Desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: recurso a geometrias planas

Teresa B. Neto
Departamento de Educação, Universidade de Aveiro

Ana Breda
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Juan D. Godino
Faculdade de Educação, Universidade de Granada

Introdução

Este trabalho, no âmbito da Didáctica da Matemática, foca-se na investigação de abordagens alternativas de ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana, no Ensino Secundário, com recurso a outros modelos de Geometrias Planas (e.g. Geometria Hiperbólica, Geometria do Motorista de Táxi).

A abordagem de vários modelos de geometrias planas, da forma que é sugerida neste trabalho, é desenvolver a noção de sistema axiomático, sem privilegiar uma orientação segundo "axiomáticas locais", onde a partir de um objecto se induz uma lista organizada de axiomas, definições, sequência de teoremas, etc. e se privilegie uma abordagem menos localizada, partindo de axiomas, definições, etc., concretizando e dando sentido a esses conceitos através de construções e explorações, recorrendo a ambientes de geometria dinâmica, dessas mesmas construções. Por exemplo, o modelo do Semi-Plano de Poincaré exibe claramente, a alunos do ensino secundário a negação do 5.º postulado de Euclides.

A opção pelo Ensino Secundário deve-se ao facto de se tratar de um nível de ensino onde se regista uma elevada taxa de insucesso escolar (especialmente no 10.º ano) e onde é notório o abismo existente, entre o ensino Secundário e Universitário, no âmbito do raciocínio lógico-dedutivo.

O trabalho a desenvolver pretende aprofundar o estudo de questões ligadas à natureza do conhecimento envolvido que estarão na base de decisões, tais como: Quais os processos que vão ser ensinados? Que processos queremos que os alunos dominem? E, por outro lado, ter em conta que se pretende desenvolver capacidades de ordem superior, significando que o ensino da Matemática deve dirigir-se para níveis elevados de pensamento, tais como: resolução de problemas; comunicar matematicamente; raciocínio e demonstração.

O principal objectivo desta investigação é analisar ambientes de aprendizagem em que os alunos sejam solicitados a resolver problemas de prova em contextos diversificados e, de uma forma mais geral promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e uma visão mais alargada do conhecimento matemático. Em particular, a abordagem de problemas de prova num contexto de geometria não Euclidiana, com recurso a artefactos e a software de geometria dinâmica, será investigada.

Objectivos e questão de investigação

Sendo a Geometria o berço dos sistemas axiomáticos modernos, fizemos recair a nossa investigação na análise de alguns resultados em sistemas axiomáticos geométricos não isomorfos nomeadamente nas Geometrias Euclidiana e Hiperbólica.

Na concepção dos problemas teve-se em linha de conta as actuais sugestões curriculares, do Ensino Secundário em Portugal, que recomendam a criação, através da proposta de situação problema, de ambientes favoráveis à abordagem de aspectos formais da prova e demonstração.

A actividade de resolução de problemas conduz a aspectos importantes da educação matemática, nomeadamente na discussão de estratégias de resolução, competências de argumentação, elaboração de demonstrações com domínio de questões de linguagem matemática, análise e adequação de resultados, construção de conceitos. A progressiva aquisição de competências no domínio da resolução de problemas é um dos grandes objectivos de qualquer sistema de Educação Básica e Secundária em matemática.

Pretendeu-se, através desta investigação:

- Desenvolver tarefas que suscitem o ensino e aprendizagem da Geometria segundo uma abordagem diversificada;
- Analisar as abordagens das tarefas desenvolvidas pelos alunos do Ensino Secundário, em diferentes momentos e a forma como estes alunos mobilizam as suas capacidades, quer ao nível dos conteúdos matemáticos quer ao nível dos processos;
- Avaliar o impacto dessas abordagens no desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos;

A investigação realizada consistiu na implementação, em sala de aula, de uma pasta de tarefas de geometria com o objectivo de gerar algum entendimento sobre a seguinte questão: De que forma é que outros modelos de Geometrias Planas, distintos da Euclidiana, pode ajudar alunos do ensino secundário a desenvolver o raciocínio dedutivo?

Referencial teórico

Antecedentes da investigação

Durante os últimos anos tem-se vindo a realizar investigação considerável no âmbito do ensino e aprendizagem do raciocínio matemático, em especial de raciocínio de natureza dedutiva. Um testemunho deste facto está patente nas publicações, sobre este tópico, nos jornais de educação matemática entre 1990 e 1999. Além de que Nicholas Balacheff tem mantido um *website*, desde 1997, a *Newsletter — International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematics Proof*, a qual tem divulgado estudos teóricos e empíricos sobre este tópico.

No CERME 4 (Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) em Espanha, Reid, D. (2005) discutiu, tendo como referência o trabalho de vários investigadores (e.g., Godino & Recio, 2007; Reid, 2001; Balacheff, 2004), os diferentes significados de "demonstração" e "prova em termos das seguintes dimensões: o conceito de demonstração; o propósito do ensino da demonstração; os tipos de raciocínio envolvidos numa prova, a necessidade de provar e a relação entre demonstração e linguagem.

Um número considerável de investigadores tem vindo a investigar a influência do recurso a ambientes de geometria dinâmica no desenvolvimento do raciocínio matemático. Um indicador de tal facto é a edição especial do jornal internacional de investigação em educação matemática, *Educational Studies in Mathematics* 44 (2000).

Os exemplos de sucesso aqui apresentados não aconteceram sem os seguintes elementos: *tarefas cuidadosamente preparadas, adequada orientação do professor*; *criação de oportunidades para os alunos conjecturarem, cometerem erros, reflectirem, interpretarem relações entre objectos e apresentarem explicações matemáticas*.

É razoável prever que estes ambientes transformem rapidamente a relação entre o conhecimento matemático e os problemas propostos. Essa mudança ocorrerá devido à natureza dos problemas propostos e aos processos de resolução Mariotti (2000).

Um grande número de estudos tem confirmado a importância do papel do professor na criação de ambientes de debate que conduzam os alunos à identificação da estrutura de uma demonstração, à apresentação de argumentos e à distinção entre os argumentos correctos dos incorrectos, bem como a encorajar a interacção entre os alunos. Além disso, é crucial que o professor ajude os alunos a compreenderem por que é que uma prova é necessária e quando esta é válida (cf. Balacheff: 1987; Hanna: 1995 cit in Bergen et al: 2000).

O facto de se ter vindo a reflectir sobre a investigação neste domínio, quer em conferências internacionais quer nas várias publicações disponíveis (e.g., Educational Studies in Mathematics, Recherches en Didactique dês Mathématiques, La Lettre de la Preuve) constitui um sinal de maturidade da investigação no ensino e aprendizagem da "demonstração" e da "prova" matemática.

A investigação neste domínio (e.g., Schalkwijk, 2000) documenta que para alunos do nível do Ensino Secundário as tarefas que envolvem raciocínio dedutivo constituem tarefas com um grau de dificuldade elevado, Dreyfus (1999), identificou três categorias de dificuldades: a necessidade, *a compreensão e a elaboração da prova*. Assim, os professores de Matemática devem ter preocupações relativas a abordagens didácticas de problemas de prova que contribuam para a redução das referidas dificuldades.

Em Portugal, as abordagens de ensino da prova matemática, quer da Educação Básica quer na Educação Secundária, concentram-se frequentemente na verificação de resultados e menos na exploração e explicação. Os indicadores de avaliação, quer aferida quer sumativa, demonstram claramente a necessidade do desenvolvimento de intervenções na educação matemática que promovam o pensamento matemático mais autónomo nos nossos alunos.

A acessibilidade a ambientes de geometria dinâmica (e.g., Geometer's Sketchpad, Cabri Geometry, Geogebra) facilita a realização de tarefas de natureza exploratória, devido ao facto dos alunos testarem facilmente conjecturas através da exploração de construções feitas ou conjecturarem relações geométricas com base em evidências visuais. De acordo com Hanna (2000) o professor de matemática deve estar consciente de que as representações visuais constituem uma componente essencial nos currículos de matemática na medida em que cria pontes com o aspecto formal da matemática.

O nosso estudo constitui-se como uma pequena peça na agenda de investigação na educação de alunos do Ensino Secundário para a prova matemática. Neste sentido, e de forma atípica, optou-se por abordar problemas de prova num contexto diversificado de Geometria Plana.

O enfoque ontosemiótico

Uma perspectiva Ontosemiótica da educação matemática é um referencial teórico que adopta pressupostos de natureza semiótica e antropológica, ao nível da matemática, e de natureza interaccionista e socio-construtivista, ao nível do estudo dos processos de ensino e de aprendizagem (Godino, Batanero e Font, 2007). Assim, revela-se uma ferramenta teórica para descrever e compreender práticas de demonstração, em sala de aula, na sua dupla versão, pessoal e institucional.

Neste momento, o conjunto de noções teóricas que compõem esta abordagem é constituído por cinco grupos — Adequação Didáctica, Dimensão Normativa, Trajectória Didáctica, Configurações de Objectos e Processos, e Sistema de Práticas — cada um deles relativo a determinado nível específico de análise para os processos de ensino e aprendizagem de temas matemáticos.

Relativamente ao grupo, Configurações de Objectos e Processos, Godino e colaboradores referem que para uma análise mais fina da actividade matemática é necessário ter em consideração seis tipos de entidades primárias: Situação-problema; Linguagem (e.g., termos, expressões, notações, gráficos) nos seus diversos registos (e.g., escrito, oral, gestual); Conceitos (abordados através de definições ou descrições); Proposições (enunciados sobre conceitos); Procedimentos (e.g., algoritmos, operações, técnicas de cálculo); Argumentos (enunciados utilizados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, de natureza dedutiva ou de outro tipo). Estes seis objectos relacionam-se formando configurações epistémicas (redes de objectos institucionais) e cognitivas (redes de objectos pessoais). A consideração de uma entidade como primária não é uma questão absoluta mas sim relativa, visto que se tratam de entidades funcionais em contextos de uso. Os sistemas de práticas e as configurações são propostas pelos mesmos investigadores, como ferramentas teóricas para descrever os conhecimentos na sua dupla versão: pessoal e institucional.

Os atributos contextuais apontados por estes investigadores são: Pessoal/institucional — A cognição pessoal é o resultado do pensamento e da acção do sujeito individual confrontado com uma classe de problemas, enquanto a cognição institucional é o resultado do diálogo, do entendimento e da regulação no seio de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de práticas; Ostensivo/não ostensivo — O atributo ostensivo refere-se à representação de um objecto não ostensivo, isto é de um objecto que não se pode mostrar a outro. A classificação entre ostensivo e não-ostensivo depende dos contextos de uso. Diagrama, gráficos, símbolos são exemplos de objectos com atributos ostensivos, cubos perfurados e secções planas de poliedros são exemplos de objectos com atributos não-ostensivos; Expressão/ conteúdo (antecedente e consequente de qualquer função semiótica) — A relação estabelece-se por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um antecedente (expressão, designação ou nome) e um consequente (conteúdo, designado ou ente matemático) estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com determinado critério ou código de correspondência; Extensivo/ intensivo (particular/geral) — Esta dualidade utiliza-se para explicar uma das características básicas da actividade matemática, ou seja, a generalização. Esta dualidade permite centrar a atenção na dialéctica entre o particular e o geral, que sem dúvida é uma questão chave na construção e aplicação do conhecimento matemático; Unitário /sistémico — Em certas circunstâncias os objectos matemáticos participam como entidades unitárias noutras estes devem ser tomados como decomposição de outros para que se possa proceder ao seu estudo.

Estas facetas são apresentadas agrupadas em duplas que se complementam de maneira dialéctica. São consideradas como atributos aplicáveis aos distintos objectos primários e secundários, dando lugar a distintas "versões" dos referidos objectos através dos seguintes processos cognitivos/ epistémicos:

Institucionalização — personalização;

Generalização — particularização;

Análise/decomposição — síntese/reedificação;

Materialização/concretização — idealização/abstracção;

Expressão/representação — significação.

Natureza das justificações dos alunos

O conceito de justificação é muito amplo e, por isso, é muito natural que se encontrem justificações muito distintas as quais, muitas vezes, utilizam processos de argumentação totalmente diferentes. A análise das justificações dos alunos pode ser utilizada para avaliar o progresso de um aluno durante determinado período de aprendizagem, a influência de um determinado processo de ensino e aprendizagem, etc. Ao discutirem esta questão, Marrades e Gutiérrez (2000) elaboraram uma classificação das justificações dos alunos com base nos trabalhos de outros autores (Bell, 1976; Balacheff, 1987).

Estes investigadores diferenciaram duas categorias principais de justificações: as justificações empíricas e as justificações dedutivas.

As justificações empíricas são caracterizadas pelo uso de exemplos como principal (e talvez único) elemento de convicção. Os alunos elaboram conjecturas depois de terem observado regularidades num ou em mais exemplos; usam os exemplos ou as relações observadas entre eles para justificar a verdade da sua conjectura.

Dentro das justificações empíricas distinguem-se três classes dependendo do modo como os exemplos são seleccionados:

— Empirismo simples, quando a conjectura é justificada mostrando que é verdadeira num ou em vários exemplos, normalmente seleccionados sem um critério específico;

— Experimentação crucial, quando a conjectura é justificada mostrando que é verdade num exemplo específico, cuidadosamente seleccionado;

— Exemplo genérico, quando a justificação é baseada num exemplo específico, representativo da sua classe.

As justificações dedutivas são caracterizadas pela não contextualização dos argumentos usados, baseadas em aspectos genéricos do problema, operações mentais e deduções lógicas. Os exemplos, quando usados, são uma ajuda para organizar argumentos, mas as características particulares de um exemplo não são consideradas na justificação.

Dentro das justificações dedutivas distinguem-se duas classes:

— Experimentação pensada, quando um exemplo específico é usado para ajudar a organizar as justificações;

— Dedução formal, quando a justificação é baseada em operações mentais, sem a ajuda de exemplos específicos.

Estudos de caso

Os estudos de caso, a seguir apresentados fazem, parte de investigação mais alargada, realizada no âmbito de um trabalho de doutoramento sob o título “O Desenvolvimento do Raciocínio Dedutivo ao Nível do Ensino Secundário: Recurso a Geometrias Planas”.

Este trabalho teve como objectivo promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e uma visão mais alargada do conhecimento matemático, com base em sistemas axiomáticos distintos do sistema de Euclides.

A investigação realizada consistiu na implementação, em sala de aula, de uma pasta de tarefas de geometria plana, concebidas para a investigação, com o objectivo de gerar algum entendimento sobre a seguinte questão: *De que forma é que o recurso a outros modelos de geometrias Planas, distintos da geometria Euclidiana, pode ajudar alunos do ensino secundário a desenvolver o raciocínio dedutivo?*

Dois níveis de realização foram configurados para este trabalho. O primeiro decorreu num ambiente de sala de aula com uma turma de 20 alunos (15–16 anos de idade) do 10.º ano de escolaridade (1.º ano do ensino secundário) da área de Económico-Social e no ano lectivo de 2004/2005. O prinicipal objectivo desta fase foi familiarizar os alunos com, *software* de Geometria Dinâmica (GSP), módulo de lógica — noções básicas de lógica (e.g. Modus Ponens) e actividades com o postulado das paralelas em distintos modelos de geometria. Nesta fase do estudo, principalmente no 1.º período lectivo, foram desenvolvidas com a turma, situações problema, envolvendo o recurso a ambientes de geometria dinâmica e a modelos diversificados de geometria plana. A abordagem de modelos de geometria, distintos do modelo Euclidiano, foi feita através do recurso a artefactos (instrumento de percussão, esfera de acrílico, balões de borracha, …) e *scripts* do GSP. Assim, foi proposta à turma o manuseamento de objectos físicos cuja superfície envolvente apresentasse diferentes curvaturas e a visualização de linhas nessas superfícies.

A exploração no GSP, *software The Geometer's Sketchpad*, do semi-plano de Poincaré, recorrendo ao *script* `hy_line.gss`, sript desenvolvido pelo *The Geometer's Sketchpad* Center, permitiu a representação de várias linhas hiperbólicas (representadas por semicircunferências ortogonais à recta de equação $x = 0$ e por semi-rectas de equação $x = a$). De seguida, explorou-se o axioma das paralelas, noutros sistemas, recorrendo a artefactos e ao programa Cinderella. Foi feita referência histórica ao trabalho de Lobachevsky e ao trabalho de Riemann, com ilustrações constantes quer em manuais escolares do 10.º ano de escolaridade quer em cenários de computador.

O segundo nível foi desenvolvido extra-sala de aula em sessões de pequenos grupos de trabalho ao mesmo tempo que decorria a aula de matemática na turma. Nesta fase procedeu-se ao estudo das trajectórias cognitivas individuais (Godino *et al.*, 2007) de duas alunas (16 anos de idade) da turma mencionada, durante o seu 11.º ano (2.º ano do ensino secundário) no ano lectivo 2005/2006. O enfoque era a natureza das justificações destas alunas, quando confrontadas com problemas em vários modelos de geometria plana.

A análise da forma como estas alunas elaboraram as justificações foi feita segundo a estrutura analítica descrita por Marrades e Gutiérrez (2000) e baseada num enfoque ontosemiótico da educação matemática desenvolvido por Godino *et al.* (2006).

Caso I

Este caso apresenta a configuração e trajectória cognitiva das duas alunas em relação ao seguinte problema:
Problema. Na figura seguinte estão representadas várias linhas hiperbólicas (l,m,n, e k) no Semi-Plano de Poincaré, definidas, respectivamente, pelas condições:

l: $(x-7)^2+y^2=16 \quad y>0$

m: $(x-6{,}5)^2+y^2=6{,}25 \quad y>0$

n: $(x-3)^2+y^2=1 \quad y>0$

k: $x=11 \quad y>0$

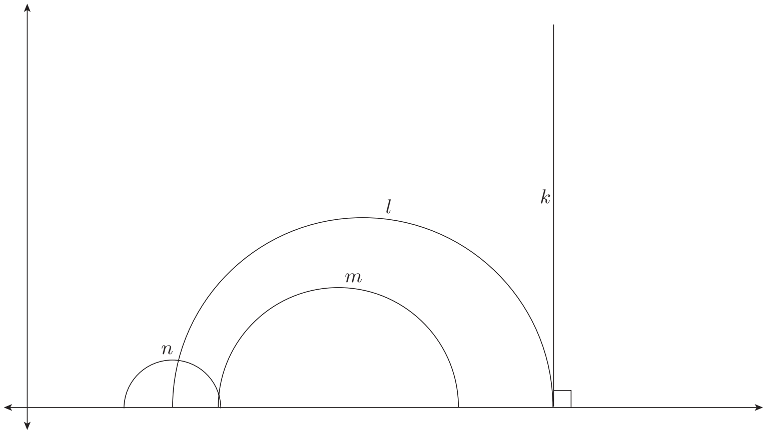

Figura 1 — Linhas hiperbólicas (l, m, n e k) no semi-plano de Poincaré

Indica, caso existam, duas linhas paralelas e duas não paralelas. Justifica.

Após a leitura e análise da figura dada no enunciado ocorreu o seguinte diálogo:

X: Professora a definição de paralelas é a mesma?

Professora: Sim a definição é a mesma.

X: Então, duas linhas por mais que se prolonguem nunca se intersectam.

Y: Estas não são paralelas (referindo-se a l e a n).

X: Mas estas duas são (referindo-se a l e a m).

Y: Mas não são paralelas…

X: Como é que tu sabes?

Y: Oh dá para ver… a distância daqui aqui e daqui aqui… (referindo-se à distância Euclidiana entre as duas semi-circunferências, representativas das linhas hiperbólicas em causa).

X: Mas a distância não tem que ser a mesma.

Y: Tem, quando são paralelas esta distância daqui aqui é sempre igual à daqui aqui e daqui aqui… (apontando as linhas l e m). Não é?

Alunas em silêncio a observarem a figura. A aluna Y identificou o valor do raio nas linhas hiperbólicas l, m e n e efectuou o seu registo ao lado da figura.

Y: Só que estas não se intersectam mas também não são paralelas… (referindo-se a l e a m) a distância que vai daqui aqui não é a mesma daqui aqui.

Professora: Porque é que dizes que não são paralelas?

Y: Porque a distância que vai daqui aqui não é a mesma que daqui aqui.

Professora: Estás a pensar na geometria Euclidiana?

Y: Ah! Então podem ser paralelas…

X: Duas paralelas são o l e o m (…) e duas que não são paralelas são, pode ser o l e o k (…) o k também pode ser paralela a m e paralela a n, nesta geometria.

Y: Aqui pede duas.

Após a fase de análise da situação-problema o grupo centrou-se na elaboração de uma justificação escrita e registou-se o seguinte diálogo:

X: Só vais dar um exemplo…

Y: Sim…

X: Eu acho que primeiro temos que dar as mais óbvias e depois vamos tentar ter outras interpretações… (As coordenadas dos centros) Os centros são sete, zero e seis e meio, zero… e se tu vires está certo.

Nesta altura, a professora pediu às alunas para explicarem o raciocínio e pediu a leitura das respectivas soluções.

X: Na geometria de Poincaré sendo a definição de paralelismo a mesma da geometria Euclidiana, podemos verificar que m e l são paralelas, pois estas linhas nunca se intersectam e l e n são não paralelas pois intersectam-se num ponto.

Y: Duas linhas dizem-se paralelas em qualquer geometria quando a sua intersecção é o conjunto vazio. Então m é paralela a l e l não é paralela a n.

Professora: Parece que consideram que m e l são paralelas e que m, n e l, k e l, n não são paralelas. Porquê?

X: Por a imagem…

De seguida, as alunas passaram a adoptar uma abordagem analítica para justificarem a resposta apresentada. Quando a aluna X determinou o ponto de intersecção das linhas l e k gerou-se o seguinte diálogo.

Y: Essa definição de paralelismo, quando a gente diz por mais que se prolonguem está errada para as circunferências, porque olha estas;

X: Eu estou a perceber o que estás a dizer…;

Y: Não temos que dizer por mais que se prolonguem. […]

X: (As linhas) l e n são as únicas que não se intersectam.

Observe-se que, na conclusão, a aluna X utiliza a definição de paralelismo associada a existência de intersecção e já não associa o paralelismo à expressão inicial "[…] por mais que se prologuem, nunca se encontram […]".

Quanto aos procedimentos adoptados, a opção da aluna X pela via algébrica é notória. Apesar desta aluna visualizar o ponto B, de intersecção das linhas m e n, resolve um sistema e indica as coordenadas, com valores aproximados às centésimas, desse ponto. A algebrização do problema ajudou a clarificar eventuais dúvidas sobre o paralelismo de algumas linhas. Parece-nos que a visualização da figura não induziu raciocínios erróneos.

A justificação apresentada fundamenta-se nos procedimentos anteriores e foi de natureza dedutiva, onde os exemplos específicos foram utilizados para apoiar a organização das justificações — experimentação pensada.

A aluna Y utilizou as linguagens — gráfica e algébrica — como ajuda para identificar linhas paralelas e não paralelas. A figura dada no enunciado constitui uma ajuda para se identificar linhas paralelas e não paralelas.

A situação colocada tinha como objectivo potenciar a visualização e valorizar o papel da definição de semi-plano de Poincaré na justificação da indicação de linhas paralelas e de linhas não paralelas.

A linguagem algébrica ajuda a clarificar eventuais dúvidas sobre o paralelismo de algumas linhas. Por exemplo das linhas l e k.

O problema motivou, ainda, a abordagem de, conceitos/definições, propriedades/proposições (e.g., definição de linhas paralelas numa geometria abstracta, …). A justificação foi do tipo conceptual, fundamentada nas definições de, Semi-Plano de Poincaré e de linhas paralelas.

A visualização, na fase ascendente da resolução do problema, proporcionou a intuição de algumas linhas paralelas (e.g., n e m) que na realidade não o eram. De facto, através da visualização, as relações de paralelismo entre as linhas dadas no enunciado do problema não foi intuitiva, não foi evidente e foram aceites com base na realização de uma verificação mais formal (recurso a resolução de sistemas, recurso à definição de Semi-Plano de Poincaré, …). De seguida, ir-se-á continuar a análise da solução do problema centrando-nos nos argumentos e aplicando os atributos contextuais à sua análise.

Ostensivo – não-ostensivo: Na solução apresentada pela aluna X, observa-se que utilizou os pontos A e B para assinalar, respectivamente, a intersecção das linhas l, n e m, n. No entanto, parece-nos que a aluna sentiu necessidade de determinar as coordenadas dos pontos, mesmo do ponto B, para reconhecer o não-ostensivo (linhas não paralelas e linhas paralelas) representado na situação.

Assim, os objectos ostensivos mobilizados na apresentação da solução do problema foram a representação dos pontos A e B na figura dada no enunciado e os sistemas das respectivas condições que definem as linhas hiperbólicas em causa.

A aluna Y, na argumentação apresentada, utilizou: a notação "//" (ostensivo) para se referir à relação de paralelismo (não-ostensivo) entre linhas; a linguagem algébrica, na resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas e utiliza o símbolo "$\Rightarrow$" (se…então…) a ligar frases, como por exemplo, "*l não é paralela a $n \Rightarrow$ Intersectam-se num ponto*", "*l é paralela a $m \Rightarrow$ não se intersectam*".

Extensivo – intensivo: A aluna X utilizou a condição que define uma circunferência de centro dado, o ponto C de coordenadas (a, b), e raio r para suporte à identificação dos centros das semi-circunferências, ou seja, das linhas hiperbólicas representadas nas figuras. A definição dada no início "Paralelismo — quando duas linhas, por mais que se prolonguem, nunca se intersectam." é adoptada pela aluna para a geometria hiperbólica, que ela designa de geometria de Poincaré. No entanto, na solução do problema, apenas se reporta à existência ou não de intersecção.

Na argumentação apresentada, a aluna Y começou por escrever: Duas linhas dizem-se paralelas (em qualquer geometria) quando a sua intersecção é o conjunto vazio. Ou seja, pensou na definição de linhas paralelas e de seguida é que se focou nos objectos extensivos representados no enunciado do problema.

Unitário – sistémico: Durante o processo de resolução do problema, as alunas seguem uma trajectória que vai desde a análise da situação colocada até a uma síntese da actividade desenvolvida. A análise elaborada pelas duas alunas apresenta aspectos diferentes. A aluna X sente necessidade de decompor o enunciado, registando as coordenadas dos centros das semi-circunferências (linhas hiperbólicas) e os pontos de intersecção das linhas l, n e m, n. A aluna Y, ao decompor o enunciado, regista o valor dos raios das referidas semi-circunferências e foca-se na distância entre elas.

Quanto à síntese apresentada pelas duas alunas, esta é apresentada na conclusão da solução elaborada. No caso da aluna X, ela refere as únicas "rectas" que não são paralelas e de seguida faz a afirmação "*Todas as outras são // entre si pois nunca se intersectam uma vez que* $y = 0$ *não pertence ao semiplano*". No caso da aluna Y, a conclusão inclui a referência à relação de paralelismo entre as linhas duas a duas.

Expressão – conteúdo: A situação-problema serve de motivação (induz), ao nível do conteúdo, a definição de linhas paralelas num contexto de geometria hiperbólica. As alunas revelaram domínio de cálculo algébrico, nomeadamente na resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas. Ao nível do domínio da linguagem, a aluna X referiu a designação "rectas" quando não se tratava de rectas. Parece que ao nível da linguagem, esta aluna ainda não domina algumas questões de linguagem da geometria hiperbólica.

Adoptando a categorização de Balacheff mencionada por Gutiérrez e Marrades (2000), a justificação que elas apresentam é de natureza conceptual — baseada na definição de linhas paralelas na geometria abstracta (exemplo de uma geometria abstracta), formulação de propriedades (propriedades da relação de paralelismo) e no cálculo algébrico (cálculo simbólico). No cálculo simbólico, não existe experimentação e a justificação é baseada na resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas, na utilização de expressões simbólicas formalizadas.

Caso II

O problema apresentado no caso II, recorre à definição de distância entre dois pontos no modelo da geometria do Motorista de Táxi e envolve a representação pictórica da circunferência neste modelo de geometria plana (novidade para as alunas). De seguida, apresentam-se as soluções de duas alunas e a análise dos objectos matemáticos envolvidos.

Problema: Considera uma Geometria, no plano, em que os pontos e as linhas têm as mesmas propriedades da Geometria Euclidiana Plana, mas a definição de distância entre dois pontos $P(x_1, x_2)$ e $Q(x_2, y_2)$ é dada por $dt = |x_1\ x_2| + |y_1\ y_2|$.

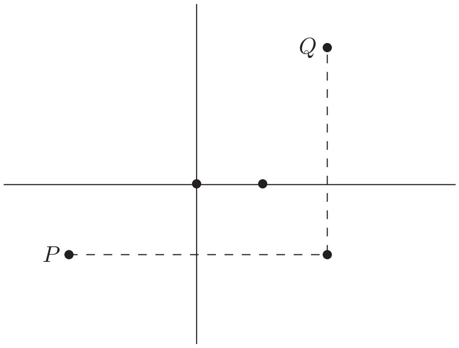

Figura 2 — A distância que o Motorista de Táxi percorre de P para Q

Recorda que a circunferência é o conjunto de pontos, do plano, cuja distância a um ponto fixo é constante.

Investiga a forma da circunferência nesta nova Geometria. A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π.

De seguida apresentam-se as soluções, ao problema, das alunas X e Y.

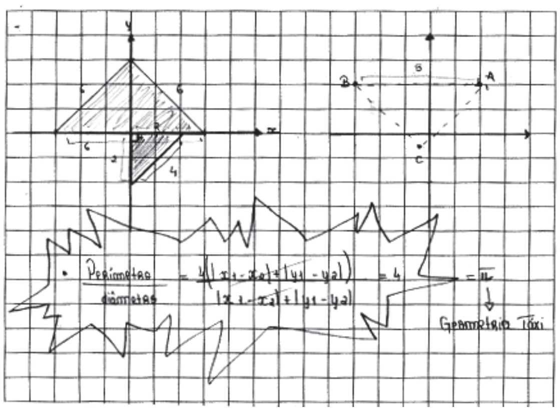

Figura 3 — Solução da aluna X ao problema

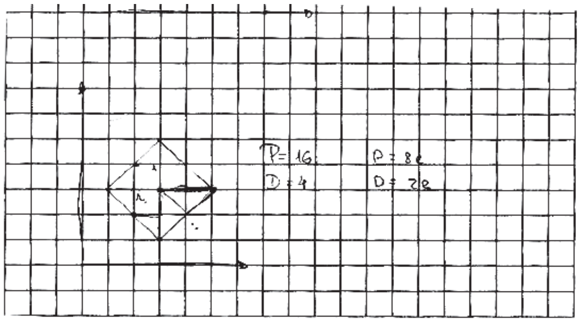

Figura 4 — Solução da aluna Y ao problema

Após o registo anterior a aluna apresentou (na folha do enunciado do problema) a seguinte resposta:

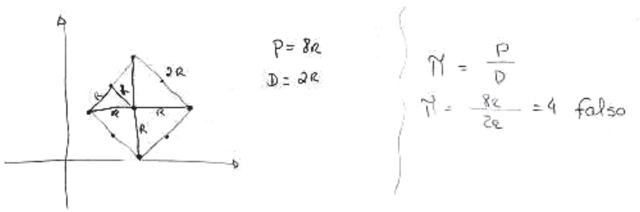

Figura 5 — Solução da aluna Y ao problema

Analisemos os objectos matemáticos e suas relações primárias que intervêm na solução da situação-problema.

A aluna X, na solução apresentada, utilizou a terminologia de distância entre dois pontos, coordenadas de um ponto, losango, triângulo equilátero, perímetro e diâmetro.

O diagrama apresentado no enunciado constituiu uma ajuda para a compreensão e utilização da definição de distância entre dois pontos nesta geometria.

Em relação às definições envolvidas, a aluna dominava a definição de distância entre dois pontos e a definição de perímetro de uma figura. No entanto, considerando a questão colocada durante o episódio 2, *Oh Stora eu no perímetro, não sei se posso dizer isto, mas faço a soma de todos os lados?*, parece indicar que a definição de perímetro suscitou conflitos cognitivos no contexto da geometria do Motorista de Táxi.

A forma da circunferência, neste modelo de geometria, foi induzida a partir de exemplos. Ou seja, as justificações foram de natureza empírica (a justificação envolveu o uso de relações encontradas nos exemplos — tipo indutivo). E na segunda parte da situação foi utilizado um exemplo genérico como ajuda para organizar a justificação segundo uma abordagem analítica, baseada em manipulações algébricas (justificação de natureza dedutiva, experimentação pensada do tipo transformativa).

A aluna Y utilizou a terminologia já mencionada no caso da aluna X. No entanto, revelou mais dificuldades na interpretação da definição de distância na geometria do Motorista de Táxi.

Analisemos os objectos matemáticos e suas relações secundárias que intervêm nas soluções apresentadas pelas alunas X e Y. Isto nos ajudará a compreender as dificuldades da aluna com a resolução da tarefa.

Ostensivo – não-ostensivo: A aluna X associou ao objecto não-ostensivo, circunferência, um ostensivo (que classificou de losango da geometria Euclidiana) na sequência da adopção da definição de distância na geometria do Motorista de Táxi. Note-se que a aluna ainda explorou o ostensivo de triângulo equilátero e que serviu de contexto para abordar a ausência da propriedade — desigualdade triangular (não-ostensivo). Na justificação à segunda parte do problema — A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π? O exemplo genérico foi utilizado como ostensivo de que a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante e essa constante tem como ostensivo o símbolo π que a aluna considerou igual a 4.

A aluna Y sentiu necessidade, na interpretação do enunciado do problema, em considerar o ostensivo da circunferência na geometria Euclidiana. De seguida, apenas se baseou num exemplo para justificar a forma da circunferência nesta nova geometria. Na justificação à segunda parte do problema, um exemplo genérico foi utilizado como base do ostensivo de que a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante e essa constante é 4 que não foi identificada com sendo π.

Extensivo – Intensivo: A representação pictórica da circunferência na geometria do Motorista de Táxi não é a familiar da geometria Euclidiana. Tal facto é justificado, pela aluna X, mostrando a sua veracidade nalguns exemplos específicos. A aluna Y passa de apenas um exemplo concreto para o caso genérico. Ou seja, utiliza um objecto extensivo, um caso particular (exemplo específico de "circunferência" na geometria do Motorista de Táxi), de um caso mais geral (isto é, da expressão geral de uma "circunferência") que é um objecto intensivo. Quanto ao cálculo da razão entre o perímetro e o diâmetro, a aluna X adoptou uma abordagem analítica enquanto a aluna Y uma abordagem sintética.

Pessoal – institucional: A situação-problema motivou argumentos regulados pela definição de métrica na geometria Euclidiana e na geometria do Motorista de Táxi (cognição institucional). Do ponto de vista da cognição pessoal, a actividade desenvolvida promoveu o questionamento por parte destas alunas da definição de perímetro neste caso específico, promovendo o entendimento do papel chave das definições na elaboração de argumentos. Quanto à questão — A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π? — A aluna X não entendeu o π como um número irracional mas sim como uma letra que designa a razão entre um perímetro e um diâmetro, ou seja, entendida como tendo uma natureza funcional. Quanto à aluna Y, esta entendeu o π como número irracional e portanto considerou falsa a afirmação, de que a razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é π.

Unitário – sistémico: Durante o processo de resolução da situação-problema, as alunas seguem um percurso que vai desde a análise da situação até a uma síntese da actividade desenvolvida. O objecto matemático — distância na geometria do Motorista de Táxi — é entendido como um objecto complexo no início da actividade mas essa complexidade vai-se esbatendo ao longo da resolução do problema. No entanto, é notória nas soluções apresentadas o entendimento da situação em causa de forma sistémica.

Expressão – conteúdo: A situação — problema apesar de ser formulada num contexto de geometria do Motorista de Táxi há indicadores claros de que as alunas estabeleceram ligações com a geometria Euclidiana. O problema induziu a abordagem da igualdade $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$, na geometria do Motorista de Táxi.

Em síntese, o recurso a modelos de geometrias planas promoveu interpretações intuitivas que geraram conflitos cognitivos e, a partir destes surgiu o contexto para a abordagem de aspectos relativos ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo, como por exemplo o papel das definições. É de salientar, ainda, que uma abordagem geométrica diversificada, através de várias geometrias planas, promoveu nestas alunas, através da sequência de práticas argumentativas já descritas, um entendimento diferente das seguintes relações:

Ostensivo – não ostensivo, através de um processo de materialização (domínio gráfico, algébrico) e idealização (domínio teórico);

Extensivo – intensivo, através de um processo de particularização e de generalização, do exemplo específico para o exemplo genérico;

Pessoal – institucional, através de um processo de personalização de objectos matemáticos institucionalizados segundo contextos de uso (por exemplo, o valor atribuído pela aluna X a π);

Unitário – sistémico, através de um processo de decomposição e unificação (por exemplo, as várias geometrias abordadas são exemplos de uma geometria incidente);

Expressão – conteúdo, através de um processo de representação e significação, novos significados são atribuídos a entes da geometria Euclidiana (por exemplo, a noção de linha recta, a linha recta nas várias geometrias planas tem diferentes representações).

Podemos afirmar que estas alunas revelaram indícios claros de evolução de justificações de natureza empírica (raciocínio mais espontâneo) para justificações de natureza dedutiva (raciocínio mais estruturado). Há indicadores claros de que foram percebendo as diferenças das definições (e.g., a definição de distância na geometria Euclidiana e a definição de distância na geometria do Motorista de Táxi), assim como o papel das definições na estrutura de uma justificação segundo um esquema dedutivo.

Reflexões finais

Os estudos de caso apresentados constituem parte da investigação desenvolvida no âmbito do trabalho de doutoramento. Este estudo poderá ter contribuído para tornar proeminente a importância da abordagem de outros modelos de geometrias planas, distintos da Euclidiana, no desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Os resultados do estudo ilustram a complexidade da análise e avaliação da argumentação matemática. A argumentação matemática poderá ser melhor compreendida e avaliada se tivermos a consciência de que os argumentos estão interligados com os objectos primários e secundários definidos no Enfoque Ontosemiótico (EOS). É a identificação das ligações entre esses vários objectos que caracterizam os processos de argumentação.

O conceito de linhas paralelas, apesar de não ser em si uma novidade, constitui-se uma novidade na sua abordagem num contexto de modelos de geometrias planas, diferente da geometria Euclidiana. No sentido de Hanna e Bardieu (2008) este tipo de situações poderá potenciar outras componentes importantes de conhecimento matemático e contribuir para a formação, nestes alunos, de uma imagem mais ampla da natureza da matemática.

O estudo aponta para que uma abordagem geométrica diversificada, através de vários modelos de geometria plana, promoveu nas alunas — caso, um entendimento diferente dos processos de, *materialização/idealização*, *particularização/generalização*, *personalização/institucionalização*, *análise/síntese* e *representação/ significação*. Seria interessante investigar a forma como o percurso escolar de um aluno, desde a escolaridade básica, influencia este tipo de entendimento e avaliar o seu grau de centralidade na preparação didáctica das situações — problema e na actividade matemática.

Uma das implicações desse resultado é o facto das situações didácticas a propor no estudo da geometria, ao nível do Ensino Secundário, deverem atender a problemas de prova em vários modelos de geometrias planas a propor aos alunos, no sentido do desenvolvimento do raciocínio dedutivo.

Referências bibliográficas

Balacheff, N. (2002/2004) The researcher epistemology: a deadlock from educational research on proof. Fou Lai Lin (ed.) 2002 International Conference on Mathematics — “Understanding proving and proving to understand”. Taipei: NSC and NTNU (pp. 23–44). Reprinted in Les cahiers du laboratoire Leibniz, no 109, August 2004, http://www-leibniz.imag.fr/NEWLEIBNIZ/LesCahiers/Cahier109/ResumCahier109.html.

deVilliers, M. (1998). An Alternative Approach to Proof in Dynamic Geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369–393). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view, in C. Mammana and V.Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer, Dordrecht.

Godino, J. D., Batanero, C. e Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1–2):127–135.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, Special issue on “Proof in Dynamic Geometry Environments”, *44*(1–2), 5–23.

Hanna, G. e Barbeau, E. (2008). Proofs as bears of mathematics knowledge. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 40, 345–353.

Harel, G. e Sowder, L. (2007). Towards comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof, en F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805–842). Charlotte, NC: NCTM and IAP.

Marrades, R. e Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87–125.

Recio, A. M. e Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematics proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83–99.

Reid, D. (2005). The meaning of proof in mathematics education Paper presented to Working Group 4: Argumentation and Proof, at the Fourth annual conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Spain. 17–21 February 2005, http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/4/Reid.pdf

Schalkwijk, L.V., Bergen, T. e Van Rooij, A (2000). Learning to prove by investigations: a promising approach in dutch secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 293–311.

Resumo. As actuais orientações curriculares do estudo da Geometria, ao nível do ensino secundário, vão no sentido de uma abordagem diversificada que contribua para a compreensão da Geometria como sistema axiomático. O que é actualmente preconizado talvez não seja suficientemente rico para abranger aspectos importantes da compreensão do que é um sistema axiomático, bem como aspectos relativos ao desenvolvimento do raciocínio matemático (e.g., o sentido dado a situações familiares em modelos de geometrias planas diversos).

Este texto apresenta parte de resultados de uma investigação, no âmbito da Didáctica da Matemática, focada no estudo de abordagens alternativas de ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana, no Ensino Secundário, no sentido de promover níveis estruturados do pensamento matemático. Em particular, as potencialidades do recurso a outros modelos de Geometrias Planas (e.g. Geometria Hiperbólica, Geometria do Motorista de Táxi) em relação a este problema foram investigadas.

A investigação realizada consistiu na implementação, em sala de aula, de uma pasta de tarefas de geometria com o objectivo de gerar algum entendimento sobre a seguinte questão: *De que forma é que outros modelos de geometrias Planas, distintos da geometria Euclidiana, pode ajudar alunos do ensino secundário a desenvolver o raciocínio dedutivo?*

Palavras-chave: Definições formais, Prova matemática, Geometria.

Abstract. The present curricular guidelines of the secondary school level goes towards a diversified approach promoting the understanding of Geometry as an axiomatic system . What is currently documented may not be sufficiently rich to cover important aspects in the understanding of what is an axiomatic system, as well as aspects related to the development of mathematical reasoning (e.g., the meaning given in known situations working on distinct models of plane geometries).

This text presents the results of a research carried out in the context of alternated approaches in the processes of teaching and learning Euclidean geometry, at a secondary education level, in order to promote structured levels of mathematical thinking. In particular, the potential of other models of Plane Geometries (e.g. hyperbolic geometry, geometry of taxi driver) in relation to this problem were considered.

The research consisted in the classroom implementation of a geometry task folder to generate some understanding on the following question: *How can other models of Plane Geometries, other than the Euclidean one, help Secondary School students to develop deductive reasoning?*

Keywords: Formal definitions, Mathematical proof, Geometry

■■■

TERESA B. NETO
Departamento de Educação, Universidade de Aveiro
teresaneto@ua.pt

ANA BREDA
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
ambreda@ua.pt

JUAN D. GODINO
Faculdade de Educação, Universidade de Granada
jgodino@ugr.es