O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano[1]

Ana Cristina Almeida
Escola Secundária Dr. José Afonso, Seixal

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
CIEFCUL

1. Introdução

Desde a implementação do Programa Ajustado de Matemática do ensino secundário (DES, 1997) em que a calculadora gráfica foi introduzida como um recurso importante, e, até ao momento, pouca investigação tem sido realizada, no nosso país, para perceber a forma como esta tem vindo a ser integrada na aprendizagem da Matemática e, em particular, no estudo das funções. Por esse motivo, e tendo em conta a complexidade de que reveste a sua apropriação, consideramos pertinente a compreensão do processo de integração da calculadora gráfica pelo aluno na aprendizagem das funções, no ensino secundário.

O presente estudo propõe-se recorrer à perspectiva da abordagem instrumental (Rabardel, 1995) no âmbito da educação matemática, para compreender o processo de apropriação de ferramentas, neste caso a calculadora gráfica, por parte dos alunos, e que se designa por génese instrumental. Esta abordagem permite realçar a subtil relação entre as técnicas da máquina e o pensamento matemático e fornece alicerces conceptuais para a compreensão do desenvolvimento dos esquemas que emergem na interacção dos alunos com a calculadora gráfica. Neste estudo consideram-se dois tipos de esquemas: instrumentais, em que existe um recurso explícito à calculadora gráfica; de compreensão algébrica, quando tal não acontece. No entanto, tendo em conta que o processo de génese instrumental do aluno, na aprendizagem escolar, não pode ser entendido à parte da cultura de sala de aula, é igualmente importante analisar o papel do professor nesse contexto.

O estudo que aqui apresentamos tem como objectivo estudar o modo como dois alunos do 11.º ano de escolaridade integram a calculadora gráfica na sua actividade matemática ao trabalharem o tema "Funções Racionais", ou seja, como se caracteriza o seu processo de génese instrumental. O presente artigo foca-se nas seguintes questões de investigação: Quais os esquemas instrumentais e de compreensão algébrica que os alunos utilizam e como estes se relacionam? Qual o papel do contexto de aprendizagem no processo de génese instrumental relativo à calculadora gráfica?

2. Quadro téorico

2.1. Abordagem instrumental, génese instrumental e esquemas

A base da abordagem instrumental assenta nas ideias de Vygotsky e foi desenvolvida por Rabardel (1995). Segundo a perspectiva vygotskiana, um instrumento constitui um elemento intermediário que se situa entre o artefacto e as operações psíquicas que actuam sobre ele, sendo o instrumento que determina a actividade. Para Rabardel, apesar de um objecto, material ou abstracto, estar disponível ao utilizador para a realização de um certo tipo de actividade, só se torna útil quando o utilizador souber em que tipos de tarefas e de que maneira esse objecto pode ser utilizado. Assim, este autor define instrumento como uma entidade mista composta por: i) um artefacto, material ou simbólico, produzido pelo sujeito ou por outros; e ii) um *esquema* ou vários *esquemas* de utilização associados, resultantes de uma construção própria do sujeito, autonomamente ou através da apropriação de *esquemas* sociais pré-existentes (1995, p. 117).

Segundo este autor, a construção de um instrumento não é espontânea, ocorrendo através de um processo designado por *génese instrumental*, ou seja, o "nascimento" de um instrumento. Esta ocorre quando o utilizador se apropria do artefacto, ao desenvolver esquemas mentais que envolvem capacidades de utilização de forma proficiente e conhecimentos sobre as circunstâncias em que o artefacto é útil. Este processo é apresentado, por este autor, como um duplo movimento: um movimento de instrumentalização dirigido para o artefacto (o sujeito toma o artefacto em mãos e adapta-o aos seus hábitos de trabalho) e um movimento de instrumentação dirigido para o utilizador (os constrangimentos do artefacto contribuem para estruturar a actividade do utilizador). Trouche (2004a) apresenta o conceito de génese instrumental através do esquema que se apresenta na figura 1. Os processos de instrumentação e de instrumentalização encontram-se profundamente interligados, não sendo, em geral, possível indicar em determinada situação qual dos processos está em marcha (Trouche, 2004b). No presente artigo, investiga-se o processo de génese instrumental com base na utilização da calculadora gráfica.

Num estudo apresentado por Guin e Trouche (1999), documentam-se duas fases distintas na *génese instrumental* de alunos de 15/16 anos, ao trabalharem com a calculadora gráfica. Uma primeira fase é caracterizada por uma forte dependência da máquina, em que os alunos descobrem os vários comandos, os seus efeitos e a sua organização. Trata-se também de um primeiro nível de instrumentação em que os alunos usam uma grande diversidade de estratégias e técnicas, mas relevam pouco outras fontes de informação, como o conhecimento teórico ou o trabalho que realizam com papel e lápis. A atenção dos alunos começa a centrar-se num número mais reduzido de comandos, à medida que estes

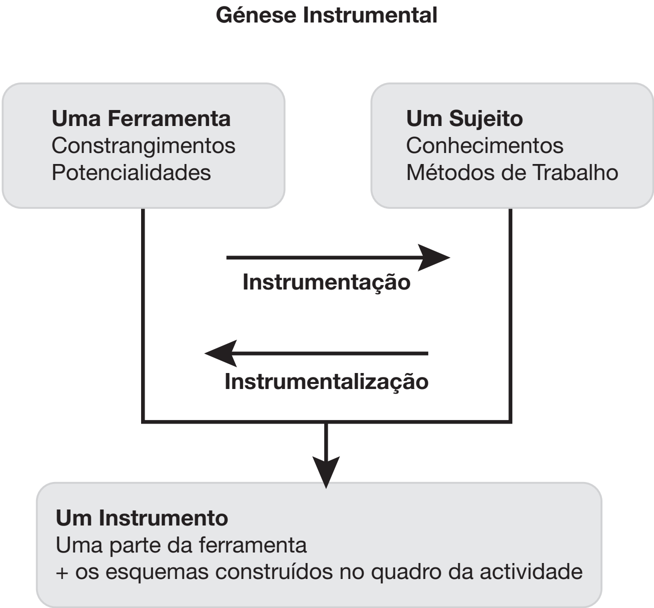


Figura 1. A génese instrumental — combinação de dois processos (Trouche, 2004a, p. 185).

ganham significado matemático para si. Os autores identificam uma segunda fase da *génese instrumental* em que os alunos passam a refinar as primeiras técnicas e estratégias que utilizaram. Verificaram também, nesta fase, que os alunos passam a ter maior consciência dos constrangimentos e das potencialidades da calculadora assim como menor confiança nos resultados da máquina.

Como foi referido, um instrumento envolve a própria ferramenta e os esquemas de utilização criados pelo sujeito. O conceito de esquema é apresentado, por Rabardel (1995), como sendo um conjunto de procedimentos organizados com vista à resolução de uma determinada situação e que têm uma parte individual e uma parte social. Rivera (2007), no contexto de um estudo sobre o processo de instrumentalização da calculadora TI-89 com alunos que já estavam familiarizados com a TI-83, fornece evidência do desenvolvimento do processo de instrumentação, sendo que os esquemas de utilização foram mediados socialmente pela discussão matemática. Este autor considera que é necessário ajudar os alunos a desenvolver acções instrumentais matematicamente justificadas, uma vez que a "instrumentação aponta para o desenvolvimento de esquemas instrumentais que não são gerados visando uma perícia técnica, mas sim para o crescimento do conhecimento matemático dos alunos" (p. 303).

Vários autores defendem que a actividade realizada com a calculadora deve ser articulada com o trabalho com papel-e-lápis (Drijvers & Trouche, 2008; Rivera, 2007; Trouche 2004a; Guin & Trouche, 1999). Como tal, quando a tecnologia está disponível, há que atender também, na actividade matemática do aluno, aos "esquemas de compreensão algébrica" (Rivera, 2007) associados à compreensão teórica e à manipulação das expressões analíticas das funções em ambiente de papel-e-lápis.

Para Vergnaud (1998) a maioria da nossa actividade cognitiva baseia-se em esquemas e, por isso, este conceito é importante quando se procura criar teoria sobre acção e actividade. Este autor define esquema como "a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações" (1998, p. 168). O conceito de esquema é importante não só para interpretar comportamentos familiares, mas também para descrever e compreender processos de resolução de problemas. Os algoritmos são apresentados por este autor como sendo casos especiais de esquemas. Quando uma pessoa utiliza um esquema pode não saber à partida se irá alcançar o seu objectivo ou se este será alcançando num número finito de passos. Para Vergnaud (1998), os esquemas são compostos por:

1. metas e antecipações (um esquema dirige-se sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir o objectivo da sua actividade e pode também, à partida, prever certos resultados);

2. regras de acção, procura de informação e controlo (são do tipo "se … então" e constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema);

3. invariantes operacionais — *teoremas-em-acção* e *conceitos-em-acção* (que constituem o conhecimento implícito contido nos esquemas);

4. possibilidade de inferências.

Um *teorema-em-acção* é definido como "uma proposição que é tida como verdadeira" (p. 168) e um *conceito-em-acção* como "um objecto, uma propriedade ou uma categoria que é tida como relevante" (idem). Existe uma relação dialéctica entre *teorema-em-acção* e *conceito-em-acção*, uma vez que os conceitos podem ser encarados como ingredientes dos teoremas e os teoremas como geradores de conceitos.

Este autor considera que quando os alunos são confrontados com situações para as quais não têm nenhum esquema disponível, tomam em consideração esquemas que utilizam em situações com algo em comum e tentam decompô-los e recombiná-los para formar novos esquemas, com ou sem a ajuda do professor ou dos colegas. Assim, o conceito de esquema é importante, não só para descrever comportamentos familiares, mas também para descrever e compreender processos de resolução de problemas.

2.2. A calculadora gráfica e a aprendizagem das funções

A tecnologia gráfica permite que os alunos estabeleçam conexões entre as várias representações (gráfica, numérica e algébrica) de um mesmo tema, questão ou problema e, desta forma, melhorar a compreensão de funções, de variáveis, da interpretação de gráficos e da resolução de problemas algébricos em contextos aplicados (Burrill, 2008; Kieran, 2007; Bardini, Pierce & Stacey, 2004). Os alunos, com a calculadora gráfica, podem explorar conceitos matemáticos de novas formas e com maior profundidade (Burrill, 2008). Para este autor, o facto de os alunos poderem efectuar mudanças na expressão algébrica de uma função e, imediatamente, verem as alterações que ocorrem na sua representação gráfica, constitui uma contribuição importante para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem das funções.

Segundo Duval (1995), é a diversidade das representações que dá significado a um objecto matemático, uma vez que nenhuma delas consegue descrevê-lo completamente, mas todas representam e descrevem diferentes aspectos desse mesmo objecto. Para este autor, a aprendizagem de um conceito dá-se apenas quando o sujeito consegue articular vários registos de representação, uma vez que considera que o tratamento e a conversão entre diferentes registos de representação semiótica constituem uma condição necessária para a apreensão dos objectos matemáticos.

Kieran (2007) chama a atenção para o facto de que a utilização da calculadora não garante, só por si, a melhoria da aprendizagem das funções, tal como evidenciam resultados de diversos estudos, em que se continuam a verificar dificuldades por parte dos alunos no estabelecimento de conexões entre as representações algébrica e gráfica de uma função. É através de um complexo processo que os alunos se tornam capazes de combinar os diferentes recursos de informação disponíveis (resultados teóricos, calculadora e cálculo mental) e, desta forma, construir o seu próprio entendimento dos conceitos matemáticos (Guin & Trouche, 1999). Segundo os mesmos autores, é necessário que os alunos desenvolvam tarefas de carácter experimental em que transitem entre o trabalho efectuado com papel e lápis e o trabalho efectuado na calculadora gráfica, e que comparem os vários resultados dos diferentes registos. No caso particular do trabalho em torno da representação gráfica de funções, torna-se fundamental que seja bem explorada a escolha de uma janela de visualização adequada (Doerr & Zangor, 2000; Rocha, 2000) e que esta esteja presente nos registos escritos dos alunos de modo a facilitar, a compreensão do que foi feito na calculadora gráfica.

Guin e Trouche (1999) sugerem um contexto de aprendizagem, que pode ter lugar em várias situações matemáticas (resolução de um problema, introdução de um novo conceito, etc.), em que todos os alunos possuem uma calculadora que pode ser conectada a um *viewscreen*. A um determinado aluno, por vez, — designado por *aluno sherpa* — é atribuído um papel específico: a sua calculadora está conectada ao *viewscreen* e ele é chamado a agir como um mediador entre o professor e a turma (Guin & Trouche, 1999). Este contexto de aprendizagem promove os debates na sala de aula e favorece a socialização das géneses instrumentais, permitindo que o professor vá desenvolvendo uma melhor compreensão dos diferentes passos do processo de apropriação dos instrumentos.

Considerando que os alunos desenvolvem os seus esquemas mentais no contexto da comunidade da sala de aula, na qual a orientação do professor é um dos factores a considerar, Trouche (2004a) e Drijvers e Trouche (2008) desenvolveram o conceito de *orquestração instrumental*. Segundo estes autores, o professor assume um papel central e bastante complexo nas experiências de aprendizagem matemática que integram a tecnologia, uma vez que ele tem que dirigir um conjunto de instrumentos, o que se pode tornar bastante complexo porque: (i) cada aluno constrói um conjunto pessoal de instrumentos, (como por exemplo — um instrumento para resolver equações, um instrumento para encontrar uma janela de visualização, etc); e (ii) numa sala de aula, os instrumentos construídos pelos alunos não são necessariamente os mesmos. Segundo Trouche (2004a) as orquestrações instrumentais são "os dispositivos que o professor tem que utilizar na aula para conduzir a construção dos instrumentos dos alunos e facilitar o seu controlo" (p. 190). Drijvers e Trouche (2008) defendem que o professor tem que "construir cenários apropriados para o seu ambiente pessoal de ensino e para as situações matemáticas que ele quer introduzir" (p. 381). Estes autores referem ainda que a construção de *cenários de exploração didáctica* é um processo que requer tempo e experiência.

Os ambientes de aprendizagem informatizados abrem novas possibilidades para o ensino de matemática. No entanto, a génese instrumental não é um processo trivial e, por isso, requer tempo e empenho tanto dos alunos como dos professores. Cabe ao professor a composição da boa música (as situações matemáticas) e a concepção de orquestrações que permitam a todos os instrumentos assumirem o seu papel (Trouche, 2004a).

3. Metodologia

A metodologia adoptada no presente estudo é de natureza qualitativa, tendo por base o paradigma interpretativo, uma vez que se pretende compreender em profundidade a forma como os alunos integram a calculadora gráfica ao trabalharem com funções na sala de aula, não se procura exercer qualquer tipo de controlo sobre a situação e visa-se um produto final de natureza descritiva e analítica. Optou-se pela realização de um estudo de caso de um par de alunos que trabalhavam habitualmente, em conjunto, nas aulas. Tal opção decorre do reconhecimento da dimensão social da actividade matemática dos alunos, assumindo que a perspectiva de que a aprendizagem do aluno ocorre através da reflexão pessoal, bem como da interacção com os seus pares (Forster & Taylor, 2000).

Para a escolha da turma a observar, procuramos encontrar uma professora que tivesse a preocupação de integrar regularmente a calculadora gráfica na planificação das suas aulas e que manifestasse disponibilidade para participar neste estudo. De acordo com estas condições, foi seleccionada uma professora de Matemática de uma escola secundária da Grande Lisboa e uma das suas turmas de 11.º ano cujo horário permitia que a investigadora (primeira autora do artigo) assistisse à maioria das aulas. A professora apresentou a turma como tendo um bom comportamento e um aproveitamento satisfatório. Para estudo de caso, foi seleccionado um par de alunos (Joana e Pedro) que reunia, adicionalmente, as seguintes condições: (i) os encarregados de educação de ambos os elementos do par haviam dado autorização para participarem no estudo; (ii) ambos os alunos revelavam disposição e à vontade para participar; (iii) sentavam-se na mesma mesa e havia uma boa interacção entre eles; e (iv) ambos tinham um bom aproveitamento na disciplina, para não permitir que as eventuais dificuldades em Matemática viessem a constituir um entrave à utilização, pelo par, tanto de esquemas instrumentais como de compreensão algébrica. Foi pedida autorização ao conselho executivo para a realização do estudo, assim como aos encarregados de educação dos alunos da turma para a participação dos seus educandos no estudo, assegurando-lhes o anonimato e confidencialidade dos dados recolhidos.

A observação foi usada nesta investigação como uma das formas privilegiadas de aceder à informação pretendida. Foram observadas seis aulas de noventa minutos do Tema II do 11.º ano, pela primeira autora do presente artigo. Apesar de o alvo principal da observação ter sido a actividade do par objecto de estudo de caso, esta estratégia de recolha de dados também foi usada para se conhecer o ambiente de sala de aula e os *cenários de exploração didáctica* (na terminologia de Drijvers & Trouche, 2008) utilizados pela professora da turma. Foram efectuados registos áudio da conversação que ocorreu no par e da turma e registos vídeo da actividade desenvolvida pelos elementos do par, assim como registos escritos de observação. Um constrangimento desta estratégia de recolha de dados é o de poder provocar alterações no comportamento dos participantes a observar, bem como promover distorção no fenómeno a observar, dada a presença do investigador (Evertson & Green, 1986). Para minimizar esta situação, a investigadora procurou ser discreta e, ao mesmo tempo, criar um ambiente de empatia com os participantes. A forma como os alunos se envolveram no trabalho de sala de aula, na presença da investigadora, denota que não se sentiram intimidados com a presença da investigadora ou com o registo que estava a ser feito.

Foram também realizadas duas entrevistas aos alunos: uma no início da investigação e outra no fim. Para a sua realização foram elaborados guiões que assumiram uma função orientadora. O guião da primeira entrevista (anexo I) contempla numa primeira parte questões gerais, assumindo características de entrevista semi-estruturada, com o objectivo de conhecer um pouco do percurso escolar dos alunos e captar as suas perspectivas face à Matemática e à utilização da calculadora gráfica. Numa segunda parte, esta entrevista assume a forma de entrevista clínica (Hunting, 1997), tendo sido proposta a realização de uma tarefa matemática com o objectivo de identificar possíveis esquemas instrumentais que os alunos possam ter construído no 10.º ano. O guião da segunda entrevista contempla dois grupos com questões sobre funções (anexo II). A análise das duas entrevistas (áudio gravadas e, posteriormente, transcritas) permitiu compreender como os alunos perspectivam a utilização da calculadora gráfica e a forma como a integram no trabalho com funções.

Recorreu-se também à recolha documental das produções escritas dos alunos relativas: (i) ao desenvolvimento das tarefas que foram propostas em cada uma das aulas observadas; (ii) aos registos efectuados no seu caderno diário; e (iii) à resolução das questões 1.1 e 3 do Grupo II do 2.º Teste Intermédio. Destas produções escritas, foram seleccionadas e analisadas as que considerámos melhor contribuir para a compreensão do fenómeno em estudo.

Na análise dos dados, foram identificados e assinalados elementos relativos a cada uma das seguintes dimensões, tendo em conta o quadro teórico, e de acordo com as questões do estudo: (i) cenários de exploração didácticos implementados pela professora; (ii) esquemas utilizados pelos alunos na exploração de funções racionais. No que diz respeito à primeira dimensão de análise, apresentamos uma análise de natureza mais descritiva, a partir de um exemplo de uma aula (devido a constrangimentos de espaço), ilustrando os aspectos mais característicos do cenário de exploração didáctica que envolvem a acção da professora e de alguns alunos. Relativamente aos esquemas utilizados na exploração de funções racionais, optámos por analisar no presente artigo situações que dizem respeito aos principais tópicos e conhecimentos matemáticos dentro deste Tema do Programa do 11.º ano, e que foram agrupados da seguinte forma: (1) Esquemas utilizados entre diferentes representações de funções racionais, nomeadamente, na conversão entre a expressão analítica e a representação gráfica e na conversão entre a representação gráfica e a expressão analítica; (2) Esquemas utilizados na determinação de extremos relativos de uma função racional; (3) Esquemas utilizados no estudo da igualdade de duas funções racionais; e (4) Esquemas utilizados na resolução de inequações fraccionárias. Dentro de cada uma destas secções foram identificados, sempre que os dados o permitiram, esquemas instrumentais que são executados com recurso à utilização da calculadora gráfica, e esquemas de compreensão algébrica, associados à manipulação das expressões algébricas das funções, em ambiente de papel-e-lápis. No caso destes últimos esquemas procurámos identificar também os *teoremas-em-acção* presentes, de acordo com Vergnaud (1998) assumidos como proposições que são tomadas como verdadeiras, na medida em que podem evidenciar conexões com esquemas instrumentais que lhes são anteriores.

4. O contexto de aprendizagem

Nesta secção procuramos ilustrar alguns dos aspectos mais marcantes do contexto de aprendizagem das aulas que foram assistidas, tendo em vista o processo de génese instrumental. Para tal, escolhemos uma das aulas em que é visível uma maior intencionalidade, por parte da professora, relativamente à integração da calculadora gráfica, no trabalho com as funções na turma.

Esta aula, na primeira parte, dá continuidade a aulas anteriores em que se tinha estudado funções racionais em contexto puramente matemático e, numa segunda parte, incide sobre o estudo de funções racionais no contexto da resolução de problemas do dia-a-dia.

A primeira tarefa proposta à turma foi a correcção do trabalho de casa, que consistia em mostrar como obter o gráfico da função definida por

$$y = \frac{5x-2}{x-4}$$

a partir do gráfico de $y = 1/x$. Joana foi ao quadro, a pedido da professora, escreveu

$$y = \frac{5x-2}{x-4} = 5 + \frac{18}{x-4}$$

(esta igualdade já havia sido obtida na aula anterior) e, posteriormente, aplicou as seguintes transformações ao gráfico da função $y = 1/x$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{1}{x} & \rightarrow & \dfrac{18}{x} & \rightarrow & \dfrac{18}{x-4} & \rightarrow & 5+\dfrac{18}{x-4} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \textit{Expansão} & & T(4,0) & & T(0,5) &
\end{array}
$$

A professora questiona:

Professora: $18/(x-4)$ representa uma translação horizontal ou vertical?

Sofia: Vertical.

Professora: Então neste caso a hipérbole anda para o lado ou para cima?

Sofia: É para o lado.

Professora: É para o lado direito. Há uma translação associada ao vector (4,0). E (4,0) é um vector horizontal.

Sofia: Pois é.

Professora: Depois é que se desloca para cima. Temos uma translação associada ao vector (0,5).

Joana: Em vez de ter aplicado duas translações, uma associada ao vector (4,0) e a outra associada ao vector (0,5), poderia ter aplicado apenas a translação associada ao vector (4,5).

Professora: Sim. Então qual é a vantagem de termos a função escrita na forma

$$y = a + \frac{b}{x-c}\,?$$

Joana: Vemos logo as assímptotas.

Com a exploração da resolução deste exercício, a professora pretendia que os alunos fizessem uma revisão sobre a relação que existe entre a expressão analítica e o gráfico de uma função racional.

Depois de ter sido corrigido um outro exercício do trabalho de casa, em que os alunos tiveram dúvidas, a professora sugeriu à turma a seguinte tarefa:

Considere a função *f* definida por

$$f(x) = \frac{1}{x-100}$$

1. Através da calculadora gráfica, procure obter uma boa janela de visualização para a função f e transcreva para o seu caderno o gráfico obtido, bem como a janela de visualização encontrada.

2. Indique:

   a) o domínio, o contradomínio e os zeros de f;

   b) um quadro de sinais para a função f;

   c) um quadro de variação da função f;

   d) os extremos de f.

Quando os alunos introduziram a expressão da função na calculadora e pediram o seu gráfico, a reacção geral foi "isto não dá nada". Perante o "desespero" dos alunos, a professora procurou dar algumas pistas:

Professora: Vejam qual é a assímptota vertical. A janela deve apanhar essa assímptota. E não se esqueçam que também podem utilizar o Modo TABELA para verem os pontos que pertencem ao gráfico.

(Depois de os alunos terem efectuado, a pares, algumas tentativas.)

Professora: Atenção! A Júlia diz que o gráfico da função pára algures. Mas atenção! Uma coisa é a representação que aparece na máquina, outra coisa, é o que acontece realmente. Quando o x aumenta muito, $1/(x-100)$ aproxima-se cada vez mais de zero, mas nunca chega a zero. A hipérbole pára porque isso é uma limitação da calculadora. Os conhecimentos que temos sobre as assímptotas devem servir para identificarmos o comportamento da função junto destas rectas e ultrapassarmos as questões que têm a ver com as limitações da calculadora.

Com este exemplo a professora procurou, mais uma vez, que os alunos estabelecessem conexões entre a expressão analítica e a representação gráfica de uma função racional. Aproveitou, ainda, a observação de uma aluna, para chamar a atenção da turma para as limitações gráficas da calculadora.

A discussão final da tarefa desenrolou-se a partir da resolução que um aluno apresentou no quadro. Para a primeira questão, indicou a janela de visualização $[90{,}115] \times [-8{,}7]$, mas a representação gráfica que desenhou foi para além destes valores, tendo considerado para o eixo dos xx uma variação de -150 a 200, aproximadamente. Isto mostra que este aluno conseguiu criar uma imagem global do gráfico da função a partir da imagem que obteve na calculadora gráfica. A segunda questão foi resolvida com base no gráfico da função.

Depois da exploração desta tarefa, a professora propôs à turma a resolução de um problema do manual adoptado sobre a evolução do comprimento do raio de uma nódoa de tinta circular num tecido, a partir do momento em que esta é detectada (anexo III). A primeira questão pedia a determinação do instante em que o raio da nódoa atingiu 2 cm de comprimento e, a segunda, a determinação do menor comprimento, em centímetros, que o raio da nódoa nunca ultrapassará. A professora disse à turma que as questões poderiam ser resolvidas analiticamente, graficamente ou das duas formas. A tarefa foi resolvida a pares e, no final, a professora solicitou a uma aluna que mostrasse à turma como havia procedido, relativamente à primeira questão. A aluna optou por uma resolução gráfica e, para mostrar à turma a sua resolução, utilizou a calculadora que se encontrava conectada a um viewscreen, assumindo, assim, o papel de aluna *sherpa* (segundo a terminologia de Guin & Trouche, 1999). Começou por escolher como janela de visualização o rectângulo $[-15,15]\times[-10,10]$, tendo a professora a chamado à atenção para o significado da variável independente no contexto do problema e os colegas dado também algumas sugestões: "Não há tempos negativos. Logo o x não necessita de ser negativo".

A aluna *sherpa* altera então a janela para $[0,5]\times[0,10]$ e determina a solução da equação fraccionária, que está associada à questão, aplicando o seguinte esquema instrumental:

1) Introdução das expressões analíticas da função

$$r\left(r = \frac{1+3t}{4+t}\right)$$

e da função constante definida por $y = 2$, através do menu de edição de funções;

2) Obtenção dos gráficos das duas funções;

3) Cálculo da intersecção dos dois gráficos através do comando CALC seguido da opção *intersect*.

A professora questiona ainda a turma sobre a possibilidade de resolver de outra forma este problema:

Professora: Muito bem. Mas este problema podia ser resolvido na calculadora por outro processo. Como?

Rita: Second TABLE.

Professora: Então, Rita, venha lá mostrar aos seus colegas como é que fez!

Rita apresenta então à turma, o esquema instrumental que utilizou na resolução desta questão. Como na calculadora já estava introduzida a expressão analítica da função r, Rita foi directamente ao comando TABLE, tendo assim obtido uma tabela onde constava o valor de x correspondente a $y = 2$.

A segunda questão começou por ser resolvida através do comando TABLE, o que permitiu a exploração das potencialidades e das limitações desta funcionalidade da calculadora gráfica:

Professora: Então e agora? Qual é o comprimento que o raio da nódoa nunca ultrapassará?

Rita: Através do Second TABLE podemos ver.

Sofia: Mas vamos ver o quê?

Rita: Então, pomos um número muito grande para vermos o que acontece.

João: Eu já cheguei ao 3. Eu pus 1×10^{14}.

Professora: 1×10^{14} é um número muito grande. A Maria foi até 10 mil e até 10 mil, a calculadora porta-se bem. Mas, a partir de certa altura, para valores muito maiores, a calculadora começa a apresentar o valor 3. Isso é uma limitação da calculadora porque, teoricamente, nós sabemos que aquela hipérbole se vai aproximar de 3, sem nunca chegar a 3. Embora isso seja apenas uma conjectura. Como é que podemos provar isso?

Márcio: É a assímptota horizontal.

Professora: Então e o que é que temos que fazer para encontrar a assímptota horizontal?

Victor: É pôr a função naquela forma

$$y = a + \frac{b}{x - c}$$

Professora: Então vamos lá!

Há um aluno que se voluntaria para ir ao quadro e apresenta à turma os esquemas que utilizou na conversão da expressão inicial da função r em

$$r(t) = 3 + \frac{11}{4 + t}$$

A partir daí a professora coloca várias questões:

Professora: Então qual a assímptota horizontal?

Alunos: $y = 3$.

Professora: O que significa que o raio da nódoa se aproxima de 3, sem nunca chegar a 3. Certo?

O modo como a professora explorou, com a turma, esta tarefa, tornou-a muito rica. Permitiu aos alunos o tratamento da expressão analítica, da representação gráfica e de tabelas numéricas de uma função racional, o estabelecimento de conexões entre estas diferentes representações, a ligação de uma função racional a um problema do dia-a-dia e, ainda, a exploração de funcionalidades da calculadora gráfica associadas aos comandos GRAPH e TABLE. O facto de ter sido utilizada uma calculadora conectada a um *viewscreen*, aquando da discussão dos resultados obtidos, facilitou a socialização das géneses instrumentais e permitiu à professora uma melhor compreensão do processo de apropriação dos instrumentos, por parte dos seus alunos.

5. Esquemas utilizados pelo par Joana–Pedro na exploração do tema "Funções racionais"

Joana e Pedro resolveram, maioritariamente, a pares, as tarefas que foram propostas para a exploração do tema "Funções racionais". Entre este par verificou-se uma considerável interacção, tendo-se registado alguma discussão matemática e partilha de esquemas, aquando da resolução das tarefas. No entanto, e perante algumas situações pouco familiares, em que ambos os elementos sentiram necessidade de dedicar algum tempo à adaptação de esquemas já seus conhecidos, verificou-se que Joana e Pedro adoptaram uma metodologia de trabalho mais individualizada e, em alguns casos, apresentaram esquemas de resolução diferentes. Neste caso, são apresentadas e analisadas as resoluções efectuadas por cada um deles. O segundo Teste Intermédio — teste realizado a nível nacional — foi a única tarefa (entre as que foram consideradas nesta investigação) que foi resolvida integralmente de forma individual. Assim, a análise dos esquemas utilizados por Joana e Pedro baseia-se quer nas produções conjuntas do par, quer nas suas produções individuais.

5.1. Esquemas utilizados na conversão entre diferentes representações de funções racionais

5.1.1. Esquemas utilizados na conversão da representação algébrica na representação gráfica de funções racionais escritas na forma $y = p + (q/x - r)$ com p, q e $r \in \mathbb{R}$.

A resolução de uma ficha de trabalho sobre funções racionais permitiu verificar como o par Joana–Pedro analisou o significado dos parâmetros reais p, q e r, na expressão analítica de uma função racional, escrita na forma

$$y = p + \frac{q}{x - r}$$

a partir do conhecimento que possuía do gráfico da função definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

e dos seus conhecimentos sobre o tema "Transformações no gráfico de uma função" (de acordo com o Programa de Matemática A, do 10.º ano).

Pedro revelou segurança nos seus conhecimentos teóricos e, depois de identificar o tipo de transformação associado a cada caso, elaborou uma representação gráfica para cada uma das funções. No caso particular da função definida por

$$g(x) = 3 + \frac{1}{x}$$

tem a noção de que o gráfico desta função pode ser obtido a partir do gráfico da função f, por meio de uma translação vertical associada ao vector de coordenadas $(0{,}3)$.

Para desenhar uma representação gráfica da função g, Pedro fez corresponder aos pontos de coordenadas $(-1,-1)$ e $(1,1)$, do gráfico de f, os pontos de coordenadas $(-1,2)$ e $(1,4)$ no gráfico de g. Pensou de forma semelhante para a função h, definida por

$$h(x) = -2 + \frac{1}{x}$$

e, tendo em conta que o gráfico de f sofre uma translação vertical associada ao vector de coordenadas $(0,-2)$, aos pontos de coordenadas $(-1,-1)$ e $(1,1)$, do gráfico de f, fez corresponder os pontos de coordenadas $(-1,-3)$ e $(1,-1)$, no gráfico de h. A partir destes pontos, elaborou a representação gráfica das funções g e h (fig. 2).

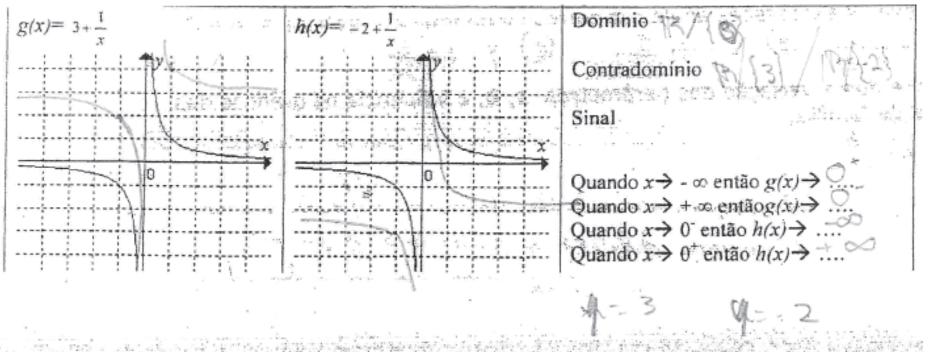


Figura 2. Resolução de Pedro de parte da questão 1 de uma ficha de trabalho sobre funções racionais.

Como podemos observar nesta figura, Pedro identifica correctamente o domínio e o contradomínio de g e de h, o comportamento das funções junto da assímptota vertical e as equações das assímptotas horizontais. No entanto, indica incorrectamente o comportamento das funções junto destas assímptotas. Aqui é possível que tenha sido influenciado pela resposta que havia dado a esta questão, quando estava em causa o estudo das funções definidas por

$$g(x) = \frac{3}{x} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{0,5}{x}.$$

Joana, apesar de acompanhar o raciocínio de Pedro e com ele trocar ideias sobre o comportamento do gráfico das novas funções, procede de forma diferente. Para obter pontos para a construção da representação gráfica da nova função, Joana utiliza a expressão analítica dessa função e, mentalmente ou através da função TRACE da calculadora gráfica, determina a imagem de certos valores de x. No entanto, quando é solicitada a identificar características das novas funções como domínio e contradomínio, a aluna revela um bom entendimento do efeito das transformações no gráfico de uma função racional.

A propósito das funções g e h definidas por

$$g(x) = -3 + \frac{1}{x+1} \quad \text{e} \quad h(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

o par Joana–Pedro travam o seguinte diálogo:

Pedro (referindo-se à função g): Neste caso, a função desloca-se 3 para baixo e 1 para a esquerda.

Joana: Aqui já muda o domínio e o contradomínio.

Pedro: Sim, o domínio de g é $\mathbb{R}/(-1)$ e o contradomínio é $\mathbb{R}/(-3)$.

Joana: E o domínio de h é $\mathbb{R}/(2)$ e o contradomínio é $\mathbb{R}/(1)$.

(Aula, 13/02/2009)

Mais tarde, na resolução de uma outra tarefa, o par Joana–Pedro volta a mostrar um bom nível de compreensão da influência daqueles parâmetros no gráfico de uma função racional. Nesta resolução, o par já estabelece a ligação entre os parâmetros p, q e r e as assímptotas do gráfico da função, como se pode observar na figura 3.

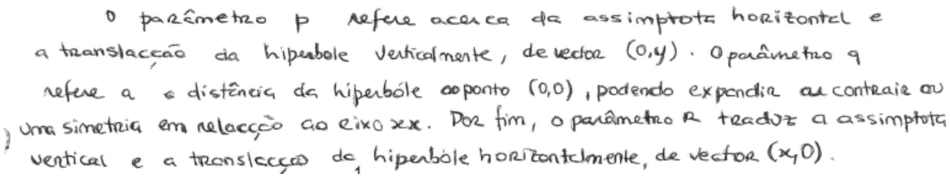

O parâmetro p refere acerca da assimptota horizontal e a translacção da hiperbole verticalmente, de vector (0,y). O parâmetro q refere a a distância da hiperbóle ao ponto (0,0), podendo expandir ou contraie ou uma simetria em relacção ao eixo xx. Por fim, o parâmetro R traduz a assimptota vertical e a translacção da hiperbóle horizontalmente, de vector (x,0).

Figura 3. Resolução do par Joana–Pedro da questão 2 do Grupo I da Tarefa a pares.

Embora se observem algumas incorrecções linguísticas e formais (onde se lê "vector $(0,y)$" deveria ler-se "vector $(0,p)$" e onde se lê "vector $(x,0)$" deveria ler-se "vector $(r,0)$", verifica-se que o par Joana–Pedro conseguiu efectuar uma correcta generalização dos casos particulares que havia trabalhado.

Os esquemas utilizados pelo par, na conversão da expressão analítica na representação gráfica de uma função racional, escritas na forma

$$y = p + \frac{q}{x-r} \quad \text{com } p,\ q \text{ e } r \in \mathbb{R},$$

são esquemas de compreensão algébrica e, neles, podemos identificar os seguintes *teoremas-em-acção*:

1) Se $g(x) = p + (1/x)$ então o gráfico de $f(x) = 1/x$ desloca-se verticalmente, para cima ou para baixo, p unidades, consoante p seja, respectivamente, positivo ou negativo;

2) Se $g(x) = 1/(x - r)$ então o gráfico de $f(x) = 1/x$ desloca-se horizontalmente, para a direita ou para a esquerda, r unidades, consoante r seja, respectivamente, positivo ou negativo;

3) Se $g(x) = q/x$ então o gráfico de $f(x) = 1/x$ sofre uma expansão ou uma contracção consoante o valor absoluto de q seja, respectivamente, maior ou menor do que 1;

4) Se $g(x) = q/x$ então o gráfico de $f(x) = 1/x$ sofre também uma simetria relativamente ao eixo dos xx quando o valor de q é negativo.

O desempenho do par, na resolução das tarefas atrás referidas, foi bastante satisfatório e mostra que ficaram a compreender o significado dos parâmetros reais p, q e r da expressão analítica de uma função racional, escrita na forma

$$y = p + \frac{q}{x - r}$$

e da sua influência no aspecto do gráfico dessa função, através da adaptação de esquemas construídos no 10.º ano, aquando do estudo das transformações do gráfico de uma função.

5.1.2. Esquemas utilizados na conversão da representação gráfica na representação algébrica de funções racionais.

Relativamente à conversão da representação gráfica de uma função racional na sua expressão analítica, pode observar-se o desempenho do par na resolução da questão 2 do Grupo I da 2.ª entrevista (anexo II), que se apresenta na figura 4.

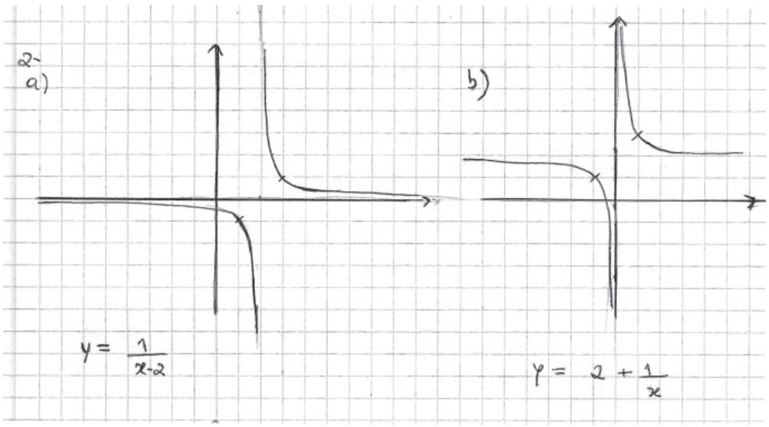


Figura 4. Resolução da questão 2 do Grupo I da 2.ª entrevista (anexo II).

Os alunos justificam, da seguinte forma, a sua resposta:

Joana: Como vai dois para a direita, a assímptota vertical é no dois. Logo fica

$$y = \frac{1}{x-2} \quad \text{[Referindo-se à questão 2. a)].}$$

Pedro: Sim. E nesta [Referindo-se à questão 2. b)] como a assímptota horizontal é 2, fica

$$y = 2 + \frac{2}{x}$$

Joana: É isso.

(2.ª entrevista)

Dos esquemas de compreensão algébrica utilizados, destacam-se os *teoremas-em-acção*:

1) Se o gráfico da função *f*, definida por $f(x) = 1/x$, se encontra deslocado horizontalmente r unidades para a direita então a expressão analítica da nova função é dada por

$$y = \frac{1}{x-r}$$

2) Se o gráfico da função *f*, definida por $f(x) = 1/x$, se encontra deslocado verticalmente p unidades para cima então a expressão analítica da nova função é dada por

$$y = p + \frac{1}{x}$$

Verifica-se, tanto na transcrição anterior como noutras referentes à segunda entrevista que se apresentam mais à frente, que ambos os elementos do par identificam, de forma abreviada, as assímptotas por um número e não por uma equação, como deveria ser.

No estudo da conversão entre as representações (analítica e gráfica) de uma função racional, o par Joana–Pedro utilizou a calculadora gráfica apenas para efeito de confirmação das conjecturas que ia formulando, relativamente à representação gráfica da função em estudo

5.2. Esquemas utilizados na determinação de extremos relativos de uma função racional

Para a determinação dos extremos relativos de uma função racional, os alunos recorrem à calculadora gráfica, uma vez que ainda não têm conhecimentos matemáticos que lhes permitam aplicar esquemas envolvendo resoluções analíticas. Na resolução da questão 3 b) do Grupo II da 2.ª entrevista (anexo II), que remete para a determinação do mínimo da função definida por

$$A(x) = \frac{x^2}{x-1}, \quad x > 1,$$

o par Joana–Pedro utiliza um esquema instrumental que engloba os seguintes passos:

1) Introdução da expressão analítica da função A, através do *menu* de edição de funções;

2) Obtenção de uma representação gráfica da função A;

3) Cálculo do valor mínimo de A, através do comando *G-Solv* seguido da opção *Min*.

A figura 5 corresponde à reprodução no papel dos dados obtidos através da calculadora gráfica e à determinação da solução final do problema.

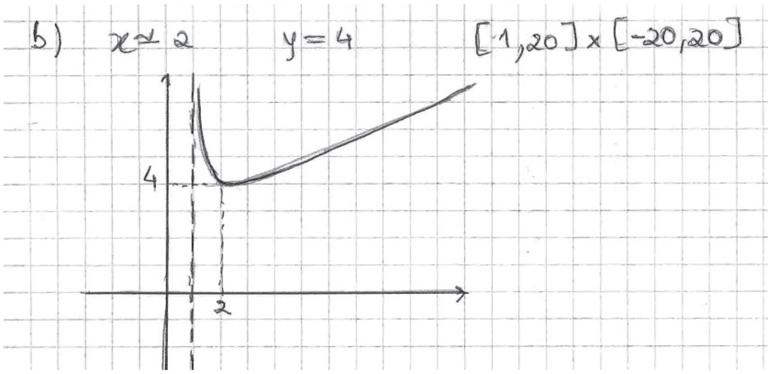


Figura 5. Resolução da questão 3 b) do Grupo II da 2.ª entrevista (anexo II).

A facilidade com que os alunos mobilizaram o esquema instrumental, acima referido, na determinação do mínimo relativo da função, mostra que este esquema se encontra bem interiorizado. A adopção deste esquema instrumental, quando associado à determinação dos extremos de uma função quadrática, terá ocorrido no 10.º ano, uma vez que ele foi aplicado pelos alunos durante a primeira entrevista (anexo I) que ocorreu antes do estudo do tema "Funções" do 11.º ano.

A questão matemática que foi colocada nesta entrevista (13.c)), no início do estudo, remete para a determinação do máximo da função definida por $h(t) = -t^2 + 8t + 9$ e, embora os alunos comecem por se referir aos processos analíticos, identificam, quando lhes é solicitado, uma possível resolução através da calculadora gráfica.

Investigadora: Então e como é que fariam se vos pedissem para resolverem esta questão através da calculadora gráfica?

Pedro: Era só meter a função e calcular o máximo.

Investigadora: Através de que comandos?

Pedro: G-Solv e *max*.

Joana: Na minha é no CALC e depois *máximo*.

(1.ª entrevista)

Verifica-se, assim, que a Joana e o Pedro já haviam construído esquemas instrumentais, no 10.º ano, associados ao cálculo de extremos de funções polinomiais, e que facilmente adaptaram estes esquemas à determinação de extremos relativos de uma função racional.

5.3. Esquemas utilizados no estudo da igualdade de duas funções racionais

No estudo da igualdade de duas funções racionais, dadas através da sua expressão analítica, o par Joana–Pedro utilizou esquemas instrumentais e esquemas baseados na compreensão algébrica. Joana foi o elemento do par que mais recorreu aos esquemas instrumentais e Pedro o elemento que mais recorreu à análise da expressão analítica da função.

Na resolução de uma tarefa respeitante à investigação sobre a igualdade ou desigualdade de duas funções racionais, Pedro não respeitou as indicações do seu enunciado, em que era referido explicitamente o recurso à calculadora gráfica, para analisar os gráficos das funções, optando por se concentrar na análise da expressão analítica de cada uma delas. Pelo contrário, Joana optou por seguir as instruções dadas e foi confrontando a expressão analítica de cada função com a sua representação gráfica através da calculadora.

Pedro:

$$f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x$$

e $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R}$. Logo são iguais.

Joana: É isso.

Pedro: $(\sqrt{x})^2$. Aqui o x tem que ser positivo, por isso não são iguais.

(Joana elabora o gráfico da função definida por $f(x) = (\sqrt{x})^2$ e confirma a afirmação de Pedro.)

Joana: Na calculadora, no gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1},$$

aparece um buraco e na $g(x) = x - 1$ não. Elas são iguais em $\mathbb{R}|(-1)$

Pedro: Pois é. É que $x^2 - 1$ é igual a $(x-1)(x+1)$ e depois corta com o debaixo e fica $x - 1$.

(…)

Pedro: Na f) são iguais.

Joana: São iguais em $\mathbb{R}|(0)$, porque

$$\frac{x^2+x}{x} = \frac{x(x+1)}{x} = x+1,$$

mas o x tem que ser diferente de zero.

Pedro: Mas é para dizer se são iguais, ou não são iguais. Portanto, não são iguais.

(Aula, 6/03/09)

Para averiguarem se duas funções são ou não iguais, Joana e Pedro começam por utilizar diferentes esquemas. Pedro começa por analisar as expressões analíticas das funções em estudo, procura simplificá-las e identifica o domínio de cada uma das funções. Quando verifica que as duas funções têm o mesmo domínio e expressões analíticas equivalentes, conclui que elas são iguais. Quando verifica que falha uma das duas condições, conclui que as funções não são iguais.

Joana, por sua vez, começa por analisar as representações gráficas das funções em estudo, obtidas através da calculadora e, sempre que nelas encontra diferenças, conclui que as funções não são iguais. Posteriormente, adopta o esquema de Pedro e justifica a sua resposta através da análise da expressão analítica das funções.

No esquema instrumental utilizado pelo par, podemos identificar o seguinte *teorema-em-acção*: Se duas funções têm representações gráficas diferentes então não são iguais.

No esquema de compreensão algébrica, podemos identificar o seguinte *teorema-em-acção*: Se duas funções são definidas por expressões analíticas equivalentes e têm o mesmo domínio então são iguais.

A iniciativa de recorrer à calculadora partiu mais de Joana, mas permitiu ao par a visualização das diferentes representações gráficas e sua confrontação com a análise das expressões analíticas das funções, o que permitiu a ambos os elementos do par o desenvolvimento da compreensão do conceito de domínio de uma função e das condições que são necessárias para afirmar que duas funções são iguais.

5.4. Esquemas utilizados na resolução de inequações fraccionárias

À semelhança do que se verificou no estudo da igualdade de duas funções racionais, também na resolução de inequações fraccionárias foram utilizados pelo par Joana–Pedro esquemas instrumentais e esquemas de compreensão algébrica.

Os esquemas de compreensão algébrica utilizados pelos alunos não são coincidentes. Joana adopta o esquema apresentado pela professora, que consiste em reduzir a inequação à forma $A(x)/B(x) \leq 0$ ou à forma $A(x)/B(x) \geq 0$, consoante os casos, e, posteriormente, resolver esta condição através de um quadro de sinais (fig. 6). Esta resolução, para além de corresponder a uma correcta aplicação do esquema atrás referido, tem ainda em consideração as condições do problema, o que é visível na forma como foi preenchida a primeira linha da tabela, considerando apenas valores de x superiores ou iguais a um.

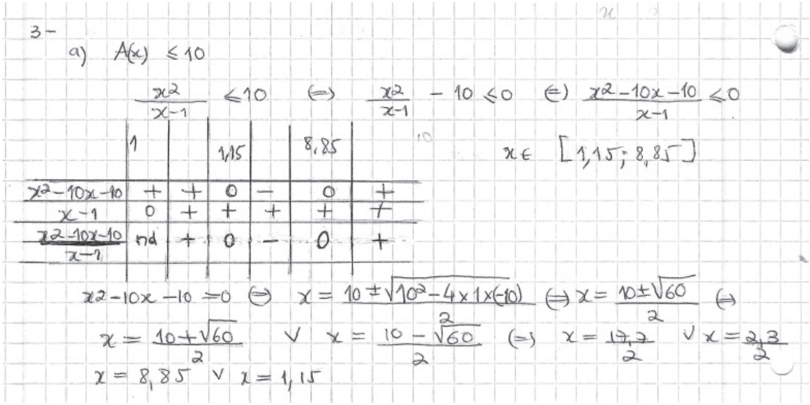


Figura 6. Resolução de Joana da questão 3.a) do Grupo II da 2.ª entrevista.

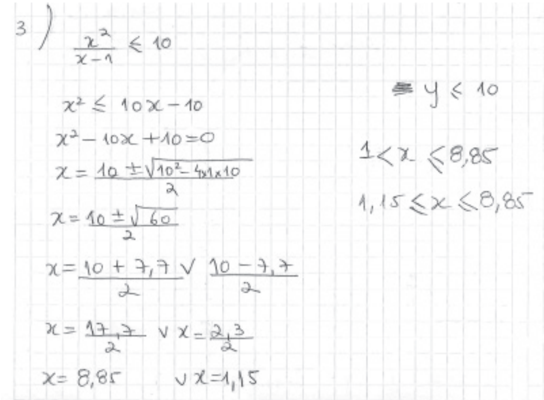


Figura 7. Resolução de Pedro da questão 3.a) do Grupo II da 2.ª entrevista (anexo II).

Pedro apresenta para esta questão uma resolução que se baseia num esquema diferente, que só é possível aplicar em situações específicas, mas que ele usa de forma generalizada (fig. 7).

O esquema utilizado por Pedro consiste em se libertar de denominadores, transformando a condição $A(x)/B(x) \leq c$ na condição $A(x) \leq c \times B(x)$ e, posteriormente, passar à resolução da inequação. Este esquema apresenta a incorrecção de considerar as condições $A(x)/B(x) \leq c$ e $A(x) \leq c \times B(x)$ equivalentes, quando isso só acontece se $B(x) > 0$. Neste caso, Pedro chegou à solução correcta do problema porque, de acordo com o enunciado deste, $x > 1$ logo $x - 1 > 0$.

Relativamente aos esquemas instrumentais, verificou-se que eles foram utilizados na resolução de inequações fraccionárias, essencialmente, para efeito de confirmação dos resultados obtidos através da aplicação de esquemas de compreensão algébrica. Um exemplo, dessa utilização, ocorreu aquando da resolução da questão 3.a) do Grupo II da 2.ª entrevista (anexo II). Depois do par ter resolvido esta questão por dois processos analíticos distintos (ver fig. 7 e fig.8), Joana utiliza a calculadora para confirmar os resultados obtidos. Introduz as funções

$$y = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{e} \quad y = 10,$$

calcula a intersecção dos dois gráficos.

Investigadora: Então, e como é que procederam com a calculadora para confirmarem os vossos resultados?

Joana: Colocámos as funções

$$y = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{e} \quad y = 10,$$

vimos a intersecção e depois, como é menor, vemos para abaixo.

Pedro: Sim, vamos ver quando é que é menor do que 10.

(2.ª entrevista)

O esquema instrumental utilizado destina-se, portanto, à resolução de inequações do tipo $f(x) \leq c$, englobando os seguintes passos:

1) Introdução das expressões analíticas da função f e da função constante $y = c$, através do *menu* de edição de funções;

2) Obtenção de representações gráficas para as funções definidas por $y = f(x)$ e $y = c$;

3) Cálculo da intersecção dos dois gráficos através do comando *G-Solv* seguido da opção ISCT;

4) Identificação, através do ecrã da calculadora, dos valores de x que correspondem aos pontos do gráfico de f situados "abaixo" da recta $y = c$.

Este esquema foi utilizado, por diversas vezes, nas aulas observadas, para efeito de confirmação dos resultados obtidos por processos analíticos. Há evidências de que este tinha sido já interiorizado no 10.º ano, uma vez que foi referenciado pelo par, a propósito da resolução da inequação proposta na primeira entrevista (questão 13.d) da primeira entrevista, anexo V):

Investigadora: Como procederiam para resolver a questão d) na calculadora gráfica?

Pedro: Fazíamos a intersecção da função com 9 y.

Joana: E depois tínhamos que ver onde é que a função era maior do que nove.

(1.ª entrevista)

Por considerarem a aplicação deste esquema bastante fácil, os alunos dão prioridade à aplicação de esquemas de compreensão algébrica que, segundo eles, requerem maior treino. Como refere Joana, relativamente às situações de avaliação: "O problema é se o enunciado de uma questão disser para resolvermos analiticamente e nós estivermos habituados a resolver com a calculadora gráfica, nessa altura, ficamos mal" (1ª entrevista). Portanto, os alunos sentem que o desenvolvimento de esquemas de compreensão algébrica prepara-os melhor para os momentos de avaliação em que têm que dar evidência dos seus conhecimentos matemáticos.

6. Conclusões

6.1. Esquemas utilizados na exploração de funções racionais

Na exploração de *funções racionais,* o par Joana–Pedro aplicou esquemas instrumentais e esquemas de compreensão algébrica. Os esquemas de compreensão algébrica que foram aplicados, na conversão entre a expressão analítica e a representação gráfica de funções racionais, resultam da adaptação ao estudo destas funções de esquemas que foram construídos no 10.º ano para o estudo das funções da família $y = a(x-h)^2 + k$, com a, h e k parâmetros reais, da aplicação do algoritmo da divisão inteira de polinómios e do conhecimento do gráfico da função definida por $f(x) = 1/x$. Estes esquemas envolvem certos teoremas-em-acção (Rivera, 2007; Vergnaud, 1998) que estabelecem correspondências entre o valor dos parâmetros reais p, q e r de uma função racional, definida por

$$y = p + \frac{q}{x-r}$$

e a configuração da sua representação gráfica. No que diz respeito aos esquemas instrumentais utilizados, estes envolvem a introdução das expressões analíticas e a obtenção dos gráficos de funções racionais, através da calculadora gráfica, e foram utilizados para efeito de confirmação das conjecturas que o par Joana–Pedro foi formulando. A iniciativa de recorrer à calculadora partiu mais da Joana, mas permitiu ao par a consolidação dos seus conhecimentos através da visualização dos diferentes gráficos.

Para a determinação dos *extremos relativos de uma função racional*, o par Joana–Pedro aplicou apenas esquemas instrumentais, uma vez que ainda não possuíam conhecimentos matemáticos que lhes permitissem aplicar esquemas envolvendo resoluções analíticas. Durante a primeira entrevista, foi possível observar que ambos os elementos do par já haviam construído, no 10.º ano, esquemas de acção instrumentados (Drijvers & Trouche, 2008) para a determinação dos extremos de funções quadráticas. A sua adaptação à determinação dos extremos relativos de funções racionais foi imediata. A utilização de esquemas instrumentais permitiu ao par Joana–Pedro desenvolver a noção de extremos relativos de funções racionais e realizar abordagens mais completas de situações do dia-a-dia, mesmo antes da aprendizagem das noções de cálculo diferencial.

No estudo da *igualdade de duas funções racionais*, dadas através da sua expressão analítica, o par Joana–Pedro utilizou esquemas instrumentais e esquemas de compreensão algébrica. Os esquemas instrumentais utilizados resumem-se à introdução das expressões analíticas e à obtenção e análise dos gráficos de funções racionais. Estes esquemas envolvem o seguinte *teorema-em-acção:* Se duas funções têm representações gráficas diferentes então não são idênticas. Os esquemas de compreensão algébrica envolvem processos de simplificação da expressão analítica de funções, como por exemplo a simplificação de fracções a partir da factorização dos seus termos, e a determinação do seu domínio. Estes, por sua vez, envolvem o *teorema-em-acção:* Se duas funções são definidas por expressões analíticas equivalentes e têm o mesmo domínio então são idênticas. A confrontação entre a visualização dos gráficos, através do ecrã da calculadora, e a análise da expressão analítica das funções permitiu ao par Joana–Pedro aprofundar a sua compreensão do conceito de domínio de uma função e das condições que são necessárias para afirmar que duas funções são idênticas.

Também na *resolução de inequações fraccionárias*, o par Joana–Pedro utilizou esquemas instrumentais e esquemas de compreensão algébrica. Relativamente aos esquemas de compreensão algébrica, a Joana e o Pedro adoptaram esquemas diferentes. Enquanto que a Joana adoptou os esquemas que constam dos manuais escolares e que foram apresentados à turma, pela professora, o Pedro revelou não ter compreendido a necessidade de adoptar esses esquemas e adaptou, com pouco sucesso, os esquemas que havia construído no 10.º ano para a resolução de condições polinomiais de 1.º e 2.º graus. Os esquemas instrumentais que foram utilizados pelo par Joana–Pedro, na resolução de inequações fraccionárias, surgem, essencialmente, para confirmar os resultados após a aplicação de esquemas de compreensão algébrica ou quando o enunciado das questões remetia para o recurso às capacidades gráficas da calculadora. Estes esquemas instrumentais foram aplicados com perícia pelo par Joana–Pedro, tendo ambos os elementos revelado que conheciam bem as situações em que poderiam ser aplicados e a sequência correcta dos comandos a utilizar.

Tendo em conta a abordagem instrumental e o desempenho dos alunos, podemos afirmar que estes já construíram instrumentos, a partir das funcionalidades da calculadora gráfica, que lhes permitem analisar o gráfico de uma função, escolher a janela de visualização, determinar extremos relativos de uma função e pontos de intersecção dos gráficos de duas funções e resolver inequações. A articulação entre a utilização de esquemas de compreensão algébrica e esquemas instrumentais permitiu, ao par, desenvolver a sua capacidade de efectuar a conversão entre a expressão analítica e a representação gráfica de funções racionais, o que contribui para uma melhor compreensão destas funções, como defende Duval (2002).

Verifica-se que ambos os elementos do par já ultrapassaram a fase de instrumentalização destes comandos e que se encontram na fase de instrumentação. A facilidade com que estes alunos utilizam os esquemas instrumentais referidos, mostra que estes já se encontram interiorizados e, como tal, disponíveis para serem aplicados em diversas situações. No entanto, é patente a preferência destes alunos pelos esquemas de compreensão algébrica.

6.2. O papel do contexto de aprendizagem no processo de génese instrumental

Para o desempenho destes alunos terá contribuído, certamente, o ambiente de sala de aula. No decurso das aulas observadas, foi possível verificar que a professora, tal como sugere Duval (2002), proporcionou aos alunos o desenvolvimento de tarefas envolvendo diferentes representações de funções e enfatizou o estudo da conversão entre elas. Este trabalho permitiu evitar o fenómeno da compartimentalização (na terminologia de Duval, 2002), o qual constitui um dos grandes obstáculos à compreensão das funções na sua globalidade. Também na resolução dos problemas propostos, na maioria das vezes, a mesma questão foi abordada de forma gráfica e de forma analítica, havendo ainda registo de situações em que foi também tida em consideração a abordagem numérica.

Um aspecto que facilitou a exploração, na turma, de algumas destas abordagens foi a utilização de uma calculadora gráfica ligada a um *viewscreen* e a um retroprojector. A discussão dos exercícios e dos problemas propostos foi efectuada com base no trabalho desenvolvido por um(a) aluno(a) que utilizava, para o efeito, o quadro e/ou a calculadora gráfica que estava ligada ao *viewscreen*. Este contexto de aprendizagem é defendido por Guin e Trouche (1999), Trouche (2004a) e Drijvers e Trouche (2008), uma vez que favorece os debates na sala de aula, permite que o professor se torne consciente dos diferentes passos do processo de apropriação dos instrumentos e reforça o papel social dessa construção. A articulação entre os resultados obtidos no quadro e os do ecrã ajudou os alunos a estabelecerem também uma relação entre os resultados obtidos com papel e lápis e os obtidos através da sua calculadora gráfica (Guin & Trouche, 1999).

Dois outros aspectos importantes, que foram observados nas aulas desta professora, dizem respeito à ênfase que deu à escolha da janela de visualização e às limitações da tecnologia. No que diz respeito à escolha da janela de visualização, verificou-se que houve uma preocupação, da sua parte, de fazer apelo ao significado dos valores extremos das variáveis, tal como defendem Doerr e Zangor (2000). Incentivou também os alunos a registarem a janela de visualização, aquando da transposição para o papel, da representação gráfica obtida na calculadora (Rocha, 2000). Quanto às limitações da tecnologia, para além de mostrar exemplos, reforçou a ligação entre as diferentes representações das funções, chamando constantemente a atenção dos alunos para possíveis discrepâncias entre o gráfico esperado e a imagem produzida no visor da calculadora, tal como defendem Cavanagh e Mitchelmore (2003).

6.3. A concluir

Este estudo permite-nos perceber que o processo de génese instrumental, que teve início no ano anterior, se vai se desenvolvendo à medida que os alunos vão contactando com novos tópicos matemáticos e adquirindo novos esquemas de compreensão algébrica. Os esquemas instrumentais que desenvolveram anteriormente ajudam-nos a consolidar os esquemas de compreensão algébrica. Isto é bastante evidente, por exemplo, quando os alunos aplicam esquemas de compreensão algébrica na conversão entre a expressão analítica e a representação gráfica de funções racionais, que não sendo estes instrumentais, baseiam-se em representações mentais que foram construídas com o auxílio da calculadora gráfica, aquando do estudo da família de funções polinomiais, no ano lectivo anterior. A possibilidade que a calculadora oferece de visualizar rapidamente o efeito da mudança de parâmetros, no gráfico de uma função desta família, contribui para o desenvolvimento da capacidade destes alunos olharem para a matemática de uma forma dinâmica, para o seu entendimento conceptual da álgebra como um meio de representação e para o desenvolvimento da capacidade de estabelecerem conexões entre a expressão analítica e a representação gráfica de uma função.

Um outro aspecto importante a reter deste estudo é a forma como os alunos, no segundo ano que utilizam o instrumento, conseguem adaptar esquemas instrumentais, desenvolvidos anteriormente, a novas situações para as quais ainda não têm disponíveis esquemas de compreensão algébrica. A partir do momento em que desenvolvem esquemas de compreensão algébrica que lhes permitem resolver estas situações, considerando que estes são mais valorizados na avaliação, e que exigem mais treino, dão-lhes a primazia, usando os esquemas instrumentais, quase exclusivamente, para confirmação ou quando lhes é explicitamente solicitada a sua utilização. Naturalmente, que tal utilização poderá decorrer do nível de desempenho dos alunos que, neste caso é bom, remetendo para a necessidade de estudar o processo de génese instrumental com alunos com outras características.

Verificou-se, assim, que os cenários de exploração didáctica, concebidos e implementados pela professora, facilitaram a construção dos instrumentos destes alunos, ou seja, a génese instrumental, e o seu controlo. Por esta razão, consideramos que os aspectos supracitados devem fazer parte dos cenários de exploração didáctica que venham a ser concebidos para o estudo de funções racionais. Há, ainda assim, interesse em perceber como alunos com diferentes níveis de proficiência em matemática se integram em tais cenários e, como referimos, perceber em que medida o processo de génese instrumental pode ser distinto nesses casos.

Nota

1 Este estudo foi realizado no âmbito do Projecto Improving Mathematics Learning in Numbers And Algebra, apoiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia — MCTES (PTDC/CED/65448/2006).

Referências

Bardini, C., Pierce, R. U., & Stacey, K. (2004). Teaching linear functions in context with graphic calculators: Students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Mathematical Education*, *2*(3), 353–376.

Burrill, G. (2008). *The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics.* In ICME 11, México. Acedido a 10 de Novembro de 2008 em http://www.icme11.org/tsg/show/23.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics teacher education and development*, *5*, 3–18.

Doerr, H., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 143–163.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and the learning of mathematics: Cases and perspectives* (Vol. 2, pp. 363–392). Charlotte, NC: Information Age.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(2), 1–16.

Evertson, C. M., & Green, J. L. (1986). Observation as inquiry and method. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 162–213). Nova Iorque: Macmillan.

Forster, P., & Taylor, P. (2000). A multiple-perspective analysis of learning in the presence of technology. *Educational Studies in Mathematics*, *42*, 35–59.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*, 195–227.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in Mathematics Education Research and Practice. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145–165.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Rivera, F. (2007). Accounting for students' schemes in the development of a graphical process for solving polynomial inequalities in instrumented activity. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 281–307.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Trouche, L. (2004a). Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 181–197.

Trouche, L. (2004b). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 281–307.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*, 167–181.

Anexo I — Guião da 1.ª entrevista

A — Registo da data e da hora do início da gravação.
B — Questões:

1. Como se chama?
2. Que idade tem?
3. Como foi o seu percurso escolar?

   a) Já repetiu algum ano? Qual?

   b) Como se descreve como aluno(a)?
4. Gosta de Matemática? Como foi o seu percurso escolar em relação a esta disciplina?
5. Qual foi a sua classificação final de 10.º ano na disciplina de Matemática?
6. Qual a importância que atribui à Matemática para a sua formação?
7. Quais os temas que mais gosta em Matemática? Porquê? E quais os que menos gosta? Porquê?
8. Qual é o tipo de actividades matemáticas que mais gosta de realizar? Porquê? E qual gosta menos? Porquê?
9. Desde quando é que tem a sua calculadora gráfica?
10. Como é que aprendeu a trabalhar com ela? Foi complicado?
11. Acha que a utilização da calculadora ajuda a compreender melhor a Matemática?
12. Quando trabalha com funções, quais são os comandos da calculadora que mais utiliza?
13. Para resolver um problema do tipo: Na noite de S. João um grupo de amigos decidiu lançar um balão da varanda do seu prédio. A altura (distância) do balão ao solo é dada pela função $h(t) = -t^2 + 8t + 9$ (em que h representa a altura em metros e t o tempo em minutos).

    a) A que altura se encontrava o balão no momento em que foi lançado?

    b) Quanto tempo o balão se "aguentou" no ar?

    c) Qual foi a altura máxima atingida pelo balão?

    d) Em que momentos a altura do balão foi superior a 9 metros?

    Recorreria à calculadora gráfica para a resolução de alguma das questões?

Anexo II — Guião da 2.ª entrevista

Grupo I

1. Tracem o gráfico da função $y = 1/x$ e indiquem o domínio e o contradomínio desta função, bem como as equações das assímptotas do seu gráfico.

2. Escrevam as expressões analíticas das funções cujo gráfico relativamente ao anterior:

   a) se deslocou horizontalmente 2 unidades para a direita;

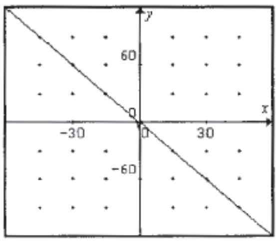
   b) se deslocou verticalmente 2 unidades para a cima.

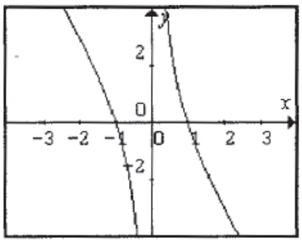
3. Tracem o gráfico das funções
$$y_1 = x \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{1}{x} + x.$$
   Alterem o rectângulo de visualização de modo a obter na calculadora uma representação gráfica de y_2 semelhante a uma recta.

   Indiquem a equação da recta à qual o gráfico de y_2 se tende a aproximar.

   Tentem encontrar uma justificação para o resultado encontrado.

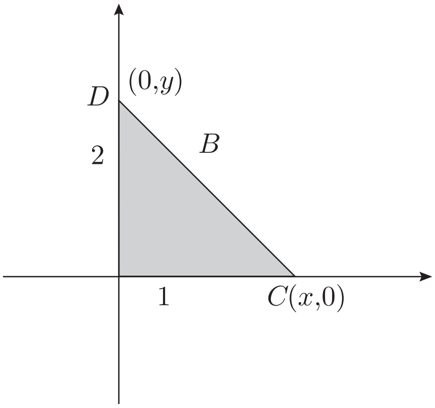
4. Os dois gráficos que se seguem dizem respeito à mesma função, em rectângulos de visualização diferentes. Qual será a expressão analítica desta função?





5. Representem graficamente a função $y_3 = x^3 - 190x^2 - 200x$.

Grupo II



Na figura está representado um ponto B de coordenadas (1,2).

A cada ponto $C(x, 0)$ do eixo Ox, com $x > 1$, faz corresponder um ponto $D(0, y)$ do eixo Oy, de tal modo que B, C e D sejam colineares.

1. Escrevam y em função de x.

2. Mostrem que a área do triângulo ODC pode ser dada por

$$A(x) = \frac{x^2}{x-1}, \quad x > 1$$

3. Determinem os valores de x para os quais:

   a) $A(x) \leq 10$;

   b) A área do triângulo ODC é mínima.

4. À medida que x tende para $+\infty$, o gráfico da função A aproxima-se de uma recta. Qual é a equação dessa recta.

Adaptado de “Funções 11.º ano, DES”

Anexo III — Problema da nódoa de tinta circular

(Problema proposto à turma no dia 18/02/09)

Uma nódoa circular de tinta é detectada sobre um tecido. O comprimento, em centímetros, do raio dessa nódoa, t segundos após ter sido detectada, é dada por:

$$r(t) = \frac{1+3t}{4+t}, \quad t \geq 0$$

1. Calcule o raio da nódoa no instante em que foi detectada.

2. Recorrendo à sua calculadora indique:

   a) o instante em que o raio da nódoa atingiu 2 cm de comprimento.

   b) o menor comprimento, em centímetros, que o raio da nódoa nunca ultrapassará.

(Do manual adoptado: Jorge, Alves, Fonseca & Barbedo, 2004, p. 185)

Resumo. Este estudo tem como objectivo estudar como alunos do 11.º ano integram a calculadora gráfica na sua actividade no tema Funções Racionais, ou seja, como se caracteriza o processo de génese instrumental. Procura dar resposta às questões: (a) Quais os esquemas instrumentais e de compreensão algébrica que os alunos utilizam e como estes se relacionam? (b) Qual o papel do contexto de aprendizagem no processo de génese instrumental?

Neste estudo adoptou-se uma metodologia de natureza qualitativa, com a realização de um estudo de caso. As estratégias de recolha de dados foram a entrevista, observação de aulas e análise das produções escritas dos alunos.

Os resultados indicam que os alunos integram a calculadora gráfica na sua actividade de forma significativa, tendo desenvolvido diversos esquemas instrumentais. Embora valorizarem a aplicação de esquemas de compreensão algébrica, a utilização da máquina terá contribuído para o desenvolvimento de esquemas mentais que permitem entender a Álgebra como um meio de representação. Verifica-se a importância do contexto de aprendizagem, nomeadamente: o desenvolvimento de tarefas envolvendo diferentes representações e a conversão entre elas; a discussão das tarefas usando uma calculadora gráfica ligada ao *viewscreen*; a ênfase dada às limitações da tecnologia e à escolha da janela de visualização.

Palavras-chave: Calculadora gráfica; génese instrumental; esquemas; aprendizagem das funções.

Abstract. This study aims to study how 11th grade students integrate the graphic calculator in their mathematical activity on the topic Rational Functions, that is, what characterizes the process of instrumental genesis. It seeks to answer the following questions: (a) What are the instrumental schemes and the schemes of algebraic understanding that they use and how they relate them? (b) What is the role of the learning context in the process of instrumental genesis?

In this study we adopted a qualitative methodology, with the completion of a case study. The strategies for data collection were interviews, classroom observations and analysis of students' written production.

The findings indicate that students integrate the graphing calculator in their activity significantly, and developed several instrumental schemes. While valuing the implementation of schemes of algebraic understanding, the use of the calculator has contributed to the development of mental schemes that help them to understand algebra as a mean of representation. The study stresses the importance of the learning context, namely: the development of tasks involving different representations and the conversion between them; the discussion of the tasks using a graphing calculator connected to the View Screen; the emphasis given to the technology limitations and the selected window.

Keywords: Graphic calculator; instrumental genesis; schemes; learning of functions.

■■■

ANA CRISTINA ALMEIDA
Escola Secundária Dr. José Afonso, Seixal
kristalmeida@googlemail.com

HÉLIA OLIVEIRA
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
CIEFCUL
hmoliveira@ie.ul.pt