

Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário

Méricles Thadeu Moretti

UFSC — Universidade Federal de Santa Catarina

Ademir Gomes Ferraz

UFRPE — Universidade Federal Rural de Pernambuco

Verônica Gitirana Gomes Ferreira

UFPE — Universidade Federal de Pernambuco

Introdução

Duval (1993, p. 51) remarca que o acesso a um dado objeto matemático só é possível por meio da representação desse objeto e que «A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e, esta coordenação, manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.» A passagem entre dois registros pode ter certo grau de dificuldade que depende do que Duval (1988a, p. 8) chama de congruência semântica: «Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem «dizer a mesma coisa», elas podem ser verdadeiras ou falsas conjuntamente) e não serem semanticamente congruentes: neste caso há um custo cognitivo importante para a compreensão.» Um exemplo bastante simples é a definição de módulo de um número real x que pode ser dada por uma das expressões seguintes:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

Para calcular, por exemplo, o limite seguinte,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{1-x}}}{x+5},$$

podemos iniciar a solução dividindo o denominador da fração por $x = -|x| = -\sqrt{x^2}$ inspirados na segunda definição de módulo e uma vez que $x \rightarrow -\infty$. Deste modo, temos os seguintes passos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{1-x}}}{x+5} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{1-x}}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{x+5}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{\frac{x^2 + \sqrt{1-x}}{x^2}}}{1 + \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1-x}{x^4}}}}{1 + \frac{5}{x}}, \end{aligned}$$

o que resulta, finalmente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{1-x}}}{x+5} = -1.$$

Cada uma das definições possui significado próprio, aparentemente a primeira delas mais próxima da ideia de módulo de um número real. No entanto, para resolver este exercício, a segunda definição de módulo mostrou-se ser bem mais congruente com o tipo de tratamento implementado.

Duval (1993, p.18) assinala ainda que «As representações diferentes de um mesmo objeto, não têm evidentemente o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a conseqüência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado».

Na coordenação entre dois registros, há duas operações: uma delas chamada de conversão quando operamos com registros de sistemas semióticos diferentes e a outra de tratamento no caso de operações com registros de um mesmo sistema semiótico. Por exemplo, a frase «Seja ABC um triângulo qualquer e h a altura relativa ao lado AC » pode ter como representação a Figura 1 seguinte:

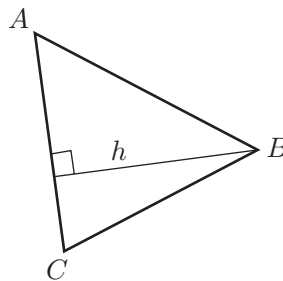


Figura 1 — Figura obtida por conversão da frase «Seja ABC um triângulo qualquer e h a altura relativa ao lado AC ».

Para efetuar a passagem da frase para a figura a operação de conversão é requerida por se tratar de sistemas de representação distintos. Para resolver uma equação, como por exem-

plo, $2x - 3 = 5$, com os passos seguintes $2x = 8$ e $x = 4$, utilizando propriedades algébricas, operações de tratamento são efetuadas. Para maiores detalhes sobre estas questões, consultar Duval (1995, 1996, 2003).

Além da forma linguística e numérica das funções de uma variável real, interessa-nos neste trabalho ainda as formas nos seguintes registros:

— de representação simbólica:

$$y : A \rightarrow B$$

$$y = y(x)$$

sendo A e B subconjuntos dos reais e $y(x)$ a expressão analítica da função y ;

— de representação gráfica que é a função representada por uma curva no plano cartesiano.

A passagem de uma função na forma de representação simbólica para a representação gráfica exige a operação de conversão. Duval (1988b) faz referência aos tipos distintos de procedimentos nas conversões entre representações de uma mesma função:

- Um deles é o procedimento de obtenção, a partir da forma de representação simbólica, a forma gráfica por meio de alguns pontos que são determinados por substituição na expressão analítica da função. Tais pontos são localizados em um sistema de eixos graduados para que em seguida a curva possa ser traçada com a junção desses pontos. Neste modo de operar não há ligação entre o gráfico e a expressão analítica da função correspondente. Diversos problemas podem surgir desta forma de proceder devido ao fato de que se há congruência semântica entre um par ordenado e a sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática (expressão analítica) a ele equivalente. Um grupo de pontos no plano cartesiano não indica necessariamente a expressão analítica da função: cada ponto isoladamente pode satisfazer uma determinada expressão, no entanto, tal conjunto de pontos pode não definir unicamente uma expressão analítica. Mesmo em se tratando de funções, como por exemplo as funções quadráticas $y = ax^2 + bx + c$, um grupo de ponto originados deste tipo de função não define de maneira direta os coeficientes a , b e c .
- Diferente deste, o procedimento de interpretação global das propriedades figurais, o conjunto *traçado/eixo* forma uma imagem que representa um *objeto* descrito por uma expressão analítica que permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão analítica. Como diz Duval (1988b, p. 237), «neste tipo de tratamento não estamos em presença da associação *um ponto* \leftrightarrow *um par de números*, mas na associação *variável visual da representação* \leftrightarrow *unidade significativa da escrita algébrica*». O exemplo tratado no Quadro 1, a seguir, usa este tipo de desenvolvimento e indica as variáveis visuais pertinentes e as unidades significativas correspondentes. Convém salientar que este autor quando trata deste tema tem por referência o ensino básico.

Para manter viva a relação entre y e o seu gráfico no plano cartesiano, Moretti (2003) preferiu utilizar a forma $y - y_1 = a(x^2 - x_1)$ das funções $y = ax^2 + bx + c$ que mostra com mais facilidade elementos constituintes da parábola. Por exemplo, para representar a função $z_1 = 2x^2 - 8x - 10$ no plano cartesiano, esta função recebe um novo registro $z_1 + 18 = 2(x - 2)^2$ que revela de forma imediata alguns elementos desta curva (por exemplo, o vértice e que z_1 possui raízes reais) e também mostra que a sua representação gráfica pode ser obtida, por exemplo, a partir de $z_2 = 2x^2$ com duas translações, uma horizontal a direita em duas unidades e outra vertical para baixo em 18 unidades. As duas formas se completam, uma revela de forma imediata o vértice e que a função possui raízes reais e a outra mostra em que ponto a parábola corta o eixo das ordenadas. Ambas também mostram que a concavidade da parábola está voltada para cima indicando a direção do foco. Neste modo de proceder não há pontos arbitrários em jogo, o esboço procura centrar-se em elementos significativos da parábola.

- Além destes modos, podemos ainda incluir o modo informático em que a forma gráfica da função é obtida com o uso de programas computacionais que cada vez mais se tornam presentes nos meios educacionais. Em alguns países, como por exemplo em Portugal, o uso da calculadora gráfica é obrigatório, «No tema «funções», presente ao longo de três anos do ensino secundário, o programa [de matemática] refere que os alunos devem abordar as diferentes representações de uma função: a verbal, a numérica, a algébrica e a gráfica.» (Romano e Ponte, 2008, p. 183). O modo de efetuar o gráfico por estes programas é também o procedimento por pontos. Diferentemente da quantidade de pontos calculados do modo manual, neste caso, muitos pontos são calculados, localizados no plano e unidos para formar a curva. O que o usuário vê simplesmente, quando não há problemas em situações limites no cálculo dos pontos, é o traçado da curva. As vantagens neste modo de conversão são diversas como por exemplo a importância da rapidez na visualização da curva, a rapidez também nos casos de mudanças de escalas, de parâmetros. Enfim, essa rapidez com que a curva pode ser mostrada traz enormes vantagens permitindo técnicas de ensino com uso das novas tecnologias.

Para o ensino básico Moretti (2003) e mais recentemente Silva (2008) em sua dissertação de mestrado apresentam possibilidades na conversão entre representações das funções estudadas no ensino secundário utilizando o procedimento de interpretação global das propriedades figurais preconizado por Duval (1988b). No ensino universitário a possibilidade de procedimento de conversão que permite acompanhar modificações simultâneas entre os registros de representação simbólica e gráfica é praticamente inexistente dada a variedade e complexidade das funções que são estudadas. Citemos, por exemplo, além das aquelas tratadas no ensino secundário e fundamental, as funções polinomiais de grau maior do que dois, as funções racionais, as funções hiperbólicas, etc. É bem verdade também que o traçado de curvas cada vez mais passa a ser tratado com programas computacionais que o fazem com maior rapidez e, na maioria dos casos, com maior se-

gurança quanto a sua correção. Deste modo, do nosso ponto de vista, para que o estudo sobre o traçado de curvas promova ou se aproxime da interpretação global de propriedades figurais é necessário que façamos uma análise das propriedades peculiares de partes constituintes de curvas. Em Duval (1988b, p. 240) encontramos este tipo de análise, ele ressalta, em função linear/afim, a importância da análise qualitativa, de perceber no coeficiente angular o sentido da inclinação e para o caso das funções reais do tipo $y = ax + b$ apresenta o quadro que transcrevemos a seguir:

Quadro 1 — Análise da curva $y = ax + b$

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente	coeficiente > 0	ausência do símbolo –
	descendente	coeficiente < 0	presença do símbolo –
Ângulo com os eixos	partição simétrica	coef. var. = 1	não tem coef.
	ângulo menor $(45^\circ)^*$	escrito	
	ângulo maior $(45^\circ)^*$	coef. var. < 1 coef. var. > 1	
Posição sobre o eixo	corta acima	acrescenta-se uma constante	signal +
	corta abaixo	subtrai-se uma constante	signal -
	corta na origem	não tem correção aditiva	

* Duval refere-se ao ângulo entre a reta e o eixo das abscissas que é medido a partir deste eixo no sentido anti-horário com eixos monométricos.

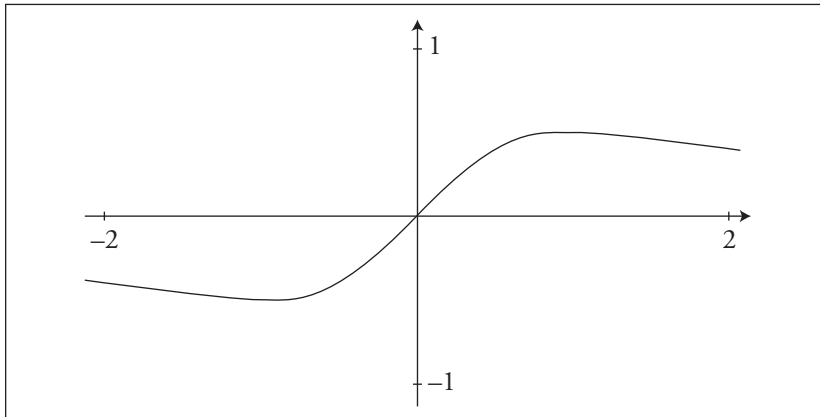
Neste quadro percebe-se a relação entre as modificações nas expressões analítica e as modificações na figura e vice-versa. O coeficiente independente b é responsável pela posição da reta no eixo das ordenadas (4ª linha da tabela), o coeficiente angular a é responsável pelo ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas (2ª e 3ª linhas da tabela).

A função tratada tem como gráfico uma reta e um quadro com algumas linhas e colunas conforme é apresentado no Quadro 1 é suficiente para resumir as situações típicas possíveis. No ensino superior, os cursos de cálculo apresentam como fundamental para o estudo de conversões entre representações de funções de uma variável real o uso das noções de limite e derivada. O que se percebe é que a relação entre a expressão analítica da função e o seu gráfico no plano cartesiano, exceto para alguns casos muito particulares, não são prontamente percebidas. Citemos, por exemplo, as funções racionais

$$y_1 = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{x}{x^2 - 1}$$

com expressões analíticas parecidas, possuem gráficos com características bastante distintas:

Quadro 2 — Exemplo da função $y_1 = \frac{x}{x^2 + 1}$



Algumas características:

$$\text{Dom}(y_1) = \mathbb{R};$$

Decresce no intervalo: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;

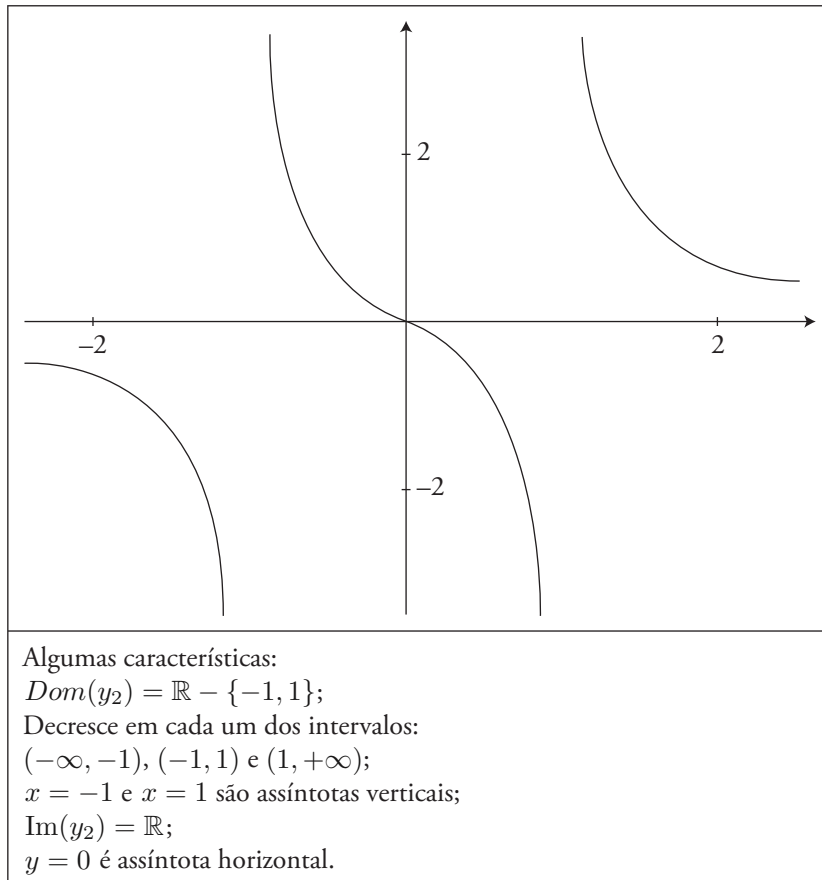
Cresce no intervalo $(-1, 1)$;

$y = 0$ é assíntota horizontal;

$\left(1, \frac{1}{2}\right)$ é ponto de máximo absoluto;

$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ é ponto de mínimo absoluto;

$$\text{Im}(y_1) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Quadro 3 — Exemplo da função $y_2 = \frac{x}{x^2 - 1}$ 

A observação na mudança da forma da expressão matemática da função não é suficiente para descrever todas as características da curva correspondente no plano cartesiano. Essas características apontadas foram obtidas graças aos tratamentos matemáticos aplicados nas funções em suas formas simbólicas, tratamentos como por exemplo, derivada, limite, resoluções de equação e inequação, determinação do domínio, etc. Com esses tratamentos podemos obter um conjunto de elementos, tais como, intervalos que dão os sinais da função, pontos em que a derivada se anulam ou não existem, retas assintóticas, etc. Diferentemente do que ocorre no Quadro 1, o número de variáveis visuais é aumentado muito significativamente e sem correspondência de forma única com uma variável simbólica. Por exemplo, o crescimento da função em um intervalo não pode ser creditado unicamente a algum termo presente na expressão analítica como é feito no caso da função linear/afim em que o sentido da inclinação é devido exclusivamente ao coeficiente angular a .

Pretendemos neste trabalho elaborar um conjunto de elementos, semelhante à forma que Duval (1988b) apresentou para o caso da função linear/afim, com o objetivo de orientar a conversão entre as formas simbólica e gráfica das funções. A nossa dificuldade reside no fato de que pensamos em um esquema que contemple o universo das funções tratados no ensino superior. Chamamos a estes elementos orientadores de unidades básicas e distinguimos dois grupos: um de *unidades gráficas* e o outro de *unidades simbólicas*. Os elementos de um dos grupos, relacionam-se com elementos do outro grupo.

Pretendemos que as unidades básicas gráficas e simbólicas funcionem como *unidades significativas ou pertinentes das representações da função em um procedimento de traçado de curvas que leve em conta a interpretação global das propriedades figurais* anteriormente mencionada. As conversões entre as representações de uma função, tanto em um sentido como em outro, poderão ser tratadas da mesma forma tendo como intermediação essas unidades básicas (unidades gráficas e simbólicas). Isto é particularmente importante uma vez que a representação gráfica da função cada vez mais passa a ser obtida pelo modo informático e, como ressalta Duval (1988b, p. 235), as maiores dificuldades são observadas no conversão que vai da representação gráfica para a simbólica.

Ferraz (2008) em sua tese de doutorado propõe um modo de tratar o traçado de curvas em nível universitário que promova a interpretação global das propriedades figurais, partindo da representação de curvas. Ele delimita o seu estudo ao caso das funções racionais no ensino superior. Pretendemos, neste estudo, seguir este caminho complementando o seu trabalho: inicialmente faremos uma análise semiótica das unidades básicas gráficas típicas e apontar a formalização simbólica equivalente, ou seja, procuraremos registrar as formas típicas encontradas no universo das funções e proceder a sua formalização matemática simbólica.

Duval (1988c, p. 58) descreve que uma figura, em particular em um problema, é objeto de uma atitude imediata, a apreensão perceptiva da forma. Esta apreensão pode ser uma aliada à sua resolução caso tenha congruência semântica com o procedimento requerido. Comentaremos mais adiante sobre a congruência semântica entre as unidades básicas gráficas e simbólicas apresentados na sessão *Análise das Tabelas*.

Unidades básicas gráficas e simbólicas

Para a elaboração das tabelas com as unidades básicas gráficas e simbólicas apresentadas no Anexo — *Formas básicas* deste texto, faremos algumas considerações para aliviar as notações.

A forma gráfica supostamente guarda o mesmo objeto matemático representado na forma simbólica. No entanto, não podemos deixar de ter em mente que há algumas limitações que são próprias do registro gráfico que podem resultar em tratamentos na forma simbólica. Por exemplo, não é claro, ao olharmos o gráfico de y_1 que $y = 0$ é assíntota e que o conjunto dos números reais é o domínio. Tais constatações podem ser fortemente sugeridas no gráfico, mas só são confirmadas por meio dos tratamentos do cálculo aplicados à função em sua forma simbólica.

Denotaremos y' e y'' as derivadas de primeira e segunda ordem respectivamente da função y em relação a x . Denotaremos por $V(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $V^-(x_0)$ a vizinhança à esquerda de x_0 e $V^+(x_0)$ a vizinhança à direita de x_0 .

1 — Os eixos ordenados e escalas.

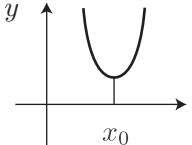
Um primeiro olhar no traçado da curva se dá sobre o sistema de eixos coordenados ortogonais, os sentidos de crescimentos e escalas. Em geral, o crescimento no eixo horizontal é convencionalizado da esquerda para a direita e no eixo vertical de baixo para cima. Um outro aspecto importante a ser considerado é a escala utilizada nos eixos horizontal e vertical. Isso mexe, de forma perceptiva, com a curva e com as inclinações das retas tangentes à curva. Em programas computacionais que traçam curvas muitas vezes as mudanças de escala dos eixos são necessárias para se ter uma boa imagem da curva.

2 — As unidades básicas gráficas e simbólicas

As 24 tabelas apresentadas no Anexo — *Formas básicas* deste texto apresentam um levantamento, sem ser exaustivo, das unidades básicas mais frequentes que ocorrem em gráficos de funções no ensino superior. Elas são observadas em grande parte das funções ou equações tratadas neste nível de ensino. São elas organizadas com os seguintes títulos: *variação e concavidade, retas assintóticas, extremos relativos, pontos de inflexão e continuidade*.

Tomando, por exemplo, a Tabela A (Tabela 13 do Anexo — *Formas Básicas*), podemos perceber que os registros de representações são colocados de forma bastante simplificadas, apenas com o objetivo de dar uma idéia da representação nos sistemas referidos. No primeira coluna, os eixos coordenados quando indicados apontam orientações no plano, em geral estamos mais interessados na forma da curva e não na sua posição em relação ao eixos.

Tabela A (Tabela 13 do Anexo — Formas Básicas)

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Mínimo relativo em x_0 . Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0 .	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) < 0, & x \in V^-(x_0) \\ y'(x) > 0, & x \in V^+(x_0) \end{cases}$

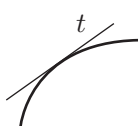
Percebemos nesta tabela que a coluna «Unidade básica gráfica» mostra um gráfico de um mínimo relativo, caracterizado nos registros linguísticos e simbólicos, respectivamente, pelas colunas «Unidade básica linguística» e «Unidade básica simbólica». A Unidade básica simbólica pode comportar também alguma unidade numérica.

Análise das tabelas

Mantendo-se a orientação dos eixos coordenados da esquerda para a direita no eixo horizontal e de baixo para cima no eixo vertical, o crescimento de uma curva em certo intervalo é facilmente perceptível pela forma da curva que «sobe» e pelas tangentes a ela com coeficientes angulares positivos. De modo semelhante, o decrescimento pode ser associado à curva que «desce» com tangentes a ela com coeficientes negativos. As retas t , tangentes às curvas, indicam, conforme os seus coeficientes angulares, o crescimento e decrescimento da curva naquele intervalo.

O exemplo a seguir, retirado da primeira tabela do anexo, indica na coluna «Unidade básica gráfica» uma curva que cresce, com retas tangentes de coeficientes angulares positivos.

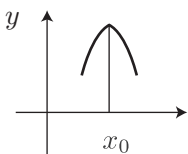
Tabela B (Tabela 1 do Anexo — Formas Básicas)

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente Função crescente Concavidade negativa	$t : y = ax + b, a > 0$ $y'(x) > 0$ $y''(x) < 0$

Ainda nesta tabela não é clara a relação da concavidade com a derivada de segunda ordem. Comentaremos sobre isto mais adiante.

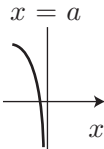
É na análise da variação da função que os pontos de máximos e mínimos relativos podem ser determinados. Na Tabela C seguinte, a curva é contínua em todo intervalo em que é apresentada, e em x_0 , há mudança de variação: passa de crescente para decrescente o que caracteriza $(x_0, y(x_0))$ um ponto de máximo relativo.

Tabela C (Tabela 16 do Anexo — Formas Básicas)

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Máximo relativo</p> <p>Derivada primeira de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0 e não existe em x_0.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) & \text{não existe} \\ y'(x_0) > 0, & x \in V^-(x_0) \\ y'(x_0) < 0, & x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Para a assíntota horizontal, visualmente a curva se aproxima de um valor limite estabelecido por uma reta horizontal e na assíntota vertical, a curva cresce (ou decresce) indefinidamente sem ultrapassar um valor limite estabelecido por uma reta vertical. A Tabela D a seguir mostra na coluna «Unidade básica gráfica» uma assíntota vertical $x = a$, pois a medida que x se aproxima de a , por valores menores do que a , a função decresce indefinidamente, o que é caracterizado na coluna «Unidade básica simbólica» por $\lim_{x \rightarrow a^-} y(x) = -\infty$.

Tabela D (Tabela 8 do Anexo — Formas Básicas)

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Assíntota vertical</p>	$\lim_{x \rightarrow a^-} y(x) = -\infty$ $x = a$

No caso da continuidade, de uma curva «bem comportada» em que a visualização da curva que pode ser traçada a mão sem que a mesma necessite ser levantada um momento sequer ou de uma curva que se «parte» ou que deixa um «buraco» contribui para o uso dos tratamentos do cálculo (valor da função em um ponto considerado, comparação de limites laterais). Em todos esses casos, a apreensão perceptiva dessas formas básicas contribui para a associação com as unidades básicas simbólicas. A Tabela E e a Tabela F a seguir mostram duas funções descontínuas em x_0 :

- na primeira aparece um «buraco» na função em um ponto x_0 que é uma situação caracterizada pelo fato de que o limite existe, mas o seu valor não é o mesmo valor da função neste ponto. Na coluna «Unidade básica simbólica», isto é caracterizado por $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = \lim_{x \rightarrow x_0^-} y \neq y(x_0)$.
- na segunda, a função apresenta um sobressalto em um ponto x_0 o que é caracterizado de forma simbólica pelo fato de que os limites laterais são diferentes.

Tabela E (Tabela 22 do Anexo — Formas Básicas)

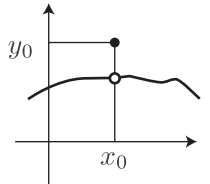
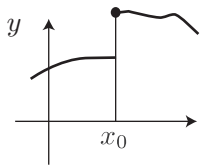
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Limites laterais em x_0 são iguais Descontínua em x_0	$y'(x_0)$ não existe $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = \lim_{x \rightarrow x_0^-} y \neq y(x_0)$

Tabela F (Tabela 23 do Anexo — Formas Básicas)

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Limites laterais em x_0 são diferentes Descontínua em x_0	$y'(x_0)$ não existe $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} y$ $y(x_0) \exists$

Em relação às formas côncavas que percebemos com certa facilidade se é positiva (voltada para cima) ou negativa (voltada para baixo) necessitam de uma representação intermediária para chegar ao tratamento matemático equivalente. A idéia de concavidade associada à derivada de segunda ordem não se faz sem antes passar por uma representação intermediária.

Tomemos por exemplo a curva apresentada na Figura 2 a seguir com concavidade negativa (ou concavidade voltada para baixo).

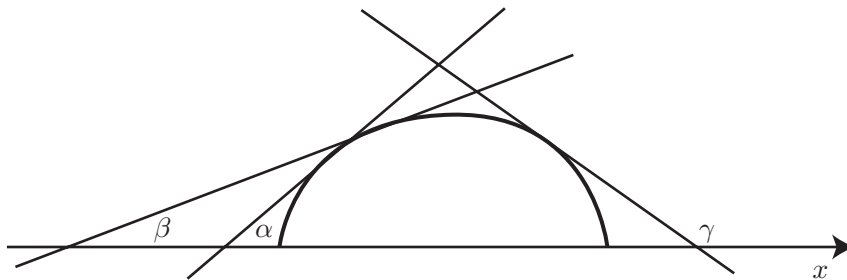


Figura 2 — Concavidade e sinal da derivada de segunda ordem

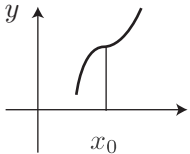
Na figura, α , β e γ são apenas alguns ângulos de retas tangentes à curva representada pela linha mais espessa. Temos a seguinte relação, aplicando a tangente a estes ângulos, $\text{tg}(\alpha) > \text{tg}(\beta) > \text{tg}(\gamma)$. Isto pode indicar que a derivada de primeira ordem da função decresce e com isso a derivada de segunda ordem da função é negativa no intervalo considerado. Deste modo, neste intervalo, temos y' decrescente $\rightarrow y'' < 0$. Contrariamente, no caso da concavidade positiva, y' crescente $\rightarrow y'' > 0$.

A não congruência semântica (Duval, 1988a) entre uma forma côncava em certo intervalo da função e a derivada de segunda ordem desta função neste mesmo intervalo ocorre pelo fato de que a associação entre esta forma e a derivada de segunda ordem não é direta, ela se dá pela análise da variação da derivada de primeira ordem. Portanto, para relacionar concavidade e derivada de segunda ordem é necessário passar pelo crescimento ou decréscimo da derivada de primeira ordem da função no intervalo considerado.

No caso do teste da derivada de segunda ordem em x_0 , tal que, $y'(x_0) = 0$, o ponto $(x_0, y(x_0))$ será máximo, por exemplo, se $y''(x_0) < 0$. No entanto, o teste da derivada de segunda ordem é um teste de condição necessária, mas não suficiente, e pode ocorrer $y''(x_0) = 0$ e desta forma não ser possível concluir se $(x_0, y(x_0))$ é ponto de máximo relativo, mínimo relativo ou de inflexão. As funções polinomiais incompletas do tipo $y = ax^2$, $y = ax^3$ ou $y = ax^4$ em $x_0 = 0$ são exemplos simples, mas bastante elucidativos desses casos.

A Tabela G a seguir indica uma situação em que em x_0 há mudança de concavidade da função, caracterizando deste modo um ponto de inflexão em $(x_0, y(x_0))$. Esta constatação visual na coluna «Unidade básica gráfica» implica nos tratamentos da coluna «Unidade básica simbólica» relacionados ao estudo do sinal da derivada de segunda ordem que significa, conforme já vimos, o estudo da variação da derivada de primeira ordem na vizinhança de x_0 .

Tabela G (Tabela 18 do Anexo — Formas Básicas)

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Ponto de inflexão. Derivada não é nula em x_0. Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0. Derivada segunda de y muda de sinal positivo para negativo.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) \neq 0 \\ y'(x) > 0, & x \in V(x_0) \\ y''(x) < 0, & x \in V^-(x_0) \\ y''(x) > 0, & x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Conversões da função entre registros simbólico e gráfico

O esquema da Figura 3 a seguir mostra tipos de associação entre a função registrada na forma simbólica (1) e o seu registro na forma gráfica (2).

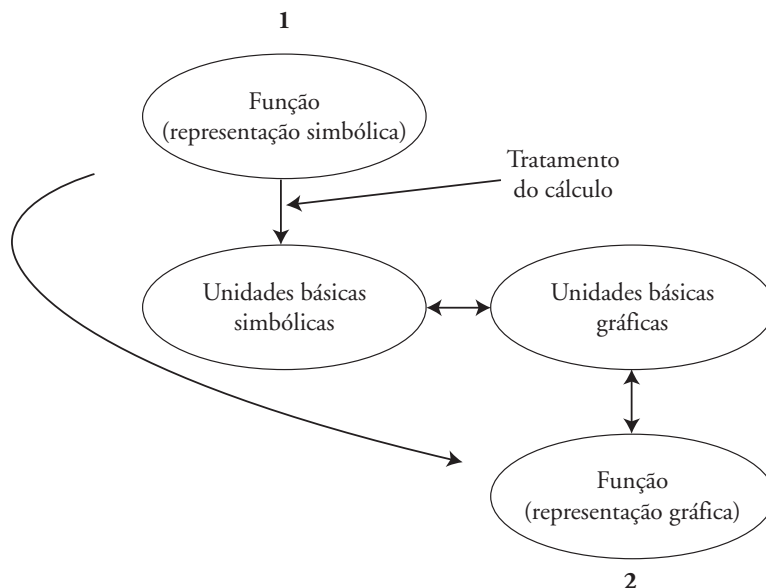


Figura 3 — Esquema de conversão entre representações simbólica e gráfica

A conversão no sentido 1→2 associada simultaneamente à conversão no sentido 2→1 pode ocorrer para grupos muito restritos de funções, entre os quais, são exemplos já assinalados em Duval (1988b), Moretti (2003) e Silva (2008).

A conversão direta no sentido 1→2 percorre um caminho preferivelmente automatizado em que um conjunto de pares ordenados definirá um certo número de pontos no plano cartesiano e o conseqüente traçado da representação gráfica da função. Alguns programas informáticos, em casos especiais de funções (ou equações), além de dar a representação gráfica da função (1→2) também permitem a associação simultânea no sentido entre a representação gráfica e a expressão analítica da função.

No entanto, excetuando esses poucos casos, na maioria dos casos a associação simultânea entre a representação simbólica e gráfica não é possível nas conversões 1→2 e 2→1. No esquema apresentado pela Figura 3 observamos a passagem obrigatória pelas unidades básicas simbólicas e gráficas.

A seguir, apresentamos o exemplo da função real

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

para tornar mais clara a nossa proposta.

Com alguns tratamentos do cálculo, obtemos

$$y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, \quad y'' = \frac{2(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = 1.$$

Assinalamos a seguir as unidades básicas simbólicas que consideramos mais importantes. Junto com essas unidades destacamos também algumas unidades numéricas:

— **pontos e retas**

$x = 0$ é raiz de y' (e também de y);

$(0, 0)$ é ponto de mínimo absoluto;

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ são pontos de inflexão;

$y = 1$ é assíntota horizontal.

y é decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$

y é crescente no intervalo $(0, +\infty)$

y possui concavidade positiva em $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

y possui concavidade negativa em $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

Deste modo:

— no intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

y é decrescente com concavidade voltada para baixo e a reta $y = 1$ é assíntota horizontal;

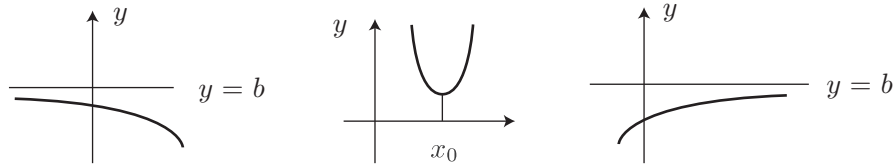
— no intervalo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

y tem concavidade voltada para cima, $(0, 0)$ é raiz e ponto de mínimo e a reta $y = 1$ é assíntota horizontal;

— no intervalo $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

y é crescente com concavidade voltada para baixo e a reta $y = 1$ é assíntota horizontal.

As unidades básicas gráficas associadas às unidades básicas simbólicas são, na ordem, as seguintes (Tabelas 12, 13 e 10 do *Anexo — Formas básicas*):



e sintetizadas na forma (sem nos preocuparmos com as posições dos eixos):



Figura 4

A composição das formas encontradas associadas aos pontos e retas destacados permitem obter a representação gráfica da função no plano cartesiano:

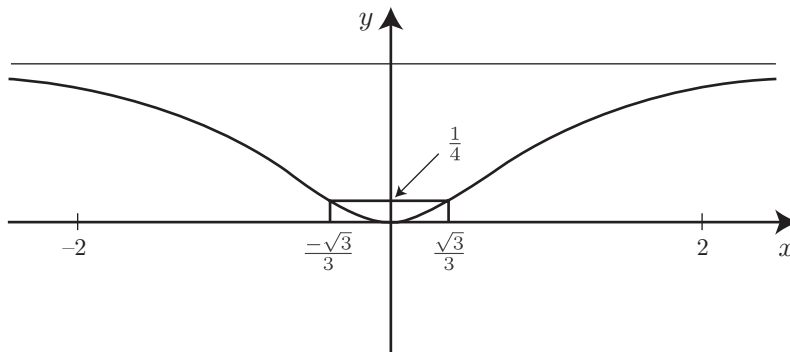


Figura 5 — Forma gráfica da função.

A curva apresentada na Figura 5 é uma síntese das unidades básicas gráficas associadas às unidades básicas numéricas e simbólicas.

Por outro lado, para realizar a conversão no sentido $2 \rightarrow 1$ de uma curva acabada e apresentada pela Figura 5 obtida em um programa computacional que em geral não destaca com precisão certos elementos, como por exemplo, o caso dos valores $1/4$, $-\sqrt{3}/3$ e $\sqrt{3}/3$ e a reta assintótica $y = 1$, podemos visualizar algumas características marcantes da curva, tais como:

- a função possui um mínimo absoluto em $(0, 0)$;
- a função é crescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, +\infty)$;

- há mudanças de concavidade da curva;
- a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Portanto, como na conversão $1 \rightarrow 2$, o percurso $2 \rightarrow 1$ passa também pelo destaque de unidades básicas, eventualmente sem a preocupação da confirmação com os tratamentos do cálculo. É uma avaliação qualitativa da curva que permite destacar as unidades básicas gráficas fundamentais, tal como preconiza Duval (1988b) para o caso das retas. Algumas dessas características observadas podem, dependendo da necessidade, demandar confirmações com os tratamentos do cálculo. Na resolução de problemas, invariavelmente as unidades básicas simbólicas associados às unidades básicas gráficas são imprescindíveis. Muitas das unidades básicas gráficas podem não estar completamente precisas, suscitar dúvidas e com isso necessitar de confirmação com os tratamentos do cálculo. Se acharmos, por exemplo, que a função possui uma assíntota horizontal em $y = 1$, tal constatação visual deverá ser confirmada pelo uso do limite.

Conclusões

Neste estudo procuramos mostrar a importância das unidades básicas simbólicas relacionadas às unidades básicas gráficas para o estudo da conversão em funções. Este modo de estudar as conversões prioriza o tratamento global preconizado por Duval (1988b). Este autor, quando tratou da função linear/afim, partiu do pressuposto que tais funções produzem retas no plano cartesiano e estudou o papel dos coeficientes da equação da reta. A função das unidades básicas é de definir de antemão esses elementos básicos, que não são tão simples como uma reta, com o uso de tratamentos do cálculo em nível superior. Sem isso, para a maioria das funções que ocorre no ensino superior, não é possível o estudo da conversão das funções com tratamento global. Nesta perspectiva, a representação simbólica da função gera um conjunto de características algébricas, reunidas sob o nome de unidades básicas simbólicas cujos elementos estão relacionados aos elementos de um conjunto de características gráficas denominados unidades básicas gráficas. Estes últimos, por sua vez, correspondem aos elementos constitutivos da função em sua forma de representação gráfica. Em geral, as conversões se dão prioritariamente entre as unidades básicas simbólicas e gráficas. Isto porque não é possível reconstruir uma função em sua forma simbólica por meio de suas unidades básicas simbólicas, por mais completas que sejam estas unidades. Já, em relação as unidades básicas gráficas e a função em sua forma gráfica, essas unidades gráficas podem reconstituir razoavelmente o gráfico da função como mostrado no último exemplo.

Convém destacar que a partir de certo momento no ensino superior e mesmo no ensino secundário a conversão entre a representação simbólica para a gráfica é efetuada por programas computacionais. Esta tendência é assinalada por Machín (2008, p. 51), quando diz que «... nos últimos anos têm havido um reconhecimento, por parte das instituições, da importância e necessidade de integrar diferentes ferramentas tecnológicas aos estudos universitários.» No caso em que a forma gráfica da função é dada por programas

computacionais, ao estudante cabe o papel de crítico das curvas produzidas pelo computador e esta crítica pode ser feita por meio do reconhecimento das unidades básicas gráficas associadas às unidades básicas simbólicas pertinentes. Salientamos ainda que os tratamentos do cálculo podem também ser efetuados por meio de programas computacionais: para os exemplos apresentados, fizemos uso do DERIVE que é um programa que permite, além de traçar curvas e superfícies, o cálculo simbólico e numérico.

Bibliografia

- Duval, R. (1988a). Ecart sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, v1, IREM de Strasbourg.
- Duval, R. (1988b). Graphiques e équations: l'articulation de deux régistres. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, v1, IREM de Strasbourg
- Duval, R. (1988c). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, v.1, p. 57–74, IREM de Strasbourg
- Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Strasbourg: IREM – ULP.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). Quel cognitive retenir em didactique des mathématiques? Recherches em didactique des mathématiques. *La Pensée Sauvage*, v. 16.3, n. 48.
- Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. p. 11–33. in Machado, Silvia D.A. (Org). *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas: Papyrus.
- Ferraz, A. G. (2008). *Esboço do gráfico de função: Um estudo semiótico*. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco. Recife: UFPE.
- Machín, M. C. (2008). CAS (Computer Álgebra System) em La enseñanza y aprendizaje Del cálculo. Algunos resultados de investigation. In Canavarro, A. P., Moreira, D. & Rocha, M. I. (Orgs.) *Tecnologias e Educação Matemática*. Lisboa: Ed. da Soc. Portuguesa de Ciências da Educação.
- Moretti, M. T. (2003). A translação como recurso no esboço de curvas através da interpretação global de propriedades figurais. In Machado, Silvia D.A. (Org). *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas: Papyrus.
- Romano, E. & Ponte, J. P. (2008). A calculadora gráfica e o ensino da matemática. In Canavarro, A. P., Moreira D. & Rocha, M. I. (Orgs.) *Tecnologias e Educação Matemática*. Lisboa: Ed. da Soc. Portuguesa de Ciências da Educação.
- Silva, M. (2008). *O Esboço de curvas: Uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica*. Dissertação de Mestrado. Florianópolis: PPGECT/UFSC

Anexo — Formas básicas

Variação e concavidade

Tabela 1

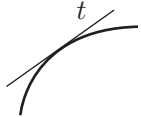
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função crescente. Concavidade negativa.	$t : y = ax + b, a > 0$ $y'(x) > 0$ $y''(x) < 0$

Tabela 2


Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função crescente. Concavidade positiva.	$t : y = ax + b, a > 0$ $y'(x) > 0$ $y''(x) > 0$

Tabela 3


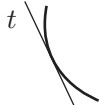
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função decrescente. Concavidade negativa.	$t : y = ax + b, a < 0$ $y'(x) < 0$ $y''(x) < 0$

Tabela 4

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função decrescente. Concavidade positiva.	$t : y = ax + b, a < 0$ $y'(x) < 0$ $y''(x) > 0$

Retas assintóticas

Tabela 5

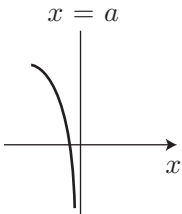
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
 <p style="text-align: center;">$x = a$</p>	Assíntota vertical.	$\lim_{x \rightarrow a^-} y(x) = -\infty$ $x = a$

Tabela 6

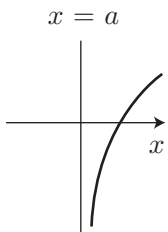
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
 <p style="text-align: center;">$x = a$</p>	Assíntota vertical.	$\lim_{x \rightarrow a^+} y(x) = -\infty$ $x = a$

Tabela 7

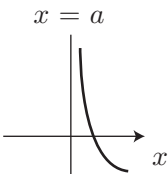
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
 <p style="text-align: center;">$x = a$</p>	Assíntota vertical.	$\lim_{x \rightarrow a^+} y(x) = +\infty$ $x = a$

Tabela 8

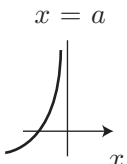
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
 <p style="text-align: center;">$x = a$</p>	Assíntota vertical.	$\lim_{x \rightarrow a^-} y(x) = +\infty$ $x = a$

Tabela 9

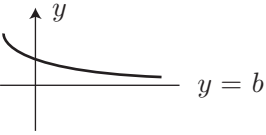
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Assíntota horizontal.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = b$ $y = b$

Tabela 10

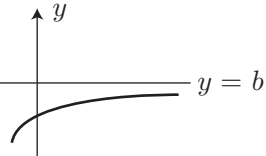
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Assíntota horizontal.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = b$ $y = b$

Tabela 11

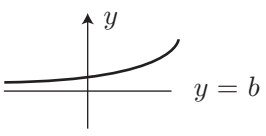
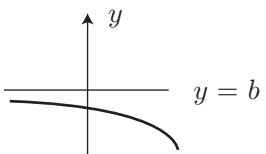
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Assíntota horizontal.	$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = b$ $y = b$

Tabela 12

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Assíntota horizontal.	$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = b$ $y = b$

Determinação de pontos importantes: extremos relativos

Tabela 13

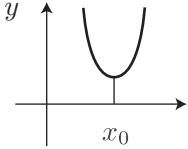
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Mínimo relativo em x_0 . Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0 .	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 14

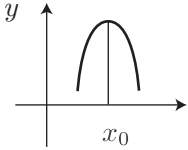
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Máximo relativo em x_0 . Derivada primeira de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0 .	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) > 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 15

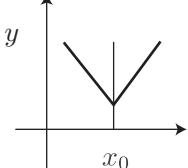
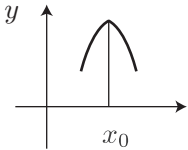
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Mínimo relativo em x_0 . Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0 e não existe em x_0 .	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \nexists \\ y'(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 16

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Máximo relativo em x_0 . Derivada primeira de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0 e não existe em x_0 .	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \nexists \\ y'(x) > 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Determinação de pontos importantes: pontos de inflexão

Tabela 17

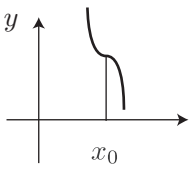
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Ponto de inflexão x_0 . Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0 . Derivada segunda de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0 .	$\begin{cases} y'(x_0) \neq 0 \\ y'(x) < 0, x \in V(x_0) \\ y''(x) > 0, x \in V^-(x_0) \\ y''(x) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 18

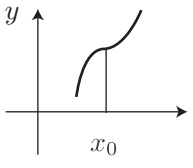
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Ponto de inflexão x_0 . Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0 . Derivada segunda de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0 .	$\begin{cases} y'(x_0) \neq 0 \\ y'(x) > 0, x \in V(x_0) \\ y''(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y''(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 19

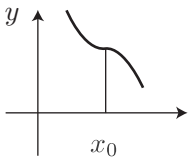
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Ponto de inflexão x_0 . Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0 . Derivada segunda de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0 .	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) < 0, x \in V(x_0) \\ y''(x) > 0, x \in V^-(x_0) \\ y''(x) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 20

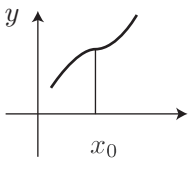
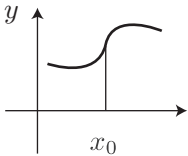
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Ponto de inflexão x_0 . Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0 . Derivada segunda de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0 .	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) > 0, x \in V(x_0) \\ y''(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y''(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 21

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Ponto de inflexão em x_0. Derivada não existe em x_0, pois a tangente em x_0 é vertical. y é contínua em x_0. Derivada segunda de y não existe em x_0, mas muda de sinal positivo para negativo na vizinhança deste ponto.</p>	$y'(x_0) \nexists$ $\lim_{x \rightarrow x_0} y = y(x_0)$ $\begin{cases} y''(x_0) \nexists \\ y''(x) > 0, x \in V^-(x_0) \\ y''(x) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Determinação de pontos importantes: continuidade

Tabela 22

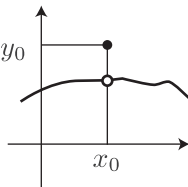
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Limites laterais em x_0 são iguais. Descontínua em x_0.</p>	$y'(x_0) \nexists$ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = \lim_{x \rightarrow x_0^-} y \neq y(x_0)$

Tabela 23

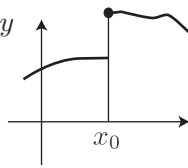
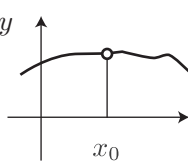
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Limites laterais em x_0 são diferentes. Descontínua em x_0.</p>	$y'(x_0) \nexists$ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} y$ $y'(x_0) \nexists$

Tabela 24

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Limites laterais em x_0 são iguais. x_0 não pertence ao domínio de y.</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = \lim_{x \rightarrow x_0^-} y$ $y'(x_0) \nexists$

Resumo. O registro de representação de uma função na forma gráfica tem grande importância por permitir visualizar como um todo o comportamento da função e, por conta disso, facilitar o estudo detalhado das suas propriedades. Duval assinala a importância, no caso das funções, de que a conversão seja efetuada de forma simultânea nos dois sentidos entre as formas gráfica e simbólica e exemplifica para o caso da função linear/afim numa perspectiva que contempla a interpretação global de propriedades figurais. Para esse conjunto de funções e algumas outras que são estudadas no ensino secundário essas conversões são relativamente simples. No entanto, para o ensino universitário, devido a maior complexidade e variedade das funções tratadas, as conversões simultâneas entre as representações das funções nos dois sentidos se tornam impraticáveis. Neste artigo, apresentamos uma saída para levantar este impasse que é o uso de um conjunto de unidades básicas simbólicas associadas a um conjunto de unidades básicas gráficas com o objetivo de intermediar as conversões em ambos os sentidos.

Palavras-chave: Registro de representação semiótica; Unidade básica simbólica; Unidade básica gráfica; Gráfico de função; Ensino superior.

Abstract. The representation register of a function in graphical form is very important as it allows the visualization of the behaviour of the function as a whole, and therefore, it facilitated the detailed study of its proprieties. Duval indicated the importance, in the case of functions, that the conversion is done simultaneously in the two ways between the graphical and symbolic forms and exemplifies for the linear/ affine function in a perspective that included the global interpretation of figural proprieties. For that set of functions and other that are studied in secondary schools those conversions are relatively simple. However, in university teaching, due to a greater complexity and functions studied, the simultaneous conversions between the representations of the functions in the two ways become rather complex. In this paper, we present a solution to overcome this issue – the use of a set of basic symbolic units associated to a set of graphical basic units aimed at mediating conversions in both ways.

Key-words: Semiotic representation registers; Symbolic basic unit; Symbolic basic graphic; Function; Graph of a function; Higher education.

■■■

MÉRICLES THADEU MORETTI

UFSC — Universidade Federal de Santa Catarina
mericles@mtm.ufsc.br

ADEMIR GOMES FERRAZ

UFRPE — Universidade Federal Rural de Pernambuco
ademir.ferraz@gmail.com

VERÔNICA GITIRANA GOMES FERREIRA

UFPE — Universidade Federal de Pernambuco
veronica.gitirana@gmail.com

