer o perímetro" para saber as pessoas. Desta forma, David conseguiu estabelecer a relação entre o número de mesas quadradas justapostas e o comprimento da mesa rectangular formada. Mesmo não tendo usado símbolos para expressar a relação encontrada, o facto de conseguir associar o número de pessoas sentadas ao comprimento da mesa rectangular formada, revela uma evolução ao nível da abstracção. O aluno começou a afastar-se do tratamento exclusivamente aritmético do problema e começou a desenvolver o seu pensamento algébrico.

Para responder à questão d) baseou-se no processo já utilizado na alínea c), não fazendo qualquer referência aos números pares. Porém, durante a entrevista, falou, espontaneamente, nessa característica:

> Professora: A pergunta d) está parecida à c).
> David: Fiz da mesma maneira e vi que esta forma só dá para os números pares.
> Professora: Mas não escreveste nada sobre os números pares.
> David: Esqueci-me.
> Professora: Então achas que a Inês calculou quantas pessoas estavam sentadas exactamente?
> David: Não, acho que já sabia que só dava para os números pares.

Assim, apesar de ter começado por resolver a tarefa de uma forma pouco prática, David acabou por alterar a sua resolução ao verificar que, nos casos em que era considerado um elevado número de mesas, a estratégia seguida não era a mais vantajosa. Deste modo, e tal como alguns dos seus colegas, também David terminou a tarefa um pouco antes do final da aula. O tempo restante utilizou-o para ajudar o seu colega de carteira. Aliás, esta era uma atitude que David mantinha durante as aulas de Matemática. Como se relacionava bastante bem com esse colega, uma vez que jogavam futebol juntos, e sabendo as dificuldades sentidas por ele na disciplina de Matemática, sempre que podia fornecia-lhe algum apoio.

A tarefa *O Super Chocolate* também foi resolvida com sucesso por David, ainda que os registos não estivessem tão completos como nas tarefas anteriores. Assim como os restantes colegas, também David pediu inicialmente a ajuda da professora. A estrutura pouco orientada da tarefa provocou algumas dificuldades.

Depois de ouvir as explicações que a professora tinha fornecido à turma, David começou a trabalhar. Inicialmente, optou por contar os chocolates existentes em cada uma das caixas. No entanto, rapidamente abandonou a contagem chocolate a chocolate para utilizar uma expressão numérica. Tinha já identificado a relação entre a distribuição de caramelos e bombons, chegando à conclusão que existia sempre menos uma linha e uma coluna de caramelos. Depois de estabelecer essa relação, verificou que "os bombons estavam distribuídos pela área da caixa". Ainda que na folha com a tarefa apenas indicasse as expressões numéricas utilizadas, durante a entrevista David esclareceu o seu significado, associando-as à área da caixa:

> Professora: Como estavam distribuídos os chocolates?
> David: Estavam… iam ter bombons sempre no meio de quatro… tinha que ter um caramelo sempre no meio de quatro bombons.
> Professora: O tamanho da caixa influenciava a distribuição dos chocolates?
> David: Os bombons eram distribuídos pela área da caixa.
> Professora: Podes explicar melhor?
> David: Porque se calcularmos a área da caixa vamos ter o total de bombons e, depois, calculamos a mesma área só que tiramos um algarismo.
> Professora: Um algarismo ou uma unidade?
> David: Uma unidade no comprimento e uma unidade na largura, e dava os caramelos.

Assim, além de relacionar as dimensões da caixa com as colunas e linhas de bombons, David conseguiu reconhecer que os caramelos e os bombons também estavam organizados numa espécie de rectângulos. Depois de ter calculado os bombons existentes nas caixas representadas, deu o exemplo de uma nova caixa, desenhando apenas um rectângulo, e calculou a quantidade de chocolates nela existente (ver figura 9). Apesar de não ter calculado o total de caramelos das caixas representadas, no exemplo da nova caixa conseguiu calcular o total de chocolates, juntando os caramelos e os bombons.

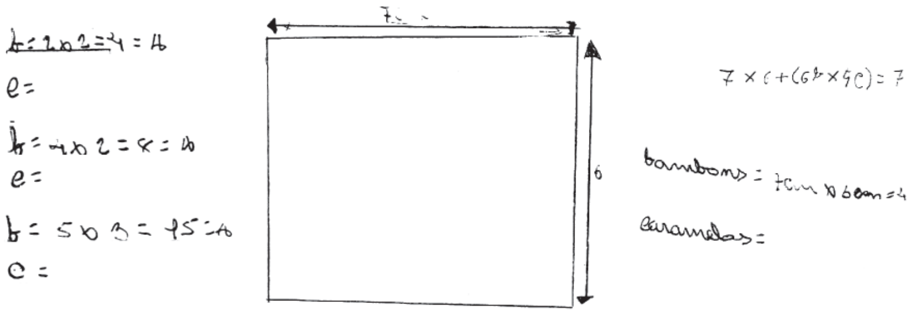


Figura 9 — Resolução apresentada por David na tarefa *O super Chocolate*

Posteriormente, devido aos constantes pedidos da professora para explicar o método encontrado para calcular o número de bombons em qualquer caixa, tentou escrever uma breve justificação, ainda que muito confusa: "Para calcular os bombons faz-se a área da caixa e para calcular os caramelos é a área, mas tira-se um número de cada". Mais uma vez, as dificuldades de David estavam relacionadas com a comunicação do seu raciocínio, principalmente por escrito, e não propriamente com tarefa, que ele considerou fácil.

Durante a resolução desta tarefa, foi ainda possível constatar que David utilizou letras de modo a simplificar as palavras 'caramelos' e 'bombons'. Além disso, verificou-se que, ainda que de um modo pouco consistente, o aluno não se limitava a dizer que o 'b' significava bombons e o 'c' caramelos. Por vezes ele referia que o 'b' representava os bombons que existiam na caixa, ou seja, o número de bombons. Assim, ao associar o número de caramelos e de bombons às dimensões e à área das várias caixas, David conseguiu olhar para o problema do ponto de vista geométrico e encontrar uma forma geral de o resolver, o que é indiciador do desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

A tarefa *Figuras com palitos* foi recebida por David com alguma admiração. O facto de trabalhar com palitos causava-lhe alguma estranheza, à semelhança do que acontecia com a restante turma. O aluno via cada nova figura como a junção à anterior de uma nova linha de quadrados. Como tentou explicar durante a entrevista "acrescentam-se mais palitos... mais quadrados… que faziam… quadrados de palitos, como o número da figura, e depois os palitos que estavam por dentro retiravam-se".

Para responder à questão a), David optou por dar continuidade ao padrão. Inicialmente tentou construir a quarta figura utilizando palitos. No entanto, ao sentir alguma dificuldade com a sua colocação, optou por desenhar a figura. A construção da figura com palitos acabou por ser feita pelo seu colega de carteira.

A questão b) também não levantou dificuldades a David, que rapidamente concluiu que o objectivo era calcular o número total de palitos. Ao contrário da questão anterior, em que tinha recorrido ao desenho, nesta questão utilizou uma expressão numérica para chegar ao resultado. Quando, durante a entrevista, lhe foi pedido para explicar o significado da expressão e de cada um dos números utilizados, fez referência ao quadrado que podia ser construído com os palitos da figura:

> Professora: Como surgiram estas expressões?
> David: Já sabíamos que o perímetro era sempre lado mais lado mais lado, ou quatro vezes o lado.
> Professora: Porquê?
> David: Porque temos quatro lados.
> Professora: Na figura tens quatro lados?
> David: Assim a ver não mas… contamos estes para ali [estava a referir-se aos palitos utilizados nas escadas] e temos quatro lados.
> Professora: Então que figura formas?
> David: Um quadrado.

Assim, além de conseguir relacionar o número de ordem com as características da figura, David conseguiu transformar a figura de forma a relacioná-la com uma figura geométrica sua conhecida.

Para resolver a questão c), também tentou calcular a área do quadrado antes descrito, através do produto dos seus lados. No entanto, rapidamente verificou que isso apenas funciona na primeira figura. Depois destas tentativas, David pediu a ajuda da professora. Explicou-lhe o que já tinha feito e ficou à espera que esta lhe desse alguma orientação. Para não influenciar demasiado o seu trabalho, a professora limitou-se a recordar qual era a unidade de área utilizada. Depois desta explicação, David começou a desenhar os quadrados no interior das figuras da folha. De seguida, começou a colocar as expressões numéricas relativas às diferentes figuras. Ainda que não recorresse à utilização de nenhuma tabela, esforçou-se por colocar os dados de uma forma organizada e sistemática, como pode ser verificado na figura 10.

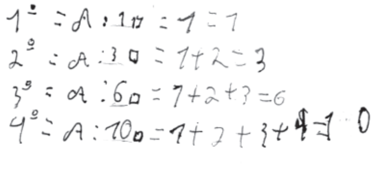


Figura 10 — Resolução apresentada por David na alínea c) da tarefa *Figuras com palitos*

Durante esta fase, David sentiu que as expressões lhe eram familiares e conseguiu relacioná-las com outra tarefa já explorada na aula, onde foram construídas escadas recorrendo à utilização dos policubos. Como referiu, ainda procurou a ficha com essa tarefa para, assim, tirar algumas dúvidas mas constatou que não a tinha consigo.

Para responder às duas últimas questões, baseou-se nas expressões antes descobertas, tanto no caso do perímetro como no da área, não revelando, por isso, dificuldades com a generalização.

Durante a entrevista foi possível sentir, por parte de David, algum desconforto com a fórmula encontrada para o cálculo da área. Esse desconforto não estava relacionado com a utilização da adição, em vez da multiplicação, como acontecia com alguns dos seus colegas, mas sim com a pouca eficácia que a fórmula teria no caso de outras figuras. Como referiu, "se fosse uma figura com 1000 nunca mais acabava!". Mesmo assim, não conseguiu encontrar uma estratégia alternativa. Desta forma, foi com uma enorme satisfação que David, durante a aula de discussão, ouviu a explicação do processo que permitia a utilização da multiplicação. Manifestou, contudo, também alguma desilusão por não ter conseguido ele próprio descobrir esse processo. Sabia que tinha andado lá próximo e que, por isso, podia ter conseguido. Ainda que não mostrasse abertamente o seu desalento, a sua expressão denunciava-o.

Discussão de resultados

De forma geral, os alunos conseguiram realizar com sucesso as tarefas propostas, revelando um grande entusiasmo durante o trabalho com padrões. Durante a resolução, privilegiaram sempre abordagens que mantinham presentes as características iniciais do problema, trabalhando em conjunto as informações numéricas e geométricas. Em nenhuma das situações, os alunos recorreram a abordagens exclusivamente numéricas, evitando transformar os problemas em meras sequências numéricas. Esta é, por isso, uma situação que não vai de encontro às situações descritas por outros autores (Rivera & Becker, 2006; Vale & Pimentel, 2005).

Rivera e Becker (2006), depois de analisar o trabalho desenvolvido por futuros professores durante tarefas envolvendo exploração de padrões representados de diferentes formas (numéricas e figurativas), concluíram que a maioria optou por resoluções essencialmente numéricas, prestando pouca, ou nenhuma, atenção às informações fornecidas pelas figuras. Apenas um reduzido número de futuros professores considerou as relações existentes entre as diferentes figuras, o que lhes permitiu alcançar uma melhor compreensão das fórmulas estudadas e da função desempenhada pelas diferentes variáveis. Também Vale e Pimentel (2005), depois de analisar a actividade de futuros professores, associada à resolução de tarefas com as mesmas características de algumas das aplicadas neste estudo, concluíram que a maioria utiliza uma abordagem numérica, manifestando, por isso, insuficiências na sua resolução e não conseguindo obter uma generalização completa ou obtendo uma lei geral de formação errada. Em contrapartida, aqueles que recorrem a uma abordagem exclusivamente geométrica ou mista, conseguem obter melhores resultados. Como referem as autoras, é, assim, necessário "incentivar os nossos alunos a olhar para os problemas propostos de vários modos, e a mobilizar todos os seus conhecimentos sejam eles de natureza numérica ou geométrica." (p. 19)

Talvez por ainda não terem sido sujeitos a experiências de aprendizagem onde as fórmulas e os procedimentos algébricos são valorizados, os alunos-caso, assim como a restante turma, optaram por abordagens em que as fórmulas surgiam naturalmente de acordo com as figuras. Mesmo quando David não recorreu a representações pictóricas durante as suas resoluções, as expressões numéricas apresentadas estavam de acordo com as figuras já existentes na tarefa.

Apesar de todos os alunos valorizarem as características do problema, os processos usados durante a sua resolução apresentaram algumas diferenças. O mais utilizado foi, sem dúvida, o método das diferenças finitas, baseado nas diferenças encontradas entre os diferentes termos da sequência para descrever o padrão. A prevalência deste método foi também documentada por outros autores (Hargreaves et al., 1999; Orton & Orton, 1999) e traduz um entendimento recursivo do padrão. Nas tarefas em questão, dado que a maioria das respostas não exigia o cálculo de termos muito distantes da sequência, esta estratégia acabou por se revelar eficaz.

Além do método das diferenças finitas, foi também possível encontrar outros dos indicados por Orton e Orton (1999), nomeadamente o método da contagem e o método da proporcionalidade directa. Tendo em conta que a maioria dos padrões estudados recorria ao uso de figuras, o método da contagem foi utilizado, essencialmente, no cálculo dos termos mais próximos da sequência. Na sua maioria, os alunos utilizaram as representações concretas ou pictóricas para assim conseguir responder a algumas das questões. Sempre que as representações pictóricas envolviam três dimensões, as representações concretas eram as privilegiadas. Nos casos dos alunos com dificuldades nas operações numéricas, esta estratégia foi ainda mais utilizada. Por outro lado, o método da proporcionalidade directa surgiu quando, alguns alunos, na tentativa de encontrar uma resposta mais rápida, assumiam que os termos seguintes da sequência iam variar na mesma proporção que os anteriores.

Orton e Orton (1999) fizeram também referência ao que seria o método linear, como sendo aquele em que os alunos revelavam uma maior consciência das operações envolvidas. No presente estudo, este método foi também utilizado pelos alunos. Sempre que procuravam converter os dados fornecidos pelas figuras numa expressão numérica, revelavam compreender o significado de cada número e operação presentes nessas expressões. Aliás, de uma forma geral, a passagem de informação de uma representação para outra, não provocou grandes dificuldades, o que vai de encontro aos resultados obtidos por Modanez (2003). É de realçar, no entanto, que, ainda que os alunos compreendessem o significado de cada número e operação, nem sempre conseguiam relacionar os cálculos efectuados com as propriedades geométricas das figuras, nomeadamente as associadas a área e perímetro. É exemplo disso a resolução apresentada por Raquel na tarefa *Organizando mesas*.

Durante a resolução das tarefas foi possível verificar que, por vezes, quando confrontados com expressões gerais que exigem vários cálculos, no cálculo de termos mais afastados da sequência os alunos procuram encontrar métodos mais rápidos. Esta situação observou-se tanto com David, como com Raquel. No entanto, enquanto Raquel acabava por optar por soluções erradas, David ao não conseguir obter o método pretendido, optava por manter o mesmo.

Orton e Orton (1999) referem que uma das causas relacionadas com esta mudança errada de método, é a dificuldade em reunir todos os dados e em dominar toda a informação. Ainda que esta seja uma explicação que também se aplica aos alunos em causa, deve-se acrescentar que a não verificação dos resultados obtidos é outra das causas desse erro. Como aconteceu algumas vezes com Raquel, ao procurar um novo método acreditava automaticamente nas soluções encontradas, esquecendo-se constantemente de as verificar. David, pelo contrário, preocupava-se com a verificação dos resultados obtidos, o que fez com que os novos métodos só fossem escolhidos quando estes resultados eram compatíveis com os dados do problema. Ou seja, também neste aspecto, as figuras desempenharam um papel essencial. De facto, as representações concretas e pictóricas, feitas pelo aluno ou já existentes na tarefa, foram utilizadas para confirmar os resultados obtidos nas representações numéricas.

Deste modo, constata-se que os alunos conseguem compreender a natureza recursiva do padrão com relativa facilidade. No entanto, têm alguma dificuldade em ir além desse reconhecimento ou não sentem necessidade de testar as suas conjecturas e de procurar uma estratégia mais eficaz, que os encaminhe mais facilmente para a descoberta da regra geral de formação do padrão. Isto é, conseguem fazer a generalização próxima mas sentem dificuldades na generalização distante.

De qualquer forma, ao evitarem o trabalho exclusivamente numérico, os alunos conseguem resolver com mais facilidade as tarefas, alcançando, pois, melhores resultados. Assim, como foi referido por Bassarear (1997), a exploração de padrões torna a Matemática acessível para todos.

É de realçar que, apesar dos alunos estarem motivados para a resolução das tarefas, quando, por vezes, se confrontavam com dificuldades, procuravam ultrapassá-las recorrendo à ajuda da professora, adoptando, assim, uma atitude de alguma dependência. Como foi possível verificar no caso de Raquel, a insegurança leva os alunos a pedir constantemente legitimação externa. Por outro lado, as dificuldades na organização e registo dos dados fazem com que o papel orientador da professora seja indispensável. Constatou-se, por isso, que, inicialmente, alguns alunos podem necessitar de mais incentivos que outros. O entusiasmo que sentem pela tarefa não é suficiente para que consigam ultrapassar todos os obstáculos e as orientações e incentivos externos, do professor ou dos colegas, tornam-se fundamentais para que o aluno consiga progredir. Em muitos casos, uma simples sugestão para organizar os dados, pode fazer toda a diferença, principalmente quando essa é a principal dificuldade dos alunos. Com o passar do tempo, os alunos acabam por adquirir mais confiança, adoptando uma atitude menos dependente.

Como já foi referido, constata-se que a recolha e organização dos dados, bem como o seu registo, são as situações causadoras de maiores dificuldades aos alunos. Assim como aconteceu nos estudos levados a cabo por outros autores (Amaral, 2003; Orton & Orton, 1999), estas dificuldades acabaram por condicionar o trabalho dos alunos, principalmente as relacionadas com o registo dos dados. Ainda que os alunos compreendessem e conseguissem descrever oralmente o padrão, tinham dificuldades em fazê-lo por escrito. Sempre que possível procuravam fazê-lo apenas oralmente, como aconteceu com David, por exemplo, na tarefa *O Super chocolate*. Igualmente, se verificou que sentiam mais dificuldade em descrever a regra geral de formação do padrão do que em continuar o próprio padrão. A comunicação matemática é, por isso, um aspecto que continua a levantar imensos problemas. Comunicar uma ideia ou um raciocínio, oralmente ou por escrito, de modo que seja claro não é fácil, pois exige sobretudo organização e clarificação das ideias e raciocínios. Constitui uma tarefa complexa sobretudo para os alunos do ensino básico que não sejam solicitados a explicar e justificar os seus raciocínios, quer em linguagem corrente quer em linguagem matemática. No entanto, a exploração de padrões, ao despertar a atenção dos alunos e o seu gosto pela descoberta, constitui uma excelente oportunidade, entre outras, para desenvolver a comunicação. De cada vez que tentam descrever o padrão e a regra geral de formação, os alunos começam a utilizar significativamente vocabulário apropriado e a desenvolver a argumentação baseada em raciocínios algébricos.

Também com a mobilização de conhecimentos os alunos sentiram algumas dificuldades. Aliás, esta é uma situação descrita em vários estudos (Amaral, 2003; Modanez, 2003). Apesar de conseguirem descrever e dar continuidade aos padrões estudados, não utilizaram visivelmente na sua resolução os conceitos matemáticos estudados anteriormente. A maioria dos alunos apenas fez referência aos diferentes conceitos quando a tarefa assim o exigia explicitamente, como aconteceu na tarefa *Figuras com palitos*, onde as questões colocadas faziam referência à utilização de área e perímetro.

Desta forma, verificou-se que para responder às diferentes questões propostas, a maioria das vezes foram encontrados processos de resolução independentes dos conteúdos já trabalhados pelos alunos. Aliás, em algumas tarefas, foi possível constatar que a obrigatoriedade em trabalhar determinado conceito acabou por dificultar a descoberta da lei geral de formação do padrão. Na tarefa *Figuras com palitos*, o facto de a expressão geral para calcular a área das diferentes figuras, baseada numa lógica recursiva, utilizar a adição em vez da multiplicação, causou alguma estranheza. Foi uma situação que obrigou os alunos a reflectir sobre o significado do conceito de área e a não aplicar as fórmulas de uma forma mecânica.

Por outro lado, foi possível verificar que, sempre que os alunos utilizavam os conceitos matemáticos já trabalhados anteriormente, sentiam-se mais seguros na descrição dos resultados obtidos e na caracterização da regra geral de formação do padrão. Mesmo quando não aplicavam directamente estes conceitos, durante a discussão das tarefas, mediante sugestão dos colegas ou da professora, estes acabaram por ser explorados servindo para ultrapassar as dificuldades na obtenção da regra geral de formação do padrão. Assim, verificou-se que os conceitos matemáticos já estudados poderiam ser considerados uma ajuda ou um impedimento à descoberta do padrão. Tudo depende da consolidação apresentada pelos alunos relativamente a esses conceitos. Talvez por isso, as tarefas não devam fazer referência explícita a esses conceitos, deixando a sua mobilização ao critério dos alunos.

De modo geral, foi possível verificar que os alunos analisados conseguiram desenvolver as diferentes capacidades relacionadas com a resolução de tarefas envolvendo a exploração de padrões, nomeadamente detectar e descrever o padrão; prolongar um padrão até ao próximo termo ou até termos próximos; calcular o valor de termos específicos de um padrão e continuar um padrão para assim responder a um problema. Todo o trabalho com padrões possibilitou também momentos relevantes para consolidação dos conceitos matemáticos abordados nos problemas explorados.

As tarefas aplicadas, ao privilegiar diferentes representações, deram também a oportunidade aos alunos de recorrer a diferentes representações para descrever o padrão estudado, o que acabou por desempenhar um papel essencial no seu sucesso. Como alguns autores referem, (Orton et al. 1999), apresentar ou deduzir um padrão com uma determinada representação, não deve ser assumido automaticamente como uma ajuda ao aluno, no sentido de ampliar, generalizar ou provar o padrão. No entanto, depois de analisar o trabalho desenvolvido pelos alunos, verifica-se que a utilização de diferentes representações contribuiu para o seu sucesso. As representações pictóricas permitiram que se concentrassem no seu raciocínio, uma vez que ajudaram a compreender o modo como a variação de uma quantidade alterava as restantes. Por sua vez, as representações concretas desempenharam um papel essencial sempre que as representações pictóricas não eram suficientes para clarificar os raciocínios. Ainda que também fossem causa de alguns distúrbios e faltas de concentração, devido ao entusiasmo manifestado pelos alunos com a utilização do material, ajudaram-nos a ultrapassar as dificuldades com a visualização espacial. Os contratempos provocados pelo excessivo entusiasmo dos alunos podem ser contornados, contudo, com uma utilização sistemática de materiais que possibilitem a construção de representações concretas facilitadoras da resolução das tarefas propostas.

A finalizar

Compreender Matemática passa por trabalhar com diferentes representações de uma mesma ideia, realizando conexões entre elas e sabendo identificar as limitações de cada uma. As tarefas aplicadas, além de permitirem identificar, construir e compreender padrões, deram a oportunidade aos alunos de comunicar esses padrões aos outros, representando-os das mais variadas formas, desenvolvendo assim o seu poder matemático. Por outro lado, revelaram ser boas oportunidades de utilizar e estabelecer relações entre diferentes conceitos matemáticos, permitindo dar significado à Matemática que aprendem. Estes alunos, nas tarefas realizadas, ao procurar generalizar os resultados obtidos depois da descoberta de padrões, estavam a utilizar, de forma compreensiva e nalguns casos implicitamente, conceitos de variáveis e de relações entre essas variáveis, componentes importantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico (e.g. NCTM, 2000; Usiskin, 1999).

Os padrões e o pensamento algébrico são áreas onde ainda há muito pouca investigação realizada em Portugal. Este trabalho pode ajudar a reflectir sobre possíveis trajectórias a traçar para o desenvolvimento de novas linhas de investigação e do ensino dos padrões no currículo da matemática na educação básica.

Notas

1. Este estudo fez parte de uma investigação mais ampla, realizada no âmbito do desenvolvimento de uma Tese de Mestrado em Ensino e Aprendizagem da Matemática, desenvolvida no ano lectivo de

2004-2005 onde se estudou a relação entre a resolução de problemas de padrão e o conceitos matemáticos envolvidos.

2. O enunciado das tarefas apresenta-se em anexo.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação.

Alvarenga, D. (2006). *A exploração de padrões como parte da experiência matemática de alunos do 2º ciclo.* Braga: Universidade do Minho.

Amaral, H. (2003). *Actividades investigativas na aprendizagem da matemática no 1º ciclo.* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Disponível em http://ia.fc.ul.pt/.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Bassarear, T. (1997). *Mathematics for elementary school teachers.* Boston: Houghton Mifflin Company.

Blaton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning, *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 5, 412–446.

Bogdan, R., & Biklen, S.K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto editora.

Curcio, F., Nimerofsky, B., Perez, R., & Yaloz, S. (1997). Exploring patterns in nonroutine problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2, 262–69.

Ferrini-Mundy, J., Lappan, G., & Phillips, E. (1999). Experiences with patterning. Em B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 — readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 133–136). Reston: NCTM.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. Em Lyn D. English et al. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.197–217). New Jersey: NCTM.

Goldin, G. (2003). Representation in school mathematics: a unifying research perpective. Em J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275–286). Reston: NCTM.

Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L., & Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences. Em A. Orton (Ed), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 66–83). London: Cassell

Hebert, K., & Brown, R. (1999). Patterns as tools for algebraic reasoning. Em B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 — readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 133–136). Reston: NCTM.

Howden, H. (1990). Prior experiences. Em E. Edwards (Ed.), *Algebra for everyone* (pp. 7–23). Reston: NCTM.

Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. (2003) (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3–28.

Lopes, C.A. (2002). *Estratégias e métodos de resolução de problemas em matemática.* Porto: Edições Asa.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do Ensino Básico: Competências essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Modanez, L. (2003). *Das sequências de padrões geométricos à introdução do pensamento algébrico*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC. Disponível em http://www.pucsp.br/.

NCTM(1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM. [Tradução Portuguesa: Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar, Lisboa, APM/IIE, 1991].

NCTM(1993). *Quinto ano: Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar, colecção de adendas* [tradução do original de 1992]. Lisboa: APM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Orton, A. (1999) (Ed.). *Pattern in the teaching and learning of mathematics*. London: Cassell

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and approach to algebra. Em A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104–124). Londres: Cassel.

Orton, J., Orton, A., & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In Anthony Orton (Ed.) *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (121–136). London: Cassel.

Pegg, J., & Redden, E. (1999). Procedures for, and experiences in introducing algebra in new south wales. Em B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 — readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 133–136). Reston: NCTM.

Rivera, F., & Becker, J. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4, 198–203.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1999). On the meaning of variable. Em B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 — readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 150–156). Reston: NCTM.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Em D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–366). New York: Macmillan & NCTM.

Schultz, J. (1999). Teaching informal algebra. Em B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 — readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 133–136). Reston: NCTM.

Serrazina, L., Vale, I., Fonseca, H., & Pimentel, T. (2002). Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. Em J. P. Ponte, et al.(Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp.41–58). Lisboa: SPCE Secção de Educação e Matemática.

Smith, E. (2003). *Stasis and change: Integrating paternsm functions and algebra throughout the K-12 curriculum*. Reston: NCTM.

Stake, R. E. (1994). Case studies. Em N. Denzin., & Y. Lincoln.(Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236–247). Thousand Oaks: Sage Publications.

Usiskin, Z. (1999) Conceptions of school algebra and uses of variables. Em Barbara Moses (Ed), *Algebraic thinking* (pp. 7–13). Reston: NCTM.

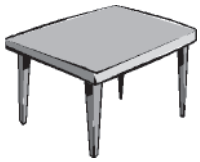
Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: Um tema transversal no currículo. *Educação e Matemática*, 85, 14–20.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2006). Os padrões no ensino aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193–213). Lisboa: SPCE Secção de Educação e Matemática.

Anexo

Tarefas

Organizando mesas



A Inês trabalha num restaurante. O chefe pediu-lhe que organizasse mesas para um jantar com 14 pessoas. A Inês começou a colocar as mesas quadradas e reparou que numa mesa poderiam estar sentadas 4 pessoas, enquanto que em duas ou três mesas, quando colocadas juntas, ficariam sentadas 6 ou 8 pessoas respectivamente.

a) Quantas mesas precisa a Inês de colocar para sentar as 14 pessoas?

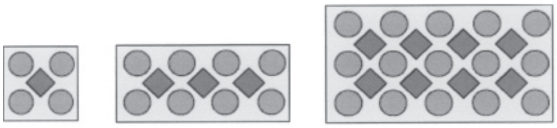
b) Juntando 12 mesas, quantas pessoas consegue a Inês sentar?

c) Consegues ver alguma regularidade que ajude a Inês a descobrir as pessoas presentes numa festa em que foram juntas 20 mesas? Explica como pensaste.

Nota: Considera que todos os lugares estavam ocupados.

d) O patrão da Inês referiu que estavam sentadas 33 pessoas, no salão em que estavam organizadas 15 mesas. A Inês discordou imediatamente. Explica por que razão a Inês discorda.

O super chocolate



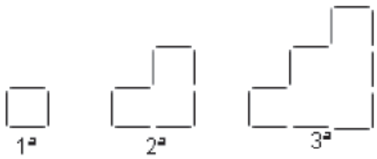
O super chocolate é apresentado em caixas onde os caramelos estão dispostos no centro de cada uma das filas de bombons, como mostra a figura.

As dimensões de cada uma das caixas dizem-nos quantas colunas e quantas linhas de bombons tem cada caixa. Por exemplo, a 1ª caixa representada tem duas unidades por lado e, portanto, tem também dois bombons por lado.

Descobre um método para encontrar o número de caramelos e de bombons em cada uma das caixas sabendo as suas dimensões. Explica e justifica o método que usaste para chegar ao resultado.

Figuras com palitos

Utilizando palitos, constrói as seguintes figuras.



a) Quantos palitos são necessários para construir a quarta figura da sequência?

b) Calcula o perímetro da sexta figura tomando como unidade o comprimento de um palito. (Encontra uma expressão numérica que te permita obter a resposta.)

c) Calcula a área das figuras representadas tomando como unidade de medida a área do quadrado representado no primeiro termo da sequência. (Encontra expressões numéricas que representem as diferentes situações.)

d) Tomando como unidade de medida a área do quadrado representado no primeiro termo da sequência, descobre a área da décima figura.

e) Explica de que modo se pode determinar a área e o perímetro da vigésima figura.

Resumo. O estudo no qual se baseia este artigo dá especial relevância à resolução de problemas e à procura de padrões, tarefas promotoras do desenvolvimento do poder matemático dos alunos. O seu principal objectivo é analisar o trabalho dos alunos em tarefas que envolvem a exploração de padrões, assim como as suas implicações no desenvolvimento e consolidação de conceitos matemáticos ao nível do 5.º ano do Ensino Básico. Neste artigo será dada especial atenção às representações e aos processos utilizados pelos alunos para chegar à generalização, entendendo esta como uma componente essencial do pensamento algébrico e a sua compreensão a base do sucesso em Álgebra.

Usou-se uma metodologia qualitativa de investigação, baseada em dois estudos de caso. A recolha de dados realizou-se numa turma do 5.º ano de escolaridade, recorrendo à observação participante como técnica privilegiada, e a outras fontes como entrevistas, questionários e documentos vários. As tarefas aplicadas, além de permitirem detectar, compreender, ou descrever padrões, deram oportunidade aos alunos de comunicar esses padrões para os outros, representando-os das mais variadas formas. Ao caracterizar e generalizar os padrões encontrados, os alunos desenvolveram, ainda, o seu pensamento algébrico. É por isso possível concluir que a proposta de tarefas de natureza problemática que envolvam a descoberta de padrões podem desenvolver, de modo eficaz, o poder matemático dos alunos e contribuir para a introdução à Álgebra.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Exploração de padrões; Pensamento algébrico; Conceitos matemáticos; Representações; Generalização.

Abstract. This article discuss part of a study that gives special relevance to problem solving and patterns exploration, tasks that promote the development of student's mathematical power. Its main purpose is to analyze fifth grade student's work in tasks that involve the exploration of patterns and its implications for the development and consolidation of mathematical concepts This article will give special attention to the representations and processes used by students to get generalization that it is considered as an essential component of algebraic thinking and his understanding the basis of success in algebra.

The study was conducted using a qualitative methodology, based in two case studies. Data was gathered in a fifth grade class, through participant observation as privileged technique, and interviews, questionnaires and document's analysis. The applied tasks, besides allowing to detect, understand, or describe patterns, had given to students the chance to communicate these patterns to others, representing them of the most various forms. In this way, it is possible to conclude that when students describe and generalize the finding patterns they developed their algebraic thinking. In this way, it is possible to conclude that the problematic tasks involving the discovery of patterns can develop student's mathematical power and contribute for introduction of algebraic concepts in an efficient way.

Key-words: Problem solving,; Patterns explorations; Algebraic thinking; Mathematical concepts; Representations; Generalization.

■ ■ ■

DINA ALVARENGA
E.B.1 de Abelheira/Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
dinalvarenga@ese.ipvc.pt

ISABEL VALE
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt