A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações

José António Fernandes
Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho

Carmen Batanero Bernabeu
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

José Miguel Contreras García
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Carmen Díaz Batanero
Departamento de Psicología, Universidad de Huelva

1. Introdução

A influência da tecnologia na Estatística e no seu ensino tem sido reconhecida internacionalmente, designadamente pela International Association for Statistical Education (IASE), nos muitos congressos e publicações centradas na Educação Estatística. Nestas instâncias tem-se discutido sobre o *software* disponível para o ensino, as mudanças ao nível do conteúdo e das metodologias de ensino que o seu uso tem implicado e o seu impacto na aprendizagem e nas atitudes dos alunos.

Segundo Jolliffe (2007), as maiores alterações no ensino da Estatística são resultado da chamada revolução tecnológica. Garfield e Burrill (1997), Weldon e Engel (2003), Chance, Ben-zvi, Garfield e Medina (2007) e Rubin (2007) referem que a tecnologia tem reduzido o tempo de cálculo, permitindo trabalhar na sala de aula com aplicações reais e na realização de projectos e investigações estatísticas. Pedir aos alunos para resolverem problemas com dados reais e relatar os resultados é agora fazível de uma maneira que o não era no passado (Connor, Davies & Holmes, 2006).

Os educadores acreditam que o uso de dados reais em tópicos de interesse dos alunos, o que não acontece apenas em Estatística, contribui para a sua motivação para aprenderem Estatística (Ben-Zvi, 2000; Biehler, 1997, 2003, 2006). As sugestões e experiências didácticas baseadas no uso de recursos tecnológicos incluem as relacionadas com a formação de professores em Estatística (Godino, Recio, Roa, Ruiz & Pareja, 2006; Godino, Roa, Recio, Ruiz & Pareja, 2006; Godino, Ruiz, Roa, Pareja & Recio, 2003; Lee & Hollebrands, 2008; Sánchez & Izunza, 2006).

A tecnologia permite ainda a exploração de objectos estatísticos significativamente abstractos através da criação de micromundos virtuais que o aluno pode manipular, experimentando o efeito das variáveis definidas (Burrill, 2002; Chance, Ben-Zvi, Garfiel & Medina, 2007). Entre outras potencialidades, estes recursos permitem explorar os conceitos de probabilidade e inferência e substituir as demonstrações formais por raciocínios mais intuitivos (Batanero, 2003; Mills, 2002; Zieffler & Garfield, 2007).

Heitele (1975) incluiu a simulação no conjunto das ideias estocásticas fundamentais, a qual exerce em Estatística um papel semelhante ao que o isomorfismo desempenha em outros ramos da matemática. Através da simulação pomos em correspondência duas experiências aleatórias diferentes, com a condição que a cada acontecimento elementar da primeira experiência lhe corresponda um e só um acontecimento elementar da segunda, de forma que os acontecimentos postos em correspondência em ambas as experiências sejam equiprováveis.

A principal razão para usar a simulação no ensino das Probabilidades e Estatística advém da dificuldade em ir além dos tradicionais jogos de sorte-azar e de problemas simples através de outros métodos, designadamente recorrendo a métodos analíticos e combinatórios. A utilização do método de simulação de Monte Carlo, mesmo sem o apoio de computadores, permite abordar situações mais realistas e resolver problemas mais sofisticados.

Contudo, o recurso à simulação tem também consequências negativas. Borovcnik (2006, 2007) destaca o facto de que a solução obtida por simulação não fornece quaisquer pistas de "como" e "porquê" a solução resolve realmente o problema e, ao basear-se na perspectiva frequencista de probabilidade, não se consideram outras visões do conceito de probabilidade. Por outro lado, a simulação proporciona somente uma estimação do valor teórico da probabilidade, a qual se pode afastar do verdadeiro valor, especialmente no caso do número de experiências ser pequeno. Além disso, os alunos podem confundir os objectos matemáticos frequência e probabilidade, que são objectos de natureza diferente (Chaput, Girard & Henry, 2008).

Neste contexto, no presente artigo abordamos a questão da utilização da simulação no ensino e na aprendizagem de Probabilidades e Estatística, discutindo potencialidades e limitações relativamente a outras abordagens. Será dado como exemplo o problema de Monty Hall e apresentadas algumas implicações do uso da simulação para a aprendizagem de Probabilidades e Estatística.

2. Modelação e simulação

2.1. Actividade de modelação e simulação

A importância do trabalho com a simulação resulta também do facto da actividade envolvida permitir estabelecer uma ponte entre a realidade e a modelação matemática (Burrill, 2002). Recordamos que "um modelo é uma interpretação abstracta, simplificada e idealizada de um objecto do mundo real, de um sistema de relações ou de um processo evolutivo que surge de uma descrição da realidade" (Henry, 1997, p. 78). O propósito de construir um modelo é obter uma melhor compreensão de uma parte do nosso universo e, assim, poder prevê-la e se possível controlá-la. Um modelo não é "real", nem tão pouco "verdadeiro"; no melhor dos casos é consistente e concordante com as observações. Ora, isto esquece-se com facilidade, confundindo-se "modelo" e "realidade" (Batanero, Henry & Parzysz, 2005).

A construção de modelos, a sua comparação com a realidade e o seu aperfeiçoamento progressivo intervêm em cada fase da resolução de problemas estatísticos, não só na análise de dados em situações práticas mas também no trabalho de desenvolvimento teórico. Um exemplo notável de modelação estatística a partir de um problema prático são as distribuições de probabilidade, que permitem descrever de forma sintética o comportamento das distribuições empíricas de dados estatísticos e fazer previsões sobre o seu comportamento. Considerando a importância da modelação em Estatística, muitos autores (e.g., Mills, 2002; Blejec, 2003; Chance & Rossman, 2006) recomendam o seu ensino como uma actividade de modelação.

Embora não se trate de uma tarefa fácil, desde que adequadamente organizada, pode contribuir para os alunos aprenderem Estatística. Chaput, Girard e Henry (2008), com base nas recomendações dos currículos franceses, assinalam os seguintes passos para a modelação, tendo em vista o ensino das Probabilidades no ensino secundário:

1. Observação da realidade;
2. Descrição simplificada da realidade;
3. Construção de um modelo;
4. Trabalho matemático com o modelo;
5. Interpretação de resultados na realidade.

No passo 1 uma primeira dificuldade é diferenciar, dentro dos fenómenos em que o acaso está presente, entre situação aleatória e contingente. Uma situação aleatória é, pelo menos potencialmente, reprodutível. Tem diferentes resultados possíveis, sem que saibamos com certeza qual ocorrerá numa experiência particular (por exemplo, não sei com certeza o tempo que tenho de esperar na paragem até que chegue o autocarro). Mas posso reproduzir a situação nas mesmas condições para analisar os diferentes resultados que se produzem (posso fazer uma contagem do tempo de espera pelo autocarro). Numa situação contingente (por exemplo, o facto de que eu me tenha casado com uma certa pessoa) também há a presença do acaso, mas não é reprodutível nas mesmas condições.

Uma vez aceite a aleatoriedade da situação, no passo 2 devemos realizar uma descrição simplificada da mesma, que nos permita passar da realidade observada (passo 1) à construção do modelo (passo 3). Para tal, tomamos alguns aspectos desta realidade e prescindimos de outros. No exemplo do autocarro deveremos decidir que paragem escolhemos, se esperamos um dado autocarro (por exemplo, o número 1) ou se contamos o tempo até que apareça na paragem qualquer autocarro. Também se diferenciamos ou não a hora do dia ou o dia da semana.

Ao dar início à construção do modelo (passo 3) de novo é necessário tomar uma série de decisões: — Aceitamos que o tempo de chegada do próximo autocarro é independente do que acaba de chegar? Trataremos o tempo como uma variável contínua? Além do tempo de espera, que outras variáveis me poderiam interessar no trabalho a realizar com o modelo?

Uma vez construído um modelo matemático para a situação (por exemplo, aceitamos que o tempo de espera entre um autocarro e outro segue uma distribuição uniforme) e obtidas as conclusões a partir do modelo resta, todavia, a parte mais importante: comparar estas conclusões com o comportamento real da situação analisada e decidir que o modelo matemático nos proporciona uma boa descrição da realidade.

Segundo Girard (1997) e Chaput, Girard e Henry (2008), ao trabalharmos com a simulação estamos já a modelar, porque temos não só de simplificar a realidade mas também fixar os aspectos dessa realidade que queremos simular e especificar as hipóteses matemáticas sobre o fenómeno estudado. Por exemplo, podemos simular a experiência aleatória de observar o sexo de um recém-nascido através da experiência aleatória de lançar uma moeda ao ar. Contudo, há outras características do recém-nascido, como o grupo sanguíneo, o seu peso ou o diâmetro do seu tórax, que não se podem simular com o lançamento da moeda. Além disso, também suposemos a hipótese (matemática) de equiprobabilidade dos dois sexos, independentemente da raça, do país de nascimento e dos antecedentes familiares. Só depois de termos estabelecido estes pressupostos podemos começar o trabalho com a simulação.

Assim, colocando a simulação em correspondência com duas experiências aleatórias diferentes, a real e a simplificada, o importante é podermos observar e operar com resultados da segunda experiência e utilizá-los para obter informação sobre a primeira. Por exemplo, se queremos saber qual a probabilidade que entre 100 recém-nascidos haja mais de 60% de rapazes, podemos lançar, por exemplo, 1000 vezes 100 moedas ao ar, verificar em cada uma das 1000 experiências se se obteve, ou não, mais do que 60% de rapazes e calcular uma estimativa para a probabilidade pedida. Mesmo neste exemplo simples, a vantagem da simulação é óbvia, pois permite condensar a experiência num tempo e espaço concretos.

Entre o *domínio da realidade*, em que se encontra a situação que queremos analisar e em que intervém o acaso, e o *domínio teórico*, onde com a ajuda da matemática construimos um modelo teórico de probabilidade que deve, por um lado, simplificar a realidade e abstrair apenas os seus aspectos essenciais e, por outro, ser útil para interpretar os caracteres retidos na modelação, Coutinho (2001) situa a simulação no *domínio pseudo-concreto*.

Enquanto que no domínio da realidade se efectua uma acção ou experiência concreta e no domínio teórico é característica a representação formal ou simbólica, no domínio pseudo-concreto opera-se mentalmente. Neste domínio, o aluno já está fora da realidade e trabalha com uma situação abstracta idealizada. Por exemplo, imagina que está trabalhando com dados perfeitos e prescinde das condições do lançamento. Ao mesmo tempo conserva a designação das faces do dado real para nomear os resultados do dado idealizado. O papel didáctico do modelo pseudo-concreto é induzir implicitamente o modelo teórico aos alunos, ainda que a sua formulação matemática não esteja ao seu alcance (Chaput, Girard & Henry, 2008; Henry, 1997).

2.2. O modelo de urna como dispositivo universal de simulação

De entre os modelos de simulação, destacam-se os modelos de urna, apresentados por Polya (1954). Este autor refere que, em Probabilidades, qualquer problema se pode transformar num problema de urnas que contenham bolas, e que qualquer fenómeno aleatório se pode transformar num fenómeno aleatório semelhante nos seus aspectos essenciais, consistindo em extracções sucessivas de bolas de um sistema combinado de urnas.

Por exemplo, para prever o sexo de um recém-nascido poderíamos substituir a experiência por outra que consiste em escolher ao acaso, com reposição, uma bola de uma urna em que introduzimos duas bolas de cores diferentes para representar os dois sexos. Se queremos simular outra experiência aleatória com dois acontecimentos de probabilidades p e q $(p + q = 1)$, basta usar uma urna em que se mantenham as proporções p e q para o número de bolas das duas cores. Simular uma experiência com r acontecimentos diferentes apenas requer usar bolas de r cores distintas, em número proporcional às probabilidades correspondentes.

Qualquer problema probabilístico implica uma série de experiências aleatórias compostas de uma determinada maneira. Cada uma destas experiências pode ser "simulada" com um modelo de urnas convenientemente escolhido (de uma forma algo mais complexa e usando uma transformação inversa da função de distribuição, mesmo os modelos contínuos de probabilidade poderiam simular-se indirectamente mediante este procedimento). A experiência composta de várias experiências simples obtém-se compondo as "urnas" correspondentes às experiências simples (obtendo uma hiper-urna) e a repetição da experiência global gera os dados que, depois de analisados, permitem determinar uma solução aproximada do problema (Batanero, 2003; Coutinho, 2001).

Neste sentido, a urna com bolas de cores (fichas ou cartões) é um "material universal", válido para estudar qualquer problema ou conceito probabilístico. Através dele a simulação proporciona um método "universal" para obter uma estimação da solução dos problemas probabilísticos, que não tem paralelo em outros ramos da matemática. Além da simulação com modelos de urnas e outros materiais manipuláveis, as tabelas de números aleatórios são também um instrumento de simulação universal, como mostram alguns exemplos apresentados no livro *Azar y probabilidad* (Godino, Batanero & Cañizares, 1997).

3. Algumas estratégias didácticas

De acordo com Borovcnik e Peard (1996), a simulação, a visualização e as analogias constituem estratégias que simplificam de algum modo as relações matemáticas envolvidas numa situação de probabilidade. Estas duas últimas estão intimamente relacionadas com a simulação, uma vez que a simulação contém em si mesma quer a visualização, quer a analogia. Abordaremos, de seguida, estas estratégias.

3.1. Simulação

Segundo Biehler (1997, 2003), em contraste com a abordagem analítica, a simulação apresenta três aspectos positivos no ensino das Probabilidades: (1) do ponto de vista representacional, os alunos podem pensar e formular modelos concretos (por exemplo, urnas e roletas) em vez de trabalhar com modelos teóricos (como sucessos, variáveis aleatórias ou distribuições de probabilidade); (2) o cálculo vem muito facilitado ao passar do cálculo teórico de probabilidades ou do cálculo combinatório ao cálculo com frequências em ordem a estimar uma probabilidade; e (3) a aprendizagem da modelação, que implica conceber uma experiência e pensar um modelo antes de efectuar cálculos sem sentido e intencionalidade. Deste modo, o aluno é levado a pensar nos aspectos característicos do modelo para poder implementar a simulação.

Biehler (2003) distingue duas perspectivas na utilização da simulação no ensino. Uma consiste em usar a simulação como método de resolução de problemas, semelhante à sua utilização profissional fora da escola. Por outro lado, a simulação (especialmente com computador) permite experimentar fenómenos aleatórios num curto espaço de tempo variando as condições e observando os resultados. Assim, proporciona-se aos alunos uma experiência probabilística difícil de adquirir na vida real, devido à limitação de tempo e recursos para observar um grande número de ensaios aleatórios.

Do ponto de vista educativo, segundo Dantal (1997), a simulação permite ensinar os alunos a representar um sistema do mundo real em termos de relações matemáticas. Concretamente, os alunos têm de aprender a isolar aspectos críticos num problema, decidindo acerca da independência das experiências, averiguando a equiprobabilidade dos resultados e atribuindo probabilidades a esses resultados. Seguidamente, o aluno tem de efectuar as operações que lhe permitam resolver o problema. Em termos de sequencialização curricular, o método de simulação constitui uma boa forma de introduzir as probabilidades, destacando o seu potencial para introduzir vocabulário e definições e enquanto etapa prévia à resolução de problemas por métodos analíticos. A facilidade de usar este método para resolver problemas permite que os alunos desenvolvam um sentimento de capacidade para lidar com as probabilidades.

3.2. Visualização

Fisher (1988), enfatizando a matemática como meio de representação, classifica as representações visuais em três categorias: (1) a representação icónica, onde a realidade se representa mediante imagens aproximadas dos objectos representados; (2) a representação esquemática, como por exemplo, um diagrama en árvore, no qual podemos representar a estrutura e formação do espaço amostral de uma experiência composta; e (3) a representação simbólica, que recorre à simbologia matemática.

Considerando os conceitos como uma rede de relações entre objectos, a visualização permite materializar algumas dessas relações, tornando, assim, essas componentes do conceito mais acessíveis e melhor compreendidas. Estas representações podem ser submetidas a operações, as quais revelam novas relações do conceito subjacente. Por exemplo, as operações de adição e subtracção que realizamos com os símbolos numéricos permitem descobrir relações do conjunto numérico correspondente e das próprias operações de adição e subtracção. Ora, isso implica que a comparação entre operações ao nível esquemático e ao nível simbólico pode conduzir a insights mais profundos e à formação do conceito. Em consequência, nesta perspectiva, a visualização não está apenas relacionada com o lado contemplativo e representacional da matemática. O facto de se poderem efectuar operações sobre relações visualizadas revela o verdadeiro potencial da visualização para a formação de conceitos.

Segundo Lipson, Kokonis e Francis (2003), actualmente, com os computadores podemos criar novas representações (para registar e apresentar informação) mais adequadas para transmitir ideias complexas do que com o tradicional papel e lápis. Estas representações, ao serem dinâmicas em vez de estáticas e interactivas em vez de inertes, oferecem um potencial que antes não era possível (Chance, Ben-Zvi, Garfield & Medina, 2007). Em termos de visualização, Borovcnik (2006) destaca os diagramas de árvore (que constituem representações esquemáticas) e as urnas e as roletas (que constituem representações icónicas), cada dos quais é possível de concretizar nos modernos dispositivos de simulação disponíveis na Internet. No caso dos diagramas de árvore, eles permitem estruturar uma experiência aleatória repetida e podem ajudar os alunos a visualizar a regra da multiplicação de probabilidades e as probabilidades condicionadas. As urnas e as roletas podem ser usadas como mediadores entre o pensamento do indivíduo, o conceito abstracto de probabilidade e uma situação-problema da realidade.

3.3. Analogias

A analogia estabelece uma relação entre conceitos matemáticos e um contexto em que esses conceitos surgem. O contexto apresenta uma visão mais geral, a correspondência entre a matemática e este contexto não é isomórfica. Assim, começando com um contexto familiar ao aluno, no qual as relações são directamente compreendidas, ele constitui-se como uma base possível para introduzir o conceito matemático relacionado, o qual pode agora ser facilmente compreendido por referência a esta situação análoga. Estas analogias podem ser estabelecidas também dentro da própria matemática. Neste caso, começamos com conceitos matemáticos conhecidos do aluno, procurando-se, seguidamente, que a partir deles o aluno estruture uma situação mais vaga.

No caso das probabilidades, Borovnick (2006, 2007) apresenta alguns exemplos de contextos onde as analogias são particularmente relevantes. O contexto de apostar pode revelar que a probabilidade é um conceito útil para a tomada de decisões em experiências únicas. Especificamente, o conceito de *odds*, enquanto probabilidade relativa (razão entre o número de casos favoráveis e não favoráveis), é o conceito praticado no contexto de apostar. Estes autores advogam que esta estratégia podia vencer a 'estratégia do resultado' usada por muitos indivíduos que aceitam a probabilidade apenas em casos em que ela prediz com certeza o resultado exacto (Konold, 1991).

No contexto da teoria de erros, pode ser antecipada a lei dos grandes números (de Bernoulli). A analogia começa com a medição repetida de uma quantidade física q. Os erros inerentes às medições muito grandes e muito pequenas, em relação à medida exacta, serão compensados ao tomar-se a média das medições simples, que por sua vez é uma melhor representação de q que qualquer medição única. Centrando-se na distribuição de médias com um número fixo de medições e comparando esta distribuição para diferentes e crescentes números de dados, dentro da teoria de erros espera-se obter uma precisão crescente. Em consequência, a probabilidade adquire uma interpretação significativa, sem a previsão de um resultado único.

Por fim, dificuldades com probabilidades condicionadas podem ser ilustradas no contexto de diagnóstico de doenças específicas com base no conhecimento indirecto, sejam testes de sangue, raios X ou outra informação. Do contexto, pode reconhecer-se que a probabilidade condicionada de obter um resultado positivo no teste médico se o paciente é portador da doença pode ser interpretada causalmente. Contudo, a probabilidade condicionada recíproca, ser portador da doença se o resultado do teste é positivo, não pode ser pensada causalmente, constituindo meramente uma indicação. Além disso, o contexto revela a seguinte simetria: um resultado positivo no teste médico pode apenas ser usado como indicação da doença se a presença da doença aumentar a probabilidade de obter um resultado positivo no teste e vice-versa (Borovcnik, 2006). Recorde-se que estas relações entre probabilidades condicionadas em ambas as direcções são muito difíceis de ver no contexto matemático formal.

Todos estes exemplos podem ser simulados com a ajuda da tecnologia e, por sua vez, a simulação com tecnologia apoia-se, na maior parte dos casos, no uso da analogia, começando com os mesmos modelos de urnas em outra experiência aleatória que se equipara à extracção de bolas de uma urna.

3.4. Uso de computadores e calculadoras *versus* materiais concretos na simulação

Uma questão importante consiste em decidir se devemos privilegiar a simulação usando calculadoras ou computadores, ou usando simplesmente objectos concretos. Por um lado, a tecnologia proporciona importantes recursos de simulação que permitem explorar praticamente todos os objectos estatísticos. Especialmente variada é a gama de recursos para simulação disponíveis na Internet, alguns dos quais apresentamos na Tabela 1.

Por outro lado, o carácter pseudo-aleatório dos números gerados por calculadoras e computadores deve ser confrontado com a aleatoriedade genuína gerada pelas experiências aleatórias com objectos concretos, os quais se constituem como modelos cognitivos que podem ser usados como primeira etapa da modelação. Face a esta questão, propõe-se que, na primeira abordagem de probabilidades, os alunos utilizem na simulação materiais concretos, como moedas, dados e roletas, e que, seguidamente, estabeleçam comparações com simulações em computador. Mills (2002) acrescenta que as duas formas de simulação se complementam e ambas constituem estratégias efectivas para aumentar a compreensão do aluno.

Tabela 1. Alguns recursos de simulação existentes na Internet.

Designação	**Endereço de Internet**
Duke University Applets	http://www.stat.duke.edu/sites/java.html
Java Applets for Teaching	http://www.stat.sc.edu/~west/javahtml/
Probability by Surprise	http://www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/
Rice Virtual Laboratory in Statistics	http://onlinestatbook.com/rvls.html
Statistics Applets	http://www.bbn-school.org/us/math/ap_stats/applets/applets.html
Vestac	http://lstat.kuleuven.be/java/index.htm
Virtual Laboratory in Probability and Statistics	http://www.math.uah.edu/stat/
Visualizing Statistical Concepts	http://www.du.edu/psychology/methods/concepts/
WWW Resources for Teaching Statistics	http://it.stlawu.edu/~rlock/maa51/onepage.html#java
WISE	http://wise.cgu.edu/

Antes do acesso generalizado aos computadores, os professores podiam recorrer a duas abordagens no ensino de probabilidades: (1) efectuar manualmente uma experiência um número significativo de vezes e (2) resolver o problema numa perspectiva *a priori*, usando as leis do cálculo combinatório e a teoria de probabilidades. Todavia, na primeira abordagem, os constrangimentos físicos e de tempo limitam seriamente a natureza e o âmbito dos problemas que podem ser tratados. Na segunda abordagem exige-se um nível de sofisticação matemática que, frequentemente, está para além das possibilidades do aluno. Consequentemente, a utilização de computadores é vista como uma possibilidade de aumentar o leque de situações probabilísticas ao alcance dos alunos (Zieffler & Garfield, 2007).

Em relação à utilização de um programa de computador, hoje em dia é fácil definir simulações na folha de cálculo Excel ou no *software* estatístico Fathom, ou então pesquisar na Internet programas aí disponíveis, de entre os quais se destacam os muitos *applets* que permitem simular vários conceitos de Probabilidades e Estatística (ver *applets* da Tabela 1).

Referindo-se ao projecto *Simulation in Mathematics-Probability and Computing*, dirigido a alunos do ensino secundário e do ensino superior, Kader (1991) afirma que muitas apresentações introdutórias de probabilidades tratam o tema de modo estático, o que significa que são focalizadas no comportamento de uma única experiência e centradas numa perspectiva formal, enfatizando o modelo matemático construído a partir dos axiomas. Em resultado desta abordagem, é usual que o aluno seja capaz de calcular uma probabilidade sem, no entanto, lhe atribuir qualquer interpretação significativa. Por outro lado, o recurso ao computador permite criar um contexto em que os alunos experienciem os conceitos probabilísticos de modo dinâmico.

No caso da simulação em computador, o estudo do problema deve iniciar-se em modo visual, de modo a proporcionar uma transição da actividade manual para a simulação em computador (por exemplo, representa-se graficamente os resultados de uma experiência). Seguidamente, a informação apresentada, na forma gráfica ou numérica, distancia-se mais dos resultados obtidos (por exemplo, depois de simuladas muitas experiências, procura-se identificar regularidades e padrões). Por fim, depois de completada a simulação e a partir dos resultados obtidos, são colocadas várias questões aos alunos.

4. Uso da simulação num caso específico: o problema de Monty Hall

Analisadas as características da simulação, a sua relação com a modelação e as suas potencialidades educativas, bem como a questão do uso da tecnologia na simulação, passamos a analisar um exemplo concreto. Com o exemplo, pretendemos mostrar que a simulação em si mesma é ineficaz para a aprendizagem pois requer que o professor organize uma situação didáctica, baseada num problema que deve resolver-se através da simulação. Além disso, o professor necessita de organizar na aula as fases de justificação das soluções e validação do conhecimento adquirido pelos alunos, para que se possa falar de um verdadeiro ensino. Dependendo da forma como o professor organiza o discurso e dos objectos matemáticos que faz emergir na solução dos alunos, com um mesmo problema e um mesmo dispositivo de simulação pode-se alcançar uma actividade matemática muito diferente.

4.1. O problema

O problema de Monty Hall consiste num jogo realizado no concurso televisivo *Let's Make a Deal*, emitido entre 1963 e 1986 na televisão norte-americana, ficando a dever-se a sua designação ao nome do apresentador do concurso. O concurso gerou muita polémica em relação às possíveis soluções do problema matemático latente, revelando muitas intuições erradas no que concerne à noção de probabilidade condicionada. Reproduz-se, a seguir, a formulação mais conhecida do problema (Bohl, Liberatore & Nydick, 1995):

> Supõe que estás num concurso, e te permitem escolher entre três portas: atrás de uma delas há um carro e atrás de cada uma das outras duas há uma cabra. Escolhes uma porta, digamos a nº 1, e o apresentador, que sabe o que há atrás das portas, abre outra, digamos a nº 3, que contém uma cabra. Então pergunta-te: — Não preferes escolher a nº 2? É melhor, para ti, alterares a tua escolha inicial?

Seguidamente, apresentam-se três possíveis soluções correctas do problema, o qual consiste em determinar a melhor estratégia a adoptar no jogo: uma solução intuitiva, baseada na construção de um diagrama de árvore; uma solução experimental, que se socorre da simulação do jogo; e, finalmente, uma solução formal, baseada no cálculo de probabilidades.

Solução intuitiva (SI). Consideremos, em primeiro lugar, a experiência "porta que tem o prémio" (cada porta tem probabilidade 1/3 de ter atrás o carro). Seguidamente, consideremos a porta que se escolhe (cada porta é escolhida com a probabilidade 1/3). Estas duas primeiras experiências são independentes. A terceira experiência é a porta que abre o apresentador, que é dependente das anteriores. No diagrama de árvore da Figura 1 apresentam-se as diferentes probabilidades tendo em conta as experiências: porta que tem o carro, porta que se escolhe e porta que se abre.

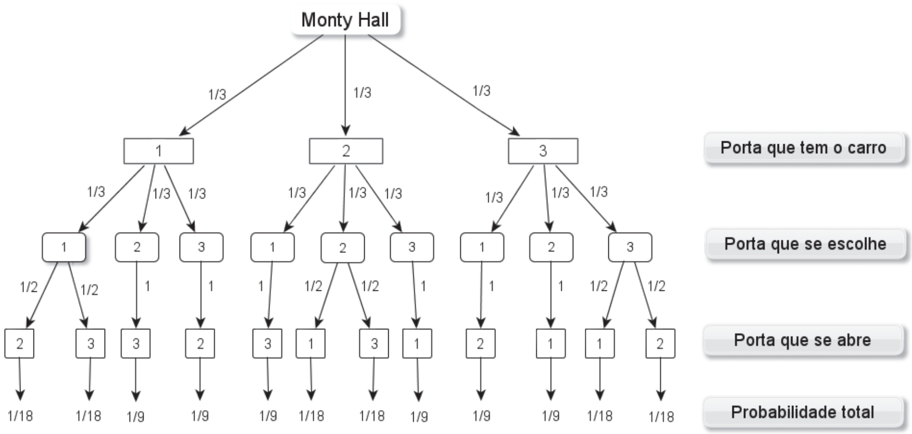

Figura 1. Diagrama de árvore ilustrando o jogo.

Observamos que se não mudamos de porta, adicionando as probabilidades de todos os ramos do diagrama (escolher a porta 1, se o carro está na 1; escolher a porta 2, se o carro está na 2; escolher a porta 3, se o carro está na 3), as possibilidades de ganhar são de 1/3. Cada um destes acontecimentos compostos tem probabilidade 1/9. Consequentemente, se não mudamos de porta, as possibilidades de perder são de 2/3.

Suponhamos que mudamos de porta. Se escolhemos uma porta com uma cabra, o apresentador mostra a outra cabra. Mudamos de porta (para a porta que tem o carro) e ganhamos. Por exemplo, se o carro está na porta 1, escolhemos a porta 2, o apresentador mostra-nos a porta 3 e só podemos mudar para a 1, que é a que tem o carro. Este acontecimento tem probabilidade 1/9. Ocorre o mesmo se o carro está na porta 1 e escolhemos a 3, donde a probabilidade de ganhar em ambos os casos é 2/9. Como há três portas, a probabilidade total de ganhar mudando será 2/3.

Se escolhemos a porta com carro, o apresentador mostra-nos uma das duas portas que tem a cabra e ao mudarmos de porta perdemos sempre. Se o carro está na porta 1, escolhemos a porta 1 e o apresentador abre a porta 2 ou a 3, cada uma delas com probabilidade 1/18. Assim, considerando ambos os casos, perdemos com probabilidade 1/9 se mudamos de porta. Como há três portas, a probabilidade total de perder mudando de porta será 1/3.

Solução experimental (SE). A experimentação com a simulação do jogo, recorrendo, por exemplo, a uma folha de cálculo, proporciona aos estudantes uma experiência intuitiva sobre os resultados que se obtêm neste jogo com cada uma das duas estratégias: mudar ou não mudar de porta. Partindo da evidência fornecida por estes resultados, observa-se experimentalmente que as possibilidades de ganhar o jogo são de aproximadamente o dobro ao mudar de porta. No caso de o aluno ter intuições erradas, ele observa contradições, produzindo-se um conflito cognitivo que ao tentar resolver o pode levar a alterar as suas ideias, aderindo a um raciocínio intuitivo correcto.

No Quadro 1 apresentam-se alguns resultados da simulação de 100 realizações do jogo através da folha de cálculo Excel preparada pelo professor. Observando as frequências relativas da estratégia "nunca mudar de porta" (0,38) e da estratégia "mudar sempre de porta" (0,62), conclui-se que esta última estratégia foi ganhadora. A simulação poderia também efectuar-se com um dos muitos *applets* existentes na Internet sobre o jogo de Monty Hall (ver, por exemplo, http://math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html).

Quadro 1. Simulação de 100 realizações do jogo na folha de cálculo Excel.

Tentativas	Porta escolhida pelo concorrente	Porta com o carro	Porta aberta pelo apresentador	Estratégia de nunca mudar de porta	Nova porta escolhida pelo concorrente	Estratégia de mudar sempre de porta
1	1	3	2	Perde	3	Ganha
2	2	2	1	Ganha	3	Perde
3	3	1	2	Perde	1	Ganha
4	2	2	1	Ganha	3	Perde
5	3	1	2	Perde	1	Ganha
...	…	…	…	…	…	…
98	2	2	1	Ganha	3	Perde
99	1	3	2	Perde	3	Ganha
100	2	3	1	Perde	3	Ganha
Probabilidade de ganhar com cada uma das estratégias				0,38		0,62

Tendo em conta que os resultados são aleatórios, devemos realizar o jogo um número considerável de vezes para que os resultados se ajustem à solução do problema, o que no caso da simulação em computador não constitui problema uma vez que ele permite efectuar um grande número de simulações rapidamente.

A simulação proporciona-nos uma solução experimental de qual é a estratégia ganhadora, mas não nos explica a razão de preferir uma estratégia em relação à outra. Neste caso, será necessário que o professor reconduza o estudante para uma solução intuitiva correcta, como a que foi apresentada antes, ou para uma solução formal, como aquela que apresentamos a seguir.

Solução formal (SF). A solução formal deste problema utiliza as propriedades da probabilidade condicionada, que é um objecto matemático de definição simples de entender mas difícil de aplicar. Para chegar à solução, definimos os seguintes acontecimentos:

A : O jogador escolhe a porta que contém o carro na sua selecção inicial;

B : O jogador escolhe uma porta que contém uma cabra na sua selecção inicial.

C : O jogador ganha o carro.

Estamos interessados em calcular $P(G)$ para cada tipo de jogador, o que muda de porta e o que não muda. Para calcular $P(G)$, basta notar que $G = (G \cap A) \cup (G \cap B)$, já que $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = \Omega$. Isto é equivalente a dizer que $\{A, B\}$ é uma partição de Ω, sendo Ω o espaço amostral da experiência.

Aplicando o axioma da reunião de probabilidades, tem-se:

$$\begin{aligned} P(G) &= P((G \cap A) \cup (G \cap B)) \\ &= P(G \cap A) + P(G \cap B) \\ &= P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando a regra de Laplace, vem: $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 2/3$ pois há um carro e duas cabras. Finalmente, temos que calcular a probabilidade de ganhar de cada tipo de jogador:

Jogador que nunca muda de porta: Neste caso $P(G|A) = 1$ e $P(G|B) = 0$, portanto $P(G) = 1/3$;

Jogador que muda sempre de porta: Neste caso $P(G|A) = 0$ e $P(G|B) = 1$, donde P(G)=2/3.

4.2. Análise semiótica da actividade matemática nas três soluções anteriores

Uma vez elaboradas as três soluções anteriores, apresentamos, seguidamente, no Quadro 2, com base no enfoque ontosemiótico (Godino, Font & Wilhelmi, 2008), as configurações dos objectos matemáticos explícitos e implícitos nestas soluções correctas. O enfoque ontosemiótico é um modelo teórico sobre o conhecimento e o ensino da matemática, envolvendo várias dimensões. Na presente análise apenas temos em conta os tipos de objectos que intervêm na actividade matemática: linguagem, conceitos/definições, proposições, procedimentos e argumentos. A finalidade da análise é mostrar a variedade de objectos utilizados nas diferentes soluções e o significado que os alunos lhes atribuem na situação apresentada.

Quadro 2. Configurações dos objectos matemáticos envolvidos nas soluções.

Tipo	Objectos matemáticos na situação	Significado na situação	SI	SE	SF
Problema	Escolha da porta	Determinar a estratégia que dá lugar a maior número de êxitos	✓	✓	✓
Linguagem	Verbal	Explicação da situação	✓	✓	✓
	Gráfica	Diagrama de árvore Representação icónica do jogo	✓	✓	
	Simbólica	Expressão de acontecimentos e probabilidades			✓
	Numérica: probabilidades	Probabilidade de cada acontecimento	✓		✓
	Numérica: frequências	Resultados da experiência		✓	
	Icónica	Ícones que representam os acontecimentos e resultados		✓	
Conceitos/Definições	Experiência aleatória	Escolher uma porta Porta que o locutor abre Ganhar o prémio	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓
	Acontecimentos; espaço amostral	Portas 1, 2, 3 Ganhar/não ganhar	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓
	Experiência composta	Composição das experiências anteriores	✓	✓	✓
	Acontecimentos da experiência composta	Produto cartesiano dos espaços amostrais anteriores	✓	✓	✓
	Frequência relativa	Êxitos / número de experiências		✓	
	Convergência	Tendência da frequência para a probabilidade		✓	
	Intersecção de acontecimentos	Parte comum dos conjuntos de acontecimentos			✓
	União de acontecimentos	Conjunto formado pelos elementos dos conjuntos de um ou outro acontecimento			✓
	Sucesso impossível	Intersecção de um acontecimento com o seu complementar			✓
	Probabilidade clássica	Razão entre os casos favoráveis e possíveis	✓		✓
	Probabilidade frequencista	Limite da frequência		✓	
	Axiomas de probabilidade	Explicitação dos axiomas			✓
	Probabilidade condicional	Proporção de ocorrência de um acontecimento em relação ao total de vezes que ocorreu outro acontecimento	✓	✓	✓
	Regra da soma	Probabilidade de ganhar o carro	✓		✓
	Regra do produto	Probabilidade simultânea; dependência	✓		✓

Quadro 2. Configurações dos objectos matemáticos envolvidos nas soluções (cont.).

Tipo	Objectos matemáticos na situação	Significado na situação	SI	SE	SF
Procedimentos	Cálculo intuitivo de probabilidades	Aplicar regras de cálculo intuitivo	✓		
	Cálculo formal de probabilidades	Aplicar regras de cálculo formal			✓
	Cálculo de frequências	Estimar a probabilidade através da frequência		✓	
	Representação gráfica	Construção do diagrama de árvore	✓		
Proposições	Independência	Experiências independentes	✓		✓
	Relação entre probabilidade condicionada e simples	Restrição do espaço amostral	✓		✓
	Lei empírica dos grandes números	Convergência da frequência para a probabilidade		✓	
	Teorema da probabilidade total	Aplicar o teorema à situação			✓
	Axioma de reunião de acontecimentos	A probabilidade da soma é a soma das probabilidades	✓		✓
Argumento	Raciocínio dedutivo	Demonstrar a solução	✓		✓
	Raciocínio empírico	Comparar o nº de acertos nas diferentes estratégias		✓	

Nota: SI – Solução Intuitiva; SE – Solução Experimental; SF – Solução Formal.

Observando o Quadro 2, verificamos que a solução experimental é a que envolve menos objectos matemáticos e a solução formal é a que mais objectos matemáticos compreende. Por outro lado, os objectos são diferentes consoante o tipo de solução. Enquanto na solução empírica se usa a concepção frequencista de probabilidade, a frequência relativa e a ideia intuitiva de convergência, estes objectos não são explícitos nas soluções intuitiva e formal. A independência entre experiências e a relação entre probabilidade condicionada, simples e conjunta, que são precisamente os objectos matemáticos que explicam a solução intuitiva, não são explícitos na solução empírica. Finalmente, a solução formal, acessível apenas a alunos mais avançados, é a que permite trabalhar com um maior número de objectos matemáticos e um raciocínio mais avançado.

4.3. Possíveis dificuldades na resolução do problema

Na resolução do problema podem surgir diferentes erros, falhas ou interpretações erradas que conduzam a soluções erróneas, das quais se apresentam a seguir três.

Não percepção da dependência das sucessivas experiências. Quer dizer, ou não se compreende a estrutura da experiência composta ou se supõem as sucessivas experiências independentes ao não se percepcionar a forma como a informação proporcionada pelo locutor afecta a probabilidade inicial de obter o prémio. Este erro de raciocínio é explicado pela "falácia do eixo temporal", descrita por Falk (1986), que consiste nas pessoas acreditarem, erradamente, que uma informação actual (a porta aberta pelo apresentador) não pode afectar a probabilidade de um acontecimento que ocorreu antes (a probabilidade da porta inicialmente seleccionada conter o prémio).

Percepção incorrecta do espaço amostral. Outra possibilidade de erro neste problema resulta de uma incorrecta enumeração do espaço amostral em uma ou várias das experiências que intervêm. A intuição diz-nos que uma vez escolhida a porta e eliminada a porta que abre o apresentador, que nunca tem prémio, só restam duas possibilidades equiprováveis. O problema reside em não considerarmos a informação de que "o apresentador sabe onde está o prémio". Como o apresentador abre a porta depois da escolha do jogador, a escolha do jogador afecta a porta que o apresentador abre. Portanto, o espaço amostral na segunda experiência varia com o resultado da primeira.

Interpretação incorrecta da convergência. Pode originar-se uma reafirmação na crença de que é indiferente mudar, ou não, de porta se, ao experimentar com a simulação, o aluno obtém (devido à aleatoriedade) um resultado parecido com as duas estratégias. Esta possibilidade é maior quando o número de experiências que se realizam é pequeno, pois a convergência das frequências relativas para a probabilidade apenas se cumpre a longo prazo, não em pequenas séries de ensaios. Há aqui o perigo de que se reafirme a "crença na lei dos pequenos números" (Tversky & Kahneman, 1982), que consiste em esperar que a convergência se realize em pequenas séries de experiências.

Shaughnessy (1992) e Leviatan (2006) propuseram este problema a estudantes do ensino secundário e do ensino superior, incluindo professores em estágio e em serviço, e verificaram que muitos estudantes acreditavam que, quando Monty Hall abre uma das portas com a cabra, as hipóteses de ganhar o prémio aumentam automaticamente de 1/3 para 1/2, pois uma das duas portas não abertas tem atrás o carro. Todavia, se não é realizada nenhuma acção pelo concorrente para aumentar as suas possibilidades de ganhar usando a nova informação, a probabilidade de ganhar o carro é, ainda, de 1/3.

Para salientar a vantagem em escolher a outra porta, Shaughnessy (1992) apresenta três estratégias: (1) manter a escolha original; (2) lançar uma moeda ao ar, mantendo a escolha original se sair cara e escolhendo a outra porta se sair coroa; e (3) escolher a outra porta. A simulação de cada uma destas estratégias, recorrendo a uma roleta dividida em três partes iguais e a uma moeda, conduz, depois de efectuado um número suficientemente grande de simulações, à conclusão que a estratégia mais provável é escolher sempre a outra porta. Contudo, para Borovcnik e Peard (1996) a simulação falha em explicar a razão da não validade da solução intuitiva errónea, que resulta de assumir a equiprobabilidade em relação às duas portas que se mantêm fechadas. Tendo por referência este exemplo, Borovcnik e Peard (1996) afirmam:

> A simulação nunca pode substituir o pensamento acerca de um problema e nunca pode atacar directamente intuições erradas. Ela serve apenas como uma indicação da localização do erro de um pensamento intuitivo. O processo de clarificação tem de ser prosseguido por outros meios. (p. 263)

Será portanto necessário complementar a solução empírica do problema, obtida através da simulação, com uma das estratégias intuitiva ou formal, apresentadas anteriormente.

5. Precauções no uso da simulação

Apesar das vantagens apontadas ao método de simulação, o método não responde a todas as dificuldades no ensino de Probabilidades e Estatística. Especificamente, a utilização do método, ao exigir uma planificação cuidada por parte do professor e uma atenção especial às respostas dos alunos, implica uma predisposição crítica para aceitar resultados inesperados. Existe ainda o perigo dos alunos explorarem demasiado rapidamente os problemas, não lhes sendo dada a oportunidade para pensarem cuidadosamente naquilo que fizeram e para passarem com confiança de um nível de pensamento para outro. Em relação a este último aspecto, o perigo é considerável em virtude do carácter activo, concreto e de jogo do método.

Relativamente à simulação como meio de criar ambientes-modelo, Borovcnik e Peard (1996) discutem a questão da convergência empírica das frequências relativas. A simulação usual centra-se no cálculo de sucessivas frequências relativas para um número crescente de experiências. Nesta estratégia, há três questões críticas a considerar: (1) para que valor limite convergem as frequências relativas?; (2) em relação a que convergem?; e (3) com que rapidez convergem para o limite?

Para evitar dificuldades subjacentes a estas questões, fazendo com que os alunos apreciem o efeito do tamanho da amostra sobre a precisão da estimação dada pelas frequências relativas, Freudenthal (1972) propõe uma estratégia diferente para enfrentar o problema. No caso de uma moeda, começamos por lançar ou simular o seu lançamento muitas vezes, digamos 600 vezes. Seguidamente, dividimos a sequência dos resultados obtidos em sequências de comprimento fixo e calculamos, para cada sequência, a frequência relativa do acontecimento 'sair a face cara', por exemplo. Assim, considerando sequências de comprimento cinco, obtêm-se 120 sequências, a que corresponde uma distribuição de frequências relativas com uma dada média e um dado desvio padrão. Considerando, agora, sequências de comprimento 20 e 60, obtêm-se, respectivamente, 30 e 10 sequências, a que correspondem outras distribuições de frequências relativas com certos valores para a média e para o desvio padrão. Ora, verifica-se que, enquanto o valor da média se mantém, o valor do desvio padrão diminui com o aumento do comprimento da sequência. A diminuição da variabilidade das frequências relativas a partir da consideração de sequências com maior comprimento pode ainda ser observada através de representações gráficas, recorrendo a histogramas. Esta estratégia, além de proporcionar um excelente meio de interpretação da lei dos grandes números, permite ainda relacionar a perspectiva frequencista de probabilidade com a perspectiva teórica.

Especificamente, no caso da utilização de computadores, Shaughnessy (1992) refere duas preocupações. A primeira prende-se com o papel do professor em contextos computacionais. Neste caso, preconiza-se que os professores sejam envolvidos durante todo o processo de desenvolvimento dos produtos computacionais, e não apenas que sejam assistidos na utilização de produtos acabados. A segunda centra-se na importância de não abandonar completamente representações mais concretas de experiências estocásticas. Nesse sentido, parece ser da maior importância para muitos alunos ter experiência em gerar e reunir os seus próprios dados fisicamente, recorrendo a objectos aleatórios concretos (por exemplo, dados ou roletas).

Não devemos, contudo, ser demasiado optimistas a respeito da facilidade da actividade de simulação. No trabalho citado de Coutinho (2001) observaram-se várias dificuldades dos alunos quando lhes foram propostas situações em que deviam construir um modelo de urnas para simular certas experiências concretas ou jogos probabilísticos, designadamente:

- dificuldades de utilização do *software* quando o aluno não está com ele familiarizado, pelo que se recomenda o uso de programas facilmente manipuláveis e que não acrescentem complexidade desnecessária à actividade de simulação;
- resistência em usar a simulação e a aproximação experimental para resolver um problema de probabilidade nos casos em que é possível resolver o problema mediante cálculo directo;
- dificuldade em aceitar dados de simulações para obter estimações da probabilidade que não tenham realizado pessoalmente;
- dificuldade em diferenciar a estimação da probabilidade proporcionada pela simulação do verdadeiro valor teórico da probabilidade (que só é acessível através de cálculo nos casos em que tal seja possível).

6. Implicações da simulação para a aprendizagem da estocástica

Ao longo do presente texto procurámos salientar o interesse que a simulação pode ter no ensino e aprendizagem das Probabilidades e da Estatística, isto é, na estocástica, em particular quando razões de espaço, tempo ou custos tornam impraticável a realização de observações reais. Nestes casos, recorrendo ao computador, pode construir-se uma simulação, que é um modelo simplificado do fenómeno em questão (eliminando as variáveis irrelevantes da sua estrutura), condensado no tempo e manipulável pelo aluno. O uso de programas de simulação permite colocar à disposição do aluno um novo instrumento que torna possível a exploração e a descoberta de conceitos e princípios que de outro modo seriam muito mais abstractos, contribuindo para mitigar o problema da falta de experiência estocástica e melhorar a intuição probabilística.

Para Blejec (2003) os computadores permitem aos alunos realizar tarefas de cálculo mais rapidamente, libertando-os para se poderem centrar mais nos conceitos estatísticos e ajudá-los a clarificar conceitos específicos através de contextos nos quais podem aplicar as técnicas estatísticas. Este autor acrescenta ainda:

> Usando computadores, a análise *standard* de dados pode ser complementada com experiência estatística adicional através de métodos e sistemas de simulação. Estas simulações podem ajudar no ensino da Estatística em geral e particularmente em conceitos e teoremas difíceis ou abstractos. Usando simulações, combinadas com visualizações do computador, estes conceitos e teoremas podem ser efectivamente demonstrados, mesmo a alunos com capacidades e interesses matemáticos limitados, e pode, algumas vezes, substituir uma prova matemática rigorosa. (s/p)

Chance, delMas e Garfield (2004) argumentam que os alunos se envolvem e interessam mais na aprendizagem da Estatística quando são usadas simulações. Contudo, não referem dados que demonstrem realmente que a simulação produz uma compreensão conceptual adicional ou mais profunda. Também num estudo sobre distribuições amostrais, em que foi usado um software de simulação, estes autores concluíram que o facto de os alunos experienciarem distribuições amostrais de diferentes tipos de populações e de amostras de diferentes dimensões não conduz necessariamente a uma compreensão conceptual profunda dos principais conceitos estudados.

Num estudo exploratório, tendo por propósito compreender o que os alunos vêem e que informação extraem do que vêem quando interagem com uma actividade de simulação em computador, Lipson, Kokonis e Francis (2003) identificaram quatro estádios de progresso dos alunos durante a actividade: *reconhecimento* (interpretar e relacionar as representações do ecrã), *integração* (integrar as noções representadas), *contradição* (reconhecer as tensões criadas no estádio de integração) e *explicação* (encontrar possíveis explicações estatísticas para as contradições identificadas). As capacidades dinâmicas e interactivas do software foram mais visíveis no estádio de reconhecimento do que nos outros estádios. Nestes últimos estádios, além de se dever permitir uma considerável experiência aos alunos antes da tomada de decisões, a simulação deve ser acompanhada de um questionamento adequado para focar a atenção dos alunos em todos os componentes do ecrã, de modo a verificar e explicar alterações ou permanências ocorridas no desenvolvimento da actividade.

Por outro lado, muitos problemas complexos podem ser resolvidos hoje em dia através da simulação e explorar com os alunos exemplos simples através desta técnica pode servir para lhes mostrar a sua aplicabilidade a campos e problemas reais.

Na aprendizagem da estocástica, a simulação, para além de simplificar as relações matemáticas implicadas na resolução de problemas, desempenha um papel importante na identificação das diferenças entre a estimação experimental da probabilidade, obtida através da frequência relativa, e a probabilidade teórica. O professor, todavia, deve ser cuidadoso em distinguir a frequência relativa (que pertence ao mundo real dos dados) da probabilidade teórica (que é um modelo matemático), cujo valor nunca se obtém (a não ser apenas uma aproximação) mediante a simulação.

Naturalmente, há diferenças importantes em termos das aprendizagens dos alunos consoante eles apenas usem simulações já elaboradas ou participem na co-elaboração dessas simulações. Enquanto meros utilizadores de simulações já estabelecidas, os alunos terão menos oportunidades de desenvolverem uma aprendizagem mais ampla, até porque as simulações efectuadas em computador podem centrar-se mais nos resultados, omitindo ao aluno os processos que conduzem a esses resultados. Diferentemente, a actividade de elaboração das próprias simulações, a partir dos vários passos referidos anteriormente, constitui uma tarefa potenciadora de aprendizagens mais profundas e vastas.

Ainda que a simulação e o enfoque frequencista de probabilidade proporcione uma solução para o problema, esta abordagem não nos fornece a razão pela qual a solução é válida, carecendo, portanto, de valor explicativo, que só se pode obter no enfoque clássico e no cálculo formal de probabilidades. Consequentemente, não podemos contentarnos com o facto de o aluno ser capaz de passar do domínio da experiência real ao domínio pseudo-concreto, ainda que este passo cumpra uma função didáctica importante e prepare o aluno para a compreensão do domínio formal, pois é apenas neste último que o aluno pode levar a cabo uma actividade matemática de formalização.

Referências

Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Educación y Pedagogía*, *35*, 37–64.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz (2005). The nature of chance and probability. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15–37). New York: Springer.

Ben-Zvi, D. (2000). Towards understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematics Thinking and Learning*, *2*(1&2), 127–155.

Biehler, R. (1997). Software for learning and for doing statistics. *International Statistical Review*, *65*(2), 167–190.

Biehler, R. (2003). Interrelated learning and working environments for supporting the use of computer tools in introductory courses. In L. Weldon & J. Engel (Eds.), *Proceedings of IASE Conference on Teaching Statistics and the Internet*. Berlin: IASE.

Biehler, R. (2006). Working styles and obstacles: computer supported collaborative learning in statistics. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education, CD-ROM.

Blejec, A. (2003). Teaching statistics by using simulations on the Internet. In L. Weldon & J. Engel (Eds.), *Statistics and the Internet*. Voorburg: International Statistical Institute, CD-ROM.

Bohl, A. H., Liberatore, M. J., & Nydick, R. L. (1995). A tale of two goats and a car, or the importance of assumptions in problem solutions. *Journal of Recreational Mathematics*, 1–9.

Borovcnik, M., & Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 239–287). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Borovcnik, M. (2006). Probabilistic and statistical thinking. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 484–506). Barcelona: IQS Fundemi. Online: http://ermeweb.free.fr/CERME4/.

Borovcnik, M. (2007). New technologies revolutionize the applications of statistics and its teaching. *Invited paper at the International Statistical Institute 56th*. Session. Lisbon: International Statistical Institute.

Burrill, G. (2002). Simulation as a tool to develop statistical understanding. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town, South Africa: International Association for Statistics Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield , J., & Medina , E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education Journal 1*(1). Online: http://escholarship.org/uc/item/8sd2t4rr.

Chance, B., delMas, R. C., & Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 295–323).Amsterdam: Kluwer.

Chance, B., & Rossman, A. (2006). Using simulation to teach and learn statistics. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education, CD-ROM.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2008). modeling and simulations in statistics education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey: ICMI and IASE. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Connor, D., Davies, N., & Holmes, P. (2006). Using real data and technology to develop statistical thinking. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance: Sixty-eighth yearbook* (pp. 185–194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Coutinho, C. (2001). *Introduction aux situations aléatoires dés le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. Tese de doutoramento, Universidade de Grénoble.

Dantal, B. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité. In *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 57–59). Reims: Commission Inter-IREM.

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292–297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Fisher, R. (1988). Didactics, mathematics, and communication. *For the Learning of Mathematics*, *8*(2), 20–30.

Freudenthal, H. (1972). The 'Empirical law of large numbers' or 'The stability of frequencies'. *Educational Studies in Mathematics*, *4*, 484–490.

Garfield, J. B., & Burrill, G. (Eds.) (1997). *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics.* Minnesota, MN: International Statistical Institute.

Girard, J. C. (1997). Modélisation, simulation et expérience aléatoire. In *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 73–76). Reims: Commission Inter-IREM.

Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1997). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Editorial Síntesis.

Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 38, 25–48.

Godino, J. D., Recio, A. M., Roa, R., Ruiz, F., & Pareja, J. L. (2006). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. *Revista Números*, 64.

Godino, J. D., Roa, R., Recio, A. M., Ruiz, F., & Pareja, J. L (2006). Analysing teaching and learning process for the law of large numbers: implications of using software in teachers' education. *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education, CD-ROM.

Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Pareja, J. L., & Recio, A. M. (2003). Analysis of two internet interactive applets for teaching statistics in schools. Trabalho apresentado em *IASE Satellite Conference on Statistics Education and the Internet.* Berlin, Germany, 11–12 August, 2003.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 187–205.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélization en l'enseignement. In *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 77–84). Reims: Commission Inter-IREM.

Jolliffe, F. (2007). The changing brave new world of statistics assessment. In B. Phillips & L. Weldon (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*. The Netherlands, Voorburg: International Statistical Institute, CD-ROM.

Kader, G. (1991). Simulations in mathematics-probability and computing. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the third international conference on teaching statistics* (Vol. 1, pp. 178–186). Vooburg: International Statistical Institute.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139–156). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lee, H. S., & Hollebrands, K. F. (2008). Preparing to teach data analysis and probability with technology. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey: ICMI and IASE. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Leviatan, T. (2006). On the use of paradoxes in the teaching of probability. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education, CD-ROM.

Lipson, K., Kokonis, S., & Francis, G. (2003). Investigation of students' experiences with a web-based computer simulation. In L. Weldon & J. Engel (Eds.), *Statistics and the Internet.* Voorburg: International Statistical Institute, CD-ROM.

Mills, J. D. (2002), Using computer simulation methods to teach statistics: a review of the literature. *Journal of Statistics Education 10*(1).

Polya, G. (1954). *Patterns of Plausible Inference.* Princeton: Princeton University Press.

Rubin, A. (2007). Much has changed; little has changed: revisiting the role of technology in statistics education 1992-2007. *Technology Innovations in Statistics Education*, *1*(1). Online: http://repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/.

Sánchez, E., & Izunza, S. (2006). Meanings' construction about sampling distributions in a dynamic statistics environment. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education, CD-ROM.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. In Douglas A. Grrouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465–494). New York: Macmillan Publishing Company.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3–20). Cambridge: Cambridge University Press.

Weldon, L., & Engel, J. (Eds.). (2003). *Statistics and the Internet.* Voorburg: International Statistical Institute, CD-ROM.

Zieffler, A., & Garfield, J. B. (2007). Studying the role of simulation in developing students' statistical reasoning. In Proceedings of the 56th session of the International Statistical Institute — ISI, Lisboa, 22–29 August 2007. La Haye-Voorburg: ISI — International Statistical Institute. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Resumo. Para além de constituir um importante método de trabalho para o estatístico, a simulação assume-se como um dos principais usos didácticos da tecnologia no ensino das Probabilidades e Estatística. Com fins didácticos, alternativamente, a simulação também pode realizar-se sem recurso a tecnologia, socorrendo-se de materiais concretos. Neste trabalho, primeiro, analisamos a importância da simulação em Probabilidades e Estatística e as suas potencialidades e limitações como instrumento didáctico. Seguidamente, usamos a análise de um problema clássico de Probabilidades (problema de Monty Hall) e três tipos possíveis de solução para mostrar que a tecnologia, em si mesma, não determina a actividade matemática e a aprendizagem do aluno, pois esta depende também da situação didáctica e da forma como o professor organiza o discurso na sala de aula. Finalmente, apresentamos algumas implicações do uso da simulação na aprendizagem de Probabilidades e Estatística.

Palavras-chave: Simulação em Probabilidades e Estatística; Potencialidades e limitações da simulação; O problema de Monty Hall; Implicações didácticas.

Abstract. Simulation is one main didactic resource that takes advantage of technology in probability and statistics education, besides being a tool for statistical work. With didactic aims, simulation can also be used without support of technology. In this work we analyze the importance of simulation in probability and statistics, its advantages and limitations as a didactic instrument. Then we use the analysis of a classic probability problem (Monty Hall problem) and its three possible types of solution to show that the technology in itself does not determine the mathematical activity and the student's possible learning. This also depends on the didactic situation and the way in which the teacher organizes the classroom discourse. We finish with some recommendations about the use of the simulation in probability and statistics.

Keywords: Simulation in probability and statistics; Advantages and limitations; Monty Hall problem; Didactic implications.

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES
Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

CARMEN BATANERO BERNABEU
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
batanero@ugr.es

JOSÉ MIGUEL CONTRERAS GARCÍA
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
jmcontreras@ugr.es

CARMEN DÍAZ BATANERO
Departamento de Psicología, Universidad de Huelva
carmen.diaz@dpsi.uhu.es