O significado das representações da função afim para alunos do 8.º ano de escolaridade

Sónia Marisa Pais
Agrupamento de Escolas "A Lã e a Neve", Covilhã

Manuel Joaquim Saraiva
Universidade da Beira Interior e UIDEF, Covilhã

Introdução

O objetivo do estudo que serviu de base a este artigo foi investigar a aprendizagem que alunos do 8.º ano (13–15 anos de idade) realizaram na unidade didática "Funções", com recurso a tarefas de exploração, de resolução de problemas e às TIC. Neste artigo discute-se a forma como os alunos procedem e dão significado na passagem entre representações de funções do tipo $y = ax + b$, e quais as dificuldades que eles experimentam.

Os objetos matemáticos são abstratos, não sendo diretamente acessíveis à perceção de cada pessoa. Neste sentido, para a sua apreensão, é necessário recorrer a representações percetuais concretas constituídas, em geral, por signos, tabelas, gráficos ou desenhos, cuja diversidade é significativa.

A forma como é feita a conexão entre as várias representações de uma função, bem como os significados que os alunos lhes atribuem, é de grande importância para quem se preocupa com o ensino e aprendizagem das funções e assume um papel fundamental para a compreensão das dificuldades que os alunos têm no estudo daquele tema matemático.

Na primeira secção do artigo apresenta-se o enquadramento teórico quanto às dificuldades dos alunos na aprendizagem das funções, referindo-se, ainda, o papel que as TIC desempenham no ensino e na aprendizagem da Matemática. Seguidamente apresenta-se a proposta pedagógica que foi implementada no estudo e a metodologia de investigação utilizada, de natureza qualitativa e interpretativa. A terceira secção regista os resultados, primeiro quanto à passagem da representação algébrica para a gráfica, em seguida quanto à passagem da representação gráfica para a algébrica, depois quanto à passagem da representação tabelar para a gráfica e para a algébrica, fazendo referência às conexões entre representações. O artigo termina apresentando diversas conclusões.

Funções: dificuldades dos alunos

Relativamente ao ensino do conceito de função na Matemática escolar, Kieran (1992) afirma que o conceito de função como *uma dependência entre duas variáveis deu lugar ao de uma relação entre os elementos de dois conjuntos ou de elementos do mesmo conjunto, em que qualquer elemento do domínio tem uma única imagem*. Todavia, e para aquela autora, em situações da vida corrente ou de outras ciências, quando se refere que uma determinada coisa é função de outra evidencia-se *uma relação de dependência*, o que pode criar aos alunos confusões e dificuldades na sua aprendizagem. Estas, e para Sajka (2003), estão relacionadas com a notação das funções — que é ambígua e exige alguma flexibilidade para compreendê-la. Por exemplo, $f(x) = 2x + 3$ significa duas coisas ao mesmo tempo: i) como calcular o valor da função para um determinado argumento (evocando o processo) e ii) o conceito de função como um todo para qualquer argumento (representando o objeto). Ou seja, $f(x)$ tanto representa o valor da função f como o nome da própria função, dependendo do contexto, o que pode confundir os alunos. Este tipo de dificuldade também é referido por Kieran (1992). Para esta autora, quando é pedido aos alunos, por exemplo, para determinarem o valor de $f(5)$, para $f(x) = x + 7$, muitos deles ficam "paralisados" sem saber o que fazer. Aquela autora destaca também que para qualquer natureza particular da questão, (i) a função constante e a função representada por um conjunto de pontos discretos causam dificuldades; (ii) tanto na forma algébrica como na gráfica, o conceito e a representação de objetos e imagens é parcialmente entendido; (iii) a variedade de exemplos de funções conhecidas pelos alunos é limitada, tanto na forma algébrica como na gráfica, especialmente nesta última; e (iv) a passagem da representação gráfica para a algébrica é mais difícil do que desta para aquela. Kieran afirma, ainda, que a aprendizagem da representação gráfica apresenta muitas dificuldades para os alunos. As causas resultam do facto de lhes ser pedido, rotineiramente, i) a construção de tabelas de valores que satisfaçam equações algébricas de duas variáveis, ii) a marcação de pontos num gráfico cartesiano com uma escala conveniente e iii) a leitura das coordenadas de pontos de um gráfico, por vezes, apenas, com o objetivo de resolver uma equação ou um sistema de equações.

Relativamente à identificação de uma função com uma das suas representações, Saraiva & Teixeira (2009) referem que, frequentemente, os alunos associam o conceito de função a uma expressão algébrica e, por vezes, ligam o processo de representação gráfica ao conceito de função onde a expressão é necessária para a efetivar. Segundo aqueles autores, a capacidade que os alunos têm em manipular símbolos, assim como em operar entre eles, é insuficiente para desenvolver uma compreensão estrutural do conceito de função. Ainda relativamente à aprendizagem do conceito de função, Kieran (1992) refere um estudo levado a cabo por Dreyfus e Eisenberg, em 1981 e 1982, em que os autores investigaram as bases intuitivas do conceito de função de alunos do 9.º ano através de questões concretas, e também abstratas, sobre imagem, domínio, crescimento, extremos e declive em três representações: gráfica, diagramática e tabelar. Concluíram que os alunos que preferiam a representação gráfica possuíam um melhor conhecimento do conceito de função e os que preferiam a representação tabelar apresentavam mais dificuldades neste conceito. Observaram também que os alunos revelavam dificuldades na construção e na interpretação de gráficos.

As dificuldades dos alunos com a representação algébrica de uma função constante é estudada por Tall & Bakar (1992), para quem um número significativo de alunos evidencia conflito relativamente à expressão algébrica de uma função constante por esta não envolver o x. Contudo, a sua representação gráfica já não gera tanta dúvida nos alunos — que a consideram como representando uma função.

Relativamente às funções da forma $y = ax + b$ (a, $b \in \mathbb{R}$), Kieran (2007) faz referência a um estudo desenvolvido por Moschkovich (1988), com alunos do 9.º ano, que quando eles aprendem as funções revelam tendência em atribuir um papel especial à interseção da representação gráfica da função com o eixo dos xx. Treze dos dezoito alunos do estudo, onde foi usado um programa gráfico de computadores, usaram a interseção com o eixo dos xx pelo menos uma vez, tanto para estudarem o parâmetro a, como para estudarem o parâmetro b na equação, bem como para descrever retas movendo-se ao longo do eixo dos xx como o resultado da mudança do b na equação. Moschkovich descreveu os processos usados pelos alunos como sendo um refinar das suas conceções relativas ao presumível papel da interseção com o eixo dos xx, fazendo conexões entre conceções. Por exemplo, nas representações gráficas das funções de expressões $y = -x$, $y = -x + 2$ e $y = -x - 2$ os alunos podem associar a interseção do eixo dos xx como resultado da mudança do parâmetro b na expressão $y = -x + b$ (ver figura 1) — por exemplo, o valor de b ao passar a ser 2 significa que a representação gráfica da função interseta o eixo dos xx no ponto de coordenadas (2, 0). Verifica-se, assim, que os alunos, relativamente às funções do tipo $y = ax + b$ (a, $b \in \mathbb{R}$), revelam bastantes dificuldades e confusões na interpretação do declive e da ordenada na origem da sua representação gráfica:

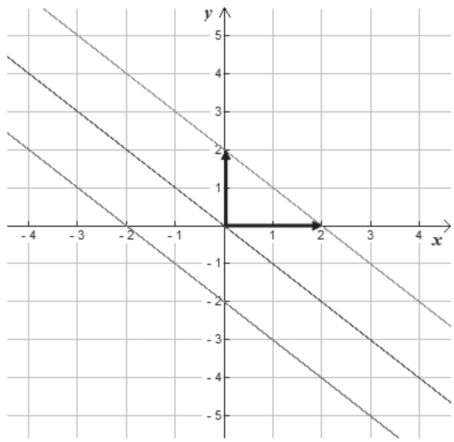


Figura 1 — Representações gráficas que podem conduzir a concepções erróneas do papel do parâmetro b

São várias as investigações relativas à aprendizagem que os alunos fazem das funções que ressaltam a importância do uso das suas múltiplas representações para a construção do significado dos conceitos (Mesa, 2004). A aquisição de um conhecimento matemático, para Duval (2006), e uma vez que se trata de um objeto abstrato, só é possível através de uma sua representação. Para este autor, a coordenação entre o maior número possível de representações de um mesmo objeto aumenta a possibilidade da sua apreensão. Esta coordenação deverá ocorrer de forma interativa, de modo a conduzir os alunos ao reconhecimento do mesmo objeto através de diferentes representações. Quando o aluno conseguir, naturalmente, fazer a ligação entre as várias representações terá apreendido o conceito. Porém, e para Duval, tal ligação não é simples de fazer, e, para o caso das funções, a apreensão do conceito de função deverá visar a coordenação entre as suas diversas formas de representação, ou seja, a gráfica, a tabelar, a algébrica e a verbal. Segundo aquele autor, as representações só são mobilizadas e desenvolvidas se puderem ser transformadas noutras, realçando, assim, a importância da conexão entre representações para a aquisição dos conceitos matemáticos.

Para que a passagem entre as várias representações seja um processo de aprendizagem significativa na Álgebra, é necessário ter em conta como ele deverá ser realizado na prática, conhecendo as vantagens e as limitações de cada uma das representações (Friedlander & Tabach, 2001). Estes autores referem que é importante trabalhar as múltiplas representações com os alunos, tendo presente que as suas utilizações apresentam vantagens e desvantagens e que a combinação do seu uso pode anular as limitações e tornar-se uma ferramenta eficaz na aprendizagem dos conceitos matemáticos, em particular das funções.

Concordante com estas perspetivas, Chazan e Yerushalmy (2003) afirmam que as funções são conceptualizadas pelos alunos como um tipo especial de relação. Na verdade, uma equação com duas variáveis pode ser representada por uma equação equivalente que também representa uma função afim (por exemplo, $6x + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + (1/3)$). Assim sendo, e segundo aqueles autores, o dar ênfase às conexões entre gráficos e expressões poderá beneficiar a compreensão da existência de equivalências ou de diferenças. No entanto, conforme referem Zachariades, Chistou & Papageorgiou (2001), é necessário ter também em conta as passagens entre outras representações e não limitar o ensino das representações de funções apenas à passagem da representação algébrica para a representação gráfica, podendo levar os alunos a interpretar uma função como sendo uma fórmula.

Porém, a capacidade dos alunos em trabalhar habilmente com as várias representações não surge de uma forma espontânea, sendo necessário desenvolver um trabalho ativo e sistemático (Friedlander & Tabach, 2001), o que dá ao professor um papel muito importante na promoção de tal atividade, nomeadamente através das tarefas selecionadas e propostas aos alunos.

Funções: o papel das TIC

Diversos autores concordam que o recurso a tecnologias com software educativo de múltiplas representações é uma poderosa ferramenta para trabalhar as várias representações de funções com os alunos, bem como para realizar a transferência entre os seus registos, contribuindo significativamente para a construção do conceito de função (Abalos & Ordóñez, 2009; Andrade, 2009; Castillo, 2008; Kieran, 1992 e 2007; Pais, 2009; Slavit, 1997). Também Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999) afirmam a importância dos alunos do ensino básico terem experiências de aprendizagem com recurso às tecnologias e, em particular, nos casos de exploração de situações que envolvam funções e gráficos. Por sua vez, Ponte (1992) refere que a tecnologia pode ser usada para obter soluções dentro de modelos matemáticos, simplificando aspetos rotineiros do trabalho e permitindo uma maior concentração nos aspetos que são verdadeiramente importantes no fazer e aprender Matemática: a compreensão do significado dos conceitos, a formulação de problemas, a compreensão da sua natureza, a elaboração de estratégias adequadas e a análise completa, discussão e crítica. Defende-se, assim, que a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática, uma vez que influencia o que é ensinado, melhorando a aprendizagem dos alunos — através do uso de computadores, os alunos poderão analisar mais exemplos ou formas de representação, de modo a formular e explorar conjeturas de uma maneira mais fácil do que usando processos manuais. O poder gráfico das ferramentas tecnológicas possibilita o uso e a construção de modelos poderosos com os quais os alunos do terceiro ciclo (alunos com 12–15 anos de idade) poderão i) estudar as relações lineares e as noções de declive e de alteração uniforme; ii) trabalhar com sistemas algébricos informáticos que realizam, de forma eficaz, a maior parte da manipulação simbólica; iii) raciocinar sobre a mudança de parâmetros, modelar e resolver problemas mais complexos — o que lhes seria inacessível sem este recurso; iv) construir gráficos e explorar as características de vários tipos de funções de forma mais facilitada. Os alunos poderão trabalhar em níveis mais elevados de generalização ou abstração (NCTM, 2007).

O ensino deve, assim, articular de uma maneira equilibrada as três formas mais importantes de representação de uma função: a tabelar, a gráfica e a algébrica. Através da discussão, os alunos poderão identificar as potencialidades e as limitações das diferentes formas de representação (Ponte, 1992; NCTM, 2007).

Para proporcionar aos alunos uma aprendizagem das funções é fundamental ter em conta as vantagens de trabalhar as várias representações e procurar adequar o seu uso ao contexto de cada situação. É de toda a conveniência utilizar mais do que uma representação, destacando junto dos alunos a utilidade de cada uma delas e estando atento aos casos em que alguma representação possa ser menos conveniente ou, até mesmo, um obstáculo para a aprendizagem. As tarefas propostas aos alunos deverão visar a manipulação das propriedades específicas de cada uma das representações e proporcionar a transferência entre elas para que os alunos alcancem a compreensão do conceito de função. O software de múltiplas representações de funções é uma ferramenta poderosa para usar em sala de aula, pois facilita a compreensão e a aprendizagem das mesmas e, consequentemente, a aprendizagem do conceito de função. Contudo, as conexões entre as várias representações, usando os processos manuais, não são menos importantes, pois agilizam os alunos nas várias passagens, pelo que o professor deverá contemplar este tipo de tarefa na preparação das atividades a desenvolver com os alunos.

Proposta pedagógica

O presente estudo foi desenvolvido na unidade didática "Funções", 8.º ano de escolaridade (13–15 anos de idade), no ano letivo de 2008/2009. Elaborou-se uma proposta pedagógica contendo um conjunto de tarefas, procurando abordar os conteúdos da unidade didática através da ligação com outras ciências, ou com situações do dia-a-dia dos alunos, desejando motivá-los e mostrar-lhes uma variada aplicação destas novas entidades no mundo que os rodeia. O aproveitamento dos alunos também foi um elemento de grande preocupação aquando da elaboração da proposta pedagógica, pois embora a turma não apresentasse um nível de insucesso preocupante, muitos dos alunos revelavam dificuldades e eram pouco empenhados.

A proposta pedagógica é constituída por um questionário (ficha diagnóstica), por um conjunto de oito tarefas de natureza diversificada, que foram pensadas e elaboradas visando a lecionação dos conteúdos da unidade didática "Funções" do 8.º ano, e finaliza com uma ficha de avaliação de conhecimentos.

Antes de iniciar a lecionação da unidade didática, a professora (a primeira autora deste artigo) aplicou na turma a ficha diagnóstica, que teve por principais objetivos identificar a existência de pré-requisitos nos alunos relativamente a noções essenciais à compreensão e aprendizagem da nova unidade; identificar dificuldades ou confusões existentes nessas mesmas noções e ajustar a proposta pedagógica às necessidades dos alunos, dependendo dos resultados da análise efetuada às suas respostas.

As tarefas têm um papel fundamental na proposta pedagógica, uma vez que objetivam a aprendizagem da unidade por parte dos alunos. Na preparação das tarefas houve o cuidado de ir ao encontro dos objetivos e competências definidos pelos documentos oficiais portugueses em vigor, como sejam, o Programa de Matemática do 3.º ciclo (ME-DGEBS, 1991) e Currículo Nacional do ensino básico (ME-DEB, 2001), e procurou também ter em conta as orientações definidas no novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME- DGIDC, 2007), assim como as recomendações constantes nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2007).

As tarefas preveem a realização de diversas experiências de aprendizagem, tais como resolução de problemas, resolução de atividades de natureza exploratória e resolução de exercícios, de forma a conduzir os alunos a uma melhor compreensão e interpretação dos conceitos, bem como desenvolver uma maior competência na passagem entre representações das funções afins. Quatro das tarefas exigiam a utilização de computadores, procurando retirar o melhor partido das TIC, tanto a nível de enriquecimento e motivacional, como facilitador da aprendizagem.

No final da lecionação da unidade didática, os alunos resolveram uma ficha de avaliação que, para além de permitir avaliar os conhecimentos, possibilitou também a recolha de dados relevantes na procura de respostas ao problema em estudo.

A escolha dos exemplos para a elaboração das tarefas baseou-se em manuais do 8º ano, em materiais produzidos no âmbito da experimentação dos novos programas e no projeto "1001 itens" do sítio do GAVE, www.gave.pt, tendo-se feito as adaptações necessárias e criado alguns enunciados.

O Quadro 1 apresenta as oito tarefas elaboradas para a lecionação da unidade didática, os respetivos assuntos que abordam e seus propósitos. Todas as tarefas têm em comum os seguintes objetivos:

- analisar uma função a partir das suas representações;
- representar e interpretar informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas, nomeadamente, por uma tabela, expressão algébrica ou gráfico;
- exprimir resultados, ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Quadro 1 — Tarefas e assuntos abordados

Tarefas		Assunto	Objectivos
1	Máquina das perguntas	Conceito de função como correspondência unívoca entre dois conjuntos; Noção de domínio, contradomínio, objeto e imagem; Representação de uma correspondência por um diagrama sagital, tabela ou gráfico.	• compreender o conceito de função como correspondência unívoca entre dois conjuntos; • identificar o domínio e o contradomínio de uma função a partir das suas representações; • representar informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas, nomeadamente, por um diagrama sagital, tabela, palavras, expressão algébrica ou gráfico.
2	Festa de Final de Ano	Exemplos de correspondências e funções em situações do mundo real. Conceito de função como relação entre variáveis; Noção de variável independente e de variável dependente; Notações simbólicas das funções; Representação de funções por uma tabela, expressão algébrica ou gráfico.	• compreender o conceito de função como relação entre variáveis e utilizar as suas várias notações; • exemplificar correspondências em situações do mundo real, identificando as que são funções.

Quadro 1 (cont.) — Tarefas e assuntos abordados

<table>
<tr><th colspan="2">Tarefas</th><th>Assunto</th><th colspan="2">Objectivos</th></tr>
<tr><td>3</td><td>Distância de Reacção e Distância de Travagem (com recurso ao programa Excel)</td><td>Variação de uma função entre dois valores do seu domínio representada por um gráfico ou por uma tabela;
Noção de taxa média de variação de uma função;
Representação de funções por uma tabela, palavras, expressão algébrica ou gráfico.</td><td colspan="2">• Interpretar a variação de uma função entre dois valores do seu domínio representada por um gráfico ou por uma tabela;
• Reconhecer que a taxa média de variação de uma função linear é constante.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Interpretação de gráficos</td><td>Analise e interpretação de uma função a partir das suas representações, nomeadamente, tabelar e gráfica.
Aplicação dos conceitos introduzidos nas tarefas anteriores.</td><td colspan="2">• interpretar a variação de uma função entre dois valores do seu domínio representada por um gráfico ou por uma tabela;
• interpretar informação representada graficamente.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Perímetros (com recurso ao programa computacional Geogebra)</td><td>Proporcionalidade directa como função;
Relação da inclinação da recta com a constante de proporcionalidade, numa função do tipo $y = ax$.</td><td>• ler, interpretar e construir tabelas e representações gráficas relativos a funções do tipo $y = ax$.</td><td rowspan="2">• relacionar de forma intuitiva, a proporcionalidade, numa função do tipo $y = ax$.
• representar algebricamente situações de proporcionalidade directa;
• reconhecer a proporcionalidade directa como uma função.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Função constante e função linear (com recurso ao programa computacional Gráficos)</td><td>Função constante e suas representações.
Aplicação dos conteúdos introduzidos pela tarefa 5.</td><td>• reconhecer uma função constante, quando representada de diferentes formas;
• ler, interpretar e construir tabelas e representações gráficas relativos a funções do tipo $y = ax$ ou do tipo $y = b$.</td></tr>
</table>

Quadro 1 (cont.) — Tarefas e assuntos abordados

<table>
<tr><th colspan="2">Tarefas</th><th>Assunto</th><th>Objectivos</th></tr>
<tr><td>7</td><td>Temperatura num poço produtor de petróleo (com recurso ao programa computacional Gráficos)</td><td>Funções do tipo $y = ax + b$;
Influência da mudança dos parâmetros a e b na representação gráfica das funções do tipo $y = ax + b$;
Relação das funções do tipo $y = ax$ com as do tipo $y = ax + b$.</td><td rowspan="2">• ler, interpretar e construir tabelas e representações gráficas relativos a funções do tipo $y = ax$, ou do tipo $y = b$, ou do tipo $y = ax + b$;
• representar algebricamente funções do tipo $y = ax$, ou do tipo $y = b$, ou do tipo $y = ax + b$;
• compreender a influência que a mudança dos parâmetros a e b tem na representação gráfica das funções do tipo $y = ax + b$.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Função afim</td><td>Aplicação dos conteúdos introduzidos pelas tarefas 6 e 7.</td></tr>
</table>

Durante a lecionação da unidade didática, os alunos trabalharam preferencialmente aos pares, possibilitando-lhes a troca de opiniões e o desenvolvimento de capacidades de argumentação e de comunicação.

No início de cada aula a Professora apresentou à turma a tarefa, ou tarefas, a realizar. Todas elas continham as indicações necessárias de modo a possibilitar um trabalho autónomo por parte dos alunos, procurando que realizassem a aprendizagem dos novos conceitos, através das explorações efetuadas e das devidas ilações retiradas. Os alunos, em pares, procederam à resolução das propostas de trabalho que lhes foram apresentadas, tendo havido o cuidado pela professora em acompanhar as respetivas resoluções, procurando discutir as dúvidas surgidas e efetuar os devidos esclarecimentos. No final da resolução de cada tarefa e sempre que se evidenciou necessário, foram fomentados momentos de discussão coletiva para partilha de ideias, de processos de resolução e de validação de resultados, bem como o registo de conclusões.

Relativamente às tarefas que visaram o recurso de programas computacionais, todas elas contemplavam as respetivas instruções de utilização. Nos casos em que surgiram dúvidas na utilização do software, a professora procedeu, de imediato, aos devidos esclarecimentos. Através das explorações propostas pelas atividades que requeriam o uso do computador, pretendeu-se proporcionar aos alunos uma visualização mais dinâmica entre os vários tipos de representações de uma função, de modo a desenvolverem estratégias na passagem entre representações; e, também, da influência dos parâmetros a (declive) e b (ordenada na origem) na reta associada à função do tipo $y = ax + b$, ou do tipo $y = ax$, ou do tipo $y = b$, para que mais facilmente retirassem as respetivas conclusões e efetuassem o seu registo.

Considerando o estudo a desenvolver com os alunos e as dificuldades que alguns apresentaram, a professora/investigadora distribuiu a lecionação da unidade didática "Funções" por onze aulas de 90 minutos, em que oito delas se destinaram à resolução das tarefas do Quadro 1 e três à resolução de exercícios do manual — estas ocorreram nas aulas seguintes às da resolução das tarefas 3, 7 e 8, respetivamente. Antes de iniciar a lecionação da unidade didática também se utilizou uma aula para a realização da ficha diagnóstica e no final foram utilizadas mais duas aulas para atividades de avaliação, perfazendo um total de catorze aulas dedicadas à unidade didática.

Para estar em concordância com as nomenclaturas apresentadas no manual escolar dos alunos e também com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) e, sobretudo, para não fomentar confusões nos alunos, a professora/investigadora, durante a lecionação da unidade didática, procedeu a distinções quanto às situações particulares da função afim. Assim, embora tenha ensinado que toda a função do tipo $y = ax + b$ se designa por função afim, nos casos em que $b = 0$ e $a \neq 0$ a função é do tipo $y = ax$ e designa-se por função linear; e nos casos em que $a = 0$ a função é do tipo $y = b$ e designa-se por função constante.

Metodologia

Tendo em conta as características do problema a investigar e a preocupação em compreender as dificuldades dos alunos relativamente à aprendizagem das funções, optou-se por seguir uma metodologia qualitativa, num paradigma interpretativo, tendo por base dois estudos de caso constituídos por dois pares de alunos com diferentes níveis de aprendizagem.

Uma metodologia qualitativa baseia-se em dados descritivos, sendo o investigador o "principal instrumento" de recolha de dados. O objeto de análise é formulado em termos de ação, preocupando-se em compreender os comportamentos, atitudes ou convicções dos participantes (Lessard-Hébert, Gouyette & Boutin, 2005; Fernandes, 1991). A investigação de tipo interpretativo, preocupa-se essencialmente com os processos e dinâmicas; depende de forma decisiva do investigador ou da equipa de investigação; procede por indução, reformulando os seus objetivos, problemáticas e instrumentos no decurso do seu desenvolvimento e baseia-se numa descrição pormenorizada, apresentando com grande riqueza de pormenor o contexto, as emoções e as interações sociais que ligam os diversos participantes entre si (Ponte, 1994).

Dado que a investigação se debruçou sobre os processos e dinâmicas e não com a confirmação de hipóteses, a realização de estudos de caso foi também uma metodologia seguida, pois, segundo Lessard-Hébert *et al* (2005), é onde o campo é o mais real, o mais aberto e o menos controlado.

O estudo realizou-se numa turma do 8º ano de escolaridade, ano letivo de 2008/2009, em que a professora de Matemática é a primeira autora do presente artigo, constituída por dezasseis alunos, cinco raparigas e onze rapazes, com idades compreendidas entre os treze e os quinze anos. Seis dos alunos da turma já tinham tido retenções em anos anteriores. Os alunos apresentavam um desempenho razoável e não manifestavam comportamentos de indisciplina.

A escolha de pares de alunos para os estudos de caso prendeu-se com o facto da proposta pedagógica visar esta organização dos alunos em sala de aula, sobressaindo-se oportuna a recolha de informação por parte de alunos que trabalhariam em conjunto. A seleção dos pares foi feita segundo o nível de aproveitamento dos alunos na disciplina, ou seja, foi estudado um caso de alunos com fraco desempenho e outro caso de alunos com um bom desempenho, proporcionando várias possibilidades para identificar as suas dificuldades. Neste artigo optou-se por apresentar o trabalho desenvolvido pelo par constituído por Ariana e Hélio, alunos com bom aproveitamento em Matemática.

Ariana, com 13 anos, no seu percurso escolar nunca apresentou retenções. Era uma aluna bastante empenhada e participativa na resolução das tarefas que lhe eram propostas. Embora fosse uma aluna com um bom aproveitamento na disciplina de Matemática, demonstrava pouca confiança em si própria, afirmando sentir dificuldades nesta área e que o resultado do seu trabalho era produto de algum esforço da sua parte.

Hélio, também com 13 anos, nunca teve retenções durante o seu percurso escolar. Como aluno na disciplina de Matemática, era bastante empenhado na realização das tarefas propostas e participativo, mas revelava-se conversador, distraído e, por vezes, brincalhão. Hélio indicava a Matemática como uma das suas disciplinas favoritas.

Na investigação realizada foram utilizados para recolha de dados o registo diário das aulas que a professora/investigadora elaborou (diário de registos), um questionário (ficha diagnóstica) antes da realização da proposta pedagógica, uma entrevista a cada par de alunos após a realização da proposta pedagógica e trabalhos escritos produzidos pelos alunos durante as aulas, designadamente, resoluções de algumas das tarefas propostas que fazem parte da proposta pedagógica e de testes escritos.

Uma vez que no estudo a professora desempenhou simultaneamente o papel de investigadora e de professora, pôde recolher sistematicamente dados relevantes para a investigação, pelo que, o diário de registos se revelou muito importante. Segundo Lessard-Hébert *et al* (2005), no diário de registos registam-se dados fazendo apelo à subjetividade do investigador, anotando-se o percurso quotidiano da investigação e registando-se as suas reflexões pessoais e a sua vivência da situação.

A entrevista tem uma forte ligação com a observação, podendo contribuir para contrariar possíveis enviesamentos próprios da observação participante, tais como, confrontar a perceção dos significados que o investigador atribui pelos sujeitos com aqueles que os próprios sujeitos exprimem (Lessard-Hébert *et al*, 2005). Assim, a entrevista foi usada como um dos instrumentos de recolha de dados, acompanhada de gravação áudio para se conseguir fazer um registo total, garantindo fidelidade nas informações obtidas. Como o trabalho em sala de aula foi, maioritariamente, desenvolvido em grupos de dois alunos, considerou-se pertinente realizar as entrevistas em simultâneo aos dois elementos de um mesmo par.

O guião elaborado para a realização das entrevistas contemplou uma tarefa (tarefa I) contendo questões realizadas durante as aulas aquando da implementação da proposta pedagógica e outras duas tarefas novas (tarefas II e III) que tiveram como recurso o programa de computador de representações gráficas *Graficosporlln* (*Gráficos*).

Para além das tarefas contempladas no guião, a professora considerou pertinente fazer algumas explorações adicionais com os alunos, tendo em conta as dificuldades que diagnosticou ao longo da lecionação da unidade didática, nas suas respostas na ficha diagnóstica, nas tarefas realizadas durante as aulas, no teste de avaliação e também nas situações que registou no seu diário de registos.

A tarefa I é composta por cinco questões resolvidas pelos alunos nas tarefas 6 e 8, aquando da aplicação da proposta pedagógica. A escolha destas questões prendeu-se com o facto de os pares de alunos entrevistados terem evidenciado algumas dificuldades aquando da sua resolução e também por reunirem muitas características relevantes para a procura de respostas às questões do estudo. Para além do referido, com a resolução desta tarefa seria possível efetuar uma comparação com as primeiras resoluções dos alunos, procurando detetar alguma evolução na sua aprendizagem e também alguma dificuldade persistente.

Com esta primeira tarefa pretendeu-se verificar como os alunos procedem, que significados atribuem e que dificuldades sentem ao: (i) representar graficamente uma função do tipo $y = ax$ sendo dado um ponto do seu gráfico ou a sua expressão algébrica; (ii) representar algebricamente uma função do tipo $y = ax$ a partir da sua representação gráfica ou sendo conhecido um dos seus pontos; (iii) representar gráfica e algebricamente uma função do tipo $y = b$, quando conhecido um dos seus pontos; (iv) representar graficamente funções do tipo $y = ax + b$, sendo dados dois dos seus pontos ou a sua expressão algébrica e; (v) representar algebricamente funções do tipo $y = ax + b$ a partir da sua representação gráfica.

A resolução da tarefa II contemplava a resolução de problemas num contexto do dia-a-dia, com recurso ao computador, como já referido anteriormente. Com a resolução desta tarefa pretendeu-se que os alunos (i) analisassem uma função a partir das suas representações tabelar, algébrica, gráfica ou por palavras; (ii) representassem e interpretassem informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas; (iii) exprimissem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios e; (iv) representassem algebricamente funções do tipo $y = ax + b$ a partir da sua representação gráfica ou tabelar.

A tarefa III, com o computador como recurso, teve por principais objetivos verificar que significados os alunos atribuem e que dificuldades sentem ao (i) analisar uma função a partir das suas representações algébrica ou gráfica; (ii) relacionar a inclinação da reta com a constante de proporcionalidade, numa função do tipo $y = ax$; (iii) explicitar a influência que a mudança dos parâmetros a e b tem no gráfico das funções do tipo $y = ax$; (iv) relacionar as funções do tipo $y = ax$ com as do tipo $y = ax + b$ e; (v) representar algebricamente funções do tipo $y = ax$ a partir da sua representação gráfica e explicitar qual o procedimento usado.

A análise dos dados iniciou-se aquando o começo do estudo, de modo a possibilitar o aperfeiçoamento da proposta pedagógica, já delineada, em função das dificuldades e necessidades manifestadas pelos alunos e, também, para orientar a elaboração das questões da entrevista. A análise mais aprofundada dos dados ocorreu após a recolha de todos os dados, para a qual foram consideradas categorias de análise de acordo com o problema do estudo e com os dados recolhidos.

Os dados foram analisados por tarefa e entrevista segundo as categorias de análise estabelecidas (*Da representação algébrica para a gráfica; Da representação gráfica para a algébrica; e Da representação tabelar para a gráfica e a algébrica*). As conclusões do estudo foram elaboradas a partir de uma leitura transversal, categoria por categoria. Neste artigo apresentamos e analisamos uma parcela dos dados recolhidos, obtidos a partir da atividade matemática produzida por Ariana e Hélio ao longo da *entrevista* no final do estudo, fazendo, sempre que possível, referência a dados obtidos das aulas.

Resultados do estudo

Neste ponto apresentam-se e analisam-se alguns dos resultados obtidos no estudo, respeitantes à forma como Ariana e Hélio procedem e dão significado na passagem entre representações de funções do tipo $y = ax + b$, bem como quanto às dificuldades apresentadas.

Da representação algébrica para a gráfica

A *tarefa I* da entrevista continha cinco questões já realizadas pelos alunos nas *tarefas 6* e *8* da proposta pedagógica. Embora nas aulas os alunos tenham manifestado conhecimentos acerca de como proceder para representar graficamente as funções dadas nessas cinco questões, apenas tinham acertado na quinta questão. Nas funções em que os alunos tiveram de escrever a representação algébrica a partir da representação gráfica também revelaram dificuldades.

Na questão 3 da *tarefa I* da entrevista pediu-se aos alunos que representassem graficamente a função h dada pela expressão $h(x) = -\frac{1}{2}x$. O excerto seguinte apresenta parte do diálogo estabelecido entre a professora e os alunos:

Hélio: Podemos substituir o x por um número à nossa escolha?

Professora: Façam como quiserem.

Hélio: $h(1) = -\frac{1}{2}$ vezes, tiro o x e ponho 1, é $-\frac{1}{2}$.

Professora: Como é que estão à espera que seja o gráfico?

Alunos: Então, é linear.

Professora: Como é que vai ser o gráfico?

Alunos: Uma reta que passa pela origem.

Professora: [um conjunto de pontos que estão sobre uma reta] E mais? Tal reta tem alguma coisa de especial?

Ariana: O declive.

Alunos: É negativo.

Professora: Passa por onde?

Ariana: No 2.º e no 4.º quadrantes.

Ariana e Hélio identificaram o tipo de representação gráfica da função linear a partir da sua expressão algébrica, o que já tinha acontecido na aula de 30 de janeiro de 2009, quando resolveram a mesma questão na *tarefa 6*. Para a desenharem atribuíram a x o valor 1 na expressão algébrica da função e determinaram corretamente a respetiva imagem através de cálculos (figura 2). Ambos reconheceram que a reta passa pela origem e atribuíram significado a esse facto, pois só determinaram as coordenadas de um ponto para além da origem:

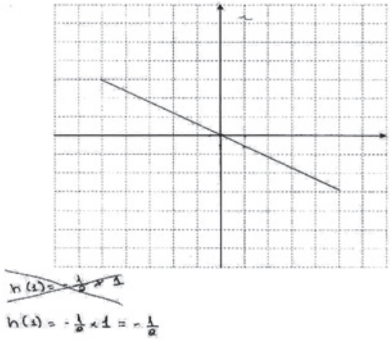


Figura 2 — Entrevista, Tarefa I, 3, Ariana e Hélio (16/3/2009)

Os alunos evidenciam pragmatismo ao concretizarem x para 1, pois ficam simplificados os cálculos, mostrando alguma facilidade na passagem da representação algébrica para a gráfica neste tipo de funções. Aliás, na aula de 30 de janeiro só haviam falhado na resolução ao nível da marcação incorreta do ponto de coordenadas $(1, -\frac{1}{2})$ (ver figura 3):

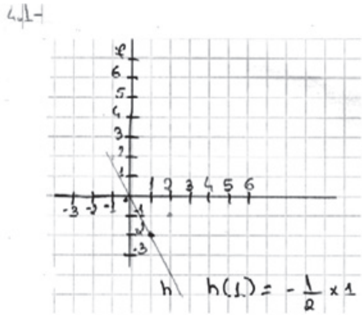


Figura 3 — Tarefa 6, 4.1, Ariana e Hélio (30/01/2009)

Ainda na *tarefa I* os alunos representaram graficamente a função i definida pela expressão algébrica $i(x) = -3x + 1$ (figura 4). Tal como no caso apresentado em cima, começaram por atribuir a x o valor 1 e determinaram a respetiva imagem, conforme se pode observar no excerto do diálogo entre os alunos e a professora apresentado a seguir:

Hélio: Então já temos as coordenadas de um ponto, (1, –2).

Professora: (1, –2). Como é o declive da reta que os contém?

Hélio: É negativo. E temos aqui o b!

Professora: Quanto é o b?

Hélio: É $+1$, o b é 1.

Ariana: Então fica assim?!

Hélio: Sim, marca lá o b.

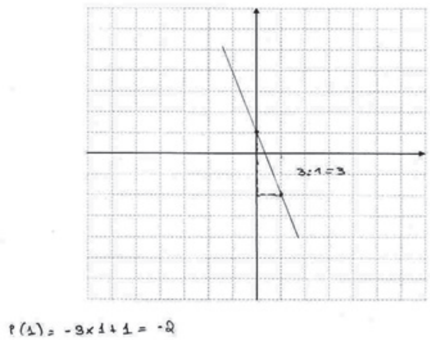


Figura 4 — Entrevista, Tarefa I, 4, Ariana e Hélio (16/03/2009)

Há o reconhecimento que a expressão $i(x) = -3x + 1$ representa uma função afim, cuja representação gráfica é um conjunto de pontos que estão sobre uma reta com declive negativo, que não passa pela origem. Os alunos determinaram as coordenadas de um ponto dessa reta usando a expressão da função (concretizando, novamente, o x para 1, facilitando-lhes os cálculos), marcaram esse mesmo ponto no referencial cartesiano e, também, o ponto (0, 1), evidenciando o significado geométrico que davam à ordenada na origem. De seguida traçaram a reta a passar por esses dois pontos.

Ariana e Hélio não paralisaram perante o desafio que lhes fora colocado e souberam o que fazer para responder à questão apresentada. A expressão algébrica não lhes meteu confusão e souberam usá-la para construírem a representação gráfica da função. Fica a dúvida sobre se os alunos ligam o processo de representação gráfica ao conceito de função onde a expressão algébrica é necessária para a efetivar.

Da representação gráfica para a algébrica

Na primeira questão da *tarefa I* da entrevista, começava por pedir-se aos alunos que representassem graficamente a função f de proporcionalidade direta que passava pelo ponto A de coordenadas (4,6). Agora a função era apresentada por palavras, pelo tipo e pelas coordenadas de um dos pontos da sua representação gráfica e não por uma expressão algébrica, como no caso referido em cima. Os alunos fizeram corretamente a representação gráfica da função f de proporcionalidade direta, não tendo necessitado, para tal, da sua expressão algébrica (figura 5), como é evidenciado no seguinte extrato da entrevista:

Professora: É uma função de proporcionalidade direta, como é o seu gráfico?

Hélio: Linear.

Professora: E como vai ficar?

Alunos: É uma reta que passa pela origem.

Professora: É um conjunto de pontos pertencentes a uma reta que passa pela origem.

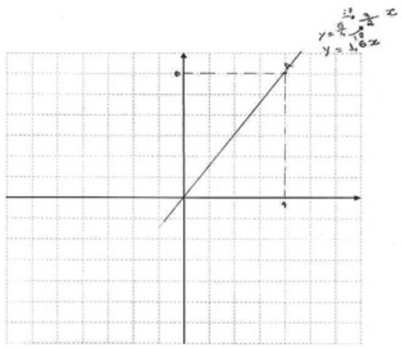


Figura 5 — Entrevista, Tarefa I, 1, Ariana e Hélio (16/03/2009)

Ariana e Hélio evidenciam, deste modo, que concebem a representação gráfica de uma função de proporcionalidade direta sem terem a necessidade de partir da sua representação algébrica. Para eles bastou-lhes saber que se tratava de uma função de proporcionalidade direta e as coordenadas de um dos pontos da sua representação gráfica.

Na segunda parte da pergunta pedia-se aos alunos para escreverem a representação algébrica da função dada. Assistiu-se ao seguinte diálogo:

Professora: Agora falta a expressão, não é?

Alunos: $y = ax$.

Professora: Têm de arranjar a expressão que vos permita determinar todos os pontos que pertencem à reta. Como fazem nestes casos?

Hélio: Sabemos que, que o a é o declive, então fica 6 a dividir por 4.

Professora: Podemos representar sob a forma de quê?

Hélio: Fração.

Professora: Por exemplo, não é?

Hélio: Então $y = \frac{6}{4}$

Professora: $\frac{6}{4}$? Não dá para simplificar?

Hélio: Fica 3 por 2, se ainda dividirmos fica um e meio e 1.

Professora: Mas assim já punhas números na forma decimal numa fração!

Hélio: Então deixamos $\frac{3}{2}$.

Professora: E fica só assim?

Hélio: $\frac{3}{2}x$.

Professora: Na forma decimal é o mesmo que

Hélio: $y = \frac{1{,}5}{1}x$.

Professora: Precisamos lá ter sobre 1?

Hélio: Não, basta $1{,}5x$.

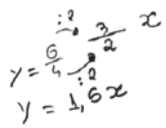


Figura 6 — Entrevista, Tarefa I, 1, Ariana e Hélio (16/03/2009)

Há um reconhecimento de que a função que representaram graficamente seria representada por uma expressão algébrica do tipo $y = ax$. Hélio indica como determinar o valor de a. Para ele, e corretamente, este parâmetro numa função do tipo $y = ax$ representa a razão entre a ordenada e a abcissa de um ponto do gráfico. Esta pergunta correspondia à questão 4.1 da tarefa 6, realizada cerca de dois meses antes, em 30 de janeiro, onde os alunos também determinaram corretamente o valor de a, estando as suas dificuldades relacionadas com a representação algébrica da função, as quais já não se evidenciaram na entrevista. Na aula, os alunos não atribuíram o significado correto à representação algébrica desta mesma função, tendo escrito a expressão $y = (1,5 \times 4)$, concretizando a variável x para 4, que era a abcissa do ponto A dado (ver figura 7).

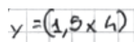


Figura 7 — Tarefa 6, 4.1, Ariana e Hélio, aula do dia 30/01/2009

À data, os alunos tinham dificuldade em lidar com a ambiguidade da notação de uma função, pois, para eles, o y, de $y = ax$, apenas representava o valor da função para um determinado argumento, no caso o 4, e não o conceito de função como um todo para qualquer argumento x. Há, para estes alunos, uma dificuldade na generalização, mas que foi ultrapassada com a aprendizagem efetuada ao longo da unidade didática Funções.

Na questão 2 da *tarefa I* da entrevista começava-se por pedir aos alunos que representassem graficamente a função constante g, em que $g(2) = -1$. Os alunos representaram-na graficamente, de modo correto. O extrato seguinte do diálogo estabelecido na entrevista mostra-nos o raciocínio seguido pelos alunos, tendo a professora um papel de mediadora:

Professora: Como é que fica o gráfico desta função?

Ariana: Uma reta paralela ao eixo dos xx.

Professora: [um conjunto de pontos que estão sobre uma reta horizontal] Qual é o declive dessa reta?

$Alunos$. É nulo.

[Os alunos foram representando o gráfico]

Hélio: Eu digo que é aqui.

Ariana: Porquê?

Hélio: Porque é constante.

Ariana: E é negativo. [A aluna estava a referir-se ao -1]

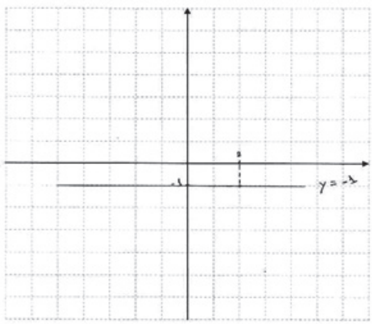


Figura 8 — Entrevista, Tarefa I, 2, Ariana e Hélio (16/03/2009)

Ariana e Hélio não apresentaram dúvidas quanto à representação gráfica desta função constante.

A segunda parte da pergunta pede a expressão algébrica da função constante g. Os alunos escrevem-na corretamente, como pode observar-se pelo excerto do diálogo então havido na entrevista:

Professora: Porque é $y = -1$?

Hélio: Porque é constante.

Professora: Como assim, explica, por favor.

Ariana: Logo, se a reta

Hélio: Porque para todos os pontos que estão sobre o eixo do x, o y é sempre o mesmo, -1. [O aluno, incorretamente, referiu-se às abcissas como pontos]

Os alunos na entrevista não evidenciaram conflito em relação à expressão algébrica da função constante g, por esta não envolver o x. Aliás, o mesmo já acontecera aquando da resolução da questão 4.2 da *tarefa 6* da proposta pedagógica (que coincidia com esta pergunta). Na realidade, na aula os alunos só erraram a resposta pois marcaram incorretamente o ponto de coordenadas (2, –1) — trocaram a ordem das coordenadas —, o que os levou a traçar a reta horizontal $y = 2$ e não a reta pedida.

Na questão 5 da *tarefa I* da entrevista, começava-se por pedir aos alunos para representaram graficamente a função afim j cuja representação gráfica passava pelos pontos de coordenadas (2, 5) e (4, 9). A função era apresentada por palavras — pelo tipo e pelas coordenadas de dois dos pontos da sua representação gráfica — e não por uma expressão algébrica.

Os alunos representaram-na corretamente, a partir da representação correta dos dois pontos dados, evidenciando a não necessidade da expressão algébrica para efetuarem tal representação gráfica. Bastou-lhes saber que se tratava de uma função afim, logo, a sua representação gráfica seria um conjunto de pontos sobre uma reta que não passaria pela origem, e recordarem que dois pontos definem uma reta. O extrato do diálogo então estabelecido evidencia-nos isso:

Hélio: É afim, $y = ax + b$.

Professora: Que passa por esses dois pontos, representem-na graficamente.

Hélio: Então vamos marcar os pontos (2, 5) e

Ariana: (4, 9).

Professora: Sejam rigorosos a representar.

Hélio: Eu desenho.

[passados uns segundos]

Hélio: Pronto.

Os alunos marcaram corretamente os pontos dados e traçaram a reta a passar por eles, não revelando qualquer dificuldade (figura 9). Posteriormente, e porque era pedido, Ariana e Hélio escreveram a respetiva expressão algébrica, corretamente, tendo determinado o valor do declive a partir da razão entre a diferença das ordenadas dos dois pontos dados pela diferença entre as respetivas abcissas (figura 9):

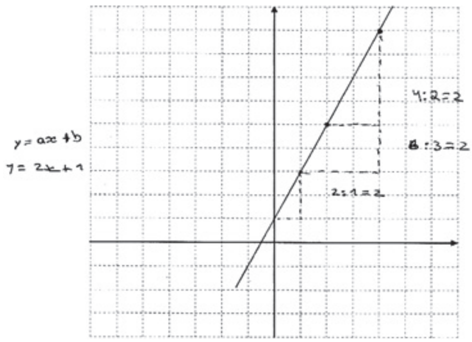


Figura 9 — Entrevista, Tarefa I, 5, Ariana e Hélio (16/03/2009)

Pelo diálogo estabelecido na entrevista pode verificar-se como os alunos interpretam o parâmetro a a partir da representação gráfica:

Professora: Então, agora quero a expressão algébrica!

Hélio: Sabemos que é uma função afim, é $y = ax + b$. Então y igual, sabemos que o a é o declive e que é de… é de

Professora: É de?

Hélio: É 2, declive 2.

Professora: Porque é que é 2?

Hélio: Então, porque nós a partir logo deste ponto…da ordenada na origem…

Professora: A partir da ordenada na origem?

Hélio: Sim.

Professora: Podes desenhar.

Hélio: Então andamos 2

Professora: Na horizontal.

Hélio: Podia até ser só 1.

Professora: Sim, podia ser só 1.

Hélio: E subimos até encontrar a reta. Aqui já nos vai dar o declive.

Professora: Que é?

Ariana: 3.

Hélio: Aqui neste caso, 3?

Ariana: Não, 2.

Hélio: É 2 o declive.

Professora: Como é que fizeste para dar 2?

Hélio: Fazemos a altura 2 a dividir por 1! Que dá 2.

Professora: Então e este triângulo que aqui desenhaste não podia ser desenhado com os pontos que marcaste?

Alunos: Podia.

Professora: Então vamos lá.

Hélio: Podemos andar 2 para apanhar o outro ponto e voltamos a subir até encontrar. Agora fazemos, 1, 2, … 4 a dividir por 2, que dá 2.

Professora: Então escreve aí.

Hélio: 4 a dividir por 2 dá 2 e aqui

Alunos: 2 a dividir por 1 dá 2.

Professora: Então e se fizermos um triângulo, por exemplo, a partir daqui?

Hélio: Deste?

Professora: Sim, a partir do ponto de coordenadas (1, 3) até atingir, por exemplo, o ponto de coordenadas

Ariana: (4, 9)

Professora: Sim, (4, 9).

Hélio: Então

Professora: Vai dar o mesmo?

Hélio: Vai.

Ariana: Não sei dizer.

Hélio: Voltamos a andar e voltamos a subir

Professora: Então quantos temos na vertical?

Hélio: São 6… 6 a dividir por 3.

Professora: Dá quanto?

Hélio: Dá 2.

Professora: O que é que vocês estão a verificar?

Ariana: Que o declive é sempre constante.

Hélio: É sempre 2.

Professora: Porquê?

Hélio: Porque o declive numa reta é sempre igual.

Professora: Ah, numa reta!

Hélio: Numa reta.

Professora: E se for numa curva?

Hélio: Numa curva já não.

Professora: Muito bem.

Hélio: Então já sabemos que o a é 2, ou seja, é

Alunos: $y = 2x+$

Hélio: e vem a ordenada na origem $+1$.

A determinação do valor do parâmetro a é feita a partir da construção de triângulos retângulos — dividindo o valor da altura pelo valor da base. Trata-se de um processo prático que resulta imediatamente quando o declive é positivo e é revelador de uma compreensão do que é o declive da representação gráfica de uma função afim — a construção dos triângulos ("Podemos andar 2 [na horizontal] para apanhar o outro ponto e voltamos a subir até encontrar [a reta]") e a determinação do mesmo valor para o declive — "Que o declive é sempre constante". Aliás, quando Hélio afirma que "Podia até ser só 1… e subimos até encontrar a reta" revela que o aluno dá significado ao valor que ele vai encontrar para o declive (será o mesmo, seja andando 2, seja andando 1). Há uma certeza quanto à invariância do declive para aquela reta. Fica a dúvida, porém, sobre a interpretação que os alunos farão para os casos em que o declive é negativo.

A determinação do valor do parâmetro b parece não ter levantado confusões aos alunos, pois indicaram a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas (identificado na figura apresentada).

Nas tarefas realizadas em sala de aula, apenas Ariana manifestou sentir dificuldade relativamente ao parâmetro b. No teste de avaliação, numa questão em que era dada a representação gráfica de uma situação referente à despesa de uma família durante as férias no Algarve (figura 10), era solicitada a respetiva representação algébrica:

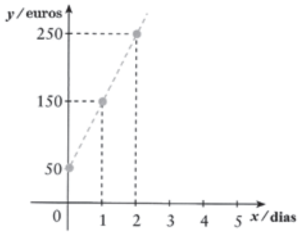


Figura 10 — Representação gráfica da questão 9 do teste de avaliação

Ariana apenas indicou corretamente o valor do parâmetro a, mas evidenciou dificuldades em determinar o parâmetro b, como se pode verificar na figura 11. A aluna considerou tratar-se de uma função do tipo $y = ax + b$, contudo não atribuiu significado à ordenada na origem, não considerando o seu valor na expressão que escreveu:

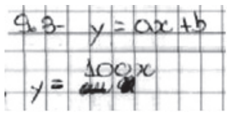


Figura 11 — Teste de avaliação, 9.3, Ariana (13/02/2009)

Hélio mostra-se mais ativo e interventivo do que Ariana, talvez pelo facto de ser algo monopolizador, levando a que Ariana se iniba um pouco. No entanto, a aluna mostrou-se sempre atenta, deixando transparecer a sua concordância com o que se estava a fazer e intervindo sempre que achou oportuno — por exemplo, a expressão "$y = 2x+$" foi dita pelos dois alunos em simultâneo.

Na questão 7 da *tarefa III* da entrevista, os alunos tinham de introduzir um número no programa de computador, onde surgia uma representação gráfica e, posteriormente, introduzir a respetiva expressão algébrica encontrada por eles, verificando depois, por comparação com a representação gráfica apresentada pelo computador, se tinham respondido corretamente. Mais uma vez surge a representação gráfica de uma função sem ser a partir da representação algébrica, embora neste caso aquela fosse apresentada via computador. A partir dela, os alunos teriam de construir a representação algébrica da referida função.

A primeira representação que os alunos escolheram foi a que corresponde ao número 2 (ver figura 12 na página seguinte)

Pelo gráfico os alunos identificaram, corretamente, que se tratava de uma função linear e que a expressão era do tipo $y = ax$ (ver extrato seguinte). Assiste-se, porém, a um diálogo muito interessante sobre o declive da reta:

Hélio: A expressão. Sabemos que é uma função linear, é $y =$

Alunos: ax.

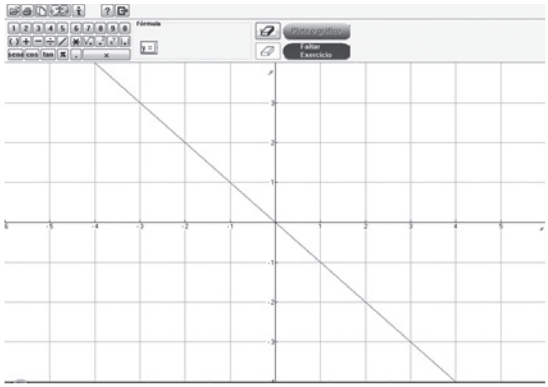


Figura 12 — Entrevista, Tarefa III, 7, Ariana e Hélio (16/03/2009)

Hélio: Então o a é o declive, neste caso como é negativo, andamos 1 para a esquerda e subimos até encontrar. Então fica 1

Ariana: Menos

Hélio: A dividir por 1, fica 1, ou seja, o declive é 1, ou seja

Alunos: $y = 1x$.

Professora: É?

Ariana: $y = -1x$.

Professora: É $1x$ ou $-1x$?

Alunos: É $-1x$.

Professora: Porquê?

Hélio: Porque é negativo [o aluno introduz a expressão] Certo!

Ariana: Está bem!

Hélio recorre à regra do triângulo e avança com 1 para o valor do declive da reta [1 a dividir por 1, ou seja, o valor da altura a dividir pelo valor da base]. É Ariana quem afirma que o declive é negativo. Hélio concorda com a colega e faz a correção devida. Os alunos sabem pela representação gráfica se o declive é positivo ou negativo e usam esse conhecimento para calcular o valor do declive — que será a razão entre a altura e a base do triângulo construído ou será o valor simétrico de tal razão. Os alunos não compreenderão, decerto, o porquê de tal procedimento para o caso do declive negativo, porém, associam com certeza o declive à inclinação da reta e compreendem que para cada reta o declive é só um, evidenciando, desta forma, uma compreensão geométrica do declive de uma reta.

Uma vez que o computador apresenta de início a representação gráfica de uma função, potencia a possibilidade de os alunos poderem trabalhar a representação gráfica sem ser necessário partir de uma outra representação da função, nomeadamente a algébrica, o que é enriquecedor para a aprendizagem dos alunos. Aliás, eles são obrigados a construir a própria representação algébrica da função a partir da representação gráfica, confrontando, depois, a representação gráfica da função que eles definiram algebricamente com a representação gráfica dada pelo computador. Neste caso concreto, Ariana e Hélio identificaram corretamente o tipo de função em causa e associaram corretamente a inclinação da reta ao sinal do declive, tendo construído a representação algébrica da função apresentada graficamente. Outra das grandes vantagens do uso deste software é o facto de os alunos poderem experimentar conexões entre representações de uma função, para vários casos e num intervalo de tempo pequeno.

De seguida, os alunos introduziram o número 4 no computador e a representação gráfica devolvida foi a seguinte (figura 13):

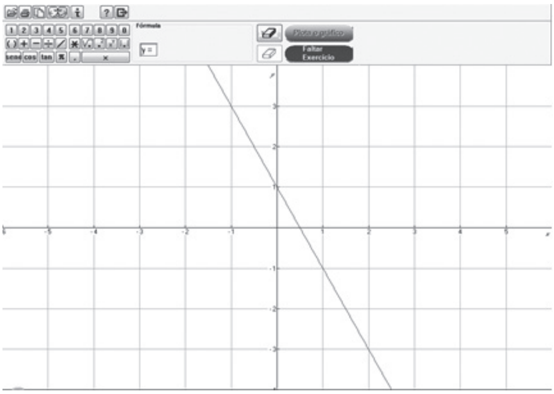


Figura 13 — Entrevista, Tarefa III, 7, Ariana e Hélio (16/03/2009)

Ariana e Hélio identificaram o tipo de função e recorreram mais uma vez ao triângulo retângulo para determinarem o declive da reta dada, usando, sem confusões, os pontos de interseção da reta com os eixos coordenados — partiram da origem do referencial (abcissa zero do ponto de interseção da reta com o eixo dos yy), na horizontal e da esquerda para a direita, até encontrarem novamente a reta (no ponto de interseção da reta com o eixo das abcissas). Tiveram alguma dúvida sobre a divisão que tinham de fazer, acabando por decidir-se corretamente e chegando ao valor 2. Embora já tivesse sido afirmado que o declive era negativo, os alunos esqueceram-se disso e na representação algébrica que construíram não constava o sinal menos. A ordenada na origem foi facilmente lida a partir da representação gráfica da função (ver o extrato seguinte do diálogo então estabelecido):

Hélio: Então, aqui é uma função

Ariana: Afim

Hélio: Sabemos que é $y = ax + b$, então o declive como é negativo, aqui está positivo nesta parte

Ariana: Andamos para a direita

Hélio: 0,5, não, ao contrário, 0,5 a dividir por 1, não, 1 a dividir por 0,5.

Professora: Decide-te lá. Como fazes tu Ariana?

Hélio: Então, andamos para a direita e é 1 a dividir por 0,5.

Ariana: Será?

Professora: Quanto é 1 a dividir por 0,5?

Hélio: 0,5. Ai não!

Ariana: 1 a dividir por 0,5?

Hélio: 2

Professora: 2. E só assim? 1 a dividir por 0,5.

Hélio: Então agora é

Alunos: $y = 2x + 1$.

Ariana e Hélio introduziram no computador a expressão $y = 2x + 1$ e viram que a representação gráfica desta função não coincidia com a representação gráfica dada inicialmente pelo computador — alguma coisa estava errada. Após alguns momentos de reflexão sobre a questão, os alunos repararam que se tinham esquecido do sinal menos (ver extrato do diálogo estabelecido):

Alunos: Oh!

Professora: Do que é que nos esquecemos?

Hélio: O menos! Ah!

Professora: Então é

Hélio: É negativo

Professora: Digam lá.

Alunos: $y = -2x + 1$.

A representação gráfica que os alunos escolheram a seguir diz respeito ao número 31 e foi a seguinte (figura 14):

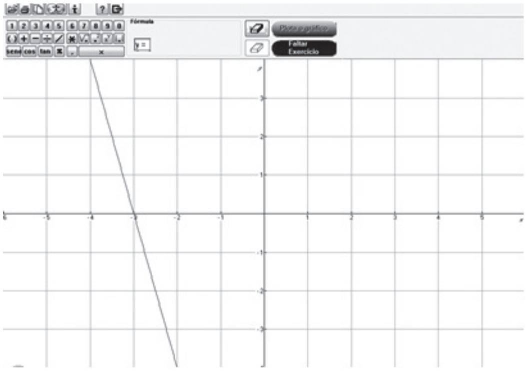


Figura 14 — Entrevista, Tarefa III, 7, Ariana e Hélio (16/03/2009)

Mais uma vez o ponto de partida é a representação gráfica de uma função e não a sua representação algébrica, o que é facilitado pelo uso do computador. Os alunos identificaram o tipo de função, bem como o sinal do declive da reta. Porém, Ariana afirma que a função é do tipo $-ax + b$. Para ela, o domínio de a é positivo. Trata-se de uma dificuldade que muitos alunos têm e que se relaciona com o conceito de variável, nomeadamente ao nível da sua compreensão como um número generalizado (ver extrato do diálogo estabelecido):

Ariana: Hum!

Hélio: Então é $ax + b$.

Ariana: Mas como é negativo tem que ficar $-ax + b$. [para Ariana o parâmetro a representa apenas valores positivos]

Os alunos sabiam que o declive era negativo, embora ainda não tivessem indicado o seu valor, porém, o grande problema surgiu na determinação da ordenada na origem, pois ela não é facilmente legível na representação gráfica apresentada (ver extrato do diálogo estabelecido):

Hélio: Só que nós não temos o b!

Professora: Ah! Mas pode ser que cheguem a ele por raciocínio! Vamos ver se lá chegamos!

Hélio: Isto não dá para andar para baixo? [a referir-se à visualização do gráfico]

Professora: Não, não dá. É mesmo para ver se são capazes. Vamos lá pôr a cabecinha a pensar!

Hélio: Então, nós andamos 1 para baixo e subimos um bocadinho… para encolher um quadrado tivemos, acho que é um, tivemos que andar quatro para baixo, então 8, 12.

Professora: Isso é o quê?

Hélio: –12 é o b. Então, o declive… isto confunde, não está ali o b!

Professora: Então, olha lá, pelo que tens aqui não consegues descobrir o declive? Temos de ir sempre à ordenada na origem?

Hélio: Não, mas… espere! –12, subimos até ao –4, a dividir por 2…Então nós sabemos que se descemos 4 encolhe 1

Professora: Então? E daí não sai o declive?

Hélio: O 4, declive 4.

Professora: É 4?

Alunos: –4.

Professora: Vá, experimentem, a ver se acertam!

Hélio: Não, mas eu quero acertar! [os alunos riram]… –4 a dividir por1, –4. Então pronto, o declive é –4.

Alunos: –4x mais, não, menos 12

[os alunos digitaram $y=-4x$ - 12 e viram que acertaram]

Hélio: Eh!

Professora: Agora explicas à Ariana o porquê do –12?

Hélio: Porque, repara, aqui não dá muito a entender, mas ali é o –4 e aqui estávamos no 0 e estávamos no –3 e nós descemos 4 e encolheu um quadradinho. [o aluno trocou a ordem das coordenadas, pois o ponto que indicara fora o (–3, 0)]

Ariana: Hum, hum.

Hélio: Se descemos mais quatro vai para o –8 e encolhe um, voltamos a descer 4 fica no –12 e já passa para ali, (0, –12).

Professora: Entendeste? Às vezes não precisamos ter ali a ordenada na origem para chegarmos até ela, é só pensarmos um bocadinho, raciocinar, não é?

Ariana: Hum, hum.

Hélio recorre a um raciocínio geométrico muito interessante para chegar ao valor da ordenada na origem. O aluno observa que, na representação gráfica disponível, para cada unidade que se avança para a direita, na horizontal, desce-se quatro unidades, na vertical; depois generaliza — andando duas unidades para a direita descer-se-ão oito e se forem três descer-se-ão doze unidades. O aluno parte do ponto de interseção da reta com o eixo dos xx (de abcissa –3) e vê que só tem de deslocar-se três unidades para a direita para encontrar o ponto de abcissa zero (que é onde a reta interseta o eixo dos yy) e cuja ordenada é a ordenada na origem. O aluno está a imaginar um triângulo retângulo do tipo dos que construiu nas situações anteriores, evidenciando clareza quanto ao sentido que lhe dá, e, ao mesmo tempo, está a dar corpo à sua compreensão da invariância do declive de uma reta e da forma como calculá-lo (em valor absoluto, 4/1; 8/2; 12/3). Hélio não compreenderá completamente a justificação para o cálculo do valor do declive (ainda não tem conhecimentos matemáticos para isso; em Portugal, o estudo da trigonometria e, em particular, a redução ao primeiro quadrante só é lecionada no ensino secundário) — colocar o sinal menos na razão entre a altura e a base do tal triângulo retângulo que ele constrói. No entanto, o raciocínio que ele desenvolve revela bem a sua compreensão sobre a inclinação da reta (e, como consequência, sobre o declive) e sobre a variação das ordenadas dos pontos à medida que fazemos variar as abcissas no sentido positivo.

Na entrevista, e para as funções do tipo $y = ax + b$, Ariana e Hélio encontraram sempre a expressão algébrica correta a partir da respetiva representação gráfica, embora ainda manifestassem alguma incompreensão quanto à representação do declive quando ele era negativo, sob o ponto de vista algébrico (disseram $-a$). Também relacionam corretamente a representação gráfica de uma função afim, linear ou constante com o tipo de função, assim como com o tipo de expressão que a representa. O uso do computador foi importante para facilitar a conexão entre representações, principalmente da gráfica para a algébrica, mas, também, desta para a gráfica.

Da representação tabelar para a gráfica e a algébrica

A *tarefa II* apresenta uma situação em que alunos de uma turma contratam uma agência de viagens para organizar a sua viagem de finalistas. O gerente da agência fixou um preço de 160 euros, por aluno, para a referida viagem. A questão 1 da tarefa consiste na passagem de uma representação por palavras para uma representação tabelar. Ariana e Hélio, usando o programa de computador sugerido pela professora, organizam facilmente uma tabela que relaciona o número de alunos (x) com a receita da agência (y). Por sugestão desta, os dados deveriam ser introduzidos de cinco em cinco unidades (alunos) até um mínimo de trinta e cinco. Após a construção da tabela pelos alunos, o computador apresenta a representação gráfica dos pontos de coordenadas (x, y) nela inseridos (ver figura 15 na página seguinte)

Na questão 2 da mesma tarefa, os alunos tinham de escrever a respetiva expressão algébrica da função estabelecida. Desse processo apresenta-se o seguinte excerto do diálogo que existiu entre a professora e os alunos:

Professora: Agora devem indicar a expressão algébrica que relaciona a receita da agência em função do número de alunos.

Hélio: Então, isto é uma função linear.

Professora: Sim.

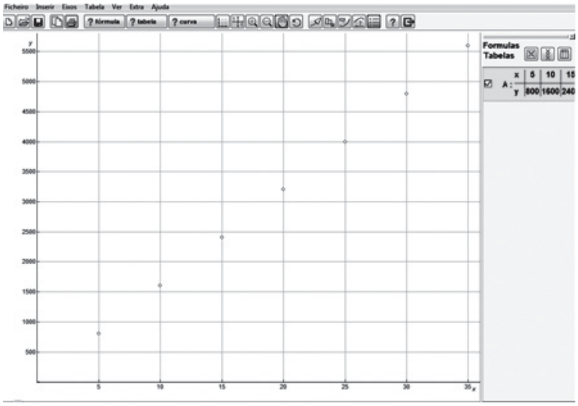


Figura 15 — Entrevista, Tarefa II, 1, Ariana e Hélio (16/03/2009)

Hélio: Ou seja, vai ser $y = ax$

Ariana: $+ b$

Hélio: Não, $+ b$ é afim. É linear.

Professora: $y = ax$. Quanto é o a?

Hélio: 800 a dividir por 5.

Alunos: 160.

Hélio: Então

Ariana: y é

Alunos: $y = 160x$.

Houve uma passagem correta, e com significado, da representação tabelar e da representação gráfica para a algébrica. Os alunos identificaram a situação como sendo linear, onde as variáveis x e y eram diretamente proporcionais. Apesar de não terem considerado o ponto de coordenadas (0, *b*), e de trabalharem graficamente com pontos discretos, tal não lhes criou problemas para a construção da expressão algébrica.

Na continuação da *tarefa II* da entrevista era informado que a despesa da agência de viagens era calculada considerando que havia um valor fixo de 1000 euros, independentemente do número de alunos que viajasse, acrescido de 100 euros por aluno. Na questão 3 os alunos tinham de representar por uma tabela, no programa de computador, a relação entre o número de alunos (x) com a despesa da agência (y). Ariana e Hélio não evidenciaram dificuldades na interpretação da situação e preencheram a tabela pedida com alguma facilidade. Tal como na situação anterior, o computador apresentou a representação gráfica dos pontos de coordenadas (x, y) inseridos na tabela (ver figura 16, onde coexistem as duas situações trabalhadas nesta tarefa):

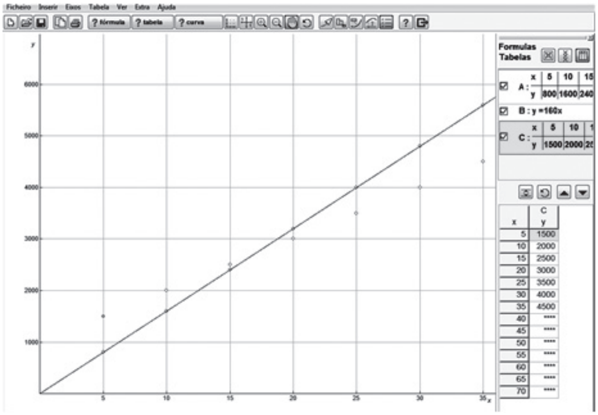


Figura 16 — Entrevista, Tarefa II, 3, Ariana e Hélio (16/03/2009)

De seguida, também lhes era solicitada a respetiva expressão algébrica que representasse a nova situação. No início, os alunos evidenciaram bastantes dificuldades. Foram indicando várias expressões que, posteriormente, inseriam no computador, obtendo de imediato a respetiva representação gráfica. Porém, nenhuma delas continha os pontos representativos da situação. Por exemplo, experimentaram $y = \frac{1500}{5}x$ e $y = 500x$, como se as variáveis se relacionassem segundo uma proporcionalidade direta. Para o primeiro caso fizeram a razão entre os primeiros valores da tabela e para o segundo consideraram a diferença entre os valores consecutivos da despesa representados na tabela. A dada altura aperceberam-se de que a função em causa não era linear:

> *Hélio:* 1000 euros. O Senhor [da agência] já tinha uma despesa fixa de 1000 euros. Ou seja, começa aqui [e aponta para o ponto de coordenadas (0, 1000)], então é uma função afim, $ax + b$, $y = ax + b$. Então não é $300x$. É a partir daqui [(0, 1000)] e não do zero [(0, 0)].

Passados alguns segundos:

> *Hélio:* $y = 1100x$, não, $1000x + 100$.

Os alunos veem que o parâmetro b seria o valor fixo da despesa, 1000 euros. Esta importante descoberta surgiu como fruto da sua interpretação da situação apresentada (que se relacionava com variáveis mais "reais" e não tão abstratas como um x ou um y simbólicos) em confronto com as representações gráficas que o computador dava para cada tentativa (errada) que os alunos avançavam para a expressão algébrica. Há, desta forma, uma evidência da dificuldade dos alunos na resolução da questão pela não existência de um ponto de abcissa zero (nem na própria tabela) — e a representação gráfica era um conjunto de pontos discretos — e, por outro lado, um realce das potencialidades do computador na promoção de uma interação pronta com o utilizador.

Os alunos também não estavam a interpretar corretamente o significado da letra x no contexto da situação:

Hélio: O x é a despesa fixa, não, isto está mal.

Professora: O x é a despesa?

Hélio: Não.

Professora: O que é o x? Nós até temos ali!

Hélio: Onde? ... É o número de alunos.

Ariana: x é o preço por pessoa.

Professora: Não!

Hélio: Número de alunos.

Ariana: Ah, sim!

Hélio: O b é 1000.

Professora: Então o b é 1000. Como é que fica a expressão?

Hélio: Então fica $y = 300x + 1000$.

Com a mediação da professora, os alunos acabam por construir a expressão correta:

Professora: Então aqui vamos experimentar 1 aluno.

Hélio: 1 aluno. 300…mil e tre…não.

Professora: O que acham que está mal?

Hélio: 300 é 100, $100x + 1000$

Professora: Então porque é 100?

Hélio: Porque é o preço por cada aluno. Aqui era ao contrário! Estava a dizer primeiro o b e depois é que dizia o a! … Então é $1000 + 100x$, x é o número de alunos.

Professora: Pronto, agora já dizes que x é o número de alunos, mas o que vocês fizeram para preencher a tabela foi somar sempre ao 1000

Alunos: 100

Professora: Vezes

Ariana: Vezes 5, vezes 10, vezes 15, …

Hélio: É $y = 100x$ ...

Professora: Temos muita dificuldade em generalizar, não temos? Para preencher a tabela foi fácil, mas para arranjar uma expressão geral que sirva para calcular a despesa para todos foi mais complicado, não foi?

Alunos: Sim.

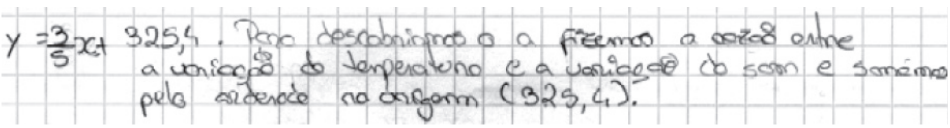
Nesta questão verificou-se que os alunos mesmo tendo compreendido a representação da função por palavras, e tendo feito os cálculos necessários para o preenchimento de uma tabela de valores, revelaram muitas dificuldades em representá-la simbolicamente, devido à necessidade e importância da atribuição de um significado às variáveis envolvidas.

Durante as aulas esta dificuldade verificou-se essencialmente quanto ao parâmetro b. Na realidade, na questão 2 da *tarefa 8* os alunos tinham de representar algebricamente os dados de uma situação representada tabelarmente, que relacionava a velocidade do som (m/s) a diferentes temperaturas (figura 17):

Temperatura (t) em ºC	–10	–5	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade do Som (v) em m/s	325,4	328,4	331,4	334,4	337,4	340,4	343,4	346,4	349,4

Figura 17 — Tabela da questão 2 da Tarefa 8

Ariana, Hélio, Maria e Telmo (esta tarefa foi desenvolvida em grupos de 4), na sua resposta, apresentaram uma boa explicação relativamente à determinação do parâmetro a, recorrendo à razão entre a diferença das ordenadas de dois pontos pela diferença das respetivas abcissas (figura 18):



$y = \frac{3}{5}x + 325,4$. Para descobrirmos o a fizemos a razão entre a variação da temperatura e a variação do som e somámos pela ordenada ne origem (325,4).

Figura 18 — Tarefa 8, 2, Ariana, Hélio, Maria e Telmo (09/02/2009)

No entanto, indicaram um valor incorreto para o parâmetro b [325,4 é a imagem de –10 e não a imagem de 0]. Ficou a dúvida se se tratava de uma questão de distração ou se a resposta fora condicionada por um hábito resultante do tipo de tabelas com que os alunos têm trabalhado (o primeiro par de valores tem o zero como abcissa). Na Entrevista, a Professora apresentou, novamente, a tabela da figura 17, para que os alunos indicassem a respetiva expressão algébrica.

A resposta foi a seguinte:

Professora: Como é que chegariam à expressão algébrica?

Hélio: Então, é uma função afim.

Professora: Hum, hum.

Hélio: Então, $y = ax + b$, o b… é a ordenada na origem.

Professora: Como é que achamos o seu valor através da representação gráfica?

Hélio: O b é onde a reta interseta o eixo do y.

Professora: Então, olhando para a tabela, não sabemos?

Hélio: Não porque temos vários!

Professora: Vê melhor …. Que coordenadas têm os pontos sobre o eixo dos yy? …

Hélio: Sim… O (0; 331,4) … Então já sabemos o b

Professora: Quanto é?

Alunos: 331,4.

Professora: E o declive? ... Aqui não temos a representação gráfica, mas podemos pensar como faríamos!

Hélio: A partir do 331,4 andávamos uma unidade para a direita…

Professora: Aqui andas uma?

Hélio: Não, andamos

Ariana: 5.

Hélio: Andamos 5 e subimos 3.

Professora: Então, qual é o declive?

Hélio: 3 a dividir por 5.

Professora: Na resolução da tarefa na aula escreveram $\frac{3}{5}x$… que estava bem! Mais 325,4, porquê?

Ariana: Ah! Era mais

Hélio: Era mais 331,4.

Ariana: Então eu ia dizer isso!

Professora: Eu só estava a perguntar porque é que, quando fizeram a tarefa, escreveram 325,4.

Hélio: Ah! Se calhar confundimos o –10 com o 0!

Os alunos afirmam não se lembrar da causa de terem errado a questão na aula. Atribuem tal erro a uma confusão sua. Sobressai, assim, que a maior dificuldade sentida pelos alunos na determinação do valor do parâmetro b surgiu quando este não constava explicitamente na tabela como um dos dados, ou quando não era a ordenada do primeiro par ordenado apresentado na tabela.

Conclusões

Neste estudo os alunos mobilizaram várias das representações das funções, especialmente quando elas podiam ser transformadas noutras, tal como refere Duval (2006). A representação em linguagem natural com a caracterização da função, como a indicação do tipo de função e as coordenadas de pontos da sua representação gráfica, permitiu que os alunos mobilizassem a representação gráfica, construindo-a a partir dos elementos dados (ora representando num referencial as coordenadas dos pontos indicados, que depois uniam para desenharem uma reta; ora representando apenas um ponto que, conjuntamente com a origem do referencial, definia uma reta). A representação algébrica permitiu que os alunos mobilizassem a representação gráfica, ora calculando as coordenadas de um dos seus pontos a partir da concretização da variável x (normalmente para o valor 1) que, com a origem do referencial, definia uma reta que continha os pontos da representação gráfica da função de proporcionalidade direta; ora usando o valor de b dado na expressão algébrica, marcando no referencial o ponto de coordenadas (0, b) e calculando as coordenadas de um outro ponto a partir da concretização da variável x, que, conjuntamente com o primeiro ponto, definiam uma reta que continha os pontos da representação gráfica da função afim. A representação gráfica permitiu que os alunos mobilizassem a representação algébrica, ora retirando diretamente da representação gráfica o valor da ordenada na origem (caso não se tratasse de uma função de proporcionalidade direta, pois nesse caso tal valor era zero), observando a ordenada do ponto em que a reta intersetava o eixo dos yy e calculando, em seguida, o valor do parâmetro a (o valor do declive da reta). Para tal, Ariana e Hélio recorreram frequentemente à construção de um triângulo retângulo, a partir de dois dos pontos da reta, podendo ser um deles o ponto de coordenadas (0, b), dividindo, depois, a altura do triângulo pela base — para o caso em que o declive era negativo (os alunos sabiam quando isso acontecia pela inclinação da reta) os alunos acrescentavam o sinal menos ao resultado obtido.

A mobilização de uma representação pela possibilidade dela ser transformada numa outra tornou-se muito clara e significativa quando os alunos tiveram de representar algebricamente a função afim dada pela sua representação gráfica, onde não era possível observar diretamente do gráfico o valor da ordenada na origem, o que foi um problema para os alunos. Assistiu-se à mobilização do conceito de declive de uma reta de uma forma muito clara e explícita. Esta dificuldade sentida pelos alunos evidencia a importância de trabalhar as múltiplas representações, tal como defendem Friedlander & Tabach (2001) e Mesa (2004), tendo presente que as suas utilizações apresentam vantagens e desvantagens e que é a combinação do seu uso que pode anular as limitações e tornar-se uma ferramenta eficaz na aprendizagem dos conceitos matemáticos, em particular das funções.

Neste estudo foi notória a importância do uso do computador, com um software de múltiplas representações, pois tal permitiu que os alunos pudessem analisar muitos exemplos e mais formas de representação de modo a formular e explorar conjeturas de uma maneira mais fácil do que usando processos manuais. Porém, registe-se que estes não foram esquecidos, pois eles também são necessários, nomeadamente para a construção das representações algébricas pedidas.

A passagem da representação gráfica para a representação algébrica é, segundo Kieran (1992), mais difícil para os alunos do que a passagem em sentido contrário. Isto não se verificou com Ariana e Hélio, que, desde o princípio, evidenciaram poucas dificuldades em passar da representação gráfica para a algébrica. Tal pode ser explicado pelo facto destes dois alunos terem feito, desde o início, uma aprendizagem com significado da representação gráfica de uma função do tipo $y = ax + b$. Para eles, os parâmetros a e b tiveram sempre um significado preciso (a, como declive da reta, esteve sempre relacionado com a sua inclinação e com a forma da sua determinação — o valor da razão entre a altura de um triângulo retângulo construído a partir de dois pontos da representação gráfica da função pela sua base, ou o seu valor simétrico para o caso em que a reta tinha declive negativo; b, como ordenada na origem, esteve sempre associado à ordenada do ponto em que a representação gráfica da função interseta o eixo das ordenadas), permitindo-lhes relacioná-los com a expressão algébrica $y = ax + b$ — porque muitas vezes são fáceis de determinar a partir da representação gráfica. A representação algébrica ganhou, assim, com a compreensão da representação gráfica e os símbolos algébricos foram aprendidos com significado.

A representação tabelar, e particularmente a sua passagem para uma representação algébrica, não gerou dificuldades aos alunos, em geral. Apenas se mostrou um processo complicado quando Ariana e Hélio i) tiveram de trabalhar com uma situação próxima do "real", onde trabalhavam com pontos discretos e na tabela não constava explicitamente o par ordenado de abcissa zero, e ii) quando nos dados apresentados tabelarmente o par ordenado de abcissa zero não era o primeiro da lista. Uma das explicações para as dificuldades relaciona-se com o significado que os alunos tinham de atribuir às variáveis — elas não eram simples símbolos abstratos como o x e o y —, onde a determinação da ordenada na origem tinha de resultar da interpretação da própria situação. O processo complicava-se pois b ou não estava explicitamente presente ou, e por força do hábito, não era visível logo no primeiro par ordenado que surgia na tabela. Esta dificuldade também é referida por Kieran (1992), quando afirma que uma função representada por um conjunto de pontos discretos causa dificuldades aos alunos.

Neste estudo os alunos mobilizaram várias das representações das funções, especialmente quando elas podiam ser transformadas noutras, e deixa um alerta para a necessidade de ser dada uma atenção muito especial à interpretação dos símbolos algébricos, nomeadamente as letras, seja quanto ao de uma letra como número generalizado, seja quanto ao domínio de uma variável — Ariana evidenciou alguma dificuldade, durante o processo, em representar simbolicamente a situação em que o parâmetro a era negativo —, e quanto ao símbolo $y = f(x)$, para que x seja vista com generalidade. No entanto, fica a forte convicção de que um ambiente de trabalho suportado por tarefas criteriosamente selecionadas, incluindo desafios e colocando problemas aos alunos, e pela possibilidade de uso das TIC, onde os alunos possam partilhar resultados, quer com os colegas quer com a professora, e tendo em conta algumas das suas dificuldades, já identificadas, é um bom caminho a seguir.

Referências

Abalos, G. B. & Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*, 12(1), 7–28.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

Andrade, J. (2009). Aprendizagens e dificuldades de alunos do 10º ano no estudo das funções. *Dissertação de Mestrado*. Covilhã: Universidade da Beira Interior.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el construtivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizage de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*, 11(2), 171–194.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick et al. (Eds), *A research companion to principles and strands for school mathematics* (pp. 123–135). Reston, VA: NCTM.

Duval, R. (2006). *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 61, 103–131.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre paradigmas de investigação em educação. *Noesis* (18), 64–66. (Retirado a 05-10-08 de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ichagas/mi2/Fernandes.pdf)

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds), *The roles of representation in school mathematics* (NCTM Yearbook) (pp. 173–185). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: McMillan.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A Broadening of Sources of Meaning. In Gutiérrez, A. & Boero, P. (Ed.), *Handbook of Research on Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11–49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Lester, F. K. (Ed.). *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Reston, Va: National Council of Theachers of Mathematicas.

Lessard-Hébert, M., Gouyette, G. & Boutin G. (2005). *Investigação Qualitativa. Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Matos, A. & Ponte, J. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8º ano. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*, 11(2), 195–231.

ME-DGEBS (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: INCM.

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: ME-DEB.

ME- DGIDC (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Pais, S. (2010). A aprendizagem das funções afins no 8º ano. *Dissertação de Mestrado*. Covilhã: Universidade da Beira Interior.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 3(2), 3–8.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3–18.

Sajka, M. (2003). A Secondary School Student's Understanding of the Concept of Functions — A Case Study. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 229–254.

Saraiva & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento nº 4 al Nº 19*, pp. 74–83. Itália: Palermo. (ISSN on-line 1592-4424)

Slavit, D. (1997). An Alternate To The Reification Of Function. *Educational Studies in Mathematics*. 33, 259–281.

Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' Mental prototypes for funcions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 23(1), 39–50.

Zachariades, T., Christou, C. & Papageorgiou, E. (2001). The Difficulties and Reasoning of Undergraduate Mathematics Students in the Identification of Functions. *Proceedings in the 10th ICME Conference*. Crete, Greece: University of Athens.

Resumo. Neste artigo discute-se a forma como alunos do 8º ano de escolaridade (13–15 anos de idade) procedem na passagem entre representações de funções do tipo $y = ax + b$, e quais as dificuldades que eles experimentam. No estudo que serviu de base a este artigo seguiu-se uma metodologia de investigação qualitativa, num paradigma interpretativo, tendo por base dois estudos de caso. Os alunos mobilizaram várias das representações das funções, especialmente quando elas podiam ser transformadas noutras, onde a representação algébrica ganhou com a compreensão da representação gráfica. A representação tabelar, e particularmente a sua passagem para uma representação algébrica, mostrou-se um processo complicado quando os alunos i) tiveram de trabalhar com uma situação próxima do "real", onde trabalhavam com pontos discretos e na tabela não constava explicitamente o par ordenado de abcissa zero, e ii) quando nos dados apresentados tabelarmente o par ordenado de abcissa zero não era o primeiro da lista. O recurso às tecnologias com software de múltiplas representações, assim como um trabalho activo e sistemático entre as várias representações, influenciaram favoravelmente a aprendizagem destes alunos.

Palavras-chave: Dificuldades de aprendizagem das funções; TIC; Função afim; Múltiplas representações; Conexões entre representações.

Abstract. This article discusses how students in 8 th grade (13–15 years old) came in the transition between representations of functions like $y = ax + b$, and what difficulties they experience. In the study that formed the basis of this article was followed a qualitative research methodology, an interpretive paradigm, based on two case studies. Students mobilized various representations of functions, especially when they could be transformed into another, where the algebraic representation gained from the graphical representation. The tabular representation, and in particular its transition to an algebraic representation, was a complicated process when students i) had to work with a situation close to "real", where they worked with discrete points and in the table was not included explicitly the ordered pair with abscissa zero, and ii) when the data presented in a table the ordered pair of abscissa zero was not the first on the list. The use of software technologies with multiple representations, as well as an active and systematic work among the various representations, positively influenced the learning of these students.

Keywords: Difficulties in the learning of functions; ICT; Affine function; Multiple representations; Connections among representations.

SÓNIA MARISA PAIS
Agrupamento de Escolas "A Lã e a Neve", Covilhã
soniamapais@hotmail.com

MANUEL JOAQUIM SARAIVA
Universidade da Beira Interior e UIDEF, Covilhã
manuels@ubi.pt