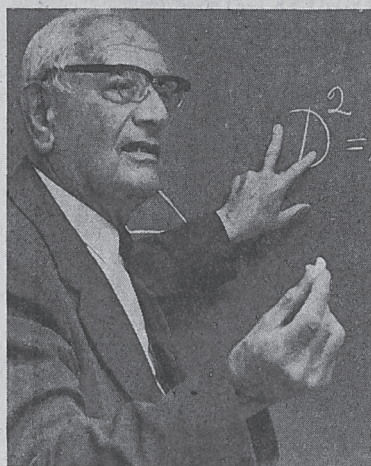


GEORGE PÓLYA (1887–1985) nasceu em Budapeste, onde viveu até terminar os seus estudos secundários. Doutorou-se em Probabilidades (1912) na universidade daquela cidade e, depois de diversas viagens e estadias em várias cidades, onde contactou com matemáticos ilustres, especialmente em Göttinguen — Klein, Hilbert, Landau, Weyl, Courant, Toeplitz — estabeleceu-se no Instituto Federal de Tecnologia da Suíça, em Zurique, onde trabalhou 26 anos. Foi neste período que, incluindo outras viagens e trabalhos com matemáticos de diversos países — Hardy, Littlewood, Julia, Picard, Hadamard — Pólya desenvolveu a sua intensa e produtiva actividade em múltiplas áreas matemáticas.

Em 1940, perante a agressão nazi na Europa, partiu para os Estados Unidos onde se veio a fixar em Palo Alto, Califórnia, ingressando na Universidade de Stanford. Em 1945 publicou *How to Solve It*, o livro que o celebrou também fora comunidade matemática e, em particular, junto dos professores e outros interessados no ensino da Matemática. É o primeiro livro onde Pólya explana as suas ideias sobre a resolução de problemas e os métodos heurísticos, ideias que viria a retomar, desenvolvendo-as e aprofundando-as em obras posteriores. Professor emérito em 1953, continuou no entanto a orientar cursos e seminários, também para professores das escolas secundárias.

Notícia no *Palo Alto Times* sobre uma intervenção de George Pólya, em 1972, numa sessão para professores do ensino secundário (arquivo de J. Kilpatrick).

28—PALO ALTO TIMES, PALO ALTO, CALIF., THURSDAY, JUNE 29, 1972



Prof. George Pólya

The 84-year-old professor emeritus of mathematics at Stanford University emphasizes a point during a lecture to high school teachers attending a summer workshop.

No guesswork—he's tops in math

By RONDÁ MACCHELLO

This month (June) marks the 19th anniversary of Prof. George Pólya's retirement from Stanford University.

But Pólya, an energetic 84, still keeps busy by lecturing on mathematics and teaching seminars in his favorite field—heuristics, the science of "guessing."

The internationally distinguished mathematician regularly walks the three mile round trip from his home at 2280 Dartmouth St., Palo Alto, to Stanford to teach a summer workshop for high school mathematics teachers.

Pólya, who is known among his students and colleagues for his keen wit and lively sense of humor, once said that one of his major accomplishments was "never having learned to drive a car."

"But not many believe it yet," he added with a smile.

Pólya's approach to teaching is held in high regard by his colleagues.

"Professor Pólya is able to drive home the intrinsic beauty of mathematics... and communicate it with astounding ease to students at all levels of interest" said Donald Alberts, Chairman of the mathematics department at Menlo College, where Pólya taught a course during the past academic year.

Harold M. Bacon, Stanford mathematics professor, called him "one of the most remarkable and successful teachers of mathematics I've ever known."

His teaching skill took him to Hollywood in 1968, where he starred in an educational movie entitled, "Let Us Teach Guessing." The film won him a blue ribbon from the Educa-

Em Aderhold Hall,
gabinete 502,
Fevereiro de 2010



Uma explicação

Em Fevereiro do ano passado, tive oportunidade de visitar por três meses a Universidade da Geórgia, no *College of Education — Aderhold Hall*, para fazer algumas pesquisas e estudo sobre George Pólya, com o apoio e colaboração de Jeremy Kilpatrick que, entre outras coisas, pôs à minha disposição uma caixa de arquivo que possuía com textos e outros documentos relacionados com Pólya. Foi nessa caixa que, no primeiro dia da minha estadia, encontramos um texto dactilografado, com a transcrição de uma entrevista a George Pólya que Kilpatrick tinha realizado em 1978. Propus-me de imediato fazer a tradução para português e publicar a entrevista ‘ainda inédita’, como na altura Kilpatrick me disse. É esta tradução que agora se publica na *Quadrante*, revista e anotada por Jeremy Kilpatrick*, a quem deixo aqui o agradecimento.

Jeremy Kilpatrick é, desde 1993, *Regents Professor* de Educação Matemática na Universidade da Geórgia, Athens GA, nos Estados Unidos. Terminou o seu curso em Matemática na Universidade da Califórnia em Berkley (1960), onde realizou depois o Mestrado em Educação (1960), enquanto leccionava como professor de Matemática no ensino secundário. No início dos anos 60, foi para a Universidade de Stanford, em Palo Alto, onde frequentou cursos orientados por George Pólya e seminários sobre resolução de problemas. Nesta universidade realizou um outro Mestrado, desta vez em Matemática (1962), e depois um Doutoramento em Educação Matemática (1967), cujo júri Pólya também integrou, tendo sido nestes anos que Jeremy Kilpatrick acompanhou Pólya como seu assistente.

A breve introdução à entrevista, que Jeremy Kilpatrick teve também a amabilidade de fazer, e onde dá conta do contexto em que foi realizada e das suas motivações, anuncia uma conversa essencialmente sobre ‘as capacidades matemáticas’ e sobre os textos a incluir na edição das obras completas de George Pólya em que, no que à Educação Matemática diz respeito, Jeremy Kilpatrick chegou a colaborar. O texto da entrevista, simples e directo, em que na tradução se procurou preservar o tom informal e coloquial e os vários toques do humor por que Pólya era também conhecido, vale todavia também como testemunho pessoal e em primeira mão desse matemático, sobre alguns aspectos da sua vida e do seu conhecimento e experiência com outros matemáticos.

A entrevista foi realizada tinha George Pólya feito 90 anos havia poucos meses.

Henrique Manuel Guimarães

* Incluem-se algumas notas de tradução assinaladas com (NT).

Pólya e as capacidades matemáticas

Em Abril de 1978 entrevistei George Pólya sobre as capacidades matemáticas. Encontrava-me na altura na Califórnia para participar no encontro anual do *National Council of Teachers of Mathematics*, na cidade de San Diego, e combinei com ele uma passagem pela sua casa em Palo Alto, depois do encontro, para conversarmos sobre isso, mas também sobre os artigos sobre o ensino da Matemática para serem incluídos nas suas obras completas que estavam a ser preparadas¹. O artigo que se segue é o texto abreviado dessa entrevista e centra-se sobre as capacidades matemáticas.

Para mim, o aspecto mais inesperado da entrevista foi o facto de que, apesar de Pólya ter obviamente reflectido, ao longo de toda a sua vida, sobre a questão de como ele e outros fazem matemática, aparentemente, não tinha antes pensado muito sobre as capacidades a que [os matemáticos] recorrem nesse trabalho. Não obstante, a perspicácia e o charme de Pólya vêm claramente ao de cima quando na entrevista, pacientemente, se debate com as perguntas desajeitadas do seu antigo aluno^{**}.

Jeremy Kilpatrick

Universidade da Geórgia, Athens, EUA

Jeremy Kilpatrick: Quais são as qualidades que considera que uma pessoa deve ter para ser capaz de fazer matemática? Por outras palavras, quais são as capacidades cognitivas que distinguem alguém que é capaz de fazer em matemática, de alguém que não é?

George Pólya: Não consigo fazer-lhe uma boa descrição. Nunca tive ideias claras sobre este assunto. Além disso, há tipos tão diferentes de matemáticos.

JK: A que tipos se refere?

GP: Ora bem, escrevi um pequeno artigo sobre isso onde me referi a Emmy Noether² e contei uma piada a esse propósito. Ela era pela generalização, eu era pela especialização.

^{**} Jeremy Kilpatrick foi aluno de George Pólya Universidade de Stanford, na Califórnia, onde realizou um mestrado em Matemática no início dos anos 60, tendo depois sido seu assistente. Georg Pólya pertenceu também ao júri de doutoramento que Jeremy Kilpatrick realizou em Educação Matemática, na mesma universidade, sob a orientação de Edward Beegle (NT).

JK: Diz-se por vezes que há [matemáticos do tipo] algebrista e [do tipo] géometra. De que tipo é você?

GP: Nem de um, nem de outro. Isso é para um certo estágio de... Uma vez ouvi dizer que existem os *Zetiker*, os *Tetiker* e os *Epsilontiker*... São todos alemães. Os *Zetiker* estão interessados na função zeta de Riemann, os *Tetiker* nas funções elípticas zeta, e os *Epsilontiker* na convergência.

JK: E de qual desses três tipos você é?

GP: Não sei. *Tetiker* não com certeza, não sei o suficiente e interessa-me pouco.

JK: Acha que é importante ter boas capacidades espaciais para se ser matemático?

GP: Em alguma medida sim, mas varia muito. Hadamard fala disso... Conhece o livro de [Jacques] Hadamard³?

JK: Sim, conheço.

GP: Se ele estivesse aqui, dar-lhe-ia respostas muito melhores, ou, pelo menos, dava-lhe mais respostas. Hadamard, por vezes, diz que ou se é do tipo 'auditivo' ou do tipo 'visual'. Ele próprio é mais do tipo auditivo. [Mas] não sei, isso certamente que ajuda... Veja a Jean Pederson⁴, ela certamente que tem capacidade espacial.

JK: E sobre a memória? Acha que os matemáticos têm uma memória especial? Para as coisas matemáticas?

GP: Com certeza que sim.

JK: E você, tem uma memória muito boa?

GP: Tenho, e para tudo. Horácio diz na *Ars Poética*, '*Mendacem oportet esse memorem*'⁵ — o meu latim ainda dá para alguma coisa — 'Um mentiroso tem que ter uma boa memória'. Um poeta é um mentiroso, inventa tudo, tem que se lembrar muito bem do que fez antes. Por isso, uma boa memória é necessária para tudo.

JK: Uma memória organizada de forma especial? Acha que os matemáticos têm uma memória organizada de maneira diferente?

GP: Exactamente, [mas] o que é *organizada*? Eu acho que não dispomos dos termos gerais para conseguirmos descrever essa organização, ou os que temos são vagos.

JK: Estou a perceber. No entanto tentou-se... Uma questão é [saber] se os matemáticos têm certos tipos de capacidades especiais ou se têm apenas as capacidades vulgares e as aplicam em matemática.

GP: A segunda [alternativa] é provavelmente um pouco melhor. Nenhuma delas é completamente verdadeira, mas a segunda é melhor. Por exemplo, posso dizer-lhe que tenho uma memória bastante boa... para a matemática tenho, tenho uma memória bastante boa. Bem, ela agora está a ir por aí abaixo, como em tudo o resto, mas conseguia lembrar-me praticamente de tudo o que fazia, mas não do que as outras pessoas faziam. Mas também tenho boa memória para a poesia e para as anedotas, por isso, não é [uma memória] apenas para números. A minha memória para a poesia é boa mas como lembro dela, e acontece muitas vezes, é assim: vem-me à cabeça entre uma coisa e outra, por alguma razão ou sem razão nenhuma.

Pergunto-lhe se sabe alemão porque sei de cor de uma coisa muito bonita que Schiller disse acerca da poesia.

JK: E lembra-se de tudo?

GP: São apenas duas linhas, descreve muito bem o que ele... Vou dizer-lhas em alemão, que é aliás um alemão muito bom. [Schiller] refere-se provavelmente à poesia, ou possivelmente [à história, pois] também foi historiador, escreveu história. Mas aplica-se bem à matemática. Vou dizê-las em alemão:

*Nur Beharrung führt zum Ziel,
Nur die Fülle führt zur Klarheit,
Und im Abgrund wohnt die Wahrheit.*⁶

Diz ele, “Somente...” Ah, “*Beharung*”, como é que diria isto? “Quem sempre...” — bem, agora falo quatro línguas, é muito difícil escolher a certa — “*Beharung*”... se trabalhamos sempre na mesma direcção, decerto que sempre seguiremos em frente. “*Nur die Fülle*”... se sabemos muitas coisas, se o nosso conhecimento é baseado em muitas coisas, mantenhamo-las reunidas — “*führt zur Klarheit*” — e assim conseguiremos maior esclarecimento. “*Und im Abgrund wohnt*”... e a verdade está nas profundezas. Pode dizer-se o mesmo da matemática, mas Schiller com certeza que se referia à poesia ou à história e não à matemática. Mas também o podemos dizer [da matemática].

Esteve lá no Sábado⁷?

JK: Sim, em S. Diego.

GP: Para conseguirmos ficar mais esclarecidos, é essencial reunir tudo, especialmente coisas do dia a dia, coisas familiares.

JK: Mas matemáticos diferentes têm pontos fortes e pontos fracos diferentes.

GP: Pessoas diferentes têm pontos fortes e pontos fracos diferentes.

JK: Quais são os seus pontos fortes e pontos fracos como matemático?

GP: Eu digo-lhe. Conheci Weil bastante bem, Herman Weil e eu éramos bastante amigos, não muito íntimos, mas éramos bastante amigos... Mas os matemáticos raramente falam de matemática uns com os outros. Weil e eu fizemos uma aposta que foi publicada e que mostra bem a diferença entre nós⁸. Weil era muito bom na generalização, era muito inteligente, conseguia captar e compreender muito rapidamente uma ideia nova e generalizá-la. Eu sou muito mais... Eu prefiro pegar em algo tangível, começar com alguma coisa tangível, partir de coisas da física ou mesmo do dia a dia. Ora isto é muito diferente. A mesma diferença existe entre mim e Emmy Noether⁹. Mostro isso num dos artigos que você vai editar, digo aí o mesmo sobre este assunto, já o leu?

JK: Sim, já o li.

GP: Ora bem, há dois tipos de macacos. Os macacos que andam no cimo das árvores e os macacos andam cá por baixo.

JK: Portanto você é um macaco que anda cá por baixo.

GP: Sim, e ela é uma macaca das que anda lá por cima. São [macacos] diferentes, tal como também as pessoas são diferentes.

JK: Quais as partes da matemática que teve mais dificuldade em compreender?

GP: Não sei. Talvez, bem... Oh, eu gosto... Não se trata de dificuldade em compreender. Por exemplo, eu gosto dos fundamentos mas não conseguiria trabalhar nisso.

JK: Porque não?

GP: Não é a minha especialidade.

JK: Porque lida com a generalização? Porque é demasiado geral?

GP: Ora bem...

JK: É demasiado abstracto?

GP: Isso não pode ser expresso por palavras. Não é a minha especialidade, simplesmente. Admito que é importante, mas não conseguiria trabalhar com isso. Tive uma sorte muito, muito grande. [David] Hilbert era muito amigo de [Adolph] Hurwitz¹⁰ e Hurwitz estava em Zurique. Hilbert, Hurwitz e Minkowsky eram amigos íntimos. Minkowsky morreu e Hilbert veio visitar Hurwitz em Zurique. Estava muito velho, sentia que estava a envelhecer, [e que] precisa[va] de um bom assistente. Veio a Zurique e foram-lhe propostos dois: [Paul] Bernays e eu próprio. Foi uma grande sorte terem escolhido Bernays e não a mim, porque eu não era bom nos fundamentos e Bernays era excelente. Bernays, Hilbert e [Wilhelm] Ackermann¹¹, publicaram um livro [que] foi cem por cento escrito por Bernays. De quem foram as ideias não sei, Hilbert, provavelmente, foi quem o organizou. Foi uma sorte enorme para a ciência e para mim eu não ter sido escolhido. Teria sido, naturalmente, muito lisonjeador ser assistente [de Hilbert], mas foi muito melhor assim.

JK: Vamos falar de resolução de problemas. De onde vieram as regras e métodos heurísticos que estão no *How to Solve It*¹²? Qual a sua origem?

GP: Já publiquei sobre esse assunto. Este é, julgo, o meu primeiro artigo sobre resolução de problemas¹³ e falo disso em pormenor nas primeiras linhas. Tive que preparar um miúdo para um exame do liceu, um miúdo pouco esperto. Quis-lhe explicar um problema... um problema parecido com este¹⁴ e não o consegui. À noite sentei-me e inventei esta [representação]. Este foi o início do meu interesse explícito pela resolução de problemas.

JK: Foi então ao tentar ensinar [ao miúdo] que lhe surgiram estas questões.

GP: Não, não, isso apareceu depois. Foi só o principal, a representação com um grafo. Eu não conhecia a palavra *grafo*, etc. mas inventei esta representação e depois melhorei-a, fiz uma figura geométrica. Mas esta invenção germinou aí e foi este o princípio do meu interesse explícito [na resolução de problemas]. Implicitamente, provavelmente, já estava interessado antes, também tinha interesse [na questão de] como é que as pessoas descobrem. Foi Ernest Mach que disse que só se consegue realmente compreender uma teoria, se se souber como ela foi descoberta. Eu li o livro dele¹⁵

e influenciou-me muito, levou-me da filosofia à física. Mach era muito contra a filosofia [do seu tempo].

JK: O grafo apareceu primeiro do que as suas questões ou sugestões do tipo, ‘Qual é a incógnita’, ‘Consegue fazer uma figura’?

GP: Sim, o grafo apareceu primeiro. Nessa altura eu estava muito interessado em Descartes, nas *Regulae*¹⁶.

JK: Nas *Regras*.

GP: Posso mostrar-lhe, tenho aqui... Aonde é que estará? (Procura o livro mas não encontra). Tenho uma edição [bilingue] das *Regras*, de um lado está o original em latim, do outro a tradução francesa. Julgo que é [com] estas questões com que agora se inicia o *How to Solve It*.

JK: Quando é que isso foi? Quando estava em Zurique?

GP: Sim. Isto aqui é... Oh, já viu o número do *Journal of Graph Theory*? Posso oferecer-lho.

JK: Não, não tinha visto.

GP: Tem dois artigos¹⁷. O primeiro, de Harary... não tenho nenhuma cópia dele, e o outro de Albert Pfluger. Não sei se sabe quem é.

JK: Não.

GP: É um professor da minha antiga instituição¹⁸.

JK: Era um colega seu?

GP: Não, era um estudante. Fez o doutoramento comigo. Conheci-o a ele, à sua filha etc., etc.

JK: E ele conta a história.

GP: Conta-a muito bem.

JK: Estou a ver, ótimo.

GP: Há [também] um artigo de Harary.

JK: Eu procuro.

GP: Arranjarei cópias mais tarde. De qualquer modo, você encontra, é fácil.

JK: Quando resolve problemas, usa os seus conselhos do *How to Solve It*? Conscientemente?

GP: Sim, mesmo mais do que isso. Como também digo algures — está num dos meus artigos — eu tinha as regras e eu próprio as experimentei.

Depois de ter editado as obras de Hurwitz pensei também em publicar as suas notas — ele tinha um caderno de notas, notas matemáticas, um diário matemático, melhor dizendo. A palavra correcta é *diário*, em francês dizemos *journal*, mas em inglês dizemos *diary*. [Hurwitz] tinha um diário matemático muito bem escrito, redigido de forma muito completa, não apenas rascunhado mas escrito com clareza, bem formulado. Aí ele descreve aquilo em que pensa, por vezes as suas conversas, outras

vezes o que leu. Pensei então [também] em editar o diário e assim, entre outros, encontrei este problema que me conduziu ao [Pólya] *Counting Method*. Escolhi este método de contagem apenas para testar as minhas próprias regras. Digo isto algures, num artigo que publiquei, *Welcome*¹⁹.

JK: Também quer esse artigo no livro [das obras completas].

GP: Sim.

(...)

GP: Isso está aí [nesse artigo], digo mesmo isso, [que] tentei experimentar... Eu pretendia experimentar eu próprio essas regras e este problema de Hurwitz era mesmo bom para isso. [Era] obviamente um problema interessante, pois Hurwitz e Cayley trabalharam nele, e [era] essencialmente relacionado com a química. Disso gosto, [de um problema] relacionado com algo de importante e com a prática. E, por outro lado, são necessários muito poucos conhecimentos prévios.

Vou contar-lhe uma história. Quando estudou álgebra, ainda estudou o Teorema de Sturm.

JK: Estudei.

(...)

GP: Hoje em dia já não consta dos livros de álgebra embora na verdade seja um assunto essencial. Sturm foi professor na École Polytechnique de Paris e citou-o: *Le théorème dans j'ai l'honneur de porter le nom* — 'O teorema no qual eu tenho a honra de ter o nome'. Agora, eu tenho... existe o 'Método de Contagem' (*Counting Method*) no qual eu tenho a honra de ter o nome.

JK — É bom, muito bom.

GP: Está a ver, e foi descoberto apenas partindo disto... eu queria experimentar as minhas regras.

JK: Algumas pessoas dizem que não conseguem usar as [suas] regras, ou que...

GP: Pois é, as pessoas são diferentes, as pessoas são diferentes.

JK: Acha que é possível desenvolver a capacidade de uma pessoa para resolver problemas?

GP: Penso que sim.

(Entra a Sra. Pólya com bebidas e falámos de coisas de família)

JK (para a Sra. Pólya): Encontrei um artigo que você escreveu²⁰, tenho uma cópia.

Stella Pólya — (Risos) Eu tive apenas a ideia sobre a almofada de alfinetes. Disse a [Jean] Pedersen e foi ela que falou disso. Foi ela quem escreveu e fê-lo sem eu saber.

(Seguiu-se mais alguma conversa entre os três e depois a Sra. Pólya saiu. O tempo está a esgotar-se.)

JK: Acho que já fiz a maior parte das perguntas que queria.

GP: Qual é a próxima?

JK: A próxima é esta, acha que é possível desenvolver a capacidade de uma pessoa para resolver problemas? Até que ponto podemos desenvolver essa capacidade?

GP: Ora bem, eu diria que não é tanto ‘desenvolver’ mas ‘despertar’.

JK: Ela já está lá.

GP: Está lá algures. Se não há nada lá, não é possível... Mas podemos despertar essa capacidade. [Com] um bom professor, etc. [com] uma boa oportunidade para a despertar. No meu caso, tive obviamente possibilidades que isso [acontecesse], mas ela foi despertada muito tardiamente. Provavelmente, teria sido um matemático muito melhor se tivesse tido um bom professor no liceu. Essa capacidade pode ser despertada... estou convencido disso. Talvez esteja a ser demasiado optimista, mas até acho que [com] as minhas regras, um professor, um bom professor dando alguma ênfase às minhas questões, pode ajudar a despertá-la. Allan Schoenfeld tem algumas ideias sobre como fazer isso. Não estou totalmente de acordo com ele, com o que ele diz, mas de qualquer modo penso que sim, nisso eu acredito. Não está provado, evidentemente, mas será muito difícil de provar ou de refutar.

JK: Acha que é importante o professor apresentar diante da turma... [Que] é importante o professor mostrar diante da turma como resolver o problema. O professor deve ser um actor?

GP: O que é mais importante para o professor, é que ele próprio tenha a experiência de resolução [de problemas]. Em Belmont [CA] há uma universidade católica, a Universidade de Notre Dame. Tivemos lá um encontro, você não esteve, evidentemente. Tivemos lá Ed Teller, o pai da bomba atômica [que] deu uma palestra, uma palestra mesmo muito interessante²¹. Eu não concordo com tudo o que ele disse, mas foi bom. [Teller] disse que o mais importante é o professor, [que] o professor deve divertir os jovens, [que] matemática deve divertir os jovens.

JK: E você concorda?

GP: Concordo. Para despertar os jovens, os problemas devem ser divertidos, desafiadores. Os problemas devem ser divertidos, não [devem ser] problemas muito afastados deles, não [devem ser] problemas ‘práticos’ como calcular o imposto sobre os rendimentos.

JK: Isso não é mesmo nada divertido.

GP: (Risos) Absolutamente. O Infernal Serviço dos Rendimentos (*Infernal Revenue Service*). Não é nada divertido.

JK: Entre os alunos que teve, como identificava os melhores em matemática. Ensinou alunos que eram bons em matemática, como é que descreveria aqueles que eram os melhores?

GP: Qual era o melhor, não sei dizer-lhe.

JK: Está bem, [mas] entre os melhores, como conseguia identificar o talento deles. Eram os mais rápidos?

GP: Colocavam boas questões, descobriam alguma coisa por eles próprios, etc. Não há maneira simples... As pessoas são demasiado diferentes, não há uma maneira simples de descrever isso, acho que não há.

JK: E quanto às pessoas que são criativas em matemática, comparando com as que simplesmente são capazes de aprender? O que é que faz com que sejam criativas? O que é que isso exige? Apenas um grande interesse?

GP: Não sei.

JK: Nem toda a gente é criativa em matemática.

GP: Disse um dia algures, 'qual é a diferença entre *produtivo* e *criativo*'? Se pensamos sobre um problema e produzimos um resultado, neste caso estamos a ser produtivos. Se ao realizarmos esse trabalho obtemos um método com o qual conseguimos resolver também outros problemas, então estamos a ser criativos. É esta a diferença, mas é difícil explicar de que se trata. Não penso que existam sinais evidentes para reconhecer essa diferença, acho que não.

JK: São coisas com que as crianças nascem?

GP: Sim, tenho quase a certeza. Devemos ter uma [predisposição] genética... Deve ser alguma coisa com que nascemos, claramente.

JK: Mas ajuda se tivermos um professor...

GP: Isso ajuda, para a despertar.

JK: No entanto, mesmo que não tenhamos tido um professor para a despertar, podemos ser...

GP: Podemos.

JK: Como no seu caso.

GP: Se formos muito... Ora bem, eu tive Mach como professor. Um pouco tarde, mas eu... eu aprendi... Mach disse e explicou-o muito bem [que] 'se pretendemos compreender teoria, temos que saber como ela foi descoberta'. E isto eu compreendi.

JK: Pensa que é esse um dos problemas do ensino da matemática nas escolas, que [nos limitamos] a apresentá-la aos jovens?... Apresentamos a matemática aos jovens mas não lhes mostramos como ela foi descoberta. Por outras palavras, [acha que] o ensino deve ser mais genético?

GP: Devemos ilustrar [como isso acontece], fazer uma pequena encenação e fingir que estamos a descobri-la. Publiquei isto algures, fingir a descoberta.

JK: E pensa que isso é importante para...

GP: Se fizermos isso bem feito, eles aprendem muito mais que apenas o problema [a resolver].

JK: Colaborou com outros matemáticos?

GP: Com muitos.

JK: Eles abordavam a matemática de um modo diferente do seu?

GP: Não sei. Como lhe disse, nunca colaborei com Weil, os nossos interesses eram muito distintos. Mas colaborei com matemáticos muito bons, melhores que eu próprio. Com Hurwitz, com [Godfrey Harold] Hardy, com [Gábor] Szegő²². Estão aqui à minha volta (aponta para fotografias na parede do escritório). Evidentemente que foi com Szegő que eu colaborei mais.

JK: A abordagem da matemática de Szegő é a mesma que a sua?

GP: Pelo contrário, em certa medida éramos complementares.

JK: De que forma?

GP: Por exemplo, ele era um calculador excelente, era excelente no cálculo.

JK: E você não é tão bom?

GP: Não sou mau, mas ele... De algum modo complementávamo-nos um ao outro. Ele sabia de uns assuntos, por exemplo, sabia mais de polinómios do que eu, de Legendre, etc. De alguma forma nós... os nossos interesses eram suficientemente semelhantes, mas também suficientemente diferentes, não consigo enumerar todos os aspectos, mas era mais o complementarmos-nos. Tínhamos evidentemente, alguns interesses muito semelhantes, mas também diferentes. [E] também antecedentes similares, fomos os dois alunos de [Leopold] Fejér, etc, mas...

JK: Que tipo de professor era Fejér?

GP: Era muito bom, muito bom. Tive poucas aulas suas, mas conversei muito com ele. Era excelente. Escrevi sobre isso algures, fiz um obituário de Fejér onde falei sobre isto²³. Ele contava histórias muito boas.

JK: E sobre Hardy? Que tipo de matemático era Hardy?

GP: Tinha um certo charme pessoal. Nunca conheci na minha vida ninguém com tanto charme. Não apenas para os matemáticos, mas para as pessoas em geral. Na Europa, os matemáticos professores ganham menos mas possuem mais coisas. Por exemplo, em Zurique, e mesmo na Budapeste comunista, um matemático professor certamente que tem uma empregada doméstica. Aqui não se consegue pagar... Você consegue pagar a uma empregada?

JK: Não.

GP: Mas lá conseguimos pagar a uma empregada. Nós tínhamos a mesma empregada e quando Hardy lá esteve, a empregada fez uma empada extra para ele. Hardy gostava do chá da tarde e ela fez uma empada extra para ele, embora Hardy provavelmente nunca tenha olhado para ela e de certeza que nunca lhe falou. No entanto, a empregada também ficou impressionada com Hardy. Ele tinha um certo charme que não se consegue descrever.

JK: Mas no trabalho com a matemática, a abordagem dele era a mesma que a sua?

GP: Não, a sua colaboração era mais com Littlewood, muito mais com Littlewood de que comigo. Littlewood era talvez o que mais descobria e Hardy o que mais escrevia. O mesmo se passou com o nosso livro *Inequalities*²⁴. Eu escrevi um ou dois capítulos,

Littlewood não escreveu um único — algumas das suas palestras tinham sido polícopiadas e esse material foi utilizado. Eu escrevi uns quantos capítulos, mas Hardy escreveu tudo. Tal como [o livro] está, cada uma das frases foi escrita por Hardy. Ele tinha uma extraordinária facilidade em escrever, mesmo em francês — mas recusava-se falar francês, os ingleses têm bem consciência disto. Escrevia muito depressa em francês, e em inglês, claro, tinha um talento especial para escrever depressa e bem.

JK: Quando se trabalha em matemática, quando se tenta resolver um problema matemático, acha que o conselho para deixar o problema de lado por uns tempos... é um bom conselho?

GP: Não sem primeiro ter feito alguma coisa.

JK: [É preciso] experimentar antes. Teve alguma vez a experiência de lhe aparecer uma solução inconscientemente?

GP: Sim, com certeza. Há mesmo [a expressão] ‘Esperar pelo bom vento’. É uma expressão comum.

JK: Teve essa experiência?

GP: Não sei de quem ouvi, mas não o inventei eu, tenho a certeza. Quando se é marinho — não de um barco a motor, mas de um barco à vela — há que esperar pelo bom vento. Trata-se assim de ‘esperar pelo bom vento’. Não inventei esta expressão, deve ser algum dito tradicional.

JK: Pessoas como Poincaré e outros [também o] disseram...

GP: Esperar, dormir sobre o problema. Isto é internacional, é dito em todas as línguas.

JK: [E] teve a experiência de acordar com uma solução?

GP: Sim, de vez em quando. Também descrevi isto algures num dos meus artigos.

JK: [A solução] apareceu-lhe assim desse modo?

GP: Mas muito raramente. Ouvi o mesmo de Hurwitz. Acordar com a solução, mas são apenas coisas fantasmagóricas.

JK: Não é verdadeiramente a solução?

GP: Não, não é assim [que se passa]. Muito raramente aconteceu que acordasse realmente com uma solução que o fosse. Há uma coisa simples no [livro] *Inequalities*, uma solução para... Penso que é referido num dos meus últimos artigos²⁵ (vai buscar o artigo).

JK: Número 236.

GP: Penso que é o segundo [artigo] onde eu descrevo isso — Sonhos matemáticos. Agora raramente tenho, mas quando era mais novo tinha sonhos matemáticos.

JK: O que quer dizer com sonhos matemáticos?

GP: Oh, eu sonhava...

JK: Com símbolos?

GP: Não, [sonhava] com um teorema ou uma demonstração ou qualquer coisa, mas normalmente... [a demonstração] dissolvia-se, está a ver. Mas houve uma vez que me lembrei, aconteceu mesmo, realmente sonhei-a correctamente. Apenas tive que escrever os pormenores de manhã. Ouvi dizer que com Hurwitz aconteceu o mesmo. Tenho quase a certeza que isto está descrito aí [no artigo].

JK: Desenha muitas figuras quando está a trabalhar num problema?

GP: Algumas vezes sim, desenho muitas figuras, às vezes muito cuidadosamente.

JK: Mesmo quando o problema não exige uma figura?

GP: Com certeza. Pode ser o início da ideia, obtermos uma figura que esteja ligada com o problema.

(...)

(A conversa regressa à palestra de Eduard Teller)

GP: Então ele ensina a um dos miúdos e [esse miúdo] vence os outros. Assim ficarão todos com muita vontade de aprender e, ao aprenderem, aprendem também o sistema binário e a divertir-se com a matemática. Era essa a ideia de Teller, com que não concordo a cem por cento, mas foi bom que alguém o dissesse aos professores. Sobretudo que [disse que] o principal no professor deve ser o interesse, [que] ele deve divertir, convencer os jovens que a matemática é divertida.

JK: [E] como é que os jovens vão aprender as técnicas matemáticas?

GP: Hão-de aprender. Se jogarem o jogo do Nim, aprenderão a fazer adições muito rapidamente, e aprendem a combinar coisas etc. Teller é seguramente um cientista de elevada craveira, e diga-se a propósito que não é apenas isso. Sabe que havia um concurso de matemática na Hungria²⁶.

JK: Sim

GP: Teller venceu esse concurso quando era jovem. Por isso, ele sabe do que está a falar quando fala sobre a aprendizagem da matemática. Ele tem experiência real da matemática para a idade do liceu, experiência de alto nível. E Jean Pederson, que foi uma professora muito bem sucedida, vai aos liceus, ou os jovens vão à Universidade de Santa Clara, e ela mostra-lhes como construir modelos. Depois disso, eles ficam desejosos por construir modelos. Um vez, ela fotografou cada um dos jovens com o modelo que fez. Isso também é alguma coisa, também é trabalho matemático, aprendem figuras geométricas, etc. 'A aprendizagem começa por ver e fazer', também citei isto em algures²⁷.

JK: Sim, eu sei.

GP: Assim, se jogarmos o jogo do Nim ou construirmos modelos matemáticos... A propósito, a Sra. Pederson, juntamente com alguém da Universidade de Santa Clara, está a escrever um livro principalmente para adolescentes — sobretudo para os primeiros anos do liceu, talvez, ou um pouco antes ou um pouco depois — onde propõem problemas divertidos em que têm que realizar muitos cálculos²⁸. Está bastante bem

feito. Discuti um pouco [o livro] com ela, ajudei um pouco mas foi feito por eles. Ainda não está publicado. A Sra. Pederson escreveu vários livros mas este é um livro como deve ser e é o que se deve fazer: dar [aos jovens] alguma coisa que os divirta.

JK: É um bom conselho.

GP: Se tivesse mais tempo, eu sabia o que gostava de fazer. Tenho muitos textos que me enviaram — coisas sobre o ensino e coisas semelhantes — pedindo-me conselhos, e na maior parte dos casos não os li. Agora não sei o que fazer com todos estes textos.

JK: Quer mandar-mos a mim?

GP: Posso mandar-lhe muitos.

JK: Está bem.

GP: Mas tenho que os preparar.

JK: Envie-mos que eu ajudo-o.

GP: Está bem.

JK: Pode entregá-los à secretária do Departamento de Matemática e ela enviar-mos-á.

GP: Obrigado, isso é muito bom.

Notas

¹ Rota, Reynolds, & Shortt, 1984.

² Pólya, 1973/1984.

³ Hadamard, 1945.

⁴ Professora de matemática na Universidade de Santa Clara.

⁵ Na verdade a citação é de Quintilian (*De Institutione Oratoria*, IV. ii).

⁶ “Naught but firmness gains the prize, Naught but fullness makes us wise, Buried deep, truth ever lies!” (Schiller, 1796). [‘Só a tenacidade premeia, Só a plenitude nos esclarece, A verdade habita as profundezas.’ (NT)]

⁷ Pólya refere-se à sua sessão com Peter Hilton no encontro anual do *National Council of Teachers of Mathematics* em San Diego nesse Abril. Hilton proferiu uma conferência que ilustrava como a matemática não deve ser ensinada e então Pólya apresentou algumas regras de ouro para bem ensinar. A sessão foi uma repetição da apresentação que ambos tinham feito no encontro conjunto da *American Mathematical Society* e a *Mathematical Association of America* em Seattle, no verão anterior (ver Hilton & Pedersen, 1999).

⁸ A aposta foi feita em 1918 e foi sobre que direcção seguiria no futuro a matemática. Weil era um construtivista e Pólya, era um matemático mais clássico (ver Gurevich, 2001, para mais detalhes sobre aposta).

⁹ Pólya, 1973/1984.

¹⁰ Matemático que Pólya reconheceu ter recebido profunda influência e com quem trabalhou em Zurique durante cerca de seis anos (em entrevista a G. L. Alexanderson, *Two-Year College Mathematics Journal*, Janeiro de 1979); foi Hurwitz quem convidou Pólya para um lugar no Instituto Federal de Tecnologia da Suíça a que pertenceu durante 26 anos. (NT)

- ¹¹ Hilbert & Ackermann, 1928; Hilbert & Bernays, 1934, 1939.
- ¹² *Como resolver problemas*, na tradução portuguesa de Leonor Moreira (Gradiva, 2003) (NT).
- ¹³ Pólya (1919.). A representação melhorada pode ser vista no *Mathematical Discovery* (Pólya, 1981, Vol. 2, p. 9) e no verso da capa do volume 2 da edição original.
- ¹⁴ O problema é determinar o volume do tronco de uma pirâmide recta quadrangular, conhecidos a altura e os comprimentos dos lados das bases superior e inferior (ver Pólya, 1981, Vol. 2, p. 2).
- ¹⁵ Mach, 1883.
- ¹⁶ Descartes, 1701.
- ¹⁷ Harary, 1977; Pfluger, 1977.
- ¹⁸ Eidgenössische Technische Hochschule Zürich [Instituto Federal de Tecnologia da Suíça].
- ¹⁹ Pólya, 1977.
- ²⁰ Pólya, S., 1977.
- ²¹ A palestra de Edward Teller chamou-se ‘*The New (?) Math*’ [*Matemática Moderna (?)*] e teve lugar no encontro de Fevereiro de 1978 da Secção da Califórnia do Norte da *Mathematical Association of America*, que se realizou no College of Notre Dame.
- ²² Gabor Szegő foi um matemático com quem Pólya desenvolveu profunda e continuada colaboração em Zurique e com quem viria a escrever aquela que é considerada a sua obra prima em matemática — *Problemas e Teoremas em Análise*, publicada em alemão em 1925. Quando se exilou nos Estados Unidos a partir de 1940, Pólya viria a reencontrar-se com Szegő que dirigia o Departamento de Matemática na Universidade de Stanford e o convidou para um lugar de investigador associado. (NT)
- ²³ Pólya, 1961. Ver também Pólya, 1969.
- ²⁴ Hardy, Littlewood, & Pólya, 1934.
- ²⁵ Trata-se da demonstração da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica feita Hardy, Littlewood, and Pólya, 1934, p. 103. Ver Pólya, 1970.
- ²⁶ O concurso Eötvös. [Célebre concurso de problemas matemáticos que se iniciou em 1894 e que inspirou competições semelhantes em muitos países. (NT)]
- ²⁷ Pólya, 1981, Vol. 2, p. 103, onde Pólya parafraseia Kant: “A aprendizagem começa com a acção e a percepção”.
- ²⁸ Posteriormente publicado, Pedersen and Armbruster, 1979.

Referências

- Descartes, R. (1701). *Regulae ad directionem ingenii* (Rules for the direction of the mind). In *Descartes Opuscula posthuma, physica & mathematica*. Amsterdam: P. & J. Blaeu.
- Gurevich, Y. (2001). Platonism, constructivism, and computer proofs vs. proofs by hand. In G. Paun, G. Rozenberg, & A. Salomaa (Eds.), *Current trends in theoretical computer science: Entering the 21st century* (pp. 281–302). Singapore: World Scientific.
- Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Harary, F. (1977). Homage to George Pólya. *Journal of Graph Theory*, 1, 289–290.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1934). *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hilbert, D., & Ackermann, H. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik* [Principles of mathematical logic]. Berlin: Springer.

- Hilbert, D., & Bernays, P. (1934). *Grundlagen der Mathematik* [Foundations of mathematics] (Vol. 1). Berlin: Springer.
- Hilbert, D., & Bernays, P. (1939). *Grundlagen der Mathematik* [Foundations of mathematics] (Vol. 2). Berlin: Springer.
- Hilton, P., & Pedersen, J. (1999). Epilogue: Pólya and ourselves — Mathematics, tea and cakes. Symmetry in theory: Mathematics and aesthetics. *Visual Mathematics*, 1(1). Retrieved from <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/hil/ped6.htm>
- Mach, E. (1883). *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* [The science of mechanics]. Leipzig: Brockhaus.
- Pedersen, J. J., & Armbruster, F. O. (1979). *A new twist: Developing arithmetic skills through problem solving*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.
- Pfluger, A. (1977). George Pólya. *Journal of Graph Theory*, 1, 291–294.
- Pólya, G. (1919). Geometrische Darstellung einer Gedankenkette [Geometrical representation of a chain of thought]. *Schweizerische Pädagogische Zeitschrift*, 2, 53–63.
- Pólya, G. (1961). Leopold Fejér. *Journal of the London Mathematical Society*, 36, 501–506.
- Pólya, G. (1969). Some mathematicians I have known. *American Mathematical Monthly*, 76, 746–753.
- Pólya, G. (1970). Two incidents. In T. Dalenius, G. Karlsson, & S. Malmquist (Eds.), *Scientists at work: Festschrift in honour of Herman Wold* (pp. 165–168). Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Pólya, G. (1977). A note of welcome. *Journal of Graph Theory*, 1, 5.
- Pólya, S. (1977, October). Pincushion geometry for primary children. *California Mathematics* (California Mathematics Council), 2(1), 35–36.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (Combined ed.). New York: Wiley.
- Pólya, G. (1984). A story with a moral. In G.-C. Rota, M. C. Reynolds, & R. M. Shortt (Eds.), *George Pólya: Collected papers* (Vol. 4: Probability; combinatorics; teaching and learning in mathematics, p. 595). Cambridge, MA: MIT Press. (Reprinted from *Mathematical Gazette*, 57, 86–87, 1973)
- Rota, G.-C., Reynolds, M. C., & Shortt, R. M. (Eds.). (1984). *George Pólya: Collected papers* (Vol. 4: Probability; combinatorics; teaching and learning in mathematics). Cambridge, MA: MIT Press.
- Schiller, F. von. (1796). Sprüche des Konfucius. In F. von Schiller (Ed.), *Musen-Almanach für das Jahr 1796* [Muses Almanac for 1796] (pp. 39–47). Neustrelitz, Germany: Michaelis.

<i>Enviado after San Diego April 18, 1978</i> <i>Phys.</i>	1. At what age did you first show mathematical talent? 2. What qualities of the mind, in your opinion, make a person mathematically able? 3. To what extent are mathematical abilities general or specific intellectual abilities?	INTERVIEW WITH GEORGE POLYA, STANFORD, CALIFORNIA, JK: What are the qualities that you think make someone capable in mathematics? In other words, what are the mental abilities that distinguish someone who is capable in mathematics from someone who is not so capable? GP: I couldn't give you a good description. I never made any clear ideas about that. Moreover, there are so different kinds of mathematicians. JK: What different kinds? GP: Well, I wrote a little article about it, It is in the book where I mentioned Emmy Noether. I made a joke about it: she was for generalization; I was for specialization. JK: Sometimes people say there are algebraists and there are geometers. Which are you? GP: That was Neither, nor. This is for a certain stage of the I heard at a certain time these were they were "Zetiker," "Tetiker," and "Epsilontiker"--they are all German. Zetiker were interested in the Reimann ^{zeta} zeta function; Tetiker were interested in elliptic functions; and and Epsilontiker were interested in convex sets. (convergence?) JK: Which are you--of those three? GP: I don't know. Certainly not Tetiker--I don't know enough; little interest. JK: Do you think it's important to have good spatial abilities to be a mathematician? GP: To a certain extent, yes, but that's also different.. Hadamard tells about--do you know the book of Hadamard? JK: Yes, I know the book. GP: If that he were here, he would give you much more better answers--anyway, more answers. He thinks sometimes you are the "auditive" type or you are the "visual" type. And he himself is more an auditive type. I don't know. It certainly helps, especially--here is Jean Pedersen, she has certainly spatial ability.
4. What are the qualities of mathematical ability? 5. How would you describe mathematical abilities? 6. What is the role of intuition in how to solve problems? 7. Is it possible to teach mathematics?		
8. What is the role of spatial abilities in mathematics? 9. What is the role of creative problem solving in mathematics?		

Primeira página do texto dactilografado da transcrição da entrevista, em fundo as questões preparatórias para a entrevista (arquivo de J. Kilpatrick).