

O processo de elaboração de tarefas didáticas alternativas para o ensino e aprendizagem de Matemática como possibilidade de trabalho em curso de formação de professores de Matemática

Renata Cristina Geromel Meneghetti

Instituto de Ciências Matemáticas de Computação da Universidade de São Paulo
ICMC-USP-SP, Brasil

Julyette Priscila Redling

Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Ciências
UNESP/Bauru

Introdução

Neste artigo, abordamos o processo de elaboração de um conjunto de tarefas didáticas para o ensino e aprendizagem de funções, visando colaborar com a formação de professores de matemática ao incentivar a adoção de metodologias alternativas em sala de aula, partindo de materiais disponíveis ao professor. Ressaltamos e discutimos a importância de focalizar tal processo em cursos de formação de professores de matemática, a começar pelos cursos de formação inicial de professores.

O termo «tarefa» está sendo utilizado, tal como posto por Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997), como uma dada situação de aprendizagem proposta pelo professor — problemas, investigações, exercícios, etc. — a qual aponta para um certo conteúdo matemático e que proporciona o ponto de partida para o desenvolvimento da atividade matemática. Já o termo «atividade» é utilizado por esses autores referindo-se àquilo que o aluno faz num dado contexto, ou seja, suas ações na execução da tarefa.

Ao desenvolvermos essa pesquisa, nosso propósito inicial era verificar se seria possível, partindo de questões de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), re-apresentar tais questões, buscando incorporá-las numa abordagem alternativa de ensino.

Na metodologia tradicional, como apontam diversos autores tais como Misukami (1986), Vasconcellos (1996), a Educação é concebida como transmissão de conhecimento, o trabalho do professor se concentra na exposição e há ênfase na memorização dos conteúdos. No ensino tecnicista, tal como posto por Fiorentini (1995), a matemática é considerada como um conjunto de técnicas, regras, algoritmos.

Assim, entendemos que as abordagens alternativas se diferenciam da tradicional e da tecnicista, pois visam proporcionar ao aluno uma aprendizagem mais significativa, no

sentido de levá-lo à compreensão dos conceitos e estabelecer, como coloca Ronca (1980), uma relação entre o que o aluno está aprendendo e o que ele já aprendeu, ou seja, estabelecer conexões entre conceitos aprendidos e outros a ele relacionados.

Em âmbito geral, o PCN+ (Orientações Educacionais Complementares dos Parâmetros Curriculares Nacionais) ressalta que, tradicionalmente, o Ensino Médio organizou-se em duas modalidades: (i) a pré-universitária e a (ii) profissionalizante. A primeira enfatiza uma divisão disciplinar do aprendizado e a segunda, a preparação para o mundo do trabalho (Brasil, 1999).

No Brasil, os alunos da 3ª série do Ensino Médio devem prestar uma prova, denominada vestibular, para ingressarem no Ensino Superior. Porém, os mesmos optam por realizar o ENEM, proposto pelo MEC (Ministério de Educação) e corrigido pelo INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), que tem como um de seus objetivos complementar os exames de acesso ao Ensino Superior através de sua pontuação, podendo dessa forma contribuir para o ingresso dos estudantes nas universidades.

Assim, embora em proporções diferentes, esse exame e os vestibulares têm sido fundamentais para o acesso do aluno ao Ensino Superior. Esse processo de ingresso à universidade cria no aluno uma expectativa muito grande em relação ao Ensino Médio. Levando isso em consideração, pretendíamos trabalhar a matemática, nessa etapa de ensino, seguindo uma abordagem diferente da tradicional, porém, usando, como ponto de partida, questões desses meios de avaliação, visto que muitos alunos nessa fase estão ‘motivados’ para isso. A motivação aqui está sendo usada no sentido de mobilização, a qual, como posto por Vasconcellos (1996), supõe o interesse do sujeito em conhecer. Segundo Santa Catarina (2000), «é condição para uma atividade de aprendizagem que aquele que aprende (o aluno) tenha um motivo para aprender, veja uma finalidade em aprender e sinta uma relação do aprendizado com a vida» (p.17–18).

Com este propósito, focalizamos a Álgebra no Ensino Médio, pois entendemos que um tratamento algébrico da matemática num estilo mais ‘tradicional’, onde se enfatize fórmulas em detrimento da compreensão, pode gerar grandes dificuldades na aprendizagem. Dentro da área de álgebra, uma análise inicial nos levou a restringir o trabalho ao ensino de funções.

No que segue, discutiremos o referencial teórico que serviu de base para esta investigação, a metodologia utilizada, os principais resultados referentes ao processo de elaboração das tarefas e por fim, traçaremos uma conclusão, discutindo esses resultados no âmbito da formação de professores de matemática.

Investigações Matemáticas

Segundo Ponte (2003) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), investigar é procurar conhecer, compreender, encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos, ou seja, procurar conhecer o que não se sabe.

Uma investigação matemática desenvolve-se geralmente em torno de um ou mais problemas. Desse modo, o primeiro grande passo para iniciar qualquer investigação é estabelecer o problema a resolver, por isso há uma relação entre problemas e investigações.

Entretanto, Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) salientam que, enquanto na resolução de problemas o objetivo é encontrar um caminho para alcançar um ponto não prontamente acessível, sendo então um processo convergente, numa investigação matemática, a finalidade é explorar todos os caminhos que surgem a partir de uma dada situação, sabendo-se qual é o ponto de partida, mas não o ponto de chegada.

Para Ponte (2003), uma investigação pode se desencadear a partir da resolução de simples exercícios, porém diferencia-se desses últimos, pois um exercício pode ser resolvido usando um método ou algoritmo já conhecido. Diferencia-se também de um problema, pois neste, o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido e a solução é sabida de antemão pelo professor. Numa investigação matemática, a construção do conhecimento por parte dos alunos se dá de uma forma não sistêmica, trata-se de situações abertas, cabendo a quem investiga um papel fundamental em sua definição, na qual os pontos de partida e chegada podem variar.

Esse mesmo autor apresenta um exemplo de cada um desses tipos de abordagens:

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica:		
a) $\frac{6}{12} =$	Qual o mais pequeno número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Encontra alguma regularidade.
b) $\frac{3 \times (10 - 7)}{17 - 2} =$		
c) $\frac{\frac{20}{18 - 9}}{(15 - 10) \times 2} =$ 3		
		2. Vê se encontra regularidades nas tabuadas de outros números.

Figura 1 - Exemplos de tarefas

Compreende-se então, ainda de acordo com Ponte (2003), que *uma investigação matemática envolve quatro etapas principais: a primeira corresponde ao reconhecimento da situação e a formulação de questões; a segunda refere-se à elaboração de hipóteses; a terceira abrange a realização de testes; e a quarta diz respeito à argumentação, à demonstração e a avaliação do trabalho realizado*. Quanto ao contexto de uma tarefa investigativa, esta pode ser contextualizada sobre uma situação real ou formulada em termos puramente matemáticos.

Portanto, o que difere as atividades desenvolvidas dentro da metodologia de investigações matemáticas das demais situações-problema é que as atividades investigativas possuem um caráter desafiador e aberto, cujas questões não estão completamente formuladas, permitindo ao aluno envolver-se desde o seu primeiro momento, explorando e investigando várias alternativas de resolução (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varanda e Ferreira, 1999). Assim, a utilização de tarefas investigativas nas aulas de matemática apresenta-se como mais uma ferramenta de ensino que o professor pode lançar mão para a realização de um trabalho criativo e um ensino significativo da matemática (Fiorentini, Fernandes & Cristovão, 2005).

De acordo com Serrazina, Vale, Fonseca e Pimentel (2002), a definição de investigação matemática como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a desenvolver, dentro da sala de aula, o espírito da atividade matemática genuína, constituindo-se em uma poderosa metáfora educativa. A investigação matemática tem sido um dos modos encontrados para ensinar e aprender matemática, respeitando o conhecimento do aluno, possibilitando também o acesso às diversas áreas do conhecimento, articulando-as e com isso contribuindo com a construção da cidadania (Santos, Santos e Ricci, 2008).

A Proposta Pedagógica de equilíbrio entre os aspectos intuitivo e lógico do conhecimento matemático

Meneghetti (2001) e Meneghetti e Bicudo (2003) apresentam uma análise a respeito da elaboração do saber matemático, percorrendo algumas das principais correntes filosóficas da matemática de Platão ao início do século XX. Dessa análise, esses autores apontam que filósofos e matemáticos, desde a época de Platão, nem sempre estiveram de acordo quanto à natureza do saber matemático. Antes de Kant (1724–1804), na História da Filosofia da Matemática, é possível obter duas posições: (a) aqueles que buscaram fundamentar o saber matemático inteiramente na razão e (b) aqueles que buscaram fundamentar o saber matemático exclusivamente na intuição ou experiência.

Esses autores apontam que uma posição intermediária aos dois grupos é possível ser verificada em Kant (1987), o qual se empenhou em mostrar que o empirismo¹ e o racionalismo² isoladamente não dão conta do conhecimento científico. Se por um lado Kant reconheceu que a experiência é insuficiente para fundamentar o conhecimento: «A sensibilidade não nos ensinará as coisas de forma confusa e obscura, na verdade, ela não nos ensinará nada a respeito das coisas» (Kant, 1987, p.60); por outro lado, ele percebeu que «estas condições subjetivas são, no entanto, substanciais na determinação da forma do objeto enquanto fenômeno» (Kant, p.60). Com isso Kant concebeu os juízos científicos como sendo ao mesmo tempo sintéticos e *a priori*, ou seja, são juízos sintéticos que têm dos analíticos a virtude de serem *a priori*, isto é, serem universais e necessários. Sua ideia não era elaborar conceitos meramente analíticos e sim acrescentar ao objeto predicados sintéticos, só que duma forma que a experiência não poderia fazer. Assim, é o caráter sintético que nos permite acrescentar algo e, é o caráter *a priori* que possibilita garantir o que fora acrescentado (Kant, 1987, prefácio 2ª edição).

Ademais, segundo Kant, na matemática tais juízos só são possíveis porque esta ciência se funda no espaço e no tempo que são formas puras³ da intuição, são condições necessárias da experiência, precedendo toda experiência.

Assim, a filosofia de Kant embora com suas limitações⁴, foi uma tentativa de se considerar os aspectos lógico e intuitivo do conhecimento de forma equilibrada (Meneghetti, 2001; Meneghetti & Bicudo, 2003).

Porém, sabemos que no final do século XIX e início do XX, firmam-se três correntes filosóficas que pretendiam fornecer à matemática uma sólida fundamentação, a saber, o

logicismo, o formalismo e o intuicionismo. Tais correntes, embora com propósitos diferentes, possuíam como características comuns: o abandono da experiência como fonte de conhecimento e o consenso do caráter absoluto do conhecimento matemático (Silva, 1999). Entretanto, essas correntes falharam em seus propósitos (Snapper, 1979; Tymoczko, 1994; Ernest, 1991) e a natureza do saber matemático passou a ser novamente questionada (Meneghetti & Bicudo, 2003; Meneghetti, 2009).

Meneghetti e Bicudo (2003) procuram mostrar que tal crise é produto de se considerar os aspectos intuitivo e lógico como excludentes. À luz desse estudo, esses autores defendem a proposta de que *no processo de elaboração do saber matemático não é possível atribuir maior valor para o aspecto intuitivo ou para o lógico, ou mesmo concebê-los como excludentes*. Portanto, esses autores defendem que *o intuitivo apoia-se no lógico e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados num processo gradual e dinâmico* tomando a forma de uma espiral, sendo que o equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo deve estar presente em cada um dos níveis dessa espiral.

A intuição é tomada como um conhecimento de apreensão imediata; já a lógica é considerada como uma linguagem formal, por meio da qual sistematizamos (formalizamos) o conhecimento (Meneghetti, 2009).

Numa análise das correntes filosóficas da matemática pós-crise dos fundamentos, Meneghetti (2006) observa que as ideias colocadas nesta proposta ganham forças quando analisamos as atuais reivindicações para a Filosofia da Matemática que, entre outras contribuições, recuperam a importância dos aspectos empíricos e intuitivos na construção do saber matemático e refutam o caráter absoluto desse conhecimento.

A questão do equilíbrio dinâmico para os aspectos lógico e intuitivo abordada por esta proposta, no que se refere ao processo de elaboração do conhecimento, mostra uma afinidade com as ideias postas no construtivismo social, as quais defendem que o conhecimento subjetivo relaciona-se com o conhecimento objetivo por meio de um ciclo criativo, através do qual um contribui para a renovação do outro (Ernest, 1991). O conhecimento subjetivo refere-se à criação pessoal do indivíduo e o conhecimento objetivo é aquele que é socialmente aceito pela comunidade científica. A questão dos níveis no processo de elaboração do conhecimento pode ser justificada cognitivamente em Vygotsky (1991, p. 71, 72 e 95), pois de acordo com esse autor à medida que o intelecto se desenvolve, velhas generalizações são substituídas por generalizações mais elaboradas. A aquisição de conceitos novos e mais elevados transforma os significados dos conceitos anteriores. (Meneghetti, 2009).

A análise de uma aplicação desta proposta — para o caso de frações — é tratada em Meneghetti e Nunes (2006) e retomada em Meneghetti (2009), em que se discute sobre a fundamentação, elaboração, aplicação e avaliação de um material pedagógico desenvolvido como suporte para o processo de ensino-aprendizagem dos números racionais. Dessa aplicação esses autores chegaram à conclusão de que a proposta metodológica que estruturou o material, aliada a uma postura em consonância com seu suporte teórico, ou seja, uma postura construtivista, mostrou-se eficiente do ponto de vista didático-pedagógico, visto que favoreceu a construção (pelos alunos) dos conceitos matemáticos envolvidos.

A respeito da Formação de Professores

De acordo com Brow, Cooney e Jones (1990), muitas forças influenciam na prática e na pesquisa de formação de professores de matemática. Algumas são externas à área de educação matemática, envolvendo questões de natureza geral sobre a preocupação com relação à formação de professores, assim como: política, economia e interesses que ligam a educação com a sociedade. As forças internas à comunidade educacional estão mais ligadas aos saberes coletivos da formação de professores, visando o que constitui a imagem de um bom professor.

Diversos autores que têm investigado a formação de professores, tais como Perrenoud (1993), Nóvoa (1992) e Gómez (1992), ressaltam a necessidade de se pensar tal formação de modo diferente da «racionalidade técnica» (concepção epistemológica da prática, herdada do positivismo, segunda a qual ocorre uma separação entre o pessoal e o institucional, entre a investigação e a prática).

Para Nóvoa (1992): (i) «a formação deve estimular uma perspectiva crítico-reflexiva, que forneça aos professores os meios de um pensamento autônomo e que facilite as dinâmicas de uma auto formação participativa.»; e (ii) «os professores têm que ser protagonistas ativos nas diversas fases dos processos de formação: na concepção e no acompanhamento, na regulação e na avaliação» (p. 25 e 30). Esse mesmo autor ainda destaca que o aprender contínuo é essencial na profissão docente e que o desenvolvimento profissional do professor é um processo ininterrupto.

Garcia (1998) enfatiza a importância do conhecimento que os professores devem possuir a respeito do conteúdo que ensinam, bem como a forma como devem transpor esse conhecimento a um tipo de ensino que produza compreensão aos alunos. Shulman (1986), ao tecer considerações também a esse respeito, ressalta que o professor deve compreender a disciplina que vai ensinar sob diferentes perspectivas, isto é, deve estar aberto a novas «formas de ensinar» — ter conhecimento e estar disposto a trabalhar com as diversas metodologias de ensino — para que os conceitos se tornem mais compreensíveis aos alunos.

É consensualmente reconhecido que o professor tem um papel decisivo no processo de ensino e aprendizagem de seus alunos. Christiansen e Walther (1986), referindo-se ao professor de matemática, enfatizam que:

Ele tem que ser capaz de propor aos alunos uma diversidade de tarefas de modo a atingir os diversos objetivos curriculares [...] Tem que se preocupar tanto com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos propriamente ditos como com o desenvolvimento da capacidade geral de aprender (Christiansen & Walther, 1986 citado em Ponte 2001, p. 17).

As colocações de Meneghetti (2001) e Meneghetti e Bicudo (2003) a respeito dos diversos modos de conceber a matemática também refletem sobre a formação de professores visto que, como coloca Fiorentini (1995), o modo de ensinar do professor sofre influências dos valores e das finalidades que o mesmo atribui ao ensino de matemática, da forma como concebe a relação professor-aluno e, além disso, da visão que tem de mundo,

da sociedade e do homem.

Nesse sentido, argumenta esse último autor, certamente o professor que vê a matemática como uma ciência exata, logicamente organizada, pronta e acabada, terá uma prática pedagógica diferenciada daquele que a concebe como uma ciência viva, dinâmica e historicamente construída pelos homens, atendendo a certos interesses e necessidades sociais. Também nessa direção, salienta Misukami (1996, citado em Perez, 2004), «as crenças, os valores, as suposições que os professores têm sobre ensino, matéria, conteúdo curricular, alunos, aprendizagem estão na base de sua prática de sala de aula» (p. 259).

Segundo Perrenoud (1993, citado em André, 2001, parênteses nossos) a iniciação a pesquisa nos programas de formação de professores constitui-se num método ativo de apropriação de conhecimento, bem como aproxima o professor (ou futuro professor) das situações reais da escola e pode servir de paradigma a uma prática refletida. D'Ambrósio e Guérios (2003) colocam que há internacionalmente uma busca por uma maneira eficaz para formar professores de matemática que se preocupem com como seus alunos aprendem e que tenham a capacidade de desenvolver oportunidades para que os alunos matematizem a sua realidade compreendendo o seu mundo por meio da matemática.

No que se refere à formação de professores, para Ponte (2001), uma abordagem investigativa no ensino de matemática proporciona uma experiência produtiva referente aos processos envolvidos na matemática e ao pensamento matemático. Além disso, Segurado e Ponte (1998) acrescentam que o envolvimento do professor em formação inicial em projetos de investigação aumenta sua capacidade de raciocinar, podendo levar a uma melhoria nos processos de resolução de problemas.

Esses dois últimos autores apontam outras razões que justificam a integração da investigação na formação de professores: (i) ajuda a construir conhecimentos relevantes do ponto de vista da prática profissional; (ii) favorece a compreensão da sua própria aprendizagem; (iii) desenvolve competências e valores decisivos (espírito crítico e autonomia) e (iv) constitui um paradigma de trabalho que pode servir de base para uma prática reflexiva.

No entanto, enfatizam Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), para que a realização de atividades de investigação na aula de matemática constitua realmente um momento de aprendizagem significativa para os alunos e um momento de reflexão da prática docente, torna-se necessário que o professor invista bastante na preparação dessas aulas. Para isso, o professor tem que se familiarizar com o trabalho investigativo, além de fazer pesquisas em vários materiais. Para Silva e Curi (2007), as tarefas investigativas podem apontar caminhos a serem traçados por professores que buscam mudanças em suas aulas de matemática.

Metodologia utilizada no processo de elaboração das tarefas

Tínhamos como propósito inicial reformular questões de alguns vestibulares e do ENEM considerando duas abordagens metodológicas: (i) investigações matemáticas, referindo-se a um conjunto de propostas de trabalho, envolvendo conceitos matemáticos funda-

mentais; a partir das quais os alunos têm oportunidade de experimentar, discutir, formular, conjecturar, generalizar, provar, comunicar suas ideias e tomar decisões (Serrazina, Vale, Fonseca & Pimentel, 2002); e (ii) a proposta pedagógica defendida por Meneghetti (2001) e Meneghetti e Bicudo (2003), na qual se busca desenvolver o conhecimento matemático através de um equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo, em níveis cada vez mais elaborados, num processo dinâmico, que se dá em forma de uma espiral. Julgávamos ser possível fazer (i) e (ii) concomitantemente, visto que ambas propostas levam em consideração o processo de construção do conhecimento por parte do aluno.

Para tal, fizemos um levantamento de questões sobre álgebra abordadas em dois vestibulares (denominados por A e B) e do ENEM (denominado por C). Esses dois vestibulares são de grande representatividade na região em que esta pesquisa foi realizada e por isso foram escolhidos. O vestibular A é responsável pela realização das provas de algumas escolas do Estado de São Paulo de nível superior, e de uma universidade pública de grande representatividade em São Paulo e no Brasil; e o vestibular B é responsável pela realização dos exames de outras universidades públicas e particulares importantes do Estado de São Paulo. No Brasil, o exame C, é um exame que tem sido computado por muitos vestibulares de universidade pública⁵, sendo realizado individualmente e de caráter voluntário, oferecido anualmente aos estudantes que estão concluindo ou que já concluíram o ensino médio em anos anteriores.

Por meio da análise deste levantamento optamos pelo tema «Função» que se mostrou o mais recorrente no material estudado. Na seqüência, procedemos ao processo de elaboração de tarefas para o ensino de funções a partir da reformulação de questões encontradas nesses meios de avaliação. Elaboramos cinco tarefas e esse processo se deu em várias etapas: a primeira consistiu na análise da questão original, a segunda, na elaboração da tarefa a partir da questão original, a terceira, na aplicação das tarefas em um curso de formação inicial de professores e a última, numa nova reflexão sobre as tarefas a partir das sugestões advindas da aplicação, incorporando nos casos necessários algumas mudanças.

O desenvolvimento dessas etapas ocorreu também vinculado a um projeto de iniciação científica (financiado pela FAPESP), orientado pela primeira autora deste trabalho e com a participação da segunda, na época aluna de um curso de Licenciatura em Ciências Exatas. Nesse sentido, houve o trabalho com formação inicial de professor primeiro com essa licencianda em projeto de iniciação científica e depois com a participação de todos os alunos de um curso de formação inicial de professores de matemática (terceira etapa).

A aplicação foi efetuada com os alunos da disciplina de Prática de Ensino, ministrada pela primeira autora deste trabalho, num curso de Licenciatura em Ciências Exatas com Habilitação em Matemática de uma universidade pública do estado de São Paulo — Brasil. Anteriormente, a professora (primeira autora) havia discutido com seus alunos textos que focalizavam metodologias alternativas para o ensino de matemática, entre os quais foram abordados vários sobre investigações matemáticas, portanto os licenciandos tinham uma certa familiaridade com o assunto.

Realizamos um trabalho em grupo o qual solicitou que os licenciandos resolvessem, discutissem as tarefas e descrevessem, num relatório, o processo de investigação, as tenta-

tivas efetuadas e as dificuldades encontradas. Anexo a este relatório, havia um questionário em que se solicitavam opiniões e sugestões dos licenciandos quanto aos aspectos metodológicos das tarefas. Quatro pontos foram abordados neste questionário: (a) dois em forma de questões fechadas, na primeira, perguntava-se o que acharam da atividade, solicitando uma apreciação crítica da tarefa proposta, na segunda, perguntava-se se a tarefa se encaixava no perfil proposto (ou seja, conciliando a abordagem investigativa com a proposta pedagógica); (b) dois em forma de itens abertos, o primeiro solicita que se destacasse considerações/conclusões dos licenciandos quanto à abordagem metodológica adotada e o segundo pedia que o grupo apresentasse as sugestões que achassem pertinentes.

A turma era constituída de 12 licenciandos, alguns, inclusive, já estavam atuando em sala de aula como professores. Dividimos os alunos em quatro grupos (A, B, C e D) e aplicamos duas tarefas por grupo, garantindo assim que cada tarefa fosse feita por dois desses grupos. Entendemos que a aplicação foi uma forma de compartilhar esse processo de elaboração com os licenciandos, o que também permitiu um aprimoramento das tarefas. A partir dos dados coletados na aplicação, retomamos as tarefas propostas, visando incorporar as sugestões apresentadas pelos licenciandos.

A elaboração das tarefas

Inicialmente, fizemos um levantamento de questões de matemática que constavam nos vestibulares A e B e também no Exame C dos últimos anos. Depois, separamos todas as questões referentes à Álgebra de cada prova e construímos a tabela a seguir (tabela 1). Essa tabela apresenta, nos últimos anos, com que frequência os vários temas sobre álgebra foram abordados nesses meios de avaliação. Por exemplo, em 2008 o tema «Função» foi abordado em duas questões no vestibular A, em uma no vestibular B e em uma no exame C, portanto o tema «Função», em 2008, foi abordado quatro vezes, considerando esses três meios de avaliação.

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	Total
Função	6	6	6	7	9	6	4	4	4	52
Análise combinatória	-	-	1	3	4	4	2	2	2	18
Probabilidade	3	2	1	1	-	2	2	3	3	17
Sistemas lineares	1	-	3	2	1	-	1	2	1	11
Progressões	-	1	-	-	1	2	2	1	1	8
Matriz	1	-	-	1	1	1	1	1	-	6
Polinômio	1	1	1	-	-	-	-	-	1	4

Tabela 1. Quantidade de questões sobre álgebra abordadas nos vestibulares A e B e no Exame C

Portanto, a partir desta análise, observamos que, embora a Álgebra no Ensino Médio contemple diversos tópicos, o tema «Função», de grande relevância principalmente para este nível de ensino e o que o sucede, foi abordado em todos os exames, além de ter sido o mais focalizado nos anos analisados. Esses foram os motivos que nos levaram a eleger tal tema para a elaboração das tarefas.

Quanto ao estilo empregado em cada um desses meios de avaliação, verificamos que nas provas analisadas, a abordagem empregada no exame C se diferenciou bastante da dos vestibulares A e B. Observamos que o exame C explorava questões relacionadas ao cotidiano dos alunos de Ensino Médio, buscando valorizar o conhecimento trazido pelo aluno e a capacidade do mesmo de produzir saberes sobre a realidade. Já os dois vestibulares possuíam uma ênfase mais tecnicista, no sentido de utilizarem exercícios que enfatizavam a memorização de princípios e fórmulas, habilidades de manipulação de algoritmos ou de expressões algébricas. A partir desses dados, selecionamos algumas questões dessas provas que abordavam o tema «Função» para serem incorporados na metodologia proposta.

Então, partimos dessas questões, que no geral podiam ser caracterizados como exercícios ou problemas fechados. Esses últimos, segundo Ponte (2003), caracterizam-se por serem questões para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, mas que o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Assim, pensamos em fornecer a essas questões um caráter aberto no sentido de proporcionar a realização de uma investigação. Tivemos também a preocupação de apresentar as tarefas em níveis, inicialmente de forma mais intuitiva e caminhando progressivamente para um enfoque mais elaborado de formalização, buscando um equilíbrio entre aspectos intuitivo e lógico, tal como sugerido na proposta pedagógica adotada.

Além disso, também buscamos cumprir as quatro etapas do planejamento e realização (pelo aluno) de uma tarefa investigativa como posto por Ponte, Oliveira, Brunheira, Varanda e Ferreira (1999), a saber: reconhecimento da situação; formulação de conjecturas; realização de testes; argumentação, demonstração, generalização e conclusão do trabalho realizado.

Das cinco tarefas elaboradas, somente duas passaram, após aplicação, por uma nova reformulação. Uma delas em virtude da dificuldade dos grupos na resolução e na interpretação e a outra porque ainda apresentava um caráter fechado, a não resolução do primeiro item da tarefa bloqueava a resolução dos demais itens.

A título de exemplificação, no que segue, apresentamos três tarefas, uma pertencente ao grupo das tarefas que não precisou passar por nenhuma reformulação, visto que os alunos ao resolvê-las e analisá-las, consideraram-nas muito bem estruturadas, ricas para o trabalho em sala de aula e coerentes com a metodologia proposta e as duas tarefas que sofreram alterações após a aplicação com os alunos (futuros professores) como já citado no parágrafo anterior. Essas serão apresentadas respeitando-se a seguinte ordem: em primeiro lugar a questão original (tal como consta nos meios de avaliação considerados) e depois a questão reformulada em forma de tarefa didática antes e depois da aplicação

com os alunos da licenciatura. Em cada tarefa apresentada, segue uma discussão referente a seu objetivo do ponto de vista do ensino e aprendizagem de função seguido de uma discussão referente à síntese da aplicação efetuada.

1ª Tarefa

Momento 1: Questão Original

VENDEDORES JOVENS

Fábrica de LONAS — Vendas no Atacado

10 vagas para estudantes, 18 a 20 anos, sem experiência.

Salário: R\$ 300,00 fixo + comissão de R\$ 0,50 por m² vendido.

Contato: 0xx97-43421167 ou atacadista@lonaboa.com.br

Na seleção para as vagas deste anúncio, feita por telefone ou correio eletrônico, propunha-se aos candidatos uma questão a ser resolvida na hora. Deveriam calcular seu salário no primeiro mês, se vendessem 500 m de tecido com largura de 1,40 m, e no segundo mês, se vendessem o dobro. Foram bem sucedidos os jovens que responderam, respectivamente,

- (A) R\$ 300,00 e R\$ 500,00.
- (B) R\$ 550,00 e R\$ 850,00.
- (C) R\$ 650,00 e R\$ 1000,00.
- (D) R\$ 650,00 e R\$ 1300,00.
- (E) R\$ 950,00 e R\$ 1900,00.

Momento 2: Tarefa Reformulada

Imagine que seu amigo esteja procurando emprego, e que você para ajudá-lo compre um jornal e selecione os seguintes anúncios:

— Vendedores de lona

10 vagas para estudantes, 18 a 20 anos, com experiência.

Salário: R\$ 350,00 + comissão de R\$ 0,50 por m² vendido.

— Vendedores de loja

8 vagas para pessoas com idade entre 18 e 35 anos, sem experiência.

Salário: R\$ 630,00 + comissão de 6% sobre o valor total de venda por mês.

— Vendedores autônomos

Trabalhe vendendo os produtos de nosso catálogo (cosméticos, roupas, utensílios domésticos, eletrônicos, bijuterias, etc.) e ganhe de 20% a 35% sobre cada produto vendido.

Você seria capaz de verificar qual dessas propostas de emprego seria mais vantajosa para seu amigo? Existe alguma que será sempre mais vantajosa que as outras? Estude vários casos e justifique.

Discussão da tarefa

Na primeira tarefa reformulada o objetivo é levar o aluno identificar a função inerente à situação problema (no caso, trata-se de uma função afim) utilizando somente seus conhecimentos prévios; o que é facilitado pelo seu caráter aberto, uma vez que, nesse contexto, o aluno é livre para encontrar as mais variadas soluções, seguindo diferentes caminhos.

Ambos os grupos que participaram da aplicação a consideraram ótima para ser trabalhada em sala, por proporcionar um ambiente de discussão e estimular o raciocínio (lógico e intuitivo). Para ilustrar tais conclusões segue algumas citações dos alunos:

Trata-se de uma atividade ótima para discussão em grupo. (Grupo A).

A atividade é aberta, proporciona a discussão entre os alunos, estimula o raciocínio lógico-matemático e também a intuição. Além disso, não perde o rigor matemático e o conteúdo (função de 1º grau.). (Grupo B)

Um excerto da resolução da tarefa apresentada por um dos grupos também é mostrado abaixo, com intuito de exemplificar os processos de investigação realizados:

Primeiramente achamos que não era possível definir a melhor opção, pois todos dependem de uma variável x (quantidade de venda). Depois, lendo com calma, conseguimos montar algumas funções que facilitavam a análise: I) vendedor de lona: $S(x) = 350 + 0,50x$; II) vendedores de loja: $S(x) = 630 + 0,06x$ e III) vendedores autônomos: $S(x) = -0,27x$. Dessa forma, percebemos que o vendedor de loja seria aparentemente mais vantajoso, pois a faixa etária é maior, não exige experiência, não é necessário locomover-se para vender e possui um salário fixo maior que os outros. (Grupo B)

2ª Tarefa

Momento 1: Questão original

Carlos trabalha como disc-jóquei (dj) e cobra uma taxa fixa de R\$100,00, mais R\$ 20,00 por hora, para animar uma festa. Daniel, na mesma função, cobra uma taxa fixa de R\$55,00, mais R\$ 35,00 por hora. O tempo máximo de duração de uma festa, para que a contratação de Daniel não fique mais cara que a de Carlos, é:

- (A) 6 horas
- (B) 5 horas
- (C) 4 horas
- (D) 3 horas
- (E) 2 horas

Momento 2: Tarefa Reformulada (antes da aplicação)

Carlos trabalha com Dj, quando ele cobra uma taxa fixa de R\$ 100,00 + R\$ 20,00 por hora de show, consegue ser contratado para fazer em média 20 shows por mês. Mas ele percebe que, quando cobra a mesma taxa fixa, mas passa a cobrar R\$ 21,00 por hora de show, ele consegue ser contratado para fazer em média apenas 16 shows por mês.

- a) Estude o que acontecerá se Carlos aumentar ainda mais o valor cobrado por hora. O que você pôde concluir?
- b) Você poderia expressar matematicamente a (s) relação (s) existente (s) entre os valores dados na atividade? Que tipo de relação (s) você construiu quando relacionou esses valores?
- c) Carlos conhece Daniel que também é Dj. Quando Daniel cobra uma taxa fixa de R\$ 55,00 + R\$ 35,00 por hora de show, ele consegue ser contratado para fazer em média 20 shows por mês assim como Carlos. Porém, quando cobra R\$ 36,00 por hora de show, ele consegue ser contratado para fazer 19 shows por mês. Estude o que acontecerá se Daniel aumentar o valor cobrado por hora. É possível encontrar alguma regularidade com os resultados que você obteve para o caso de Carlos?
- d) Vocês conseguiriam dizer se mesmo cobrando preços diferentes por seus trabalhos, em algum momento eles sempre fariam o mesmo número de shows por mês? Se o show de ambos tivesse sempre a mesma duração não importando o quanto cobrem, um deles sempre terá vantagem sobre o outro? Justifique matematicamente suas respostas.
- e) Investigue qual o tempo máximo de duração de uma festa para que a contratação de Carlos não fique mais cara que a de Daniel. Justifique sua investigação.

Momento 3: Nova Reformulação (após aplicação)

- 1a) Carlos trabalha com Dj, quando ele cobra uma taxa fixa de R\$ 100,00 mais R\$ 20,00 por hora de show, ele consegue ser contratado para fazer em média 20 shows por mês. Mas ele percebe que, quando cobra a mesma taxa fixa, mas passa a cobrar R\$ 21,00 por hora de show, ele consegue ser contratado para fazer em média apenas 16 shows por mês.

Você poderia expressar matematicamente a (s) relação (s) existente (s) entre a taxa cobrada por Carlos e a quantidade de shows que ele faz em média em cada uma das situações? Que tipo de relação (s) você construiu?

Estude o que acontecerá se Carlos aumentar ainda mais o valor cobrado por hora. O que você pôde concluir?

- 1b) Carlos conhece Daniel que também é Dj. Quando Daniel cobra uma taxa fixa de R\$ 55,00 mais R\$ 35,00 por hora de show, ele consegue ser contratado para fazer em média 20 shows por mês assim como Carlos. Porém, quando cobra R\$ 36,00 por hora de show, ele consegue ser contratado para fazer 19 shows por mês. Estude o que acontecerá se Daniel aumentar o valor cobrado por hora. É possível encontrar alguma regularidade com os resultados que você obteve para o caso anterior?

Vocês conseguiriam dizer se mesmo cobrando preços diferentes por hora de show, em algum momento eles sempre fariam o mesmo número de shows por mês?

- 2) Investigue qual o tempo máximo de duração (em hora) de uma festa para que a contratação de Carlos (item 1a) não fique mais cara que a de Daniel (item 1b). Justifique sua investigação.

Discussão da tarefa

Um dos principais objetivos dessa tarefa (momento 3) é verificar se os alunos são capazes de organizar seus pensamentos, atribuindo valores coerentes para construção de tabelas, cujos dados serão utilizados para construir um ou mais tipos de função (afim) relacionada(s) com a situação colocada. Outro propósito é levar os alunos a relacionar as respostas encontradas, isto é, procurar semelhanças entre as duas situações apresentadas e analogias com outros tópicos da matemática.

Os grupos que participaram da aplicação a questionaram bastante, já que encontraram muitas dificuldades na interpretação do enunciado e consequentemente na sua execução. Porém, o grupo D não apresentou por escrito esses questionamentos deixando em branco três das quatro questões do questionário. Já o grupo C expressou por escrito esses pontos, relatando que acharam a atividade complexa e que dificilmente um aluno do Ensino Médio conseguiria resolvê-la, como pode ser visto nos excertos abaixo:

É uma atividade muito difícil e complexa, dificilmente um aluno do 2º grau conseguí resolver.

É difícil a formalização das respostas.

A atividade deve ser mudada, simplificando algumas questões, fornecendo mais informações e diminuindo seu tamanho porque é muito longa.
(Grupo C)

Apresentamos a seguir, trechos da tentativa de investigação realizada também pelo grupo C e que evidencia as dificuldades encontradas pelos alunos em realizar o que é solicitado:

1a) Se aumentar ainda mais, o número de shows diminuirá e portanto terá que trabalhar mais horas por show para compensar as perdas.»

«O que aumenta R\$1,00 proporcionalmente diminui 4 shows. Relacionamos o valor com o número de shows.

1b) A medida que Daniel aumenta o valor do show ele diminui o número de shows. Mas ele como mesmo aumento de Carlos, Daniel perde menos do que Carlos.

Acatamos as sugestões de mudanças e apresentamos uma nova reformulação a esta tarefa (ver momento 3 acima), buscando deixá-la mais clara; e ainda dividimos a situação-problema em três sub-situações correspondentes aos itens 1a, 1b e 2. Isso possibilita que o professor trabalhe quantos itens julgar necessário ou possível com sua turma.

3ª Tarefa

Momento 1: Questão original

Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que:

- a) $a + b = 2$
- b) $a + b = 1$
- c) $a - b = 3$
- d) $a - b = 2$
- e) $a - b = 1$

Momento 2: Tarefa reformulada (antes aplicação)

Imagine que você esteja numa aula de matemática na qual a professora resolveu em conjunto com você e seus colegas o seguinte exercício: se $f(x) = 2^{2x-1}$, sabendo que $f(a) = 8f(b)$, o valor de $a - b = 3/2$.

Investigue:

- a) Se o domínio da função for N , que valores podem ser usados para a e b de forma que $a - b = 3/2$, e se o domínio da função for Q^* ? Vocês percebem alguma regularidade para os valores obtidos de a e b ? E se o domínio for Q , ocorrerá alguma mudança na resposta da questão anterior? Agora estude a situação para o caso do domínio ser os R .
- b) Vocês sabem que tipo de função a professora está trabalhando nessa aula? Desafio vocês a encontrarem outras funções nas quais prevaleça a expressão $a - b = 3/2$. Isso é possível?
- c) O que você percebeu nas funções que encontrou? Explique como se deu a construção dessas funções justificando o que é constante e o que é variável e porquê.

Momento 3: Nova Reformulação (após aplicação)

Imagine que você esteja numa aula de matemática na qual, a professora resolveu em conjunto com você e seus colegas o seguinte exercício: se $f(x) = 2^{2x-1}$, sabendo que $f(a) = 8f(b)$, o valor de $a - b = 3/2$.

Investigue:

- a) Se o domínio da função for N (conjunto dos números naturais) que valores podem ser usados para a e b de forma que $a - b = 3/2$, e se o domínio da função for Q^* (o conjunto dos números racionais positivos)? Vocês percebem alguma regularidade para os valores obtidos de a e b ? E se o domínio for Q (conjunto dos números racionais), ocorrerá alguma mudança na resposta da questão anterior? Agora estude a situação para o caso do domínio ser os R (conjunto dos números reais).
- b) Vocês sabem que tipo de função a professora está trabalhando nessa aula? Desafio vocês a encontrarem outras funções nas quais prevaleça a expressão $a - b = 3/2$. Isso é possível?
- c) O que você percebeu nas funções que encontrou? Explique como se deu a construção dessas funções justificando o que é constante e o que é variável e porquê.

Discussão da tarefa

Nesta tarefa (momento 3), objetiva-se verificar o nível de conhecimento dos alunos com relação ao tipo de função presente na situação posta (função exponencial), observando a maneira como a interpretariam. Vale destacar que, nesta tarefa, diferentes conjuntos numéricos são abordados a fim de que o aluno possa investigar cada um deles, bem como suas possíveis relações.

Durante a execução da mesma, os licenciados inicialmente não a consideraram como investigativa, afirmando que esta possuía um caráter fechado e um estilo tradicional, descharacterizando assim a metodologia proposta, o que fica evidenciado na fala de um dos grupos: «A atividade exige um bom (muito bom) conhecimento sobre funções e domínios por parte do aluno. A alternativa (a) sugere uma resolução fechada, ao passo que a (b) tem caráter investigativo, porém não é fácil». (Grupo A).

A justificativa para essa afirmação era que, se os alunos não conseguissem resolver o primeiro item, consequentemente não conseguiriam investigar os demais itens, pois dependeriam do resultado do primeiro: «Difícil. Se o aluno não souber resolver o problema inicial, não conseguirá investigar as alternativas. Por isso parece ser uma atividade fechada sobre conceitos». (Grupo A).

A partir dessas críticas, o grupo sugeriu que fossem apresentadas mais informações no enunciado da tarefa de modo a facilitar o trabalho de investigação e tornar a atividade mais interessante e estimuladora: «Talvez seja necessário fornecer mais informações no enunciado». (Grupo A).

Seguindo a sugestão dos alunos, buscamos esclarecer o significado de alguns elementos presentes no enunciado para que a tarefa pudesse ser melhor interpretada e tivesse assim caráter investigativo (Momento 3).

Vale salientar, quanto a essa tarefa, que após sugestões dos licenciandos, embora tenhamos conseguido atribuir a mesma um caráter investigativo, não conseguimos contextualizá-la, evidenciando que embora seja possível construir *tarefas* de cunho investigativo, a partir de qualquer situação problema tradicional, estas nem sempre são passíveis de contextualização.

Discussão adicional referente às tarefas elaboradas

Posteriormente, ao refletirmos sobre o conjunto de tarefas elaboradas observamos que o mesmo atende ao conceito de situação didática estabelecida por Brousseau (2008), pois se trata de situações que levam o aluno a uma atividade matemática, envolvendo o contexto que cerca o professor, o aluno e o sistema educacional. Assim, entendemos que o conjunto de tarefas que elaboramos permite uma interação do sujeito com o conhecimento abordado e proporciona ao mesmo vivenciar as etapas de uma situação didática apresentada por este último autor, a saber, situação de ação, situação de formulação e situação de validação.

A situação de ação são as condições iniciais e fornecem o primeiro contato do aluno com o problema ou objeto de ensino (nesta o aluno recorre aos seus conhecimentos prévios para tentar compreender e resolver o problema — refere-se à investigação pessoal do aluno); no conjunto das tarefas elaboradas, tivemos o cuidado de partir de uma situação de forma bem intuitiva, de maneira que o aluno, mesmo sem conhecer os conceitos, tivesse condições de compreender e buscar resolver o problema apresentado. Na situação de formulação, o aluno tenta formular conjecturas, comunicar com os colegas sua proposta de estratégia para atuar na situação; esta também está contemplada no conjunto de tarefas apresentado nesse artigo, pois estabelecer conjecturas, discutir e comunicar as mesmas com os colegas faz parte de uma tarefa investigativa. Na situação de validação, o aluno deve sustentar sua opinião ou apresentar uma demonstração; buscamos levar isso em consideração (essa etapa pode ser pensada como o momento em que se dá a sistematização do conhecimento, ou seja, o aspecto lógico do conhecimento, tal como posto na proposta pedagógica utilizada).

Conclusões

Ao formular as questões, nos preocupamos em elaborar situações que proporcionassem, de preferência, de forma contextualizada e numa linguagem acessível ao aluno, uma possibilidade alternativa de abordar o tema funções. As tarefas elaboradas iniciam-se de forma mais intuitiva caminhando progressivamente para um enfoque mais elaborado de formalização, buscando um equilíbrio entre os aspectos intuitivo e lógico como posto na proposta utilizada. Além disso, a abordagem de investigação matemática foi utilizada, contemplando o reconhecimento da situação, possibilitando estabelecimento de conjecturas, formulação de argumentações, demonstrações ou generalização.

No desenvolvimento desta pesquisa, verificamos que não tivemos tantas dificuldades em conciliar as duas abordagens alternativas (investigação matemática e a proposta de desenvolvimento do conteúdo em níveis cada vez mais elaborados, buscando um equilíbrio entre a intuição e a lógica). Entretanto, constatamos que desenvolver tarefas no estilo proposto requer um tempo significativo, visto que um dos objetivos principais dessas tarefas é proporcionar ao aluno, de forma instigante, a construção de seu próprio conhecimento. Assim, quando o professor seleciona, adapta ou cria uma tarefa deve ter em conta as características dos alunos, os seus interesses e a sua forma de aprendizagem da matemática (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997). Concebendo que a aprendizagem é um produto da atividade, esses autores ressaltam que é fundamental escolher tarefas que propiciem ao aluno experiências diversificadas e interessantes.

No nosso percurso, verificamos que elaborar tarefas seguindo a abordagem escolhida não é algo simples, pois pressupõe conhecer as concepções inerentes às metodologias focalizadas e estar disposto a desenvolver um trabalho nesta direção. Requer ainda pesquisar materiais, refletir sobre cada etapa efetuada, testar e aprimorar as tarefas. Desta forma, ter a meta voltada para isto e persistir neste objetivo são atitudes fundamentais neste pro-

cesso. Entendemos que este artigo traz uma colaboração do ponto de vista metodológico, visto que o material elaborado apresenta-se como sugestão de emprego de abordagens alternativas para o ensino de matemática, visando o desenvolvimento de um trabalho mais significativo em sala de aula, em prol da aprendizagem dos alunos.

Quanto à formação de professores, a Proposta Curricular para o Ensino Médio (São Paulo, 1991) evidencia a intenção de subsidiar o papel do professor através de sugestões para o tratamento dos conteúdos. Deve-se considerar ainda que os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) nos alertam que inovações pedagógicas dependem, sobretudo, de novas atitudes referentes ao processo de ensino e aprendizagem (Brasil, 1999).

Entendemos que ao incentivarmos o professor a adotar abordagens diferentes como esta que tratamos neste artigo, contribuímos para que o mesmo possa refletir sobre sua atuação em sala de aula. De fato, Garcia (1999), quando se refere ao conhecimento profissional do professor, destaca que é preciso haver uma combinação adequada entre o conhecimento da matéria (a ensinar) e o conhecimento didático-pedagógico de como ensinar.

Como coloca Ponte (2005), por todo o mundo tem aumentado o interesse e o envolvimento de professores do Ensino Fundamental e Médio em pesquisas educacionais, a partir de diferentes metodologias, porém, com o mesmo objetivo: uma auto-reflexão da prática educacional, visando melhorar as articulações entre os problemas práticos e as propostas de viabilização de soluções para os mesmos. Para Lisita, Rosa e Lipovetsky (2001) deve-se incluir nos programas de formação inicial e continuada uma postura de defesa explícita da potencialidade que a pesquisa tem para auxiliar os professores a participarem da produção do conhecimento educacional e do debate sobre os rumos de seu trabalho.

Nessa direção, entendemos que utilizar o procedimento adotado neste trabalho em cursos de formação de professores de matemática, a começar pelos cursos de formação inicial, possibilitaria aos professores (ou futuros professores) vivenciar processos de elaboração de tarefas matemáticas com o emprego de abordagens alternativas de ensino, incentivando-os a investigar e a refletir sobre possibilidades de práticas pedagógicas.

Além disso, neste artigo, em que tivemos como foco principal o processo de elaboração dessas tarefas, mostramos que é possível, a partir de materiais disponíveis ao professor, elaborar novos materiais didáticos utilizando abordagens alternativas para o ensino de matemática, apontando, portanto, para a possibilidade de uma re-estruturação de materiais já existentes. Esse fato caminha na direção de se apontar para a flexibilidade e a autonomia que o professor pode ter em relação à forma de explorar um conteúdo matemático. Concebe-se assim, o professor como agente de seu processo de transformação e que o mesmo se transforma, tal como coloca Zeichner (1993 citado em Miranda 2001), na medida em que ele próprio é chamado a orientar sua ação na construção do seu próprio saber e da sua prática pedagógica.

Portanto, concebemos este trabalho como uma sugestão de abordagem para cursos de formação de professores de matemática, em especial para os cursos de formação inicial, por exemplo, em disciplinas de Prática de Ensino ou Metodologia de Ensino, nas quais

se trata de diversas abordagens para o ensino e a aprendizagem da matemática. Esta proposta se justifica, pois, como coloca Tardif e Raymond (2000), uma parte do que os professores conhecem sobre ensino, o comportamento do professor e sobre como ensinar, vem de sua história de vida, principalmente enquanto alunos. Ainda, como salienta André (1994, parênteses nossos), a pesquisa com propósitos didáticos, além de propiciar o acesso a conhecimentos científicos, pode levar o professor (ou futuro professor) a assumir um papel ativo no seu próprio processo de formação e a incorporar uma postura investigativa que acompanhe continuamente sua prática profissional.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio recebido da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo-Brasil).

Notas

- 1 O empirismo admite como fonte do conhecimento certo, o sensorial e, por esse motivo, nega a existência de conceitos universais. Nesse sentido, os conteúdos mentais não são inatos, são adquiridos e a causa é fundamentada no hábito.
- 2 O racionalismo sustentava que o conhecimento era válido somente se adquirido exclusivamente pela razão. Afirma a existência de idéias inatas e transforma a causa do conhecimento em necessidade analítica.
- 3 Kant chamou puras todas as representações em que não se encontra nada que pertença à sensação.
- 4 Uma das limitações, destacada por Dossey (1992), é a visão de Kant de que a natureza do espaço perceptual era euclidiana e de que os conteúdos desta geometria eram compreendidos *a priori* na mente humana. Fato que foi abalado com o surgimento da geometria não-euclidiana.
- 5 Para admissão no Ensino Superior, por exemplo, no caso da do vestibular A, a nota do vestibular tem peso 4 e a do exame C computa peso 1 (informação obtida referente ao ano de 2008).

Referências

- André, M. E. D. A. (1994) O Papel da pesquisa na articulação entre saber e prática docente. In: Claves, S. M. & Tiballi, E. F. (Orgs.). *Anais VII ENDIPE — Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino* vol. II. (pp. 291–296). Goiânia — GO.
- André, M. (org). (2001) *O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores*. Campinas: Papirus.
- Brasil (DF) (1999) Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Ensino Médio*. Brasília/DF.
- Brasil (DF) (1999) *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)*. Ensino Médio. Brasília/DF.

- Brousseau, G. (2008) *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. Apresentação de Benedito Antonio da Silva; Consultoria técnica José Carlos Miguel; Tradução Camila Bogéa. São Paulo: Ática.
- Brow, S. I., Cooney, T. J. & Jones, D. (1990) Mathematics Teacher Education. In: *Handbook of Research on Teacher Education*. Houston: W.R., Macmillan Publishing Company.
- D'Ambrosio, B. S. & Guérios, E. (2003) Formação de Professores de Matemática: apontando perspectivas e enfrentando desafios. In: *Anais XI CIAEM — Conferência Interamericana de Educação Matemática — promovido pela FURB- Universidade Regional de Blumenau — Blumenau — SC*.
- Dossey, J.A. (1992) The nature of mathematics: its role and its influence. In: GROUWS, D. A. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- ENEM. (2006) *Provas do Exame Nacional do Ensino Médio*. In: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br>. Acesso em: dez/2006
- Ernest, P. (1991) *The philosophy of mathematics education*. Bristol: Farmer.
- Fiorentini, D. (1995) Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil, *Revista Zetetiké*, ano 3, n.4.
- Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P. & Cristovão, E. M. (2005) Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: *Anais V CIBEM — Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática*. [CD]. Porto, Portugal: 17.07.05 a 22.07.05.
- Fonseca, H., Brunheira, L. & Ponte, J. P. (1999) *As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática*. Disponível em: <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos.htm>. Acesso em: Jan/2009
- Frege, G. (1959) *The foundations of arithmetic*. Oxford: Blackwell.
- Frege, G. (1971) Begriffsschrift, a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for Pure Thought, 1879. In: Heijenoort, V. From Frege to Gödel: *A Source Book Mathematical logic 1879–1931*. (pp. 1–82). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- FUVEST. (2006) *Provas do vestibular*. In: Fundação Universitária para o vestibular. Disponível em <http://www.fuvest.br/>. Acesso dez/2006.
- Garcia, C. M. (1998) Pesquisa sobre a Formação de Professores: O conhecimento sobre aprender a ensinar. *Revista Brasileira de Educação*, São Paulo, nº 9, 51–75.
- Garcia, C. M. (1999) *Formação de Professores: para uma mudança educativa*. Lisboa: Porto Editora.
- Gómez, A. P. (1992) O pensamento prático do professor: a formação do professor como profissional reflexivo. In Nóvoa, A. (org.) *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Publicação Dom Quixote. Instituto de Inovação Educacional.
- Kant, I. (1987) *Crítica da razão pura: Os pensadores. Vol. I*. São Paulo: Nova Cultural.
- Lisita, V., Rosa, D. & Lipovetsky, N. (2001) Formação de professores e pesquisa: uma relação possível? In: André, M. *O papel da pesquisa na formação de professores*, Campinas, Papirus.
- Meneghetti, R. C. G. (2001) O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: Uma análise a luz da história e da filosofia da matemática. *Tese (Doutorado em Educação Matemática)*. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro-SP.
- Meneghetti, R. C. G. (2006) Pensando uma Filosofia da Educação matemática à Luz da História e da Filosofia da Matemática. In Meneghetti, R. C.G.(Org.) *Educação Matemática: vivências refletidas*. (pp. 57–78). São Paulo: Centauro Editora.
- Meneghetti, R. C. G. (2009) O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. *Revista BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*. n.32 Rio Claro (SP). n.22. n.32, 2009, 161–188.

- Meneghetti, R.C.G. & Bicudo, I. (2003) Uma discussão sobre a Constituição do Saber Matemático e seus Reflexos na Educação Matemática, *BOLEMA — Boletim de Educação Matemática*, nº 1, ano 16, 58–72.
- Meneghetti, R.C.G. & Nunes, A. C. A. (2006) Atividades Lúdicas e Experimentais para o ensino de frações incorporadas a uma proposta pedagógica. *Educação Matemática em Revista*, SBEM, ano 13, nº 20/21, 77–86.
- Miranda, M.G. (2001) O professor pesquisador e sua pretensão de resolver a relação entre teoria e a prática na formação de professores. In: André, M. *O papel da pesquisa na formação de professores*, Campinas, Papirus.
- Mizukami, M.G.N. (1986) *Ensino: as abordagens do processo*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.
- Nóvoa, A. (1992) A formação de professores e profissão docente. In Nóvoa, A. (org.) *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Publicação Dom Quixote. Instituto de Inovação Educacional.
- Perez, G. (2004) Prática Reflexiva do Professor de Matemática. In Bicudo M. A.V. & Borba, M. de C. *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. (pp. 250–263). São Paulo: Cortez.
- Perrenoud, P. (1993) *Práticas pedagógicas, profissão docente e formação: perspectivas sociológicas*. Lisboa: Dom Quixote.
- Ponte, J. P. (2001) Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In T.J. Cooney & F.L. Lin (Eds), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53–72). Dordrecht: Kluwer.
- Ponte, J. P. (2003) Investigar, ensinar e aprender. *Actas do Prof. Mat* (pp. 25–39) [CD]. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2005) O Interacionismo Simbólico e a Pesquisa sobre a nossa própria Prática. *Revista Pesquisa Qualitativa — SE&PQ — Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos — ano 1, n.1*.
- Ponte, J. P. & Boavida, A. & Graça, M., & Abrantes, P. (1997) *Didáctica da Matemática*. Departamento do Ensino Secundário. Ministério da Educação. (Cap.4). Lisboa.
- Ponte, J. P. & Oliveira, H. & Brunheira, L. & Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1999) O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Revista Quadrante*, 7(2), 41–70.
- Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2005) *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Ronca, A.C. (1980) O modelo de David Ausubel. In Pentead, W.M.A. (org) *Psicologia de Ensino*. (pp. 59–83). São Paulo: Papilivros.
- Santa Catarina. (2000) Secretaria do estado da Educação e do Desporto. *Tempo de Aprender: subsídios para as classes de aceleração de aprendizagem e para toda a escola*. Florianópolis: DIEF.
- Santos, M. M., Santos, J. A. & Ricci, S. M. (2008) *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Disponível em: <http://www.unimeo.com.br/artigos/index.htm>. Acesso em: jan/2009.
- São Paulo (Estado) (1991) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 2º grau*. São Paulo, SE/CENP, 1991.
- Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998) Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. *Revista Quadrante*, 7(2), 5–40.
- Serrazina, L., Vale, I., Fonseca, M. & Pimentel, T. (2002) O papel das investigações matemáticas e profissionais na formação inicial de professores. In Ponte, J. P. da et al. (Orgs.) *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp. 41–58). Lisboa: SEM-SPCE.
- Silva, J. J. (1999) Filosofia da matemática e filosofia da educação matemática. In: Bicudo, M. A. V. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. (pp. 45–58). São Paulo: Editora UNESP.
- Silva, P. E. & Curi, E. (2007) *Investigações nas aulas de matemática*. Disponível em: http://www.portalunicsul.com.br/downloads/semana_matematica_2007/oficina4.pdf Acesso em: Jan/2009.
- Snapper, E. (1979) The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuicionism and Formalism. *Math. Mag.* vol. 52, n.4, September, 207–216.

- Shulman, L. S. (1986) Those who understand Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, nº 15 (2), 4–14.
- Tardif, M. & Raymond, D. (2000) Saberes, tempo e aprendizagem no magistério. In: Dossiê: políticas curriculares e decisões epistemológicas, *Educação e Sociedade*, n.73, 209–244.
- Tymoczko, T. (1994) Structuralism and post-modernism in their the philosophy of mathematics. In Ernest, P. (Ed.) *Mathematics, education and philosophy: an international perspective*. London: Farmer, 49–55.
- Vasconcellos, C. S. (1996) Construção do Conhecimento em sala de aula. São Paulo: *Séries Cadernos Pedagógicos do Libertad*, n.2.
- VUNESP. (2006) *Provas do vestibular*. In: Fundação para o vestibular do Estado de São Paulo. Disponível em <http://www.unesp.br/vestibular/arquivop.php>. Acesso dez/2006
- Vygotsky, L. (1991) *Pensamento e linguagem*. 3.ed. São Paulo: M. Fontes.
- Zeichner, K. (1993). *A formação reflexiva de professores: Ideias e práticas*. Lisboa: Educa.

Resumo. Neste artigo, focalizamos o processo de elaboração de um conjunto de tarefas didáticas alternativas para o ensino e aprendizagem de matemática, visando colaborar com a formação de professores de matemática ao incentivar a adoção de metodologias alternativas em sala de aula partindo de materiais disponíveis ao professor. Nosso propósito inicial era o de verificar se seria possível, partindo de questões de alguns vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio realizado no Brasil, rerepresentar tais questões buscando, incorporá-las numa abordagem alternativa de ensino. Nesta abordagem, concilia-se investigação matemática com uma proposta pedagógica, a qual defende que o conhecimento matemático se desenvolve mediante um equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo, em níveis cada vez mais elaborados, num processo dinâmico e em forma de espiral. Esta pesquisa nos levou a formular cinco tarefas didáticas para o ensino de funções, apresentando-se como sugestão no emprego de abordagens alternativas para o ensino de matemática. A possibilidade de reformular essas questões nos mostra a versatilidade que os professores de matemática podem ter quando buscam trabalhar com abordagens de ensino diferentes da tradicional e da tecnicista. Entendemos que este processo de elaboração de tarefas alternativas deveria ser focalizado em curso de formação de professores de matemática, a começar pelos de formação inicial, em disciplinas, como prática ou metodologia de ensino, em que se tratam diversas abordagens para o ensino e aprendizagem de matemática.

Palavras-chave: Funções, Investigação matemática, Proposta pedagógica, Elaboração de tarefas didáticas, Formação de professores de matemática.

Abstract. In this paper, we focus on the process of developing some alternative tasks for teaching and learning mathematics, aiming to help train mathematics teachers when encouraging them to adopt alternative methodologies in the classroom, using the available materials to the teacher. Based on some questions from university entrance examinations and the High School national examination in Brazil, our initial intention was to observe if it would be possible to restructure these questions having an alternative approach to teaching. In this approach, a mathematics investigation having an educational proposal was put forward, in which it is argued that mathematical knowledge is developed by means of a balance between logical and intuitive aspects at levels which are ever increasingly developed in a dynamic process and spiral form. Following this research, we came up with five tasks to teach functions, presenting them as a suggestion to apply alternative approaches for mathematics teaching. The possibi-

lity of reformulating these questions shows us the versatility that mathematics teachers can have when trying to work with other alternative teaching approaches different from the traditional ones. Finally, we understand that this process should be focused on teacher training, starting in undergraduate degree in mathematics teaching in subjects, such as the practice or methodology of teaching where various approaches for teaching and learning mathematics are dealt with.

Key words: Functions, Mathematics Investigation, Educational proposal, Developing educational tasks, Mathematics Teachers Education.

■■■

RENATA CRISTINA GEROMEL MENEGHETTI

Instituto de Ciências Matemáticas de Computação da Universidade de São Paulo

ICMC–USP–SP, Brasil.

rcgm@icmc.usp.br

JULYETTE PRISCILA REDLING

Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Ciências — UNESP/Bauru

jredling@gmail.com

