Estratégias usadas por alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas em Combinatória

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos

José António Fernandes
Universidade do Minho

Introdução

Na opinião de vários autores (e.g., Roa, 2000; Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994) a Combinatória tem sido uma área pouco explorada em investigação didáctica, apesar da importância do raciocínio combinatório como constituinte do raciocínio formal.

O ensino da Combinatória é salientado por vários autores (e.g., Fischbein, no prefácio do livro de Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994; Kapur, 1970) pela sua importância em áreas como probabilidades, programação linear, teoria de jogos, teoria de números, análise de redes, física, biologia, etc.

A importância da Combinatória, bem como o seu papel no currículo de Matemática, é assinalada por Kapur (1970), que justifica o seu ensino pelas seguintes razões: 1) uma vez que não depende muito do cálculo, é possível propor problemas apropriados logo nos primeiros graus de ensino; 2) pode ser utilizada para os alunos exercitarem a enumeração, a realização de conjecturas, a generalização, a optimização e o pensamento sistemático; 3) pela sua aplicação na física, na biologia, nas probabilidades, etc.; 4) podem ser discutidos problemas que desafiem os alunos e que os levem a descobrir a necessidade de criar novas matemáticas; 5) pode ser utilizada para fazer a distinção entre a plausibilidade e a prova rigorosa; 6) pode ajudar a desenvolver conceitos como os de aplicação, relações de ordem e equivalência, função, amostra, conjunto, subconjunto, produto cartesiano, etc. Sriraman e English (2004) acrescentam que os problemas de Combinatória podem favorecer o pensamento independente, encorajar a flexibilidade, o foco na estrutura e a partilha de soluções e oferecer oportunidades para formular problemas.

A Matemática Discreta, em que a Combinatória se insere, permite aos alunos explorar situações que não são resolvidas directamente pela resolução de uma equação ou pela simples aplicação de uma fórmula. Geralmente, a resolução deste tipo de problemas requer que o aluno desenvolva um modelo ou outra forma de representação que lhe permita visualizar a situação. Muitas situações podem ser solucionadas pela utilização de outras situações anteriormente resolvidas ou pelo recurso a problemas mais simples que envolvam um menor número de casos (Dossey, 1991).

Na opinião de English (2005), uma vez atribuído um significado aos problemas, as crianças são capazes de desenvolver, de forma independente, poderosas ideias de Combinatória, pelo que devem ser propostas situações que os encorajem a explorar, autonomamente, tais processos e ideias. Desta forma, é necessário que os currículos de Matemática para o ensino básico incluam experiências que encorajem os alunos a explorar processos e ideias combinatórias, sem instrução directa do professor. A riqueza e o significado dos contextos em que estes problemas são formulados constituem, na opinião da autora, recursos que permitem ao aluno procurar sozinho a solução. Contudo, a compreensão dos alunos pode ser estimulada por um questionamento apropriado por parte do professor (por exemplo, pedindo-lhes que expliquem e justifiquem as respostas), enquanto os alunos resolvem os problemas. Ainda na opinião da autora, é importante permitir ao aluno usar diferentes representações e abordagens, encorajá-lo a descrever e a explicar os seus processos de resolução e partilhar as suas ideias com os colegas.

Destacando a importância do raciocínio analógico, que implica compreender algo novo por analogia com algo conhecido, English (1998, 2005) refere que ele representa um processo fundamental na aprendizagem matemática das crianças e contribui significativamente para o seu desenvolvimento conceptual durante a resolução de problemas. Segundo a autora, a sua importância reforça-se na medida em que um dos grandes objectivos da educação matemática é que os alunos identifiquem conexões entre as ideias matemáticas e apliquem esta compreensão na construção de novas ideias e na resolução de novos problemas. Assim, para esta autora, a falha na aplicação de processos de raciocínio analógico representa uma das maiores causas das dificuldades dos alunos na resolução de problemas.

Acerca do significado da compreensão das ideias matemáticas, English (1998) refere que "não podemos cair na armadilha de igualar correcção a compreensão" (p. 185). A compreensão estrutural vai além do reconhecimento da estrutura do problema, entendendo por "*estrutura do problema* ou *situação problemática* as formas como as ideias matemáticas se relacionam umas com as outras, independentemente do contexto em que foram colocadas" (p. 185). Para a criança ter desenvolvido uma compreensão estrutural para um dado problema tipo, ela tem de ser capaz de: 1) explicar o significado do problema; 2) representar o problema de diferentes maneiras (inclusivamente, nas formas concreta, gráfica e simbólica); 3) aplicar processos de raciocínio analógico para identificar os elementos estruturais do problema e para identificar semelhanças e diferenças estruturais entre problemas relacionados; e 4) resolver casos mais complexos de um dado problema, bem como formular novos problemas a partir do problema dado.

Na opinião de Gardiner (1991), o valor educacional da parte mais simples da Matemática Discreta reside precisamente no facto de a mesma pressionar o aluno a "*pensar*" sobre assuntos tão elementares (na medida em que recorre a um número reduzido de pré-requisitos técnicos) como a contagem sistemática. No entanto, isto pode ser facilmente enfraquecido pelo facto de muitos professores de Matemática se sentirem na obrigação de "ajudar" os alunos a resolver os problemas mais difíceis, reduzindo a solução a um número manobrável e previsível de etapas ou regras e, consequentemente, requerendo o "*mínimo de pensamento*" por parte do aluno.

Neste contexto, no presente texto apresentam-se os principais resultados de um estudo efectuado por Correia (2008), tendo por objectivo investigar as estratégias usadas por alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas em Combinatória. Das questões de investigação estabelecidas no estudo, abordam-se aqui as duas seguintes: 1. Qual a influência dos factores operação combinatória, número de elementos envolvidos na operação combinatória e desempenho em Matemática no desempenho em Combinatória?; e 2. Que estratégias utilizam os alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas de Combinatória?

Desenvolvimento cognitivo da criança e do adolescente em Combinatória

Os trabalhos de Piaget atribuem aos esquemas combinatórios um papel importante relativamente ao desenvolvimento da inteligência formal, tendo identificado etapas no processo evolutivo espontâneo (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994).

No estudo que realizaram, Piaget e Inhelder (s/d), pedindo a crianças que permutassem ou combinassem pequenos conjuntos de fichas, concluíram que a criança no estádio pré-operacional só consegue encontrar algumas combinações, permutações e arranjos, ficando a enumeração de todas as possibilidades, numa vertente empírica, para o estádio operacional concreto. Finalmente, "a idade dos 11–12 anos assinala um marco (…) na compreensão das operações combinatórias (Piaget & Inhelder, s/d, p. 282), dando lugar ao estádio operacional formal. Quanto à compreensão do mecanismo das permutações, essa não se completa antes dos 15 anos de idade.

Para além da capacidade de enumerar sistematicamente se presumir adquirida no estádio operacional formal, há estudos que revelam que esta capacidade nem sempre é alcançada por todos os sujeitos de 12–15 anos de idade (Fischbein, 1975). Além disso, na opinião deste autor, o desenho experimental utilizado por Piaget e Inhelder incorporava um factor de aprendizagem, inerente ao aumento gradual do número de elementos, o que sugeria um método particular aos sujeitos.

Centrando-se, fundamentalmente, no efeito da instrução sobre o desenvolvimento da capacidade combinatória em crianças dos 10 aos 15 anos de idade, organizando, para tal, experiências de ensino enfatizando a utilização do diagrama de árvore como recurso didáctico, Fischbein (1975) defende que, durante o estádio operacional formal, as capacidades intelectuais requeridas para as operações combinatórias desenvolvem-se gradualmente, as combinações a partir dos 12 anos, os arranjos pelos 13 anos e as permutações não antes de atingir os 14 anos, mas sem que se desenvolva completamente nesta etapa. Utilizando o diagrama de árvore como recurso didáctico, Fischbein, Pampu e Mînzat (1970) analisaram o efeito de um ensino individualizado sobre a capacidade combinatória em crianças de idades compreendidas entre os 10 e os 15 anos, através de um método que designaram por *instrução através de descoberta guiada* (p. 193), e concluíram que é possível ensinar com êxito um conjunto de procedimentos combinatórios a crianças destas idades.

Fischbein (1975) partilha com Bruner (e discordando de Piaget) a hipótese de que recorrendo a métodos adequados de representação, é possível preparar para o estádio seguinte, bem como acelerar o processo de transição entre estádios. Assim, segundo aquele autor, a capacidade de resolver problemas combinatórios nem sempre é alcançada no nível das operações formais, quando os sujeitos não recebem instrução sobre tais processos. Consequentemente, a instrução é necessária, uma vez que a criança não adquire de forma espontânea as técnicas combinatórias, nem mesmo no período das operações formais.

Para Radatz (1980) os erros dos alunos na resolução de problemas "ilustram" dificuldades individuais e mostram que o aluno não compreendeu o significado de certo conceito, técnica ou problema de uma forma "científica" (p. 16). O autor destaca a importância da análise dos erros como forma de clarificar algumas questões relativas à aprendizagem da Matemática.

Segundo Hadar e Hadass (1981), a Combinatória é uma área na qual os alunos têm muitas dificuldades e a identificação das dificuldades que comprometem a solução de um problema combinatório é um passo necessário em direcção a uma melhor compreensão das habilidades dos alunos na resolução de problemas e na melhoria dessas habilidades.

Investigando dificuldades típicas na resolução de problemas combinatórios, aqueles autores concluíram sobre a importância da: 1) identificação dos acontecimentos a serem contados, uma vez que uma percepção incoerente dos mesmos conduz a conclusões erradas; 2) escolha de uma notação apropriada, uma vez que a mesma deve representar apenas e de forma compacta toda a informação contida no enunciado do problema; 3) compreensão do problema inicial como um conjunto de problemas particulares, porque geralmente o problema é um conjunto de problemas para diferentes valores dos parâmetros; 4) construção de métodos sistemáticos de contagem que pressupõem o domínio do problema; 5) fixação de uma ou mais variáveis de forma a obter um método de contagem coerente; 6) concretização de um plano de contagem, uma vez que um bom plano não garante a solução a menos que seja realizável; e 7) generalização através de uma estrutura unificadora das soluções obtidas para vários casos particulares.

> Possivelmente uma das chaves das dificuldades e do lento desenvolvimento espontâneo da capacidade de realização das operações combinatórias, por parte dos sujeitos, se deva a uma relação inadequada ou insuficiente com a recursão e a indução matemática, o mais genuíno e criador dos raciocínios matemáticos segundo Poincaré. (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994, p. 63)

Muitos estudos em Combinatória revelam que os alunos têm dificuldades em identificar conexões entre os problemas e, consequentemente, dificuldades em transferir as aprendizagens efectuadas para novas situações (English, 2005).

Segundo Watson (1996), as dificuldades em Combinatória podem surgir logo na confusão entre os problemas de arranjos simples e os problemas de combinações simples ou arranjos com repetição (ao não considerarem se a ordem e a repetição dos elementos é ou não relevante).

Na opinião de Hadar e Hadass (1981), a fixação de variáveis significa um acréscimo na dificuldade dos alunos, uma vez que estes estão acostumados a usar apenas as hipóteses e os dados apresentados no problema. Pode acontecer que o procedimento de fixação de elementos aplicado de forma incompleta conduza apenas a uma parte das configurações possíveis (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994).

Na construção de métodos sistemáticos de enumeração, e nomeadamente em problemas que não sejam familiares ao aluno, Hadar e Hadass (1981) referem a dificuldade de tal construção, isto porque se o aluno construir o referido método, tal significa que ele captou a essência do problema.

Apesar da importância que é atribuída por Fischbein (1975) ao diagrama de árvore como recurso produtivo na resolução de problemas de Combinatória e de Probabilidades, as investigações nesta área mostram que os alunos recorrem muito pouco a esta estratégia na resolução dos problemas e quando o fazem geralmente revelam dificuldades na sua utilização.

Considerando que um ponto-chave da avaliação do raciocínio combinatório reside na identificação do tipo de erro que aparece nas respostas dos alunos, Batanero, Navarro-Pelayo e Godinho (1997) analisaram os dados recolhidos através de um questionário aplicado a 720 alunos de 14–15 anos de idade, e enumeraram um conjunto de erros que inclui a má interpretação do enunciado, o erro de ordem, o erro de repetição, a exclusão de alguns elementos na constituição das configurações, a listagem não sistemática, as respostas intuitivas erróneas, as operações aritméticas incorrectas na procura das soluções e a interpretação incorrecta do diagrama de árvore.

Metodologia

O objectivo do estudo consistiu em estudar as estratégias espontâneas (na medida em que os alunos não receberam ensino formal em Combinatória) usadas por alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas em Combinatória, procurando-se também identificar e caracterizar factores que pudessem estar na base das dificuldades e dos erros em Combinatória dos alunos envolvidos no estudo.

O estudo realizado enquadra-se numa investigação de carácter exploratório e enfoque quantitativo e qualitativo, e, dentro deste paradigma de investigação, reveste um carácter essencialmente descritivo (Gall, Borg & Gall, 2003).

Participantes

No estudo participaram os 27 alunos de uma turma do 9.º ano de uma escola secundária/3 do distrito de Braga, no ano lectivo 2006/2007. Os participantes eram predominantemente do sexo masculino (67%), com idades compreendidas entre os 13 e os 17 anos, mas em que a maioria (78%) tinha 14 anos (também valor médio das idades), que constitui a idade normal de frequência do 9.º ano. No que respeita ao aproveitamento na disciplina de Matemática, os níveis obtidos pelos alunos variavam entre 2 e 5, e as médias obtidas no final do 7.º e 8.º anos de escolaridade eram, respectivamente, 3,6 e 3,2, numa escala de 1 a 5, sendo a distribuição dos níveis bimodal (nível 3 e nível 4), no 7.º ano de escolaridade, e unimodal (nível 3) no 8.º ano de escolaridade.

No que respeita às preferências dos participantes quanto à disciplina de Matemática, a maioria (59%) revelou uma atitude positiva e, independentemente das preferências assinaladas, todos os alunos revelaram um grande envolvimento na realização das tarefas propostas.

Método de recolha de dados

A entrevista foi o método de recolha de dados privilegiado no estudo. Durante as sessões de entrevista, audiogravadas e posteriormente transcritas, pedia-se aos alunos para responderem a um questionário constituído por três partes: 1) recolha de dados pessoais; 2) problemas de Combinatória; e 3) opinião acerca dos problemas de Combinatória propostos. No presente texto não nos referimos aos resultados relativos à terceira parte do questionário.

Nas entrevistas, os alunos, à medida que iam resolvendo os problemas propostos, expunham em voz alta os seus pensamentos, permitindo estabelecer um diálogo entre aluno e investigador com vista a obter o máximo de pistas sobre o raciocínio envolvido nas produções escritas das resoluções dos problemas. Estes diálogos foram orientados por características associadas aos problemas, pela verbalização dos pensamentos ou pelo convite à apresentação de justificações. Em média, o tempo de duração das entrevistas foi de 70 minutos, realizaram-se na sala do Clube da Matemática da escola e foram efectuadas imediatamente após a leccionação do tema de Estatística e Probabilidades (único tema leccionado até ao momento de início das entrevistas).

No sentido de melhor compreender as causas que poderiam estar na base das estratégias usadas na resolução dos problemas propostos, foram analisadas as questões (num total de 129) abordadas em sala de aula (no período que antecedeu as entrevistas), cuja resolução envolvesse a utilização de métodos de contagem (associados à determinação do número de casos possíveis e do número de caso favoráveis a um acontecimento, em experiências compostas). Os alunos recorreram a técnicas de contagem em 14% das questões analisadas, designadamente: enumeração (em 6% das questões); diagrama de árvore (em 6% das questões); e tabela de dupla entrada (em 2% das questões).

A segunda parte do questionário era constituída por quatro grupos de questões: 1. *Dispor amigos em fila para tirar uma fotografia*, constituído por três questões, consistindo na contagem das P_3 (questão 1*a*), P_5 (questão 1*b*) e P_n (questão 1*c*); 2. *Formar números*, constituído por quatro questões, consistindo na contagem dos $\overline{A}_2^3$ (questão 2*a*), $\overline{A}_2^5$ (questão 2*b*), $\overline{A}_2^n$ (questão 2*c*) e $\overline{A}_3^5$ (questão 2*d*); 3. *Definir bandeiras com barras horizontais*, constituído por quatro questões, consistindo na contagem dos A_2^3 (questão 3*a*), A_2^5

(questão $3b$), A_2^n (questão 3*c*) e A_3^5 (questão 3*d*); e 4. *Formar grupos de pessoas para participarem num concurso*, constituído por quatro questões, consistindo na contagem das C_2^3 (questão $4a$), C_2^5 (questão $4b$), C_2^n (questão 4*c*) e C_3^5 (questão 4*d*). Embora as questões *d)* integrassem o questionário, estas só eram colocadas aos alunos caso eles tivessem respondido correctamente às questões *a)* e *b)*.

Exceptuando as questões de generalização (questões *c*), onde se pretendia averiguar se os alunos eram capazes de identificar a lei e formação de P_n, $\overline{A}_2^n$, A_2^n e C_2^n, em todas as outras questões apresentava-se um exemplo.

Tratamento e análise de dados

As respostas dos alunos classificaram-se em respostas correctas e respostas erradas, considerando-se também as não respostas. Neste caso, algumas vezes, recorreu-se também à média e ao desvio padrão para caracterizar a distribuição das respostas.

Para estudar a influência da operação combinatória, do número de elementos envolvidos na operação combinatória e do desempenho em Matemática sobre o desempenho dos alunos em Combinatória, recorreu-se, respectivamente, à percentagem de respostas correctas por operação combinatória, à percentagem de respostas correctas nas questões *a)*, *b)* e *d)* (a questão *d)* não foi considerada no caso das permutações) e ao número médio de respostas correctas segundo o desempenho em Matemática (que foi determinado pela média arredondada às unidades dos níveis obtidos pelos alunos no 7.º e 8.º anos de escolaridade).

As estratégias de resolução foram distribuídas por sete categorias (enumeração, diagrama de árvore, tabela de dupla entrada, operação, enumeração e operação, diagrama de árvore e operação e fórmula) e por subcategorias, tendo-se utilizado como ponto de partida a categorização proposta por Roa (2000), com as adaptações impostas pelas resoluções dos alunos. Paralelamente, foram analisadas as explicações e os comentários apresentados pelos alunos, tendo-se seleccionado extractos com o objectivo de exemplificar e precisar o significado dos dados e as interpretações efectuadas.

A diversidade das resoluções impôs uma maior especificidade quanto à caracterização das estratégias. Assim, as estratégias de enumeração foram ainda distribuídas por duas subcategorias: enumeração sistemática e enumeração não sistemática. Na subcategoria de *enumeração sistemática* foram consideradas as estratégias de enumeração que contemplavam um procedimento algorítmico com potencial para gerar a totalidade das configurações possíveis e, por oposição, considerou-se a subcategoria de *enumeração não sistemática*.

Dadas as características das respostas obtidas através de enumeração sistemática e de enumeração não sistemática, efectuaram-se as seguintes classificações para os procedimentos específicos de resolução: *enumeração sistemática completa correcta (não sistemática completa correcta)* quando são apresentadas apenas as configurações pedidas no enunciado do problema; *enumeração sistemática completa incorrecta (não sistemática completa incorrecta)* se são apresentadas mais configurações do que as pedidas no enunciado do problema; *enumeração sistemática incompleta correcta (não sistemática incompleta correcta)* quando é apresentada apenas parte das configurações pedidas no enunciado do problema e não inclua configurações repetidas; *enumeração sistemática incompleta incorrecta (não sistemática incompleta incorrecta)* se é apresentada apenas parte das configurações pedidas no enunciado do problema e inclua configurações repetidas.

Os procedimentos específicos de resolução dos problemas com recurso exclusivo ao diagrama de árvore foram distribuídos por quatro subcategorias: *diagrama de árvore completo correcto* se o aluno constrói um diagrama de árvore que contempla apenas as configurações pedidas no enunciado do problema; *diagrama de árvore completo incorrecto* se o aluno constrói um diagrama de árvore com falta ou excesso de ramos, porque interpretou incorrectamente o enunciado ou não possui uma técnica adequada de construção; *diagrama de árvore incompleto correcto* se o aluno constrói todos os ramos correctamente mas não os completa; *diagrama de árvore incompleto incorrecto* se o aluno constrói um diagrama de árvore com falta ou excesso de ramos e estes não são construídos de forma completa.

Quanto à estratégia operação, as resoluções dos alunos foram distribuídas segundo a operação utilizada, dando origem às seguintes subcategorias: *operação de multiplicação*; *operação de adição*; e *operação de multiplicação e de adição*.

Relativamente à estratégia geral *enumeração e operação*, as resoluções dos alunos foram distribuídas pelas subcategorias: e*numeração e operação de multiplicação* e *enumeração e operação de adição*, conforme a enumeração ocorresse combinada, respectivamente, com a operação de multiplicação ou a operação de adição.

No que respeita à estratégia geral *diagrama de árvore e operação*, as resoluções dos alunos foram distribuídas pelas subcategorias: *diagrama de árvore e operação de multiplicação* e *diagrama de árvore e operação de adição*, conforme o diagrama de árvore ocorresse conjugado, respectivamente, com a operação de multiplicação ou a operação de adição.

Para a estratégia *fórmula*, as resoluções dos alunos foram distribuídas por duas subcategorias: *fórmula em linguagem simbólica matemática* se o aluno utiliza apenas símbolos matemáticos; e *fórmula em linguagem corrente* se o aluno utiliza predominantemente a linguagem corrente.

Finalmente, a análise das dificuldades e dos erros, identificados na resolução dos problemas propostos, baseou-se nas resoluções e nas justificações apresentadas pelos alunos.

Apresentação de resultados

Nesta secção apresentam-se as respostas dos alunos, os factores que influenciaram essas respostas, as estratégias usadas pelos alunos na resolução dos problemas de Combinatória propostos e as dificuldades por eles sentidas e os erros identificados.

Respostas apresentadas pelos alunos

Considerando as respostas apresentadas pelos alunos nos três problemas de permutações simples, verificou-se 43% de repostas correctas (num total de 81 respostas possíveis) e 1 como número médio de respostas correctas por aluno ($\overline{x} \approx 1{,}3$), com o desvio padrão de uma resposta correcta ($s \approx 0{,}78$). Do total de alunos, 7% não resolveu correctamente nenhum problema, 67% resolveu correctamente apenas um problema, 15% resolveu correctamente dois problemas e 11% resolveu correctamente os três problemas de permutações simples. Conclui-se, assim, que os problemas de permutações simples se revelaram difíceis para estes alunos.

Nos quatro problemas de arranjos com repetição verificou-se 69% de respostas correctas (num total de 108 respostas possíveis) e 3 como número médio de respostas correctas por aluno ($\overline{x} \approx 2{,}8$), com o desvio padrão de uma resposta correcta ($s \approx 1{,}3$). Do total de alunos, 11% não resolveu correctamente nenhum problema, 4% resolveu correctamente apenas um problema, 18% resolveu correctamente dois problemas, 30% resolveu correctamente três problemas e 37% resolveu correctamente todos os quatro problemas. Donde, se conclui que os problemas de arranjos com repetição se revelaram relativamente fáceis para estes alunos.

Nos quatro problemas de arranjos simples verificou-se 62% de respostas correctas (num total de 108 respostas possíveis) e 3 como número médio de respostas correctas por aluno ($\overline{x} \approx 2{,}5$), com o desvio padrão de uma resposta correcta ($s \approx 1{,}4$). Do total de alunos, 11% não resolveu correctamente nenhum problema, 19% resolveu correctamente apenas um problema, 7% resolveu correctamente dois problemas, 37% resolveu correctamente três problemas e 26% resolveu correctamente os quatro problemas. Os resultados obtidos permitem concluir que estes problemas se revelaram relativamente fáceis para estes alunos.

Finalmente, nos quatro problemas de combinações verificou-se 16% de respostas correctas (num total de 108 respostas possíveis) e 1 como número médio de respostas correctas por aluno ($\overline{x} \approx 0{,}6$), com o desvio padrão de uma resposta correcta ($s \approx 1{,}0$). Do total de alunos, 67% não resolveu correctamente nenhum problema, 7% resolveu correctamente apenas um problema, 22% resolveu correctamente dois problemas, 4% resolveu correctamente três problemas e nenhum aluno resolveu correctamente todos os problemas. Donde se conclui que os problemas de combinações simples se revelaram os mais difíceis para os alunos.

Na figura 1 podemos observar o número de respostas correctas nas várias questões das diferentes operações combinatórias estudadas. Analisando a totalidade das respostas dos alunos, nos quatro grupos de problemas, verifica-se que 48% das respostas são correctas, 32% das respostas são erradas e 20% são não respostas. O número médio de respostas correctas por aluno é de 7 ($\overline{x} \approx 7{,}2$), o que corresponde a sensivelmente metade do número total de problemas (15), com o desvio padrão de três respostas correctas ($s \approx 3{,}0$).

Dentro de cada operação combinatória, as questões *a)* foram as que reuniram um maior número de respostas correctas. Da figura 1 resulta imediatamente que à medida que aumenta o número de elementos envolvidos na operação combinatória diminui o número de respostas correctas, salientando-se o decréscimo bastante acentuado no número de respostas correctas de P_3 para P_5; o reduzido número de respostas correctas em todos os problemas de combinações simples, comparativamente aos restantes; e o facto

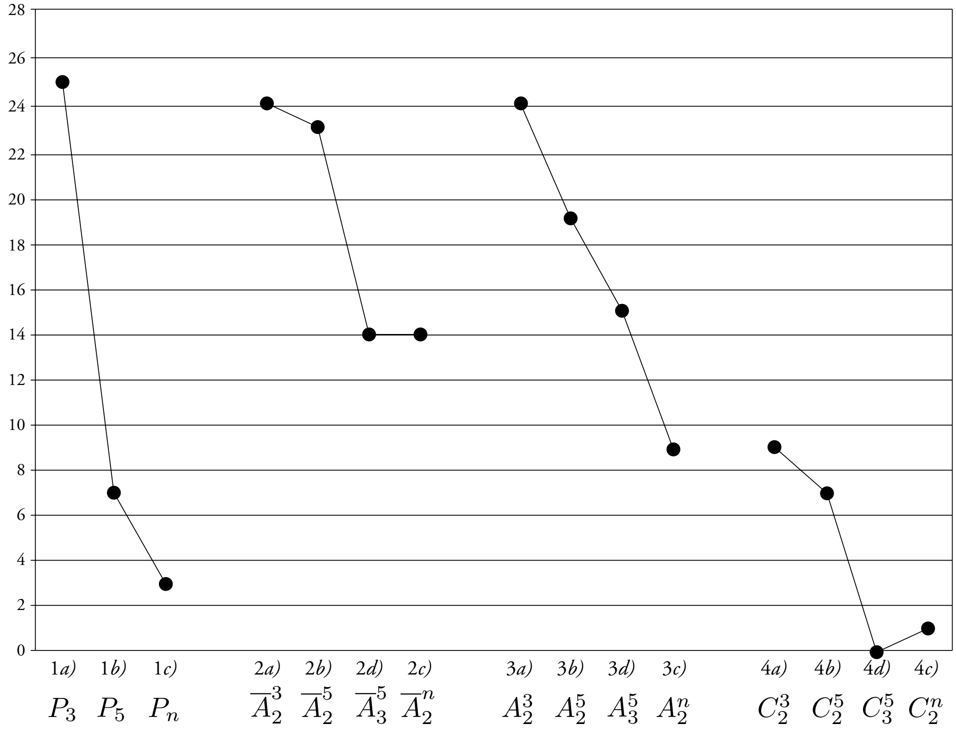

Figura 1 — Número de respostas correctas por questão

de nenhum aluno ter determinado o número correcto de combinações simples de 5 elementos tomados 3 a 3.

Exceptuando o caso das combinações, em todas as outras operações combinatórias as questões *c)*, em que se pedia uma fórmula que generalizasse o número de possibilidades, enquadram o grupo das tarefas mais difíceis, com percentagens de respostas correctas de 11%, 50%, 33% e 4%, respectivamente, nas permutações, arranjos com repetição, arranjos simples e combinações.

Na figura 2 contrastam-se os valores das respostas correctas e as médias dos valores calculados pelos alunos nas questões *a)*, *b)* e *d)* das quatro operações combinatórias (recorde-se que nas permutações não foi considerada a questão *d)*.

Nas questões *a)* observa-se uma ligeira tendência para sobrecalcular o número correcto de possibilidades nos problemas de permutações simples, arranjos com repetição e combinações simples (respectivamente, com médias de $\overline{x} \approx 6{,}7$, $\overline{x} \approx 9{,}2$ e $\overline{x} \approx 5{,}0$) e subcalcular o número correcto de possibilidades no problema de arranjos simples ($\overline{x} \approx 5{,}9$).

Nas questões *b)* observa-se uma tendência para sobrecalcular o número correcto de possibilidades nos problemas de arranjos com repetição e combinações simples (respec-

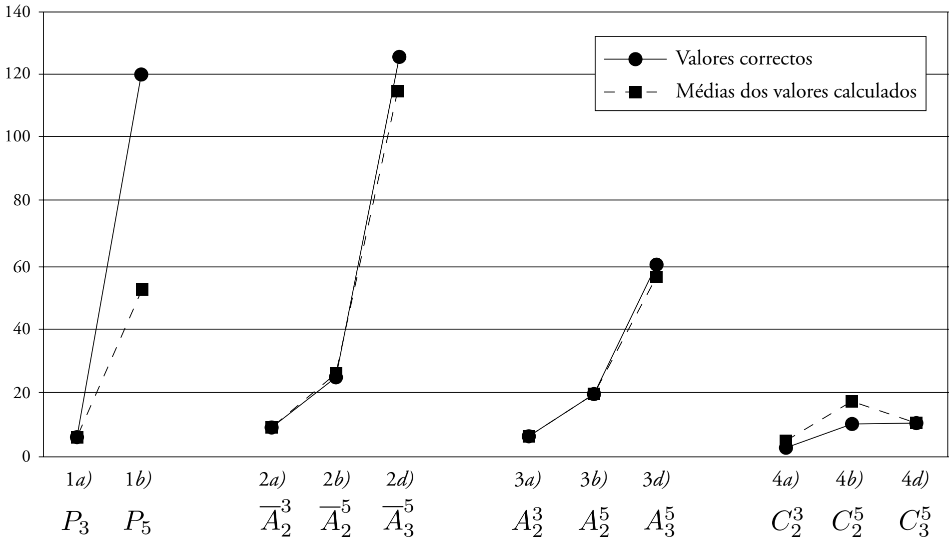

Figura 2 — Valores correctos e médias dos valores calculados nas questões *a)*, *b)* e *d)* das quatro operações combinatórias

tivamente, com médias de $\overline{x} \approx$ 25,6 e $\overline{x} \approx$ 17,4) e subcalcular o número correcto de possibilidades nos problemas de permutações simples e arranjos simples (respectivamente, com médias de $\overline{x} \approx$ 52,7 e $\overline{x} \approx$ 18,2), sendo os desvios mais acentuados no caso das permutações e das combinações.

Por último, nas questões *d)*, não contemplada nas permutações, observou-se uma tendência para subcalcular o número correcto de possibilidades nos problemas de arranjos com repetição e de arranjos simples (respectivamente, com médias de $\overline{x} \approx$ 115,0 e $\overline{x} \approx$ 56,4) e sobrecalcular o número correcto de possibilidades no problema de combinações simples ($\overline{x} \approx$ 10,7).

De uma maneira geral, observou-se uma tendência para subcalcular o número correcto de possibilidades à medida que aumentava o número de elementos envolvidos na operação combinatória, à excepção dos problemas de combinações simples, em que se verificou uma tendência para sobrecalcular o número correcto de possibilidades nas questões *a)*, *b)* e *d)* Além disso, nas questões homólogas dos problemas de arranjos com repetição, arranjos simples e combinações simples, as médias dos valores calculados seguem a relação de ordem das respostas correctas, isto é, $\overline{A}_k^n > A_k^n > C_k^n$.

Factores que influenciaram o desempenho dos alunos em Combinatória

Considerando as percentagens de respostas correctas por operação combinatória, conclui-se que o desempenho dos alunos em Combinatória foi influenciado pelo tipo de operação combinatória. Os problemas que se revelaram mais fáceis para os alunos foram os problemas de arranjos com repetição (70% de respostas correctas), seguindo-se os problemas de arranjos simples (62% de respostas correctas), os problemas de permutações simples (43% de respostas correctas) e, finalmente, os problemas de combinações simples foram os que se revelaram mais difíceis (16% de respostas correctas).

Verifica-se também um padrão semelhante na percentagem de alunos que resolveram correctamente a totalidade dos problemas, com uma maior percentagem de respostas correctas (37%) nos problemas de arranjos com repetição, seguindo-se os problemas de arranjos simples (26%), os problemas de permutações simples (11%) e, por último, os problemas de combinações simples, onde nenhum aluno respondeu correctamente à totalidade das questões.

O desempenho dos alunos em Combinatória foi também influenciado pelo número de elementos envolvidos na operação combinatória, uma vez que quando aumenta o número de elementos envolvidos na operação combinatória assiste-se a uma diminuição do número de respostas correctas.

Nas questões 1*a)*, 2*a)* e 3*a)*, para além de terem sido as questões em que os alunos tiveram menos dificuldades, a percentagem de respostas correctas, em cada uma delas, é praticamente a mesma, chegando mesmo a coincidir no caso das questões 2*a)* e 3*a)*. Embora registando uma percentagem bastante inferior de respostas correctas, a questão 4*a)* também foi a que se revelou mais fácil para os alunos, de entre as quatro questões de combinações simples.

O aumento da dimensão da população, das questões *a)* para as questões *b)*, produziu uma diminuição da percentagem de respostas correctas em todas as operações combinatórias. Analogamente, ao aumento da dimensão da amostra (verificado ao passar das questões *b)* para as questões *d)* correspondeu uma diminuição ainda mais acentuada da percentagem de respostas correctas, o mesmo acontecendo nas questões de generalização (P_n, $\overline{A}_2^n$, A_2^n e C_2^n).

Também o aumento do tamanho da solução, isto é, o número total de configurações possíveis, fez-se acompanhar de uma diminuição na percentagem de respostas correctas. Este comportamento foi observado em todas as operações combinatórias, concluindo-se que do tamanho da solução influenciou o grau de dificuldade do problema.

Analisado o número médio de respostas correctas dos alunos segundo o seu desempenho na disciplina de Matemática (definido através das médias dos níveis obtidos pelos alunos no 7.º e 8.º anos de escolaridade), observou-se uma ligeira diferença entre as médias do número de respostas correctas dos alunos de nível 2 (6) e dos alunos de nível 3 (5,6). Já a diferença entre as médias do número de respostas correctas dos alunos de nível 4 (8,1) e dos alunos de nível 5 (9,2) é ligeiramente maior. Esta diferença é mais significativa entre os alunos de nível 2 ou 3 (cuja média conjunta é 5,7) e os alunos de nível 4 ou 5 (cuja média conjunta é de 8,6).

Considerando que o número médio de respostas correctas no conjunto das 15 questões é 7,2, conclui-se que os alunos de nível 2–3 acertam, em média, um número de questões inferior à média geral e que os alunos de nível 4–5 acertam, em média, um número de questões superior à média geral.

O facto de o melhor desempenho dos alunos em Matemática estar associado a um melhor desempenho espontâneo em Combinatória, poderá constituir um aspecto promissor, já que os problemas propostos no estudo são tarefas passíveis de serem exploradas em sala de aula.

Estratégias usadas pelos alunos na resolução dos problemas de Combinatória

Por observação da tabela 1 verifica-se que as estratégias mais utilizadas na resolução dos 15 problemas propostos foram as estratégias *enumeração* e *diagrama de árvore* e as menos utilizadas foram as estratégias *enumeração* e *operação* (de adição ou de multiplicação) e *diagrama de árvore* e *operação* (se excluirmos a estratégia *tabela de dupla entrada* que foi utilizada apenas por um aluno na resolução de uma questão).

Estratégias	Operação combinatória				Total
	Permutações simples	Arranjos com repetição	Arranjos simples	Combinações simples	
Enumeração	22(64%)	32(84%)	23(70%)	24(46%)	101(67%)
Diagrama de árvore	17(59%)	19(84%)	20(80%)	16(19%)	72(63%)
Tabela de dupla entrada	—	—	—	1(0%)	1(0%)
Operação	5(40%)	12(67%)	19(79%)	10(0%)	46(54%)
Enumeração e operação	4(25%)	7(57%)	7(100%)	1(0%)	19(63%)
Diagrama de árvore e operação	6(83%)	6(86%)	4(100%)	8(25%)	25(68%)
Fórmula	7(43%)	20(70%)	17(53%)	14(7%)	58(47%)

Tabela 1 — Distribuição das resoluções dos alunos segundo a estratégia utilizada por operação combinatória (percentagem de respostas correctas)

Permutações simples. Analisadas as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas de permutações simples, concluiu-se que, na resolução da questão 1*a)* (P_3), os alunos recorreram predominantemente (96%) à *enumeração* e ao *diagrama de árvore*, estratégias que se revelaram muito eficazes na resolução da questão, uma vez que conduziram a uma percentagem elevada de respostas correctas (92%). Na figura 3 exemplifica-se a estratégia enumeração usada pelo aluno A7.

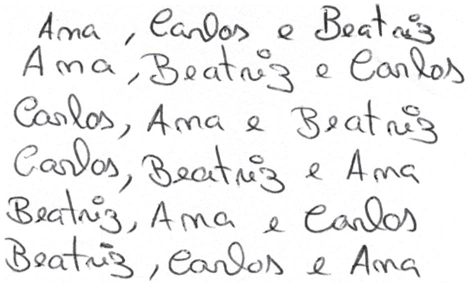

Figura 3 — Enumeração sistemática completa correcta efectuada pelo aluno A7 na questão 1*a)*

Na situação apresentada na questão 1*b)* (P_5), uma parte significativa dos alunos (50%) que recorreram às estratégias enumeração e diagrama de árvore na resolução da questão 1*a)* sentiram necessidade de procurar uma outra estratégia que se ajustasse às características da nova situação e facilitasse a tarefa de contar correctamente o elevado número de possibilidades de dispor em fila os cinco amigos. A este propósito, o aluno A14 referiu: "Tem de haver uma maneira mais fácil para fazer isto". Em consequência, 52% dos alunos recorreram agora à estratégia operação ou a uma estratégia que combinasse uma das estratégias utilizadas na resolução da questão 1*a)* (enumeração e diagrama de árvore) com uma operação. Estas foram as únicas estratégias que conduziram a respostas correctas na questão 1*b)* (26%). De entre aqueles que recorreram a estas estratégias, apenas 50% chegou à resposta correcta e a estratégia *diagrama de árvore e operação* foi a que mais frequentemente conduziu à resposta correcta (57%), verificando-se que, de entre os cinco alunos que a utilizaram, apenas um não obteve a resposta correcta.

Se por um lado a obtenção da resposta correcta na questão 1*b)* dependeu claramente da capacidade de redefinir e reformular as estratégias utilizadas na questão 1*a)*, por outro lado o facto de apenas metade dos alunos que recorreram a uma nova estratégia terem chegado à resposta correcta é revelador da dificuldade sentida na sua implementação.

A procura de uma *fórmula*, para dar resposta à questão 1*c)* (P_n), foi a estratégia utilizada por 26% dos alunos, a qual se revelou bastante difícil, já que se reduziu a 11% a percentagem de alunos a responder correctamente à questão (ver na figura 4 a fórmula apresentada pelo aluno A6).

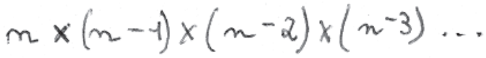

Figura 4 — Fórmula em linguagem simbólica matemática apresentada pelo aluno na questão

Para além da escrita de uma fórmula em linguagem matemática (utilizada em 19% das resoluções) ter sido a estratégia predominante, houve alunos que optaram pela escrita de uma fórmula em linguagem corrente (utilizada em 7% das resoluções).

A9 — Punha do primeiro para o último ou do último para o primeiro. (…) Se fossem cinco pessoas fazia-se 1×2 , o resultado vezes 3, o resultado vezes 4, o resultado vezes 5. São cinco pessoas e já estava.

(…)

Investigador — Isso era para 5. E para *n*?

A9 — Continuava. O resultado vezes 6, o resultado vezes 7, sempre assim, até acabar o número de pessoas.

(…)

Investigador — Ora escreve lá isso, então!

A9 — Sei como, mas escrever já não sei.

Nas resoluções incorrectas da questão 1*b)*, através da estratégia *operação*, observou-se uma tendência para apresentar expressões numéricas reduzidas a apenas dois factores, tendência que se mantém na escrita de uma fórmula incorrecta, tal como $n \times (n - 1)$, $n \times n$ ou equivalentes.

Arranjos com repetição. Na resolução dos problemas de arranjos com repetição concluiu-se que as estratégias de *enumeração* e *diagrama de árvore* foram as mais utilizadas na resolução das questões 2*a)* ($\overline{A}_2^3$) e 2*b)* ($\overline{A}_2^5$). As elevadas percentagens de respostas correctas obtidas nestas questões permite concluir que estas estratégias se revelaram bastante eficazes na resolução destes problemas. Já na resolução da questão 2*d)* ($\overline{A}_3^5$) essas estratégias conduziram sempre a respostas erradas.

Na resolução da questão 2*d)* verificou-se uma reformulação das estratégias utilizadas na resolução das questões 2*a)* e 2*b)*. Sentindo que a enumeração e o diagrama de árvore não seriam as estratégias mais eficazes para obter a resposta naquela questão, que apresentava um elevado número de possibilidades relativamente às questões 2*a)* e 2*b)*, os alunos combinaram estas estratégias com uma operação ou utilizaram exclusivamente operações numéricas (ver na figura 5 a resolução apresentada pelo aluno A15).

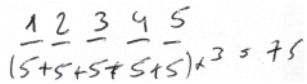

Figura 5 — Resolução (incorrecta) efectuada pelo aluno A15 na questão 2*d)* através das operações de adição e multiplicação

Qualquer uma destas estratégias revelou-se ajustada à resolução deste problema, uma vez que conduziram a um número significativo de respostas correctas.

A procura de uma *fórmula* para dar resposta à questão 2*c)* ($\overline{A}_2^n$) foi a estratégia utilizada por 74% dos alunos (52% dos alunos apresentaram uma fórmula em linguagem simbólica matemática e 22% em linguagem corrente), a qual revelou uma eficácia razoável, levando 52% dos alunos a obter a resposta correcta (ver na figura 6 a resolução apresentada pelo aluno A9).

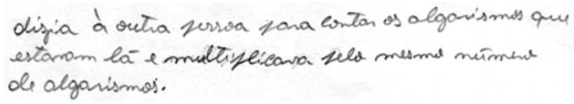

Figura 6 — Fórmula em linguagem corrente apresentada pelo aluno na questão

As fórmulas (correctas e incorrectas) mais frequentemente apresentadas pelos alunos foram: $n \times n$, n^2 , $2n$ ou equivalente em linguagem corrente.

Arranjos simples. Na resolução dos problemas de arranjos simples verificou-se que nas questões 3*a)* (A_2^3) e 3*b)* (A_2^5) as estratégias mais utilizadas foram *enumeração*, *diagrama de árvore e operação*, destacando-se na questão 3*a)* a estratégia de enumeração.

Na situação apresentada na questão 3*d)* (A_3^5) verifica-se uma escassa utilização das estratégias de enumeração e diagrama de árvore, as quais conduziram apenas a uma resposta correcta em cinco respostas. Ainda nesta questão, os alunos que optaram por manter a estratégia operação ou por combinar as estratégias de enumeração e diagrama de árvore com uma operação obtiveram sempre respostas correctas (ver na figura 7 a resolução apresentada pelo aluno A20).

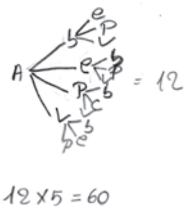

Figura 7 — Resolução através de diagrama de árvore parcial e operação de multiplicação apresentada pelo aluno A20 na questão 3*d)*

A procura de uma *fórmula* para dar resposta à questão 3*c)* (A_2^n) foi a estratégia utilizada por 63% dos alunos (41% dos alunos apresentaram uma fórmula em linguagem simbólica matemática e 22% em linguagem corrente), a qual revelou uma baixa eficácia, levando apenas 33% dos alunos a obter a resposta correcta.

> A20 — Só cheguei lá depois de resolver a questão 3*b)*. Sou sincero! Antes não tinha chegado lá. Temos cinco cores mas não há repetição da mesma cor. Por isso, é 5 × 4 que dá 20. Mas eu antes de ver o número 20 à minha frente não chegava lá. (…) Então *n* vezes $n - 1$. Traduzi o que já tinha escrito. O 5 é como se fosse o meu *n*.

As fórmulas (correctas e incorrectas) mais frequentemente apresentadas pelos alunos foram: $n \times (n - 1)$, $n^2 - n$, $2n$ ou equivalente em linguagem corrente. Das respostas erradas destes alunos, salienta-se a elevada frequência com que ocorreu a resposta 2*n* ou equivalente em linguagem corrente.

Combinações simples. As estratégias mais utilizadas pelos alunos na resolução das questões 4*a)* C_2^3, 4*b)* C_2^5 e 4*d)* C_3^5 foram *enumeração*, *diagrama de árvore* e *operação*, das quais apenas as duas primeiras conduziram a respostas correctas e apenas nas questões 4*a)* e 4*b)*.

Embora em número reduzido, a estratégia de enumeração foi a que permitiu aos alunos obter mais respostas correctas (ver na figura 8 a resolução apresentada pelo aluno A26).

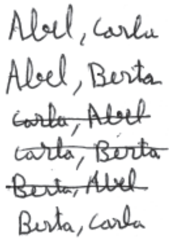

Figura 8 — Enumeração sistemática completa incorrecta efectuada pelo aluno A26 na questão 4*a)*

A estratégia *diagrama de árvore e operação* também registou uma frequência significativa na questão 4*b)*, tendo conduzido apenas a uma resposta correcta na questão 4*a)* e a outra na questão 4*b)*.

Foi de 52% a percentagem de alunos que responderam à questão 4*c)* (37% recorrendo à linguagem simbólica matemática e 15% recorrendo à linguagem corrente). As fórmulas (correctas e incorrectas) apresentadas pelos alunos foram: $[n \times (n-1)]/2$ (um aluno), $n \times (n-1)$, $n^2 - n$, $2n$ ou equivalente em linguagem corrente. Das respostas erradas, destaca-se a elevada frequência com que ocorreu a resposta 2*n* ou equivalente em linguagem corrente.

O facto de apenas um aluno ter acertado a questão 4*c)* é revelador do grau de dificuldade dos alunos em escreverem uma fórmula para as combinações simples de *n* elementos tomados dois a dois. Embora fossem em número reduzido as configurações possíveis de 4*a)*, 4*b)* e 4*d)*, os alunos revelaram dificuldades em definir e aplicar métodos de contagem eficazes.

Globalidade das operações combinatórias. Pela figura 9, verifica-se que as estratégias *enumeração* e *diagrama de árvore* foram mais utilizadas na resolução das questões que envolviam um menor número de elementos e à medida que o número de elementos envolvidos na operação combinatória aumentava, a percentagem de alunos a utilizarem estas estratégias diminuiu. Por outro lado, quando o número de elementos envolvidos na operação combinatória aumenta, a eficácia das estratégias de enumeração e diagrama de árvore (enquanto estratégias que conduzem à resposta correcta) diminui consideravelmente, enquanto a estratégia *operação* (essencialmente de multiplicação), isolada ou combinada com outra estratégia (enumeração ou diagrama de árvore), se revelou mais eficaz.

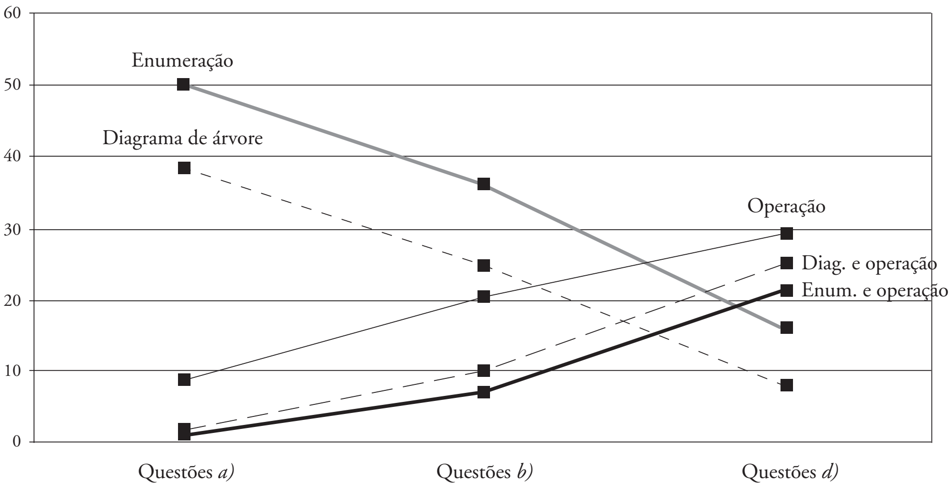

Figura 9 — Percentagem de utilização das diferentes estratégias no conjunto das questões *a)*, *b)* e *d)*

A estratégia *enumeração* foi bastante utilizada pelos alunos na resolução dos 15 problemas propostos, tendo-se registado um predomínio da *enumeração sistemática* (utilizada em 27% das resoluções) sobre a *enumeração não sistemática* (utilizada em 4% das resoluções).

Relativamente à estratégia *enumeração sistemática* (completa correcta em 73% dos casos, completa incorrecta em 11% dos casos, incompleta correcta em 13% dos casos e incompleta incorrecta em 3% dos casos), os procedimentos algorítmicos utilizados pelos alunos, na resolução das questões de permutações simples, consistiram na fixação de elementos de referência a partir dos quais formaram as configurações, tendo-se verificado que na questão 1*b)* nenhum aluno foi capaz de fixar simultaneamente mais do que dois elementos e na questão 1*a)* ocorreu ainda a fixação de um elemento em cada uma das três posições da fila.

Nas questões de arranjos com repetição, os procedimentos algorítmicos também assentaram na fixação de um ou dois algarismos, conforme se tratasse, respectivamente, das questões 2*a)* e 2*b)* ou da questão 2*d)*. Alguns alunos começaram a resolução pela escrita das configurações constituídas por um mesmo algarismo (por exemplo, 11, 22 e 33).

Nas questões de arranjos simples, os procedimentos algorítmicos também consistiram na fixação de uma ou duas cores, conforme se tratasse, respectivamente, das questões 3*a)* e 3*b)* ou da questão 3*d)*.

Nas questões de combinações simples, os procedimentos algorítmicos consistiram na fixação de uma ou duas pessoas da sequência de amigos apresentada no enunciado, conforme se tratasse, respectivamente, das questões 4*a)* e 4*b)* ou da questão 4*d)*, associando-lhes cada uma das pessoas que se encontravam à sua direita na sequência de nomes. A leitura dos nomes (da lista de pessoas apresentada em cada um dos enunciados) efectuava-se apenas num único sentido (da esquerda para a direita), fosse na escolha da(s) pessoa(s) a fixar, fosse na escolha da segunda ou terceira pessoa a ser seleccionada. Ocorreu ainda o procedimento de fixação de cada um dos nomes na primeira posição nas questões 4*a)* e 4*b)*, ao qual era associado cada um dos restantes nomes disponíveis. Listada a totalidade das configurações, eram desprezadas (ou não) as que diferiam apenas na ordem de disposição dos nomes.

A estratégia *enumeração não sistemática* (utilizada na resolução das questões 1*a)*, 1*b)*, 2*a)*, 3*a)*, 3*b)* e 4*d)* conduziu apenas a três respostas correctas na questão , sendo a tarefa facilitada pelo reduzido número de elementos (3) para permutar. Em particular, um aluno, de entre os 5 que recorreram pelo menos uma vez à enumeração não sistemática, utilizou esta estratégia em 45% das resoluções efectuadas.

A estratégia *diagrama de árvore* (completo correcto em 54% dos casos, completo incorrecto em 31% dos casos, incompleto correcto em 8% dos casos e incompleto incorrecto em 7% dos casos) foi utilizada por uma percentagem significativa de alunos (em 22% das resoluções), tendo sido a segunda estratégia mais utilizada. Este facto poderá encontrar alguma justificação na sua utilização nas aulas de Matemática (imediatamente antes do início da realização das entrevistas), uma vez que o diagrama de árvore ocorreu associado à determinação da probabilidade de um acontecimento em experiências compostas.

Em particular nos problemas de combinações simples, na construção de um diagrama de árvore na questão 4*a)* observou-se uma construção que resultou da leitura dos nomes (apresentados no enunciado) da esquerda para a direita. Outras resoluções das questões 4*a)* e 4*d)* apresentavam diagramas de árvore completos incorrectos, em que na solução eram consideradas todas as configurações obtidas (resposta incorrecta) ou eram desprezadas aquelas que diferiam apenas na ordem de disposição dos elementos (resposta correcta).

Nos problemas de permutações simples, essencialmente na questão 1*b)*, verificou-se uma tendência por parte dos alunos para reduzirem a dois os níveis de ramificação do diagrama de árvore.

A estratégia *operação* (utilizada em 14% das resoluções) ocorreu associada, predominantemente, à multiplicação (em 96% das resoluções), sendo escasso o recurso à adição (2%) e à utilização simultânea da multiplicação e adição (2%).

Nos problemas de permutações simples, esta estratégia foi utilizada apenas na resolução da questão 1*b)*. Neste caso, a única operação numérica utilizada foi a de multiplicação reduzida a apenas dois factores ou consistindo em multiplicações sucessivas, por aplicação da regra do produto, no caso das respostas correctas.

Na resolução das questões de arranjos simples e combinações simples, sempre que foi utilizada a estratégia operação, esta foi sempre de multiplicação. Já nos problemas de arranjos com repetição, os alunos recorreram predominantemente à regra do produto, tendo sido aplicada a regra da soma em duas resoluções da questão 2*d)*.

As expressões numéricas correctas obtidas para as questões 2*d)* ($\overline{A}_3^5$) e 3*d)* (A_3^5) foram obtidas recursivamente e por aplicação da regra do produto, a partir das expressões numéricas obtidas, respectivamente, nas questões 2*b)* ($\overline{A}_2^5$) e 3*b)* (A_2^5).

As estratégias *enumeração e operação* (utilizada em 6% das resoluções — envolvendo a multiplicação em 84% dos casos e a adição em 16% dos casos) e *diagrama de árvore e operação* (utilizada em 8% das resoluções — envolvendo a multiplicação em 84% dos casos e a adição em 16% dos casos), que consistiam na generalização, partindo, respectivamente, de uma enumeração parcial e de um diagrama de árvore parcial, foram utilizadas essencialmente nos problemas que compreendiam um maior número de elementos. Quer neste caso, quer em outros, sempre que os alunos recorreram a uma operação, ela foi predominantemente de multiplicação.

O recurso à estratégia *fórmula* ocorreu em 18% das resoluções, tendo-se observado um predomínio da escrita da fórmula em linguagem matemática (69%) sobre a escrita da fórmula em linguagem corrente (31%), facto que poderá estar relacionado com um ensino incidente em formulários escritos em linguagem simbólica.

Tal como se verificou na estratégia *operação*, observou-se uma tendência por parte dos alunos para reduzirem a dois o número de factores das expressões algébricas obtidas na questão 1*c)*. Verificou-se ainda que a expressão $2n$ (ou equivalente em linguagem corrente), resultante da multiplicação das dimensões da população e da amostra, foi a resposta incorrecta mais frequente nos problemas de arranjos (com e sem repetição) e nos problemas de combinações simples.

A utilização da estratégia *operação* (sozinha ou combinada com outra estratégia) representou um factor preponderante na obtenção da resposta correcta às questões de generalização 1*c)*, 2*c)*, 3*c)* e 4*c)*. Os alunos que não foram capazes de utilizar esta estratégia na resolução das questões 1*b)*, 2*b)*, 3*b)* e 4*b)* (por sua iniciativa ou a pedido do investigador) não apresentaram a resposta correcta nas questões 1*c)*, 2*c)*, 3*c)* e 4*c)*.

Determinada a estratégia mais frequentemente utilizada por aluno (exceptuando a estratégia *fórmula*), ou seja a sua estratégia modal, concluiu-se que 44% dos alunos recorreram à mesma estratégia de resolução numa percentagem que variou entre 50% e 75% (ver tabela 2). Concluiu-se também que 37% dos alunos utilizaram a mesma estratégia de resolução numa percentagem superior a 75%. De uma maneira geral, a maioria destes alunos (81%) utilizou a mesma estratégia em mais do que 50% das resoluções.

Percentagem de utilização	Número de alunos
[0,25[	0
[25,50[	5
[50,75[	12
[75,100]	10
Total	27

Tabela 2 — Distribuição dos alunos segundo a percentagem de utilização da estratégia mais frequentemente utilizada na resolução dos problemas

De entre as estratégias modais, salientam-se as estratégias de *enumeração* e *diagrama de árvore* (ver tabela 3). No caso da *enumeração*, ela ocorreu em mais de 50% das resoluções de 40% dos alunos. Em particular, exceptuando as questões *c)*, dois alunos utilizaram apenas esta estratégia.

Estratégia mais frequente	Percentagem de alunos
Enumeração	40%
Diagrama de árvore	29%
Operação	15%
Enumeração e operação	4%
Diagrama de árvore e operação	4%
Enumeração e Diagrama de árvore e operação	4%
Operação e Diagrama de árvore e operação	4%
Total	100%

Tabela 3 — Distribuição das estratégias mais frequentemente utilizadas por aluno

Quanto à estratégia *diagrama de árvore*, a segunda estratégia modal mais usada, ela ocorreu em mais de 50% das resoluções de 25% dos alunos e em 44% das resoluções de 4% dos alunos. Em particular, exceptuando as questões *c)*, um aluno utilizou apenas esta estratégia.

Dificuldades sentidas e erros identificados

Dificuldades em enumerar de forma sistemática. Nos problemas de permutações simples, a estratégia *enumeração não sistemática* foi utilizada em percentagens iguais (15%) na contagem de P_3 e P_5. Se para determinar P_3 uma enumeração por tentativas conduziu a respostas correctas (3 em 4), dado que a enumeração estava facilitada pelo número reduzido de casos possíveis (6), na contagem de P_5 conduziu apenas a respostas incorrectas (4) que contemplavam, em média, 11 configurações (das 120 possíveis). Nos problemas de arranjos com repetição (1 aluno em $\overline{A}_2^3$), arranjos simples (2 alunos em A_2^3 e 1 aluno em A_2^5) e combinações simples (1 aluno em C_3^5) uma enumeração por tentativas conduziu, em todos os casos, a um número de configurações inferior ao número de possibilidades.

Dificuldades em recorrer a situações mais simples na resolução de situações mais complexas. Os alunos não integraram na contagem das P_5 a informação obtida na contagem correcta das P_3, isto é, não tiraram proveito da informação obtida na resolução de um problema mais simples para a resolução de um problema mais complexo. Assim, por exemplo, para além de terem fixado dois elementos, mesmo que de uma forma incompleta, um na primeira e outro na segunda posição da fila, os alunos para determinarem

P_5 não recorreram à resolução da questão 1*a)* para responderem à questão 1*b)*, considerando que $P_5 = 5 \times 4 \times P_3$. Nos problemas de arranjos com repetição, observou-se que 11% dos alunos revelaram dificuldades em obter, por recursão, uma expressão numérica para a questão 2*d)* a partir da expressão numérica obtida na questão 2*b)*, isto é, $\overline{A}_3^5 = \overline{A}_2^5 \times 5$. Houve alunos que entenderam que ao multiplicarem por três a expressão numérica obtida na questão 2*b)* estariam a compensar o aumento produzido na dimensão da amostra da questão 2*b)* (obtendo a expressão numérica 5 × 5 × 3).

Dificuldades na construção e interpretação de diagramas de árvore. Os alunos revelaram dificuldades na construção de um diagrama de árvore que contemplasse todas as condições impostas no enunciado do problema. Consequentemente, foram construídos diagramas de árvore com um número de níveis de ramificação inferior ao correcto e outros com falta ou excesso de ramos.

A construção de um diagrama de árvore que contemplasse apenas as configurações pedidas no enunciado do problema nem sempre constituiu uma tarefa fácil.

> Investigador – Fizeste um esquema…
>
> A3 — Mas acho que este esquema não é apropriado para esta situação [determinação das P_3]. E agora tentei ver [por enumeração] o máximo de vezes que dá para alterar [a posição] dos três [elementos].
>
> Investigador – E porque dizes que está mal?
>
> A3 — Acho que não é bem assim para pôr as possibilidades. (…) Eu acho que está certa a forma como fiz. (…) Acho que está errada é a forma do esquema.

Dificuldades na repetição de procedimentos. Os alunos revelaram dificuldades na repetição de procedimentos de enumeração sistemática ou na construção de diagramas de árvore de uma forma completa, isto é, até se esgotarem todas a configurações possíveis. Observou-se, por exemplo, uma dificuldade em repetir os procedimentos algorítmicos utilizados na enumeração sistemática completa correcta, efectuada na questão 1*a)* (3 elementos para permutar), na resolução da questão 1*b)* (5 elementos para permutar). Quando foram capazes de o fazer (com a fixação consecutiva de dois elementos nas duas primeiras posições da fila), os alunos não desenvolveram o procedimento de forma completa e correcta. Nos problemas de arranjos com repetição, observou-se também a re-utilização dos algarismos em apenas algumas das posições das sequências ordenadas de dígitos.

Na construção dos diagramas de árvore, esta dificuldade reflecte-se, essencialmente, na redução dos níveis de ramificação. No exemplo que se segue, o aluno fixou na primeira posição, apenas uma das 5 cores possíveis (figura 10).

Dificuldades na identificação dos operandos. Na aplicação da estratégia *operação*, observaram-se dificuldades em identificar os operandos correctos que intervêm na expressão numérica. No caso da contagem das permutações de 5 elementos, 11% dos alunos escreveram multiplicações reduzidas a apenas dois factores que, mais ou menos relacionados

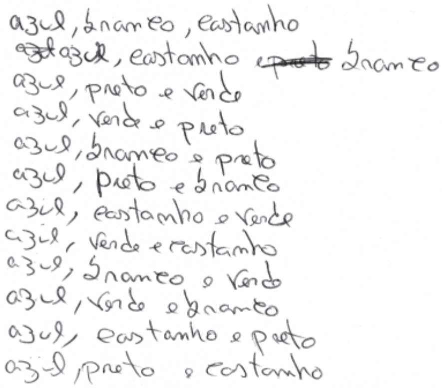
azul, branco, castanho
~~az~~ azul, castanho ~~e preto~~ branco
azul, preto e verde
azul, verde e preto
azul, branco e preto
azul, preto e branco
azul, castanho e verde
azul, verde e castanho
azul, branco e verde
azul, verde e branco
azul, castanho e preto
azul, preto e castanho

Figura 10 — Enumeração sistemática incompleta correcta efectuada pelo aluno A7 na contagem dos A_3^5

com o procedimento correcto (por exemplo 5 × 4 e 5 × 5), não tinham em consideração a dimensão da amostra. Nos problemas de arranjos simples e de combinações simples houve alunos que entenderam que o número total de possibilidades resultaria da multiplicação da dimensão da população pela dimensão da amostra (2 × 3 e 2 × 5).

Dificuldades em efectuar uma enumeração sistemática parcial/construir diagramas de árvore parciais adequados à generalização. O erro cometido pelos alunos na contagem de P_5, através da estratégia *enumeração e operação*, resultou da dificuldade em efectuar uma enumeração sistemática parcial adequada à generalização. Assim, foi efectuada uma enumeração parcial que não reunia o número mínimo de configurações (devido a erros na enumeração) que permitisse aos alunos generalizar correctamente, embora a expressão numérica obtida estivesse relacionada com o procedimento correcto.

Uma resposta incorrecta para P_5, obtida através de diagrama de árvore e operação, resultou da construção de apenas uma parte do diagrama de árvore incorrectamente construído (com apenas dois níveis de ramificação construídos de forma completa) que só incluía uma parte das configurações possíveis.

Nas questões de arranjos com repetição, as contagens efectuadas por alguns alunos resultaram de uma enumeração não sistemática parcial que não reunia um número adequado de configurações (mais do que as pertinentes) ou da identificação de um número inadequado (inferior ao necessário) de configurações através de diagrama de árvore parcial (permitindo apenas a re-utilização dos algarismos em algumas das posições da sequência ordenada de dígitos).

Nos problemas de combinações simples ocorreu a utilização de um número de configurações superior ao pertinente (considerando a ordem como relevante) e, na resolução da questão *4d)* um aluno não foi capaz de concluir acerca do número pelo qual era necessário dividir o valor calculado numa primeira fase (em que a ordem era tida como relevante), isto é, pelo número de permutações de três elementos.

Dificuldades na obtenção de uma fórmula. Os alunos revelaram dificuldades na utilização dos procedimentos aplicados (enumeração sistemática ou diagrama de árvore) para escreverem uma fórmula. Houve ainda alunos que revelaram dificuldades em identificar regularidades, e outros valorizaram, essencialmente, regularidades nos valores calculados.

Nas resoluções incorrectas da questão 1*c)* observou-se uma tendência para os alunos centrarem a sua atenção nas respostas numéricas obtidas nas questões 1*a)* e 1*b)* e desvalorizarem os processos de obtenção das configurações (por enumeração sistemática e diagrama de árvore) correctamente aplicados (essencialmente utilizados na questão 1*a)*). Estes alunos incluíram nas suas respostas expressões algébricas (ou equivalente em linguagem corrente) reduzidas a apenas dois operandos (predominantemente factores), que em alguns casos estavam relacionados com o procedimento correcto, mas sempre sem atenderem à dimensão da amostra (por exemplo, a expressão $n \times (n-1)$ é adequada para amostras ordenadas sem repetição de dimensão dois).

Os alunos que resolveram correctamente as questões 1*a)* e 1*b)* (15%), mas que não responderam correctamente à questão 1*c)*, revelaram dificuldades em relacionar recursivamente as soluções obtidas nas questões 1*a)* e 1*b)*, de modo a obterem uma expressão geral para as permutações de *n* elementos. Para além de terem revelado dificuldades ao nível da generalização, também revelaram dificuldades ao nível da manipulação de variáveis, como foi exemplificado pelo aluno A21: "Como é que eu vou fazer se não sei o número de amigos?".

Nos arranjos com repetição observou-se que 11% dos alunos não foram capazes de exprimir as regularidades evidenciadas pela enumeração sistemática completa correcta efectuada na questão 2*b)* através de uma expressão numérica (como resolução alternativa), facto que resultou na incapacidade de generalizar correctamente. O erro mais frequente (4 em 6 alunos) resultou de os alunos pensarem que a lei de formação de $\overline{A}_2^n$ consistia em multiplicar a dimensão da amostra pela dimensão da população. Assim, em alguns casos, a fórmula resultou de uma tentativa de adivinhação da resposta, uma vez que para $n = 3$ e para $n = 5$ a fórmula não conduz às respostas obtidas nas questões 2*a)* e 2*b)*.

Os alunos que resolveram correctamente as questões 2*a)* e 2*b)* e que não foram capazes de apresentar uma expressão numérica como resolução alternativa para a questão 2*b)* também não resolveram correctamente a questão 2*c)*. Depreende-se, assim, que não conseguiram extrair das resoluções efectuadas a lei de formação dos arranjos com repetição de *n* elementos tomados 2 a 2. Relativamente ao aluno que resolveu correctamente as duas primeiras questões através de operação de multiplicação (3×3 e 5×5), revelando ter compreendido a lei de formação, parece que a fórmula incorrecta que apresentou ($2n$) resultou essencialmente da dificuldade em trabalhar com variáveis.

Na escrita de uma fórmula para os arranjos simples de *n* elementos tomados 2 a 2, os erros resultaram predominantemente (e independentemente das respostas obtidas nas questões 3*a)* e 3*b)* de os alunos terem considerado que a generalização resultaria de multiplicar a dimensão da amostra pela dimensão da população. Assim, o aluno que escreveu expressões numéricas correctas para as questões 3*a)*, 3*b)* e 3*d)*, recorrendo apenas à estratégia operação, obteve uma resposta incorrecta para a questão 3*c)* devido a dificuldades na manipulação de variáveis; alunos que responderam correctamente às questões 2*a)* e *b)* e apresentaram a resposta $2 \times n$ na questão 2*c)* (que para $n = 3$ conduz ao valor calculado na questões 2*a)* revelaram, essencialmente, dificuldades na identificação de regularidades que permitissem generalizar correctamente; a fórmula obtida por dois alunos traduz as regularidades identificadas nas respostas incorrectas obtidas para as questões 2*a)* e 2*b)*, respectivamente 6 e 10; e a fórmula obtida por três alunos foi apenas uma tentativa de adivinhação da resposta.

As fórmulas erradas para as combinações simples de n elementos tomados 2 a 2 tiveram a sua origem em três factores essenciais: entendendo que a ordem era relevante, 15% dos alunos obtiveram a expressão $n \times (n-1)$ ou equivalente em linguagem simbólica matemática ($n \times n - n$, apresentada por um aluno) ou em linguagem corrente (um aluno), a partir das regularidades identificadas nas resoluções incorrectas das questões 4*a)* e 4*b)*; 22% dos alunos apresentaram a expressão $2 \times n$ ou equivalente em linguagem corrente (estratégia utilizada por um aluno): 15% numa tentativa de adivinhação da resposta (uma vez que para $n = 3$ e para $n = 5$ a expressão algébrica apresentada não conduz aos valores calculados nas questões 4*a)* e 4*b)*, respectivamente) e 7% como resultado da identificação de regularidades na resolução incorrecta efectuada nas questões 4*a)* e 4*b)* (uma vez que para $n = 3$ e para $n = 5$ a expressão algébrica apresentada conduz aos valores calculados nas questões 4*a)* e 4*b)*, 6 e 10 respectivamente); e as respostas de 7% dos alunos surgem fora do contexto do problema.

Observou-se também uma dificuldade dos alunos em estabelecer conexões entre os diferentes tipos de problemas, isto é, atender ao facto de que

$$C_2^n = \frac{1}{2} \times A_2^n$$

e $A_2^n = \overline{A}_2^n - n$, para $n \geq 2$.

Dificuldades em identificar e extrair dos enunciados dos problemas aspectos fundamentais. De entre esses aspectos, salientaram-se as dimensões da população e da amostra, a relevância ou não da ordem e a possibilidade ou não de repetição dos elementos.

Nos problemas de permutações simples, estas dificuldades reflectem-se na construção de diagramas de árvore com um número de níveis de ramificação inferior ao correcto e falta ou excesso de ramos. Nos problemas de combinações simples, a dificuldade em concluir sobre a irrelevância da ordem foi a principal causa do insucesso verificado, traduzindo-se em valores calculados superiores aos correctos, já que

$$C_k^n = \frac{1}{k} \times A_k^n.$$

Nos problemas de arranjos simples ocorrem algumas resoluções em que a ordem de disposição dos elementos não é tida como relevante.

Dificuldades no controlo do processo de enumeração sistemática. Esta dificuldade ocorre associada a soluções de maior dimensão, cuja resolução parece ter sido afectada pela forma pouco adequada como os alunos estruturaram a resposta, quer pela forma pouco organizada da apresentação das configurações, quer pela falta de simbolização abreviada.

Associados a estas dificuldades foram identificados os seguintes erros: repetição ou falta de configurações na enumeração; falta ou excesso de ramos e/ou níveis de ramificação na construção de diagramas de árvore; erro de repetição, considerando a possibilidade de repetição dos elementos quando não era possível (nos problemas de permutações simples e de arranjos simples), ou não considerando a possibilidade de repetição dos elementos (de forma total ou parcial) quando tal era pertinente (arranjos com repetição); erro de ordem, considerando a ordem importante quando era irrelevante (combinações simples) ou considerando a ordem irrelevante quando era importante (arranjos simples); redução do número de operandos (permutações); e identificação incorrecta dos operandos.

Conclusões

Em termos das estratégias usadas pelos alunos em Combinatória, pela frequência com que foram referidas, salientam-se a enumeração e o diagrama de árvore. Estas duas estratégias revelaram-se eficazes (no sentido de conduzirem às respostas correctas), sobretudo quando as operações combinatórias envolviam um pequeno número de elementos e, no caso da enumeração, através da utilização de procedimentos sistemáticos de enumeração, que assentaram essencialmente na fixação de elementos de referência a partir dos quais construíam as configurações. Todavia, com o aumento do número de elementos envolvidos nas operações combinatórias, estas estratégias diminuíram de eficácia, revelando-se, agora, mais sucedidas as estratégias de operação, sozinha ou combinada com outra estratégia (enumeração ou diagrama de árvore), as quais foram usadas por um número muito menor de alunos.

Deve ser também salientado que, em alguns casos, os procedimentos e as estratégias usados conduziram a respostas correctas numa base que pode ter sido mais arbitrária do que compreensiva, como aconteceu na multiplicação dos parâmetros envolvidos na operação combinatória, aplicada simultaneamente a situações em que se e não justificava. Por outro lado, à semelhança das conclusões obtidas por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994; 1997), também estes alunos revelaram dificuldades na aplicação completa de procedimentos algorítmicos, ainda que sistemáticos, que conduziram à resolução dos problemas de forma inadequada. Revelaram também dificuldades ao nível do raciocínio recursivo necessário para escreverem todas as configurações possíveis ou para calcularem o seu número sem efectuarem a enumeração completa. Foram ainda diagnosticadas dificuldades ao nível do raciocínio analógico, que dificultaram a identificação de conexões entre as operações combinatórias.

Se, por um lado, os resultados do estudo realçam a utilização de estratégias espontâneas com potencial para a resolução de problemas de Combinatória, eles também enfatizam a necessidade de alguma intervenção de ensino, no sentido de corrigir e tornar estas estratégias eficazes, de modo a que os alunos adquiram completamente as operações combinatórias, como defende Fischbein (1975). Concluiu-se, assim, que os resultados deste estudo não corroboram um desenvolvimento da capacidade combinatória numa base apenas espontânea, tal como é preconizada por Piaget e Inhelder (s/d).

A importância que é atribuída à Combinatória para o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos (Piaget & Inhelder, s/d) e o facto de tratar-se de um domínio cuja importância tem vindo a aumentar recomendam que se continue a investigar sobre o raciocínio combinatório dos alunos, relativamente às suas estratégias espontâneas e às suas dificuldades e erros (Navarro-Pelayo, Batanero & Godino, 1996).

Simultaneamente, a diversidade das estratégias utilizadas pelos alunos e as dificuldades e erros identificados sugerem a necessidade de se investigar o assunto sob o ponto de vista didáctico, com enfoque no ensino, uma vez que o ensino da Combinatória poderá desempenhar um papel importante no desenvolvimento do raciocínio recursivo, da aplicação completa de procedimentos algorítmicos, do pensamento sistemático e do raciocínio analógico, aspectos em que os alunos revelaram dificuldades e que poderão desempenhar um papel importante na consecução dos principais objectivos curriculares dos vários níveis de ensino.

Neste caso, os resultados deste estudo sugerem que no ensino das operações combinatórias se atenda ao grau de dificuldade revelado pelos alunos nessas operações, iniciando a sua abordagem pelos arranjos com repetição, seguindo-se os arranjos simples, as permutações e, por último, as combinações; se explore a relação existente entre as combinações simples e os arranjos simples; e se retire vantagem do potencial didáctico do diagrama de árvore, quer como forma de representação quer como estratégia de resolução de problemas.

Nota

Texto produzido no âmbito do Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Referências

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 181–199.

Bruner, J. S. (1973). *O processo da educação.* São Paulo: Companhia Editora Nacional. (Tradução portuguesa do original de 1966.)

Correia, P. F. (2008). *Raciocínios em combinatória de alunos do 9.º ano de escolaridade.* Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.

Dossey, J. (1991). Discrete mathematics: the math for our time. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K–12* (pp. 1–9). Reston, VA: NCTM.

English, L. (1998). Rethinking what it means to understand: the case of combinatorial problem solving. In C. Kanes, M. Goos & E. Warren (Eds.), *Teaching mathematics in new times, Proceedings of the twenty first annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (vol. I, pp. 185–193). Brisbane, Australia: Mathematics Education Research.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children`s combinatorial reasoning. In J. Graham, (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E., Pampu, I. & Mînzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In E. Fischbein (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix IV, pp. 189–201). Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: D. Reidel.

Gall, M. D., Borg, W. R. & Gall, J. P. (2003). *Educational research: an introduction.* New York: Longman Publishers USA.

Gardiner, A. (1991). A cautionary note. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K–12* (pp. 10–17). Reston, VA: NCTM.

Hadar, N. & Hadass, R. (1981).The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(4), 435–443.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *3*(1), 111–127.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. & Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación matemática*, *8*(1), 26–39.

Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança.* Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951)

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, *1*(1), 16–20.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.* Tese de doutoramento não publicada, Universidade de Granada, Departamento de Didáctica da Matemática.

Sriraman, B. & English, L. (2004). Combinatorial mathematics: research into practice. *Mathematics Teacher*, *98*(3), 182–191.

Watson, R. (1996). Students' combinatorial strategies. *Teaching Mathematics and its Applications*, *15*(1), 27–32.

Resumo. Neste artigo apresentam-se alguns dos principais resultados de um trabalho de investigação sobre raciocínios em Combinatória dos alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade. Para tal, foram realizadas entrevistas individuais aos alunos, usando um protocolo escrito que incluía 15 problemas de Combinatória, versando as operações combinatórias de permutações, arranjos com e sem repetição e combinações.

Por um lado, os resultados revelam que os alunos foram capazes de aplicar, espontaneamente, um conjunto de procedimentos sistemáticos na resolução dos problemas propostos; por outro lado, enfatizam a necessidade de corrigir e melhorar estas estratégias, perspectivando-se o ensino do tema como um meio para que os alunos adquiram completamente as operações combinatórias.

Palavras-chave: Combinatória; Alunos do 9.º ano de escolaridade; Estratégias espontâneas.

Abstract. This paper aims at describing some results of an investigation about combinatorial reasoning's pupils attending the 9th grade. Pupils were interviewed individually using a written protocol with 15 problems of Combinatorics, including the combinatorial operations of permutations, arrangements with and without repetition and combinations.

The results reveal that pupils applied, spontaneously, a set of systematic procedures in solving the problems, and emphasize a need to correct and to improve those strategies. Consequently, the results suggest the teaching of Combinatorics as a means to the pupils to acquire completely the combinatorial operations.

Keywords: Combinatorics; 9th grade pupils; Spontaneous strategies.

PAULO FERREIRA CORREIA
Escola Secundária/3 de Barcelos
ferreiracorreiapaulo@gmail.com

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES
Universidade do Minho
jfernandes@iep.uminho.pt