Análise combinatória numa abordagem alternativa: análise de uma aplicação em um curso de Licenciatura em Matemática

Renata Cristina Geromel Meneghetti
Instituto de Ciências Matemáticas de Computação da Universidade de São Paulo
Aline Cristina Bertoncelo Dutra
Universidade Estadual Paulista, Rio Claro

"Não há ensino de qualidade, nem reforma educativa, nem inovação pedagógica, sem uma adequada formação dos professores."

(Nóvoa, 1992, p. 9)

Introdução

Diversos autores, tais como Lopes (2003) e Cerri e Druck (2003), salientam que em diversas situações do cotidiano são necessárias resoluções de problemas combinatórios para tomadas de decisão ou escolhas que envolvem um tipo de raciocínio específico, o qual não se desenvolve automaticamente.

Porém, o atual ensino da Combinatória assemelha-se mais com um jogo de fórmulas complicadas, ao invés de explorar o raciocínio combinatório implícito nas mesmas (Silva, Ruffino & Moreira, 2007). De acordo com Ronca (1980), muitas vezes o ensino no Brasil prioriza a aquisição de informações e assim "o estudante brasileiro tem uma tendência maior para aprendizagem mecânica do que para aprendizagem significativa" (p. 63).

Entendemos que os métodos referentes à Análise Combinatória devem ser compreendidos pelos alunos de maneira que os conceitos envolvidos sejam por eles construídos, enfatizando o processo de aprendizagem, e não seu produto final. Além disso, concordamos com a concepção presente em diversas abordagens de ensino, que têm base no construtivismo, de que o sujeito deve ter um papel ativo no processo de elaboração do conhecimento, tal como já havia sido colocado pelo grande filósofo Kant (1997): "a razão só entende aquilo que produz segundo os seus próprios planos." (p. 18).

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam que inovações pedagógicas dependem, sobretudo, de novas atitudes referentes ao processo de ensino e aprendizagem (Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999). Entendemos que essas novas atitudes estão relacionadas a novos métodos ou metodologias de ensino. Com isso, faz-se necessário buscar novas formas de ensinar, visando uma aprendizagem mais significativa. Tal aprendizagem, segundo Ronca (1980), deve estabelecer uma ponte entre o que o aluno já sabe e o que ele irá aprender, devendo haver uma predisposição do educando para a atividade focalizada.

Levando isso em consideração, neste artigo abordamos a aplicação de um material didático alternativo para o ensino de Análise Combinatória, estruturado com base na metodologia de resolução de problemas e em uma proposta pedagógica segundo a qual o desenvolvimento do conhecimento matemático ocorre em níveis cada vez mais elaborados e mediante um equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo.

A aplicação se deu em um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública brasileira, na disciplina de Prática de Ensino (que tem como uma das finalidades discutir sobre metodologias alternativas para o ensino de Matemática, entre elas a Resolução de Problemas), com isso pretendíamos analisar o potencial didático-pedagógico do material em cursos de formação de professores. Ademais, vimos nisso uma oportunidade capaz de permitir aos licenciandos (alunos do curso de Licenciatura) vivenciarem o desenvolvimento de um conteúdo da Educação Básica[1] por meio de uma metodologia alternativa, uma vez que, na maioria dos casos, os conteúdos são vistos por eles em outras disciplinas e seguindo uma abordagem tradicional.

Acreditamos, tal como posto em (Romanatto, 2008), que se o futuro professor aprender, ainda na formação inicial, conteúdos matemáticos através da resolução de problemas, ele terá maior facilidade em utilizar esse procedimento didático em seu trabalho docente.

Os pressupostos teóricos que estruturam o material

Sobre a Análise Combinatória e seu ensino

A Análise Combinatória trata basicamente de problemas de contagem. As chamadas *técnicas de contagem indireta* surgiram em decorrência do trabalho de se contar diretamente os possíveis resultados de uma experiência. Isso pode se tornar muito penoso se as quantidades envolvidas forem muito numerosas. Daí a necessidade de se encontrar métodos gerais que permitam calcular o número de possibilidades de uma experiência, sem contálas uma a uma. Neste sentido, a Análise Combinatória oferece "a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto" (Merayo, 2001, citado por Silva, Ruffino & Moreira, 2007, p. 5).

Referente a este assunto, os PCN enfatizam a importância de buscar o desenvolvimento de habilidades, tais como, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações e identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades, assim como dados e relações envolvidas em situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório (Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999).

Esses parâmetros ainda salientam que tais habilidades não devem ser aprendidas como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas, então, devem seguir como consequência do raciocínio combinatório. Este último deve ser desenvolvido frente à resolução de diversos problemas a fim de simplificar cálculos quando se têm muitos dados.

Dado que os problemas de Análise Combinatória são variados e por vezes complexos — pois nem sempre o caminho a ser tomado para chegar à solução está claro — Borba (2010) salienta que é preciso examinar e verificar a natureza do tipo do problema e quais estratégias podem ser utilizadas num caso específico, sendo também possível fazer um levantamento de possibilidades e analisa-las. Neste contexto, a dificuldade, como salienta Hariki (1996), encontra-se na conexão adequada entre o problema e a teoria matemática correspondente.

Deste modo, segundo Souza, Lopes, Oliveira e Freitas (2010) o desenvolvimento do raciocínio combinatório requer muito mais do que apenas classificar os problemas em permutação, arranjo ou combinação. Sua importância deve-se ao fato de ele modelar uma situação na qual há várias possibilidades de construção de agrupamentos, de caminhos, fornecendo um tipo específico de interpretação quando se devem considerar os resultados possíveis para cada um desses agrupamentos ou caminhos.

A intuição tem importância fundamental na resolução de problemas nos quais nos deparamos rotineiramente. Soares e Dornelas (2010) destacam que a grande maioria de nossas suposições e conclusões em nosso dia a dia é baseada em nossa intuição, em nossa experiência ou a partir de comparações com outras situações semelhantes já vivenciadas. Para esses autores ao estudarmos qualquer disciplina em Matemática, estamos sempre querendo saber se uma afirmação é verdadeira ou falsa, para tanto podemos nos valer da intuição para chegarmos a uma verdade. No entanto, salientam esses autores que para provar alguma coisa, sustentar uma opinião ou defender um ponto de vista sobre algum assunto, nem sempre basta nos pautarmos em nossa intuição é preciso argumentar, apresentar justificativas convincentes e corretas que sejam suficientes para estabelecer se, de fato, uma determinada afirmação é falsa ou verdadeira. Portanto, a intuição é um elemento muito importante na elaboração do conhecimento matemático e deve ser considerada em especial no que se refere aos conteúdos de análise combinatória, porém num passo seguinte é preciso provar, justificar, argumentar; de forma que, como colocado em Meneghetti (2001), proposta apresentada na página 71, nós defendemos a importância de um equilíbrio entre os aspectos intuitivo e lógico.

Pinheiro (2008) aponta que o atual ensino de Análise Combinatória do modo como é ministrado não tem possibilitado que os cidadãos a utilizem na resolução de problemas reais; usualmente percebe-se que, no Brasil, a disciplina Combinatória é lecionada pela primeira vez somente no Ensino Médio da Educação Básica, e, em Portugal, no 12.º ano de escolaridade (Silva, Fernandes & Soares, 2004). Porém, esses autores enfatizam que, segundo Piaget (1986), crianças com sete anos já são capazes de adquirir conhecimento conceitual de ordem combinatória. Isso significa que é possível abordar esse conteúdo antes do ensino médio, em séries mais elementares, como no Ensino Fundamental que, no

Brasil, corresponde do quinto ao nono ano escolar; entende-se que o que varia é o nível de profundidade no qual o conteúdo será abordado. Para que isso aconteça, é importante que esse conteúdo seja tratado em cursos de formação de professores de matemática, em especial, enfatizando abordagens alternativas para se tratar esse conteúdo (Silva et al., 2004).

Assim, a fim de que haja uma melhora no processo de ensino e aprendizagem é importante que os professores reflitam sobre os programas das disciplinas e suas próprias práticas letivas, de modo crítico e indagativo (Martin & Santos, 2008). Varandas (2000) aponta que o conhecimento teórico que o professor adquire é refinado durante as experiências de ensino. Fato que vem ao encontro com a proposta deste material de fazer com que o futuro professor vivencie, ainda durante sua formação inicial, experiências de ensino de conteúdos que ele abordará em sua futura prática letiva.

Rocha e Borba (2010) ressaltam que o professor que ensina matemática precisa se apropriar de conhecimentos de diferentes naturezas, tais como conhecimento específico dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula e o conhecimento de como um conceito se desenvolve e de fatores que podem influenciar este desenvolvimento.

A metodologia de resolução de problemas

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989), o ensino da matemática no início do século XX foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição. O professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Apenas alguns alunos chegavam a compreender o que faziam, conseguiam "pensar" sobre o assunto em que estavam trabalhando. As experiências mais remotas e significativas relativas à resolução de problemas podem ser creditadas a John Dewey (1859-1952) entre 1896 e 1904 o qual, através de projetos que reproduziram as situações socioeconômicas (estudo/resolução de problemas de interesse da comunidade), sugeria que tal orientação pedagógica pudesse contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico das crianças.

Ainda segundo Stanic e Kilpatrick (1989), os problemas têm uma longa história nos currículos de Matemática. Até 1989, os educadores matemáticos não haviam examinado totalmente a razão pela qual deveriam ensinar a resolução de problemas, embora seu ensino tenha sido recebido com grande ênfase.

Onuchic (1999) aponta que a importância dada à resolução de problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. Desta forma, como sugere Diniz (1991), a metodologia de resolução de problemas surge para alterar a postura do ensino tradicional, na qual os problemas são simplesmente propostos e resolvidos e propõe que se questionem as respostas obtidas e os próprios problemas propostos, enfatizando o processo de descoberta e não a resposta em si. Com isso, procura-se que o aluno não somente aprenda o conteúdo, mas que capacidades como a argumentação, a observação, a dedução e o espírito crítico sejam desenvolvidas (Diniz, 1991; Silver, 1996).

Para que os alunos possam vir a "explorar" os problemas, o professor deve ter atitudes que criem neles espírito crítico e inovador, como dar-lhes chance de tentar estratégias de solução por si mesmos, aproveitar as ideias deles, mesmo que não levem à resposta certa, deixa-los criar perguntas, visando à compreensão do problema (não mostrar soluções prontas e arrumadas), que sintam todo o raciocínio desenvolvido até chegar a elas, entre outras atitudes (Nasser, 1989). Segundo Van De Walle (2001, citado por Onuchic & Allevato, 2004), "o professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer" (p. 221).

Nesta metodologia, o conteúdo a ser aprendido inicia com uma situação de aprendizagem através de um ou vários problemas-desafio significativos aos alunos. O conteúdo desconhecido aos alunos vai sendo construído através de discussões e também pode ser adquirido por diversas fontes, tais como pesquisa bibliográfica ou exposição direta pelo professor em momentos intercalados aos problemas ou durante o processo de resolução de um problema específico (Onuchic, 1999; Onuchic & Allevato, 2004).

Assim, compreendemos que, como coloca Gazire (1988), quando o conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem através de um problema desafio (ou um conjunto de problemas deste tipo), deverá ocorrer uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido.

Segundo os PCN, a resolução de problemas apresenta-se como peça central não só para o ensino de Matemática, mas também para o ensino da própria Análise Combinatória, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução (Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999, p. 126).

A proposta pedagógica considerada

Meneghetti (2001) e Meneghetti e Bicudo (2003), com base em um estudo sobre concepções do conhecimento geral e do conhecimento matemático nas principais correntes filosóficas (de Platão ao início do século XX), defendem que, no processo de constituição do conhecimento matemático, não é possível atribuir maior valor ao aspecto intuitivo ou ao lógico, ou mesmo concebê-los como excludentes; e ainda que o intuitivo apoia-se no lógico e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados, num processo gradual e dinâmico, em forma de espiral. Entendem esses autores que o equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo deve estar presente em cada um dos níveis e que, nesses últimos, o caráter intuitivo e o lógico estão suscetíveis a mudanças, por exemplo, o que é lógico num nível pode passar a ser intuitivo num outro.

Meneghetti (2009) retoma a proposta apresentada por Meneghetti e Bicudo (2003), com o propósito de analisá-la sob dois enfoques: em relação às concepções de conhecimento matemático após crise fundamentalista da matemática e ao contexto educacional da matemática. Desse estudo, a autora conclui que as ideias colocadas nessa proposta ganham forças quando se analisa as atuais reivindicações para a Filosofia da Matemática e que, entre outras colaborações, reconhecem a importância dos aspectos empíricos e intuitivos na constituição do saber matemático e também da refutação do caráter absoluto de tal conhecimento.

No contexto da Educação Matemática, é observado que a questão do equilíbrio dinâmico para os aspetos lógicos e intuitivos tem afinidade com o que é posto nas ideias de construtivismo social de que o conhecimento subjetivo[2] relaciona-se com o conhecimento objetivo[3] por meio de um ciclo criativo, através do qual um contribui para a renovação do outro (Ernest, 2001, citado por Meneghetti, 2009). A questão dos níveis pode ser justificada cognitivamente com Vygotsky (1991, citado por Meneghetti, 2009), que diz que à medida que o intelecto se desenvolve, velhas generalizações são substituídas por generalizações de tipos cada vez mais elevados. A aquisição de conceitos novos e mais elevados transforma os significados dos conceitos anteriores.

A análise de uma aplicação dessa proposta junto a alunos do Ensino Fundamental — para o caso de frações – é tratada em Meneghetti e Nunes (2006) e seus principais resultados são retomados em Meneghetti (2009). Dessa aplicação, esses autores chegaram à conclusão de que a proposta metodológica que estrutura o material, aliada a uma postura em consonância com seu suporte teórico, mostrou-se eficiente do ponto de vista didático-pedagógico, por favorecer aos alunos a construção dos conceitos matemáticos focalizados.

No processo de elaboração dos materiais didáticos que focamos nesse artigo a proposta de Meneghetti (2001) e de Meneghetti e Bicudo (2003) foi levada em consideração, desta forma os materiais foram estruturados por níveis cada vez mais elaborados, considerando os aspectos intuitivo e lógico e ainda utilizando-se a metodologia de resolução de problemas. Em momentos anteriores, algumas aplicações piloto[4] foram sendo efetuadas, a fim de se buscar um aprimoramento do material. No próximo item, apresentamos e descrevemos com mais detalhes como o material foi estruturado e do que ele é composto.

Descrição do material

Seguindo a proposta apresentada em Meneghetti e Bicudo (2003), o material é desenvolvido em níveis cada vez mais elaborados, por meio de situações-problema abordando o assunto e buscando equilibrar os aspectos intuitivo e lógico do desenvolvimento do conteúdo. Ele é composto por quatro níveis de trabalho (fichas de atividades), totalizando trinta e uma situações-problema e cinco atividades de fechamento. Essas últimas com objetivo de levar o aluno a comparar, refletir ou estabelecer relações entre as situações-problemas abordadas. O primeiro nível é constituído de quatro situações-problema (numeradas de um a quatro), sendo que a primeira se desdobra três sub-situações (1a, 1b, 1c) e a segunda em duas (2a e 2b) e uma atividade de fechamento e tem por objetivo levar o aluno a familiarizar-se com problemas de contagem e discutir os Princípios Aditivo e Multiplicativo. O segundo compõe-se de cinco situações-problema (numeradas de cinco a nove) mais quatro atividades de fechamento (de reflexão, associação ou comparação).

Nesta etapa, pretende-se introduzir os conceitos de arranjo, permutação e combinação (sem repetição). O terceiro nível é constituído de oito situações-problema (numeradas de dez a dezessete) nas quais são discutidos os conceitos de arranjo, permutação e combinação (com repetição); combinação complementar; relação de Stifel e permutações circulares[5]. O quarto é constituído de doze situações-problema complementares (numeradas do dezoito ao vinte e nove) e tem por objetivo consolidar os conceitos abordados nos níveis anteriores.

A título de exemplificação apresentamos, a seguir, as atividades correspondentes ao segundo nível de trabalho (composto por cinco situações-problema e quatro atividades de fechamento):

SEGUNDO NÍVEL DE TRABALHO

Objetivo: Nessa fase pretende-se introduzir os conceitos de arranjo, permutação e combinação de forma que o aluno venha a perceber seus significados.

Atividade 2: A fim de que o aluno perceba o significado e a diferença dos conceitos de arranjo e combinação, solicite que eles relacionem os problemas 1 e 2 (do nível anterior, Anexo I), comparando suas respectivas soluções.

Problema 5. Um time que possui 5 atletas de destaque deve escolher dois deles para representá-lo num torneio. Quantas representações são possíveis?

Problema 6. Quatro times de vôlei disputam um torneio onde são atribuídos prêmios ao campeão e ao vice-campeão. De quantos modos os prêmios podem ser atribuídos?

Atividade 3: Compare os problemas 5 e 6. O que é possível dizer quanto à natureza dos resultados possíveis?

Problema 7. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 7, 8 e 9?

Problema 8. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Atividade 4: Compare os problemas 7 e 8. Qual a relação entre eles?
Apresente uma definição para Arranjo, Combinação e Permutação.

Atividade 5: Generalize os problemas 7 e 8 para n dígitos.
Problema 9.
a) Calcule o número de subconjuntos com três elementos, de um conjunto A com oito elementos.
b) Calcule o número de triplas ordenadas de um conjunto de oito elementos.
c) Relacionar os itens (a) e(b) (apresentar (a) em função de (b)).
d) Generalize o item (c) para subconjuntos com p elementos, de um conjunto A com n elementos ($p \leq n$).

Espera-se que a partir do desenvolvimento desses diversos níveis, o aluno consiga, num trabalho com ênfase grupal e sob a orientação do professor, elaborar e construir os conteúdos matemáticos envolvidos. A teoria segue gradualmente, como fechamento dessas elaborações iniciais na medida em que os conceitos vão sendo discutidos. Assim, sugere-se que cada conceito seja interiorizado pelos estudantes antes de qualquer tentativa de formalização (Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999).

Descrição da aplicação: aspetos metodológicos

A intervenção realizada insere-se numa abordagem qualitativa de pesquisa, seguindo os pressupostos de estudo de caso (Ludke & André, 1986)[6]. O material foi aplicado num curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Prática de Ensino, sob orientação da primeira autora deste artigo e com a participação da segunda como observadora-participante[7]. Esta disciplina é oferecida aos alunos do quarto ano do referido curso. Durante a aplicação, utilizamos como instrumentos para coleta de dados: questionários (inicial e final); diagnósticos (inicial e final); elaboração de mapas conceituais[8] (antes e após a aplicação); relatórios dos alunos referentes às resoluções das fichas de atividades e relatório de aplicação (feito pela observadora participante, com complementação da professora-aplicadora). Além disso, é importante salientar que o quarto nível do material retoma todos os conceitos abordados nos níveis anteriores e, portanto, possibilita também obter um retrato da aprendizagem dos alunos.

Vale destacar que antes da aplicação deste material, a abordagem de resolução de problemas foi abordada com os licenciandos por meio de leitura e discussão de artigos científicos (em Educação Matemática) existentes sobre o tema e também através da análise de diretrizes curriculares oficiais brasileiras para o ensino e a aprendizagem da matemática da Educação Básica (Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999; Secretaria da Educação de São Paulo. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, 1991). Assim, houve uma reflexão sobre o ensino e aprendizagem desses conceitos na Educação Básica antes da aplicação deste material e também após a mesma; pois há perguntas focadas no questionário final que levam o licenciando a refletir a respeito do uso do material para os níveis de ensino nos quais eles atuarão.

Foram sete dias de aplicação realizados durante aulas duplas semanais, totalizando quatorze horas/aula. A classe era composta por dezenove alunos, que serão aqui denotados pelas letras A1, A2 … A19.

No primeiro dia, foi aplicado o questionário inicial. Neste, além de questões sobre dados pessoais e de formação, perguntávamos em qual curso os alunos estavam matriculados (licenciatura ou bacharelato) e indagávamos se eles haviam aprendido Análise Combinatória antes e em qual nível de ensino. Na sequência, pediu-se que os alunos elaborassem um Mapa Conceitual sobre Análise Combinatória. Depois, aplicou-se um diagnóstico inicial, constituído de dez situações-problema envolvendo de forma intuitiva os conceitos que seriam abordados pelo material. Esta etapa teve como finalidade obtermos informações a respeito dos conhecimentos prévios dos alunos. Ao final da aula houve uma breve discussão sobre a opinião dos alunos referente às questões do diagnóstico inicial no qual muitos reclamaram pela ausência das fórmulas. Por fim, o único aluno que conseguiu resolver a última questão comentou que havia aprendido o conteúdo por meio da resolução de problemas.

No segundo dia, começamos com a aplicação do primeiro nível de trabalho, no qual as situações-problema iniciais visavam permitir aos alunos uma familiarização com problemas de contagem e com os Princípios Aditivo e Multiplicativo, servindo como base para o desenvolvimento dos níveis posteriores.

Para execução desta tarefa, foi solicitado que os alunos formassem grupos. Após a separação espontânea dos mesmos em cinco duplas e um trio, explicou-se que eles deveriam fazer um relatório com as resoluções das situações-problema e uma explicação do raciocínio utilizado nas mesmas. A partir disso, os alunos se empenharam na resolução do primeiro nível do material.

Finalizada esta etapa, iniciou-se uma discussão aberta com toda sala, considerando as várias respostas e possibilidades de resolução; a partir das discussões os conhecimentos abordados nas situações-problema foram sendo evidenciados.

No terceiro dia de aplicação, os alunos separaram-se espontaneamente em cinco duplas. Nesse dia, focalizamos o desenvolvimento do segundo nível do material que tinha por finalidade introduzir os conceitos de arranjo, permutação e combinação. Durante a resolução dos problemas referentes a esse nível, na quinta atividade pedia-se uma generalização de dois problemas da ficha anterior. Observamos que a maioria dos alunos não conseguiu efetuar tal tarefa; necessitando do auxílio da professora.

Durante o quarto dia, tendo por finalidade consolidar os conceitos trabalhados anteriormente, aplicamos o terceiro nível do material. A professora começou perguntando se os alunos se lembravam das definições abordadas na aula anterior. Mas, como não houve manifestação, ela retomou a discussão sobre os conceitos envolvidos e a definição dos mesmos. Para auxiliar na elaboração do relatório, na aplicação do terceiro nível, utilizamos também um gravador, deixando-o um pouco em cada grupo. Também ressaltamos aos alunos a importância deles registrarem com detalhes o processo de resolução das atividades. Neste dia, observamos que alguns grupos interagiam com outros, trocando ideias e discutindo suas resoluções. Após a resolução dos problemas, pediu-se que um integrante de cada dupla fosse à lousa resolver e explicar uma das situações-problema. Na sequência, tais resoluções foram discutidas com todos. Referente à décima situação-problema, a professora questionou quanto à generalização da mesma, a qual foi sendo construída juntamente com os alunos.

No quinto dia, a aula começou com o pedido da professora para que alguns alunos colocassem na lousa resoluções dos demais problemas da ficha do terceiro nível. A seguir, abriu-se uma discussão sobre as mesmas. Na sequência, a professora aplicou a quarta ficha, cujas situações-problema envolviam todos os conceitos trabalhados nos níveis anteriores. Como alguns alunos estavam cursando a disciplina "Tópicos de Matemática Elementar" que também abordava Análise Combinatória, eles compreenderam esta aplicação também como uma forma de estudar para prova que realizariam no dia seguinte.

Após comentar um pouco sobre a quarta ficha, a professora solicitou aos alunos que colocassem e explicassem suas resoluções na lousa. Estes colocaram as resoluções de metade das situações-problema do quarto nível e, em seguida, a professora questionou se havia alguma resolução diferente ou alguma dúvida. Houve algumas manifestações e outras resoluções foram sendo discutidas, em conjunto, as resoluções das demais situações foram sendo elaboradas.

No sexto dia, por solicitação da professora, outros alunos foram à lousa e colocam as resoluções da outra metade dos problemas da quarta ficha de atividades. Na sequência, abriu-se espaço para grupos que resolveram os problemas de forma diferente colocassem suas resoluções, que se manifestassem, promovendo uma discussão e o fechamento das atividades. Neste mesmo dia, após o fechamento da resolução da quarta ficha, solicitou-se aos alunos a elaboração de um novo mapa conceitual sobre Análise Combinatória. O propósito desta tarefa era verificar se haveriam diferenças (acréscimos) em relação ao mapa elaborado no momento inicial. Com esse mesmo propósito, no último dia, pediu-se novamente a resolução da avaliação diagnóstica e que os alunos respondessem a um questionário com a finalidade de obtermos suas opiniões em relação ao material aplicado, em especial no que diz respeito à utilização deste na Educação Básica.

Análise da aplicação

Análise inicial

Na análise dos dados referentes ao diagnóstico inicial constatamos que dez alunos eram do curso de Licenciatura em Matemática e quatro eram do curso de Bacharelado em Matemática. O curso de Licenciatura em Matemática tem por propósito formar professores de Matemática para atuarem na Educação Básica (que compreende o Ensino Fundamental e o Ensino Médio); neste, além de conhecimentos matemáticos específicos são também abordados conhecimentos pedagógicos. Já o Bacharelado em Matemática objetiva formar futuros pesquisadores e docentes do ensino superior e preparar o mercado de trabalho fora do ambiente acadêmico.

Quanto à aprendizagem de Análise Combinatória verificamos que os alunos viram esse conteúdo no Ensino Médio, com exceção de dois deles que relataram não ter aprendido este conteúdo neste nível de ensino. Quase todos recordaram ter visto os conceitos de Combinação, Arranjo e Permutação, e alguns mencionam o Princípio Fundamental de Contagem.

Em relação à abordagem deste conteúdo, somente um aluno disse ter aprendido através da resolução de problemas e os demais responderam ter visto este assunto de forma tradicional, descrita por alguns como tecnicista ou mera aplicação de fórmulas. Ressaltamos que havíamos trabalhado com os alunos o artigo de Fiorentini (1995), segundo o qual a tendência tecnicista, ainda presente no Ensino Médio, concebe a matemática como um conjunto de técnicas, regras, algoritmos. Portanto, entendemos que era este o significado que eles estavam atribuindo aos termos mencionados.

Quanto à aprendizagem na Universidade, os alunos apontaram que a Análise Combinatória foi abordada nas disciplinas de Introdução a Teoria de Probabilidade e em Tópicos de Matemática Elementar; todos os alunos haviam cursado pelo menos uma delas. Todos concordaram que, em ambos os casos, o ensino foi tradicional, e alguns o caracterizaram como superficial.

Assim, verificamos que: (i) todos os alunos tiveram contato com os conteúdos de Análise Combinatória ou no Ensino Superior ou no Médio, o que vem ao encontro do posto pela literatura de que esse conteúdo em geral não é abordado em anos escolares anteriores; e (ii) a maioria alegou que esse conteúdo foi abordado de modo tecnicista e superficial; desta forma, observamos, nesse grupo, que métodos intuitivo e resolução de problemas — tal como sugerido pelos PCN — raramente são utilizados, prevalecendo ênfase em fórmulas e técnicas, tal como posto por Silva et al. (2007).

Referente ao primeiro mapa conceitual confecionado pelos alunos, os temas e assuntos mais mencionados, foram: Arranjo, Combinação e Permutação; aplicação em probabilidade e Princípio Fundamental da Contagem. Nesta fase, verificamos que, em sua maioria, os mapas conceituais foram simples, sem muitos conceitos ou interligações. Muitos o entenderam como um conjunto de palavras "soltas", não correlacionando os conceitos e não montando frases que os explicassem. Apenas um aluno se empenhou na utilização de frases para expor algumas definições, mas também se ateve a uma pequena porção do conteúdo. Segue um exemplo representativo da maioria dos mapas conceituais elaborados:

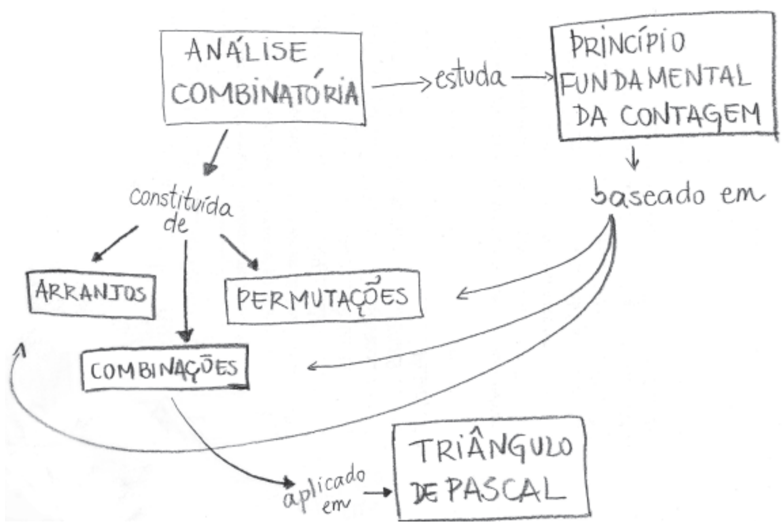


Figura 1. Mapa Conceitual Inicial: aluno A1

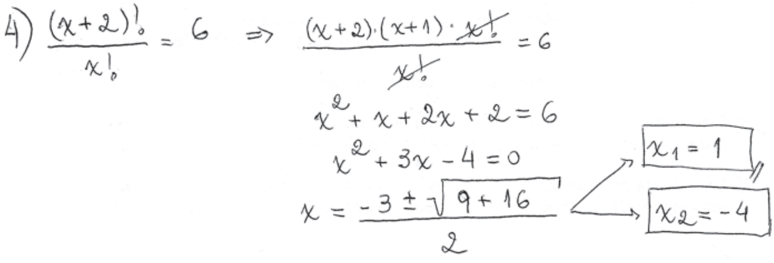


Figura 2. Quarta questão sem uso da restrição: aluno A1

No início da resolução da avaliação diagnóstica, alguns alunos comentaram que não se lembravam das fórmulas, com indagações do tipo: “Mas como eu vou fazer se não me lembro das fórmulas?”. Percebemos que a maioria dos alunos fez uso do Princípio Multiplicativo, mas este raramente fora enunciado. Verificamos ainda que todos sabiam operar com números fatoriais, entretanto, a partir do terceiro exercício, alguns interpretaram os problemas de forma incorreta, fazendo algumas confusões ou não se atentando a algumas restrições. Vejamos, por exemplo, a resolução de um aluno referente ao exercício em que se pedia para resolver a equação

$$\frac{(x+2)!}{x!} = 6, \quad x \geq 0.$$

Verificamos, nesse caso, que o aluno apresenta duas soluções, uma positiva e uma negativa, não se atentando à restrição $x \geq 0$ (Fig. 2).

Mesmo que em alguns casos este erro seja advindo de uma simples distração, entendemos que, em geral, os alunos apresentavam uma *tendência em resolver os problemas mecanicamente*, sem se ater ao contexto dos mesmos. Isso foi reforçado em outros momentos como segue. Por exemplo, verificamos que na resolução do quinto problema (Anexo I), metade dos alunos utilizou o princípio multiplicativo e os demais utilizaram a notação e a fórmula de combinação. Observamos que, em uma dupla, um aluno começou a resolver este problema através do Princípio Multiplicativo, mas o outro insistiu em usar a fórmula. Ao final, ambos acabaram utilizando notação e fórmula de combinação.

A partir do sexto problema, a maioria dos alunos utilizou o Princípio Multiplicativo, mas alguns confundiram Arranjo com Combinação[9]. Já no caso abaixo, um aluno utilizou a notação de combinação, porém com a fórmula de arranjo (em ambas situações--problema).

$$⑥.\quad C_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!} =$$

$$⑦\quad C_{10}^{15} = \frac{15!}{(15-10)!} =$$

Figura 3. Exercícios 6 e 7: Notação de combinação com fórmula de arranjo, aluno A3

Análise durante a aplicação do material

Referente ao primeiro dia de aplicação do material, constatamos que, em geral os alunos, apesar de estarem no último ano do curso de Licenciatura em Matemática, decoram fórmulas e nomes; muitos se confundem na aplicação das mesmas, demonstrando não compreenderem o significado dos conceitos envolvidos e suas diferenças; no decorrer da aplicação, essa tendência foi confirmada. No desenvolvimento do primeiro nível do material, observamos que os alunos resolviam os exercícios mecanicamente, aplicavam diretamente as fórmulas sem se preocupar com a descrição ou explicação do raciocínio empregado. Isso caracteriza uma tendência maior para uma aprendizagem mecânica do que para uma aprendizagem significativa, como posto em Ronca (1980).

Como fechamento da atividade deste dia, a professora responsável pela disciplina abriu uma discussão avaliativa do material com os alunos comentando cada uma das atividades, perguntando, por exemplo, as diferenças entre as duas primeiras situações-problema e os alunos comentam sobre importar ou não a ordem, então a professora complementa ressaltando o fato de se usar notações diferentes para objetos diferentes (chaves para subconjuntos e parênteses para pares ordenados); na sequência, houve uma pequena discussão sobre o que mais poderia ser abordado em uma sala de aula da Educação Básica e de que modo.

Outro episódio que retrata a tendência em utilizar fórmulas mecanicamente ocorreu no final da aplicação do segundo nível de trabalho (quarto dia). Neste dia, durante a discussão final a respeito da resolução dos exercícios a professora perguntou sobre o problema nove (Anexo II) e um aluno respondeu tratar-se de uma combinação e que, portanto, bastava utilizar sua fórmula. A professora relembrou que, numa abordagem inicial, os alunos ainda não saberiam a fórmula, mas esse licenciando não conseguia resolver o problema de outra maneira. Isto exigiu que a resolução do problema fosse feita passo a passo pela professora com a participação dos alunos, com a finalidade de se chegar à fórmula de combinação. Tal constatação nos permitiu trabalhar com mais ênfase o proposto pelo material de que as fórmulas seguiriam como consequência do raciocínio combinatório, deduzidas a partir das resoluções dos diversos problemas, tendo como função a simplificação de cálculos quando a quantidade de dados for muito grande.

Outro aspecto detectado foi a dificuldade dos alunos em *identificar os conceitos*. No segundo dia de aplicação, percebemos que estes possuíam ideias intuitivas dos conceitos, mas não conseguiam identificá-los. Tanto na atividade dois quanto na três (Anexo III) — atividades de fechamento que requeriam uma comparação entre um problema sobre combinação e um sobre arranjo — os alunos apontaram a diferença entre importar ou não a ordem, mas não comentaram se era arranjo ou combinação, como exemplificado no trecho que segue referente à resolução dos alunos A4 e A5.

> O problema um não importa a ordem e o problema dois importa a ordem dos eventos e ambos utilizam o princípio multiplicativo.

Todos resolveram o sétimo e oitavo problemas (Anexo IV) através do princípio multiplicativo e fizeram a atividade quatro sem identificar quando se tratava de permutação e quando se referia a arranjo. No decorrer da aplicação, observamos que essa dificuldade foi gradativamente sanada: as resoluções e discussões das atividades permitiram que esses conceitos fossem compreendidos. Neste dia, a intervenção foi constante, durante toda a aplicação, a professora questionava grupo a grupo relembrando que numa situação de ensino os alunos da Educação Básica não saberiam as fórmulas e a ideia inicial era exatamente trabalhar, intuitivamente, as ideias e conceitos que culminariam posteriormente nas fórmulas.

A partir do terceiro dia, começamos a perceber que os licenciandos tinham muita dificuldade na formalização e generalização dos conceitos, como na atividade cinco, (contemplada no Anexo V) os alunos apresentaram muitas dificuldades. Durante a resolução alguns reclamaram: "Quanto às definições, eu não lembro e é muito difícil definir formalmente". Nesta quinta atividade, pedia-se uma generalização dos problemas trabalhados anteriormente. A maioria dos alunos resolveu o exercício para dez dígitos numéricos, mas não o generalizou. Outros chegaram a utilizar variáveis, porém não fizeram um fechamento do raciocínio e não conseguiram deduzir a fórmula (Fig. 4).

Neste dia, a professora promoveu uma discussão das possibilidades de resolução, visando levar os alunos a perceberem que poderiam construir os conceitos e não simplesmente aplicá-los. Os PCN (Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999) enfatizam que a participação do aluno na elaboração de seu conhecimento é um dos pontos fundamentais na concepção atual da aprendizagem, a qual deve ser orientada tendo em vista os conceitos a serem construídos, bem como as tarefas a serem realizadas para que esta construção se efetive.

Durante o quarto dia de aplicação, no desenvolvimento do terceiro nível, quanto ao problema quinze (Anexo I), que envolvia pela primeira vez permutação circular, os alunos se confundiram nas resoluções. Ficou evidente que sabiam a fórmula, mas não sabiam demonstrá-la. Algumas duplas tentaram responder por enumeração, no entanto, não obtiveram sucesso.

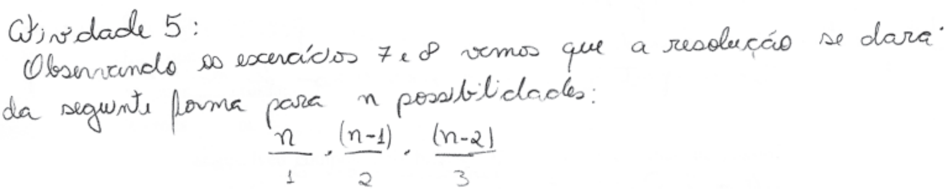


Figura 4. Tentativa de generalização: aluno A4

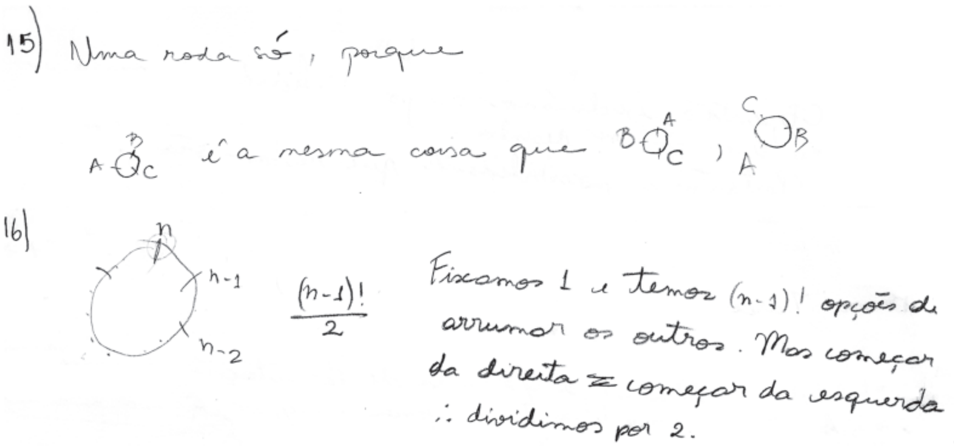


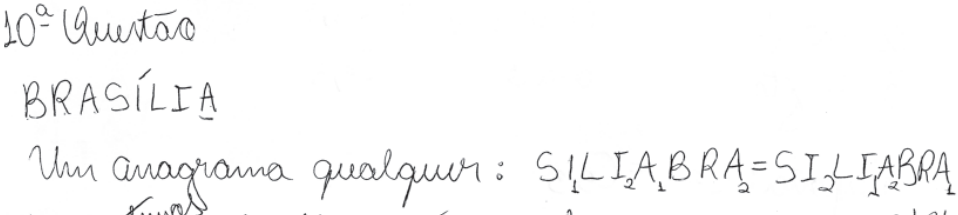
Figura 5. Resolução por enumeração: aluno A5

Na figura 5 acima vimos que, na tentativa de demonstrar a fórmula, os alunos desta dupla se confundiram e acabaram dividindo o resultado por dois. Com exceção de um único grupo, todos os outros não conseguiram acertar a resolução do último exercício, número dezasseis (Anexo VI), que se tratava da generalização da permutação circular para n elementos. Neste dia, além de uma discussão dos resultados com a participação dos alunos, foi preciso a *intervenção da professora*, adicionando uma atividade de fechamento com o propósito de relacionar os itens anteriores e generalizar os casos de permutações circulares. Ela motivou a participação dos alunos para chegarem ao resultado e concluiu com a generalização dos mesmos.

Nesse sentido, com o material proposto e a postura adotada, pode-se intervir considerando como importante não que o aluno simplesmente soubesse quando usar uma fórmula, mas sim que tipo de raciocínio utilizar em cada problema, o que acreditamos que deva ocorrer com a experiência vivenciada em um ambiente de equilíbrio entre o intuitivo e o lógico, como posto na proposta de Meneghetti (2001, 2009). Assim, como enfatizado por Cerri e Druck (2003), o ensino aqui não deve se reduzir à aplicação de fórmulas como geralmente se vê, mas sim a uma compreensão de estratégias de resolução de problemas para contagem de conjuntos finitos sem ter que enumerá-los caso a caso. Posteriormente, pode ser útil se chegar às fórmulas, ou generalizações, porém como sistematização dos conceitos.

Além disso, destacamos nesses episódios, a importância do trabalho do professor como mediador principalmente na passagem do intuitivo para o lógico, pois os alunos só conseguiram chegar às generalizações dos conceitos mediante a intervenção da professora. Nesse sentido, concordamos com Malachias e Correia (2006), que o sucesso da aprendizagem depende das atitudes do professor, devendo este estimular nos alunos a persistência, elogiar os esforços, e oferecer a todos a oportunidade de serem bem sucedidos na aprendizagem. Assim, o professor deve problematizar e permitir que os alunos pensem por si próprios, errando e persistindo, o que é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos (Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999, p. 126).

A partir do quarto dia de aplicação do material, observamos uma *mudança de postura dos alunos*, frente ao conteúdo abordado e a forma de resolução das atividades, pôde ser observada, uma vez que as atividades iniciaram-se com a exposição dos próprios alunos quanto aos métodos de resolução dos exercícios da aplicação anterior. Após breve discussão, a professora indagou quanto à generalização dos conceitos e as intervenções foram para auxiliá-los nesta tarefa. De acordo com as fichas de resolução, no primeiro problema, o qual pedia os anagramas para a palavra Brasília, a maioria dos alunos utilizou a aplicação direta da fórmula de permutação com repetição, entretanto dois grupos tentaram explicar citando exemplos de repetição:


10ª Questão

BRASÍLIA

Um anagrama qualquer: $SI_1LI_2A_1BRA_2 = SI_2LI_1A_2BRA_1$

Então, temos que dividir o número de anagramas por $2!2!$

Figura 6. Explicação através de exemplos: alunos A4 e A5

O exercício acima foi feito por um grupo formado pelos alunos A4 e A5 que além de discutir a questão com alunos de outros grupos, mostrou preocupar-se com uma resolução voltada ao pensar dos alunos. Reforçamos este fato com o trecho abaixo, referente a gravação do diálogo entre os membros desse grupo:

Aluno A4: Mas se você estivesse dando isso numa sala de aula o aluno ia ficar confuso.
Aluno A5: Mas é diferente esse i aqui ó, tem que resolver igual o aluno e o aluno resolve assim ó: Ele pega um anagrama da palavra Brasília, certo? Fala um aí?
Aluno A4: Um anagrama da palavra Brasília?
Aluno A5: Põe aí Siliabra, beleza? Um anagrama qualquer.

Nota-se o início de uma preocupação com o entendimento da resolução e não simplesmente com a utilização de fórmulas. Percebemos que, aos poucos, além de diminuírem as confusões nas resoluções, os licenciandos pensaram em novas possibilidades para os exercícios e alguns começaram a explicar melhor o raciocínio utilizado. Por exemplo, detetamos que todos acertaram o exercício vinte e dois (Anexo VII), alguns utilizando o Princípio Multiplicativo, outros, Arranjo. Além disso, dois grupos acrescentaram outra hipótese ao problema (a saber, a possibilidade dos anéis serem iguais, visto que o enunciado dava abertura para essa interpretação também).

Análise pós-aplicação

Ao analisar os novos mapas conceituais, elaborados pelos alunos no sexto dia de aplicação do material, verificamos que nesses eles estabeleceram mais claramente as ligações entre os conceitos e a formalização dos mesmos, enriquecendo mais os dados.

Nos comentários feitos pelos alunos no questionário final referente ao que acharam do material, verificamos posições tal como: "Achei o material muito interessante, pois estimula a participação do aluno e faz com que ele não decore as fórmulas, mas sim que construa as ideias dos conceitos." (aluno A10).

Assim, percebemos que os alunos começaram a ater-se mais ao significado dos conceitos e não somente à aplicação de fórmulas de maneira mecânica; discutindo, argumentando e justificando melhor o processo de resolução. Pudemos também verificar um *progresso na aprendizagem*, como segue.

Detetamos que houve uma mudança na forma como os alunos representavam os conteúdos, o que, segundo Mauri (2003), denota uma mudança em seus esquemas de conhecimento. Para esta autora, este esquemas são a representação que uma pessoa tem, em um determinado momento, sobre uma parcela da realidade. A modificação desses é caracterizada como um dos objetivos fundamentais da educação escolar, pois, concebe-se que, aprender algo é equivalente à elaboração de uma representação pessoal do conteúdo em estudo. Essa mudança na forma de representar os conceitos pôde ser percebida a partir do quarto dia da aplicação, como já enfatizado anteriormente. Isso também foi percebido através da análise dos mapas conceituais elaborados alunos após a aplicação. Sobre esses últimos, notamos que não houve acréscimo de frases e exemplos, mas em todos os apareceram mais conceitos interligados. Segue um exemplo de um aluno e seu mapa conceitual antes e após a aplicação:

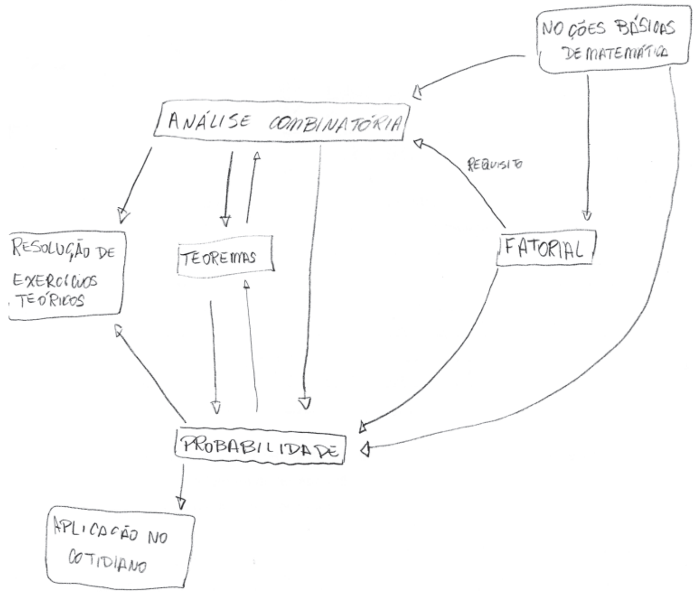


Figura 7. Mapa inicial do aluno A8

Os pontos acrescentados foram denotados por um sinal positivo:

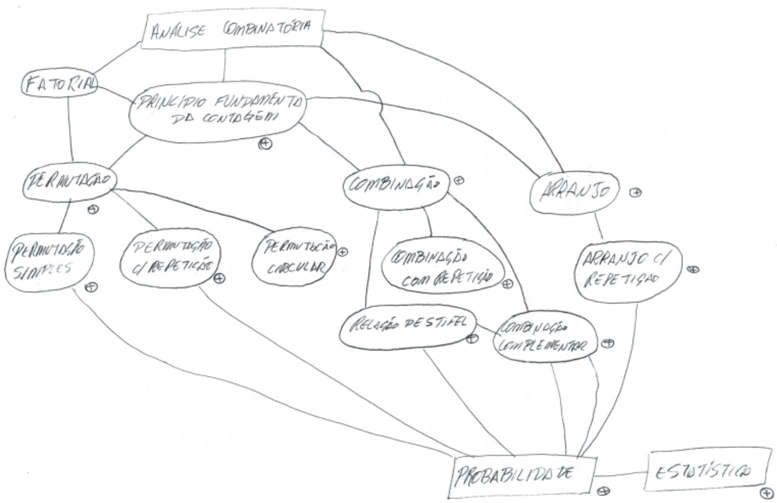


Figura 8. Mapa final do aluno A8

Observamos também que em vários casos as fórmulas apareciam interligadas aos conceitos como segue nos mapas conceituais, inicial e final:

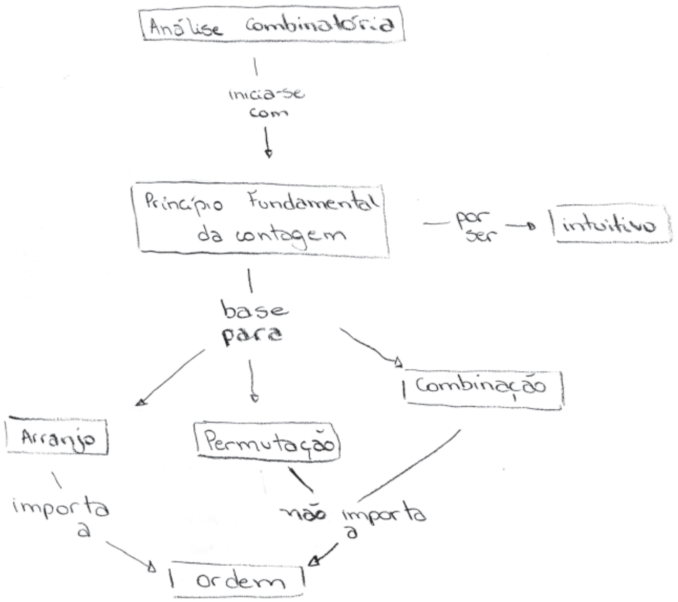


Figura 9. Mapa inicial do aluno A9

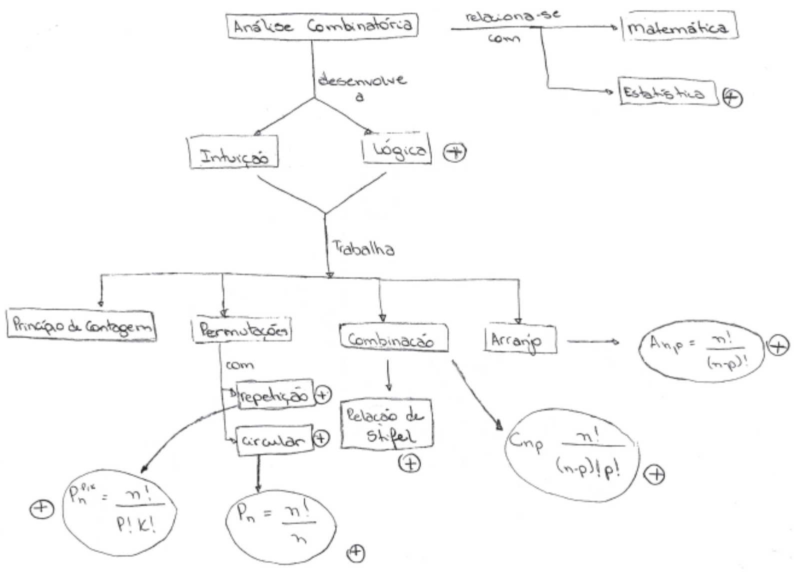


Figura 10. Mapa final do aluno A9

Quanto à resolução no diagnóstico final, verificamos que não houve mais confusões na utilização de fórmulas, diferentemente do que ocorreu no diagnóstico inicial, em que muitos trocaram as fórmulas de arranjo e combinação, sem saber distinguir o momento adequado do uso de cada uma. Além disso, percebemos uma melhora nas descrições e anotações dos alunos.

A título de exemplificação, apresentaremos as avaliações, inicial e final, de um dos alunos.

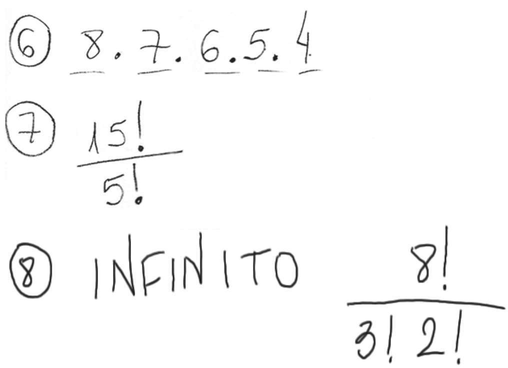


Figura 11. Avaliação diagnóstica inicial do aluno A10

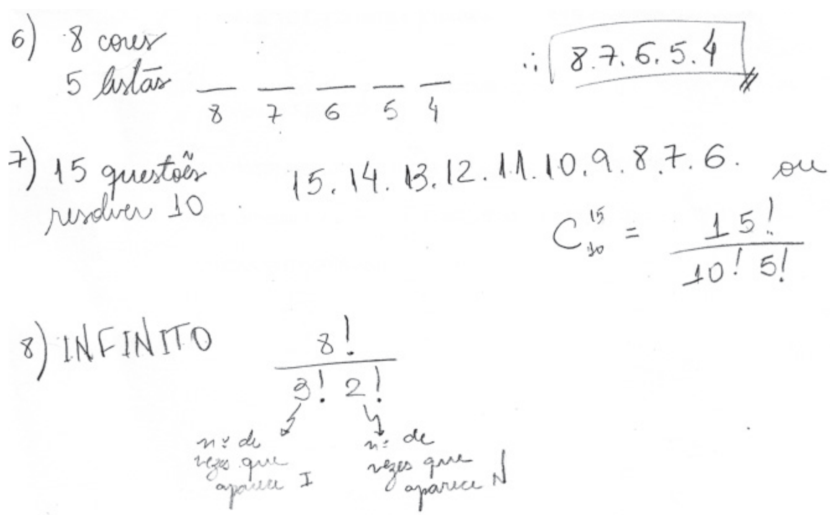


Figura 12. Avaliação diagnóstica final do aluno A10

Algumas características da aprendizagem significativa, como posto por Ronca (1980), puderam ser encontradas no material trabalhado, a saber: partir do que o aluno já sabe e deixar claro as semelhanças e diferenças dos conceitos de acordo com os exercícios e situações propostas; permitir aos alunos a comparação e estabelecimento de relação entre os conceitos.

De acordo com o respondido pelos alunos no questionário final, constatamos que a maioria achou o material muito bom e interessante, fazendo alguns comentários, tais como: exige ampla participação do facilitador (no caso, o professor); tem um bom desenvolvimento de conteúdo; estimula a participação sem ter que decorar fórmula; respeita o nível de dificuldade dos alunos.

Quando indagamos sobre a aplicação do material, em níveis de ensino nos quais eles atuarão, a maioria achou que seria bem sucedida por trabalhar níveis com aumento gradual da dificuldade e haver um equilíbrio entre intuitivo e lógico; outros comentaram que o material incentivaria o raciocínio e a criatividade, favorecendo a participação e a aprendizagem do aluno. Destacamos abaixo a colocação de uma das alunas.

> Sim, trabalhar com os exercícios e depois generalizá-los encontrando assim a fórmula geral, foi uma forma nova para mim, de ver as fórmulas. [...] essa maneira de ensinar proporciona que os alunos ‹descubram› o conteúdo, forçando seu raciocínio e sua criatividade [...]. (aluna A1)

Também na análise do questionário final, pudemos verificar outros comentários e sugestões, tais como: "não há muita aplicação ao cotidiano"; "serve para turma pequena"; "algumas questões de Princípio Multiplicativo poderiam ser aplicadas no Ensino Fundamental". Sobre isso, compreendemos que, embora o material já se apresente numa abordagem alternativa, de fato as situações-problema poderiam ser apresentadas de forma mais contextualizada, o que entendemos como uma sugestão para uma revisão do material antes de outras aplicações. Em relação a poder ser aplicado no Ensino Fundamental, concordamos que uma parte introdutória da Análise Combinatória possa, e até deva ser feita neste nível de ensino. Por fim, quanto ao número de alunos, é claro que quanto menor será mais fácil trabalhar qualquer tipo de abordagem, entretanto entendemos que há dinâmicas, como o trabalho grupal, que possibilitam que isso possa ser feito também em classe com número maior de alunos (desde que este número não seja exageradamente grande).

Discutindo os resultados e traçando algumas considerações

Como já posto por Silva et al. (2007), o ensino de Matemática, em sua maioria, ainda está centrado mais no uso de fórmulas do que na compreensão. Em meio a este contexto, o ensino da Combinatória, na maioria das vezes, tem se parecido mais com um jogo de fórmulas complicadas, ao invés de explorar o raciocínio combinatório nelas implícito. Tais fatos foram também percebidos em nossa investigação. Daí a importância de se buscar por abordagens alternativas referentes a esse conteúdo. Segundo Sturm (1999), este tipo de abordagem sugere a abertura à participação dos alunos e predominância do pensamento combinatório em vez da ênfase às fórmulas, o que vem ao encontro com o principal objetivo do material focado neste artigo.

Verificamos nesta pesquisa que, quando o conteúdo é trabalhado com ênfase em fórmulas e memorização, os alunos tendem a reproduzir isso quando se deparam novamente com esse conteúdo, foi aconteceu com esse grupo, eles já tinham visto esse conteúdo em outras disciplinas (de forma tradicional) e apresentaram uma forte tendência em tentar usar fórmula de maneira automática e sem compreensão, atitude que foi sendo mudada no decorrer da aplicação. Por isso, apontamos para a importância de proporcionar aos licenciandos oportunidade de vivenciarem o tratamento do conteúdo por meio de abordagens alternativas de ensino, pois muitas vezes somente apresentar e discutir essas abordagens não se mostra suficiente na direção de se quebrar com um estilo já enraizado em suas formações.

Para Perez, Costa e Viel (2002), a dificuldade dos alunos em aprender os conceitos matemáticos e a falta de domínio da capacidade de conseguir perceber a utilidade do que aprendem são reflexos da prática arcaica do professor e de sua formação. De acordo com Onuchic (1999), a formação dos professores, tanto a inicial quanto a continuada, pouco tem contribuído para qualificá-los para o exercício da docência. Não tendo condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas de sala de aula, eles se apoiam quase que exclusivamente nos livros didáticos que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória.

O estudo de Reis e Zuffi (2007), realizado com professores de matemática da Educação Básica, aponta que os professores que não tiveram anteriormente nenhuma experiência com metodologia de Resolução de Problemas em sua formação dificilmente conseguem lidar com este tipo de atividade em sala de aula. Isso reforça a importância de proporcionar que os licenciandos vivenciem abordagens alternativas de ensino e aprendizagem de matemática tal como a que focamos neste artigo.

Assim, esta investigação aponta que trabalhar o conteúdo por meio de abordagens deste tipo pode ser de grande eficácia em cursos de formação inicial de professores pelos seguintes motivos: permitiu que aos licenciandos vivenciarem o desenvolvimento de um conteúdo por meio de uma metodologia alternativa; mostrou-se como uma oportunidade de aprendizagem e reflexão (embora eles já tivessem visto este conteúdo numa abordagem tradicional); favoreceu uma mudança de postura frente ao conhecimento, de um enfoque mecânico (com ênfase na aplicação direta de fórmulas) para uma abordagem mais significativa (visando a compreensão e a construção dos conceitos envolvidos) possibilitando assim uma combinação adequada entre o conhecimento da matéria (a ensinar) e o conhecimento didático-pedagógico de como ensinar; fato destacado por Garcia (1999) como essencial quando se refere ao conhecimento profissional do professor. Com isso, entendemos que propostas deste tipo podem contribuir para o repertório dos saberes profissionais do licenciando; num esforço de se considerar saberes específicos e pedagógicos concomitantemente.

Desta forma, acreditamos que tais vivências poderão repercutir positivamente nas futuras atuações desses licenciandos em sala de aula, donde se ressalta ainda mais sua importância em cursos de formação inicial de professores. Segundo Mizukami (1996, citado por Perez, 2004, p. 259) "as crenças, os valores, as suposições que os professores têm sobre ensino, matéria, conteúdo curricular, alunos, aprendizagem estão na base de sua prática de sala de aula.".

Portanto, concordamos com Wilson (1994, citado por Oliveira & Ponte, 1997) que devemos dar ao futuro professor oportunidades para refletir sobre seu conhecimento enquanto aprende a aprender a matemática que ele próprio irá ensinar. Assim, será mais fácil provocar mudanças na compreensão desses assuntos e consequentemente em sua futura atuação em sala de aula. Por fim, ressaltamos, tal como apontado por Perez (2004), que deve haver um processo de mudança de concepções no aluno dos cursos de formação de professores, sendo uma das primeiras a ser tomada é não deixar que os alunos ingressem nas universidades com uma concepção de professor lembrando-se daqueles que já tiveram e concluam seus cursos com a mesma concepção.

Notas

[1] A Educação Básica no Brasil contempla o Ensino Fundamental (duração de nove anos) mais o Ensino Médio(duração de três anos).

[2] Referente à criação pessoal do indivíduo.

[3] No sentido de ser socialmente aceite.

[4] Com alunos da licenciatura (Semana de Matemática) e junto a alunos do ensino médio (através de minicurso oferecido sob a supervisão da primeira autora).

[5] Sobre este nível, durante a aplicação, sentimos a necessidade de introduzir uma atividade de fechamento.

[6] Segundo Lüdke e André (1986, p. 20), o estudo de caso enfatiza a interpretação em contexto, busca retratar a realidade de informação, revela experiências e permite generalizações, utiliza uma linguagem e uma forma mais acessível do que outros relatórios de pesquisa e pode ser apresentado na forma de desenhos, fotografias, colagens, discussões etc.

[7] Ainda segundo Lüdke e André (1986, p. 30), o observador-participante assume até certo ponto o papel de um membro do grupo e deve revelar tanto sua identidade como os objetivos da pesquisa.

[8] O mapa conceitual é entendido como uma ferramenta para organizar e representar conhecimento. Trata-se de uma representação gráfica em duas dimensões de um conjunto de conceitos construídos de tal forma que as relações entre eles sejam evidentes (Dutra, 2007).

[9] Na sétima questão, por exemplo, somente seis alunos utilizaram o conceito e a fórmula de combinação corretamente.

Referências

Borba, R. (2010) *O raciocínio combinatório na educação básica*. Anais X. Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, Bahia.

Cerri C. & Druck, I. F. D. (2003). Combinatória sem Fórmulas. Ministério da Educação. Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE-SP). *PEC Construindo Sempre* — Aperfeiçoamento de professores PEB II, 30-45.

Diniz, M. I. S. V. (1991). A metodologia "resolução de problemas". *Revista do Professor de Matemática*, 18, 12–19.

Dutra, I. M. (Coord.) (2007). *Mapas Conceituais na Educação*. Obtido em 04 de outubro de 2007, de http://mapasconceituais.cap.ufrgs.br/mapas.php.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Bristol: Farmer.

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. *Revista Zetetiké*, 3(4), 1–37.

Fiorentini, D. & Castro, F.C. (2003). Tornando-se professor de matemática: o caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado. In Fiorentini, D. (Org.). *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. (pp. 121–156). Campinas, SP: Mercado das Letras.

García, C. M. (1999). *Formação de Professores: para uma mudança educativa*. Lisboa: Porto Editora.

Gazire, E. S. (1988). *Perspetivas da resolução de problemas em Educação Matemática*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Gómez, A. P. (1992). O pensamento prático do professor: a formação do professor como profissional reflexivo. In Nóvoa, A. (Org.) *Os professores e a sua formação* (pp. 93–114). Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Hariki, S. (1996) Conectar problemas: uma estratégia de resolução de problemas combinatórios. *Revista Educação e Matemática*, 37, Portugal.

Kant, I. (1997). *Crítica da Razão Pura*. (4.ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Lopes, C.A.E. (2003). *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação. Universidade de Campinas: Campinas. (http://biblioteca.universia.net/ficha.do?id=3260327).

Ludke, M. & André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Malachias, M.E.I. & Correia, P.R.M. (2006). Práctica de actividades didácticas con mapas conceptuales. *Novedades Educativas*, 181(192/193), 84-91.

Martim, C., Santos, I. (2008). *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos).* Lisboa: Associação de Professores de Matemática, CD-ROM.

Mauri, T. (2003). O que faz com que o aluno e a aluna aprendam os conteúdos escolares In COL et al. *O Construtivismo em sala de aula*. São Paulo: Editora Ática. p. 79 - 122.

Meneghetti, R. C.G. (2001). *O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: Uma análise a luz da história e da filosofia da matemática*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro: SP.

Meneghetti, R. C. G. (2009). O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 22(32), 161–188.

Meneghetti, R.C.G. & Bicudo, I. (2003). Uma discussão sobre a Constituição do Saber Matemático e seus Reflexos na Educação Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 16(19), 58–72.

Meneghetti, R.C.G. & Nunes, A C.A. (2006). Aplicação de uma proposta pedagógica no ensino dos números racionais. *Educação Matemática em Revista*: Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 13(20/201), 77–86.

Merayo, F. (2001) *Matemática Discreta*. Madrid: Editora Thomson Paraninfo S.A.

Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica (1999). P*arâmetros Curriculares Nacionais (PCN) — Ensino Médio*. Brasília-DF.

Mizukami, M.G.N. (1996). Docência, Trajetórias Pessoais e Desenvolvimento Profissional. In Reali, A.M.M.R. & Mizukami, M.G.N. (Eds.) *Formação de Professores: Tendências Atuais*. (pp.59–91). São Carlos, SP: EdUFSCar.

Nasser, L. (1989). Um problema: resolução & exploração. *Revista do Professor de Matemática*, 15, 45–49.

Nóvoa, A. (Org.) (1992). *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Publicação Dom Quixote.

Oliveira, H. & Ponte, J. P. (1997). Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional de professores de matemática. In *Actas do SIEM*. (pp. 3–23). Lisboa: APM. (`www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/97-SIEMVII.rtf`).

Onuchi, L. R. (1999). Ensino-Aprendizagem de Matemática através de resolução de problemas. In Bicudo, M.A.V. (org.) *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas*, (pp. 199–218). São Paulo, SP: Editora UNESP.

Onuchi, L. R. & Norma S. G. A. (2004). Novas Reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In Bicudo, M.A.V. & Borba, M.C. (orgs.) *Educação Matemática: pesquisa em movimento* (pp. 213–231) São Paulo, SP: Editora UNESP.

Perez, G. (2004). Prática reflexiva do professor de Matemática. In Bicudo, M.A.V. & Borba, M. de C. (orgs.) *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. (pp. 250–263) São Paulo, SP: Cortez.

Perez, G., Costa, G. L M. & Viel, S. R. (2002). Desenvolvimento profissional e prática reflexiva. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*. 15(17), 59–70.

Pessoa, C., Borba, R. (2010) O raciocínio combinatório do início do ensino fundamental ao término do ensino médio. *Anais X Encontro Nacional de educação Matemática*. Salvador, Bahia.

Piaget, J. (1983) *O possível e o necessário II — A evolução dos necessários na criança*. (Albuquerque, B. M., trad.) Artes Médica, Porto Alegre.

Pinheiro, C. A. M. (2008). *O Ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema*. Dissertação (Mestrado em Educação),Universidade do Estado do Pará, Belém.

Reis, M. M. V. & Zuffi, E.M. (2007). Estudo de um caso de implantação da metodologia de resolução de problemas no Ensino Médio. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 20 (28), 113–137.

Rocha, C. A. & Borba, R. E. S. R. (2010). Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diferentes olhares. *Anais X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, Bahia.

Romanatto, M. C. Resolução de problemas na formação de professores e pesquisadores. In: *I SERP — I Seminário em Resolução de Problemas*, 2008, Rio Claro. Anais do I SERP. Rio Claro : Unesp, 2008. v. 1. p. 1–10.

Ronca, A. C.C. (1980). O modelo de David Ausubel. Penteado, W.M.A (Org.), *Psicologia de Ensino*. (pp.59–83) São Paulo: Papilivros.

Secretaria da Educação de São Paulo. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. (1991) *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 2º grau*. SE/CENP , São Paulo.

Silva, D. N, Fernandes, J. A. & Soares, A. J. (2004) instituições de alunos de 12.º ano em combinatória: Um estudo exploratório. In Fernandes, J. A., Sousa, M. V., Ribeiro, S. A. (Orgs.) Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística: *Actas — I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (p. 61–84) Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Silva, J. R., Ruffino, M. A. S & Moreira, M. A. (2007). Alusão à Combinatória a partir dos Princípios Aditivos e Multiplicativos. *XII Comitê Interamercano de Educação Matemática*, Santiago de Querétaro: México: Comitê Interamericano de Educadión Matemática & Grupo Interncional Comission on Matemathical Instrutuction. 1. CD-ROM.

Silver, E. A. (1996). Acerca da formulação de problemas de Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.) *Investigar para Aprender Matemática*. (pp. 139-162) Lisboa: Projecto MPT e APM.

Soares,F. S., & Dornelas, G. N. (2007) A Lógica no cotidiano e a lógica na Matemática. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*. Belo Horizonte: SBEM-MG.

Souza, A. C., Lopes, C. A. E., Oliveira, D. & Freitas, N. (2010) Atividades de ensino para abordagem da Análise Combinatória e da Probabilidade na Educação Básica. *Anais X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, Bahia.

Stanic, G. M.A. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R.I. Charles & E. A. Silver (Eds.) *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston, VA: NCTM e Lawrence Eribaum.

Sturm, W. (1999). *As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa*. Dissertação de Mestrado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas.

Van De Walle, J.A.(2001). *Elementary and Middle School Mathematics*. New York: Longman,.

Varandas, J. (2000) *Avaliação de investigações matemáticas: uma experiência*. Dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Vygotsky, L. (1991) *Pensamento e linguagem*. 3.ed. São Paulo: M. Fontes.

Wilson, M. R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal For Research in Mathematics Education*, 25(4), 346–370.

Anexo I

15.Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 3 crianças?

Anexo II

9. a) Calcule o número de subconjuntos com três elementos, de um conjunto A com oito elementos.
b) Calcule o número de triplas ordenadas de um conjunto de oito elementos.
c) Relacionar os itens (a) e (b) (apresentar (a) em função de (b)).
d) Generalize o item (c) para subconjuntos com p elementos, de um conjunto A com n elementos ($p \leq n$). A partir destas generalizações, o aluno poderá melhor entender os agrupamentos definidos (arranjo, combinação e permutação).

Anexo III

Atividade 2: A fim de que o aluno perceba o significado e a diferença dos conceitos de arranjo e combinação, solicite que eles relacionem os problemas 1 e 2, comparando suas respectivas soluções.

Atividade 3: Compare os problemas 5 e 6. O que é possível dizer quanto à natureza dos resultados possíveis?

Anexo IV

7. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 7, 8 e 9?

8. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os dígitos 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Anexo V

Atividade 5: Generalize os problemas 7 e 8 para n dígitos .

Anexo VII

22. Sílvia quer usar, ao mesmo tempo, dois anéis, colocando-os em dedos diferentes da mão esquerda, exceto o polegar. De quantos modos poderá fazê-lo?

Resumo. Neste artigo abordamos a aplicação de um material didático para o ensino de Análise Combinatória em um curso de formação de professores. Este material foi estruturado considerando-se a metodologia de resolução de problemas e uma proposta pedagógica segundo a qual o desenvolvimento do conhecimento matemático se dá mediante um equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo. Tivemos por objetivo analisar o potencial didático-pedagógico deste material neste tipo de curso. A aplicação seguiu uma metodologia de pesquisa qualitativa - estudo de caso - e se deu vinculada à disciplina de Prática de Ensino, num curso de Licenciatura em Matemática numa universidade pública do estado de São Paulo – Brasil. Esta experiência permitiu aos futuros professores vivenciarem o desenvolvimento de um conteúdo por meio de uma metodologia alternativa, mostrando-se como uma oportunidade de aprendizagem e reflexão e favorecendo uma mudança de postura desses alunos: de um enfoque tecnicista para uma abordagem mais significativa, com ênfase na construção do conhecimento. Acreditamos que experiências deste tipo possam refletir positivamente nas futuras atuações desses estudantes em sala de aula, enquanto professores.

Palavras-chave: Combinatória, Material didático, Formação de professores, Resolução de problemas, Aspetos lógico e intuitivo.

Abstract. This paper reports on application of a didactical material to teach Combinatory Analysis to Degree Mathematics Teaching. The material was developed using a problem-solving methodology and according to a pedagogical proposal in which mathematical knowledge is obtained as a balance of logical and intuitive aspects. The research focused on the evaluation of the didactic and pedagogical potential of using such material. Using a qualitative research – a case study – the teaching material was used in a teaching practice course of a Brazilian public university. The experience allowed students (future teachers) to develop of content through an alternative methodology. The results showed the experience provided students with an opportunity for learning and reflecting and favored a change in attitude regarding the way they faced teaching: from a strictly technical approach to a more meaningful one, emphasizing knowledge building. We believe such experiences may reflect positively on how the students will act in their classrooms (as teachers).

Keywords: Combinatory, Didactic Material, Mathematics Teaching Degree, Problem-Solving, Intuitive and Logical Aspects.

■ ■ ■

RENATA CRISTINA GEROMEL MENEGHETTI
Instituto de Ciências Matemáticas de Computação da Universidade de São Paulo
rcgm@icmc.usp.br

ALINE CRISTINA BERTONCELO DUTRA
Universidade Estadual Paulista, Rio Claro
alinecbdutra@gmail.com

(Recebido em outubro de 2010, aceite em março de 2012)