O raciocínio matemático na exploração de tarefas de investigação: Um estudo com alunos universitários

Ana Cláudia Henriques
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Introdução

O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos surge como um aspeto central nas orientações curriculares em todos os níveis de educação (AMATYC, 2006; MAA, 2004; ME, 2007; NCTM, 2007). No ensino superior, este foco na promoção do raciocínio visa assegurar que os alunos, para além de desenvolverem competências técnicas e científicas especificas da(s) área(s) de conhecimento de cada curso, fundamentais para garantir o sucesso no mercado de trabalho, adquirem flexibilidade no uso de processos reconhecidos como matemáticos mas que são também bastante relevantes para resolverem os problemas desafiantes que enfrentam no seu quotidiano (JQI, 2002).

Este contexto exige uma nova perspetiva de encarar o processo de ensino e aprendizagem. O foco do processo de ensino-aprendizagem não pode ser a transmissão de um corpo de conhecimentos estabelecido e a memorização de procedimentos, é necessário que os professores desenvolvam uma cultura de sala de aula que promova o raciocínio matemático proporcionando aos alunos atividades em que os processos de raciocínio e a construção de conceitos surjam de uma forma natural (AMATYC, 2006; Small, 2008). Além disso, o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos exige uma perceção aprofundada dos processos que lhe estão associados e das práticas matemáticas que os suportam (Brodie, 2011). No entanto, a essência dos processos de raciocínio na abordagem e resolução de problemas matemáticos desafiantes não está ainda profundamente desenvolvida e é desconhecida da maioria dos professores. Isto é especialmente problemático no que se refere à educação superior que tem sido pouco investigada, sobretudo em Portugal.

Este artigo tem como objetivo analisar os processos de raciocínio que os alunos universitários utilizam na exploração de tarefas de investigação, propostas ao longo de uma experiência de ensino realizada na disciplina de Análise Numérica e compreender de que modo a realização dessas tarefas pode influenciar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e o seu envolvimento, com sucesso, na inquirição matemática. Analisam-se, igualmente, as representações matemáticas que os alunos usam para suportar o seu raciocínio, dada a sua estreita relação com esses processos.

O artigo está estruturado em secções que integram o quadro teórico, abordando três temas essenciais à fundamentação do estudo (processos de raciocínio, representações e tarefas que suportam o raciocínio matemático) e a metodologia adotada, incluindo a descrição da experiência de ensino que está na sua base. Depois dos resultados empíricos, referentes ao trabalho de três alunos na exploração de duas tarefas, apresentam-se as conclusões e algumas considerações pedagógicas.

Raciocínio matemático

É difícil definir raciocínio matemático uma vez que este termo é usado por professores e investigadores com uma variedade de significados que estão associados a práticas e abordagens teóricas distintas. Neste estudo, o raciocínio matemático é analisado do ponto de vista cognitivo e assenta na ideia, partilhada por diversos autores (Lannin, Ellis & Elliot, 2011; Pólya, 1945), que é um processo que envolve a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas, a generalização e a justificação. Além disso, o raciocínio matemático está fortemente relacionado com as representações usadas para propósitos de comunicação (Neria & Amit, 2004). De facto, só é possível aceder e compreender o raciocínio matemático dos alunos através de representações, como refere o NCTM (2007): «ao observar as suas representações, os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos» (p. 76). Finalmente, os alunos não desenvolvem a capacidade de raciocínio matemático por simples memorização de conceitos e procedimentos rotineiros, é necessário trabalhar em tarefas que, simultaneamente, requerem e estimulam o raciocínio.

Processos matemáticos que suportam o raciocínio

Os processos envolvidos na atividade matemática são analisados por diferentes autores de acordo com o grau de relevância e o significado que lhes atribuem. Goldenberg (1998) enfatiza a procura de padrões e regularidades. Para o autor, o processo de criação matemática inicia-se com uma fase informal de exploração que pode incluir a recolha de dados, a geração de exemplos e a experimentação de várias estratégias. Depois de explorada a situação e realizadas as experiências iniciais é necessário colocar questões produtivas, frequentemente baseadas na identificação de padrões e formular as primeiras conjeturas (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas, 1998; Ponte, Brocado & Oliveira, 2003).

A formulação de conjeturas é parte do processo de raciocínio que conduz a afirmações que se pensa serem verdadeiras mas que não sabemos serem verdadeiras (Lannin et al., 2011) e que se podem tornar um resultado ou parte dele (Brodie, 2010). Estas suposições podem ter origem em observações (visuais ou não) ou podem ser desenvolvidas através de exemplos específicos aplicando depois raciocínio indutivo, requerendo uma exploração mais aprofundada e evidência para as suportar ou refutar. Alguns alunos veem genuinamente tais pressupostos como conjeturas (isto é, afirmações que precisam de ser testadas), enquanto outros alunos os veem como um pressuposto verdadeiro mesmo que não possam fornecer uma justificação válida para o porquê da afirmação ser verdadeira (Lannin et. al, 2011). Para Carpenter, Frank e Levi (2003), o objetivo de desafiar os alunos a fazer conjeturas não é apenas levá-los a falar sobre Matemática e a tornar explícitas as ideias matemáticas. Os alunos devem formular conjeturas porque são essas ideias que lhes permitem aprender Matemática nova e compreender a Matemática que já aprenderam e usaram.

O teste de uma conjetura pode ser feito de diferentes modos. Testar um exemplo, verificar se a conjetura funciona para outros tipos de objetos, tentar encontrar contra-exemplos ou provar uma conjetura usando métodos dedutivos são alguns exemplos de atividades de verificação. Este processo pode mostrar a necessidade de recolher mais dados, de modificar as conjeturas iniciais ou alterar algumas das condições para fazer surgir novas questões e conjeturas (Silver, 1996).

Um importante processo de raciocínio é a generalização, que parte de uma conclusão ou conjetura específica para formular uma conjetura de âmbito mais geral (Pólya, 1954). Segundo Lannin et al. (2011), há dois tipos de processos de generalização: Identificar elementos comuns e estender o raciocínio além do âmbito no qual originalmente se identificaram os elementos comuns. Para Mason, Burton e Stacey (1982) o raciocínio resulta da reciprocidade constante entre a generalização e a especialização. Os autores defendem que no processo de conjeturar é importante a particularização que assume diferentes formas: Escolher exemplos ao acaso para reunir evidências para a generalização e ajudar a interpretar a questão, escolher exemplos de forma sistemática aumentando a probabilidade de sucesso de encontrar padrões e escolher casos especiais para testar a generalização. A generalização começa quando nos apercebemos da existência de uma regularidade, isto é, quando observamos certas características comuns a muitos exemplos particulares e ignoramos outras. Os alunos nem sempre se focam em características que podem revelar uma propriedade matemática importante e que são úteis para criar generalizações matemáticas. Aprender como isolar as propriedades que interessam matematicamente e suprimir outras, segundo os autores, é algo que demora tempo e requer esforço.

As conjeturas que resistem aos testes ganham credibilidade, estimulando argumentos plausíveis e provas formais que, uma vez obtidos dão-lhes validade matemática (Ponte, 2007). A justificação é um elemento central no raciocínio matemático e envolve várias componentes importantes, incluindo criar argumentos, explicar porque é que são verdadeiros e compreender o papel das definições e contra-exemplos nesse processo. Deste modo, a justificação não só fornece razões convincentes para as conjeturas estabelecidas, como permite aos alunos tornar o seu raciocínio claro e aumentar a sua compreensão conceptual (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; NCTM, 2007). Carpenter, Frank e Levi (2003) salientam que a forma de justificação mais comum dos alunos é a justificação por exemplo. No entanto, alguns dos alunos que usam exemplos para justificar uma conjetura não estão convictos de mostrar assim a sua veracidade e percebem a necessidade de formas mais gerais de argumentação mas não conseguem ir além disso. Por isso o professor deve incentivá-los a buscar outras formas de justificação.

Reconhecer quando uma justificação é válida é uma componente crítica do processo de raciocínio (Lannin et al, 2011) e, no ensino superior, espera-se que a justificação se apoie em procedimentos, propriedades e definições matemáticas e que os alunos sejam capazes de distinguir uma argumentação informal de uma argumentação formal, compreendendo a sua importância (AMATYC, 2006). A formalização e encadeamento de justificações lógicas conduzem, naturalmente, à realização de demonstrações e, por consequência, ao raciocínio dedutivo que é característico da Matemática e tem um papel fundamental na validação das suas ideias (Davis & Hersh, 1985). A literatura tem discutido a complexa questão relativa ao modo como os alunos universitários lidam com a prova matemática (Coe & Ruthven, 1994; Dreyfus & Hadas, 1996) e, em parte, atribuem as suas dificuldades ao facto dos alunos não verem que um dos seus importantes papéis é explicar porque é que uma afirmação é verdadeira (Hanna, 1989). Para que os alunos desenvolvam competências na utilização do raciocínio dedutivo e de provas formais é necessário incentivar a justificação, desde os primeiros anos e propor-lhes, situações e atividades que os conduzam à «surpresa e ao sentimento de que alguma coisa precisa de ser explicada ou provada» (Dreyfus & Hadas, 1996, p. 11).

Representações que suportam o raciocínio matemático

Uma característica importante da atividade matemática é a sua dependência de uma grande diversidade de representações semióticas que apoiem a compreensão e favoreçam a comunicação de ideias matemáticas (Duval, 2006; Greeno & Hall, 1997). Neste sentido, as representações são vistas como ferramentas para articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínio (Stylianou, 2011). Contudo, além do papel que assumem na comunicação, as representações constituem um elemento central no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocínio matemático dos alunos e a sua aprendizagem deve fornecer-lhes «um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente» (NCTM, 2007, p. 75). Além disso, Goldin (2002) acredita que o estudo das representações matemáticas «permite, pelo menos potencialmente, descrever com algum detalhe, o desenvolvimento matemático dos alunos em interação com os ambientes escolares e a criação de métodos de ensino capazes de desenvolver poder matemático» (p. 198).

As representações matemáticas, em contextos educacionais, podem assumir uma variedade de formas e de funções. Goldin e Shteingold (2001) distinguem as representações que são principalmente notacionais e formais, como os sistemas de numeração, a escrita de expressões algébricas para designar relações e operações, funções, derivadas e integrais das que mostram relações de maneira visual ou gráfica, como figuras geométricas, gráficos, diagramas ou esquemas. Duval (2006) agrupa as representações semióticas utilizadas em Matemática em quatro tipos de registos: Os registos monofuncionais que tomam a forma algorítmica e têm como função cognitiva o processamento matemático (sistemas de escrita matemática — representações discursivas; gráficos cartesianos — representações não discursivas) e os registos multifuncionais que visam uma variedade de funções cognitivas, como sejam a comunicação e a imaginação (linguagem materna e formas de raciocínio — representações discursivas; figuras geométricas — representação não discursiva). A característica que sobressai da atividade matemática é a mobilização simultânea de vários registos de representação ou a possibilidade de mudar, em qualquer momento, de um registo para outro (Duval, 2006). De acordo com este autor, a atividade matemática pode ser analisada em dois tipos de transformações de representações semióticas: (i) Tratamentos, transformações de representações que têm lugar dentro do mesmo registo onde foram formadas; e (ii) Conversões, transformações de representação que consistem numa mudança de sistema na qual a totalidade ou a parte do sentido da representação inicial é conservada, sem mudança de objetos a ser notada. Duval (1999) realça, ainda, a necessidade dos alunos serem capazes de trabalhar dentro e entre diferentes registos, com fluência na conversão de representações neste movimento, para uma adequada compreensão de um objeto matemático.

Stylianou (2011) analisa o papel das representações no processo de resolução de problemas e identifica quatro funções: (i) Compreensão, quando nem todos os aspetos do problema são imediatamente óbvios e a representação é usada como uma ferramenta para combinar diferentes aspetos do problema e para ver como interagem; (ii) Registo, quando a representação é usada de modo a permitir combinar toda a informação fornecida em vez de tentar mantê-la em memória; (iii) Exploração, quando o uso flexível da representação permite a manipulação de conceitos e revela mais informação e implicações; e (iv) Monitorização e Avaliação, quando a representação é usada para avaliar o progresso na resolução de problemas e para tomar decisões informadas na seleção dos objetivos seguintes. A autora acrescenta, ainda, uma outra função das representações, enquanto atividade social: Apresentação, para partilhar os resultados do processo de resolução de problemas.

Frequentemente, mais do que um tipo de representação parece ser adequada para ser usada numa situação de aprendizagem. No entanto, a vantagem da utilização de uma forma representacional particular na aprendizagem não é universal mas depende de uma complexa interação entre as características da tarefa a ser resolvida (a sua natureza e o seu objetivo) e o contexto, o grau de familiaridade do aluno com a representação, o seu conhecimento prévio (conceptual e procedimental) e tempo de prática (Ainsworth, 2006; Boero Douek, & Ferrari, 2008). Além disso, o que vários autores defendem (Ainsworth, 2006; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Greeno & Hall, 1997) é que as diferentes representações não devem ser consideradas alternativas nem independentes entre si e sublinham a importância de se estabelecerem conexões entre vários tipos de representações. A integração de informação de diferentes representações de um objeto matemático contribui para uma compreensão global e tem efeitos positivos nos processos de construção de conhecimento (Ainsworth, 2006; Gagatsis & Shiakalli, 2004). Neste contexto, os alunos devem tornar-se familiares com uma variedade de representações que suportem o seu raciocínio e ser capazes de as usar, de forma flexível, na resolução de problemas matemáticos e para desenvolver compreensão dos conceitos (AMATYC, 2006; Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Tarefas que suportam o raciocínio matemático

As tarefas matemáticas, realizadas na sala de aula, são fundamentais para a aprendizagem dos alunos porque exprimem mensagens sobre o que é a matemática e o que significa fazer Matemática (NCTM, 1991; Schoenfeld, 1992). Vários autores defendem que o raciocínio e as práticas matemáticas a serem encorajadas nas aulas devem refletir as práticas dos matemáticos profissionais para que os alunos possam saber quando e quais as ferramentas que devem utilizar para resolver problemas (Pólya, 2002; Schoenfeld, 1992). Dreyfus (1991) afirma, ainda, que a maioria dos alunos do ensino superior aprende um grande número de procedimentos padrão nas suas disciplinas de Matemática mas não a «metodologia de trabalho dos matemáticos» (p. 28). Deste modo, tem sido ensinado, aos alunos «o produto da atividade dos matemáticos na sua forma final mas não ganharam compreensão dos processos que levaram os matemáticos a criar esses produtos» (Dreyfus, 1991, p. 28).

Na perspetiva de Pólya (1945), o aluno aprende Matemática se for desafiado com um trabalho criativo, de investigação, através de problemas apropriados que este autor designa por «problemas de investigação». Para isso, devem ser proporcionadas situações de aprendizagem que despertem o interesse dos alunos e em que eles sejam desafiados a descobrir resultados e a estabelecer relações. Smith e Stein (1998) defendem, igualmente, que se os alunos forem desafiados, a um nível adequado, com tarefas não rotineiras, em oposição a exercícios em que um procedimento conhecido é aplicado, as oportunidades para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e a sua aprendizagem saem reforçadas. Estes autores argumentam, ainda, que se o objetivo da aprendizagem for o desenvolvimento da capacidade de raciocinar e de resolver problemas, como é enfatizado nas orientações curriculares atuais, então os alunos precisam de se empenhar em tarefas que os desafiem cognitivamente, dando-lhes a oportunidade de investigar, analisar, explicar, conjeturar e justificar o seu raciocínio e interagir com os seus colegas. Nestas tarefas, que os autores designam por «*doing mathematics tasks*», não existe, à partida, um caminho previsível para as resolver nem nenhuma exigência relativamente ao procedimento a ser seguido, pelo que os alunos precisam de encontrar as suas próprias soluções de forma criativa.

Os problemas e as tarefas de investigação, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), constituem um contexto fundamental para o estudo do raciocínio matemático, atendendo aos processos que lhe estão associados. Para estes autores, o conceito de «atividade de investigação matemática» ou «investigação matemática», em contextos de ensino-aprendizagem, refere-se a uma atividade em que «o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjeturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor» (p. 23). As investigações matemáticas referem-se, assim, a uma atividade que consiste em procurar regularidades, formular questões para as quais os alunos não têm resposta pronta, testar conjeturas, estabelecer argumentos plausíveis e provas formais para validar (ou não) essas conjeturas, generalizá-las, se for caso disso, e refletir e levantar novas questões para futura investigação. A atividade investigativa, entendida desta forma, proporciona aos alunos um contacto com uma parte essencial da Matemática, fundamental para aproximar o «aprender Matemática» do «fazer Matemática» (Pólya, 2002). As atividades de investigação também proporcionam aos alunos oportunidades para formularem problemas e, desta forma, promovem o pensamento matemático dos alunos (Silver, 1993). No mesmo sentido, English (1997) acrescenta que as atividades de formulação de problemas na sala de aula permitem aos alunos gerarem um pensamento mais diverso e flexível melhorando a sua capacidade de resolver problemas e também reforçando e enriquecendo os seus conceitos matemáticos básicos.

Diversos estudos têm revelado que a realização de atividades de investigação na disciplina de Matemática, em diferentes níveis de escolaridade, contribui de forma significativa para a compreensão e consolidação de novos conceitos e para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e a sua capacidade de realizarem investigações (Henriques, 2011; Ponte, 2007). Ponte et al. (1998) argumentam ainda que as investigações matemáticas proporcionam ao aluno uma perspetiva mais completa da Matemática, contrariando assim uma visão desta ciência centrada na execução de procedimentos e algoritmos. Além disso, permitem desenvolver nos alunos diversas capacidades transversais, como a comunicação oral e escrita, bem como a autonomia e a capacidade de trabalhar em grupo (Henriques & Ponte, 2008; Ponte, 2007).

Metodologia do estudo

Os resultados apresentados neste artigo são parte de um estudo mais alargado (Henriques, 2011) de natureza qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) e integrando estudos de caso (Stake, 2009). O estudo tem por base a concretização de uma experiência de ensino na sala de aula (Gravemeijer & Cobb, 2006), apoiada na realização de tarefas de investigação, durante o 1.º semestre do ano letivo de 2008/09 numa disciplina de Análise Numérica, lecionada pela autora, visando a promoção do raciocínio matemático dos alunos e uma melhoria dos seus desempenhos ao nível das aprendizagens. Participaram no estudo 36 alunos do 2.º ano dos cursos de mestrado integrado conferidos por um estabelecimento de ensino superior (áreas de Administração e de Ciências e Tecnologias), que referiram não ter experiência prévia com este tipo de tarefas. Durante o 1.º ano dos cursos, os alunos obtiveram aprovação às disciplinas de Análise Matemática I e II, lecionadas de modo tradicional (aulas teóricas expositivas alternadas com aulas práticas de resolução de exercícios), sem recurso a tecnologia. Desta forma, o estudo permitiu uma abordagem à disciplina que não é usual para estes alunos.

Uma parte significativa das aulas do semestre é utilizada para a realização de quatro tarefas de investigação relacionadas com alguns tópicos programáticos da disciplina (Aritmética Intervalar, Equações não lineares, Ajuste de curvas e Integração Numérica), antes de os mesmos serem lecionados. Deste modo, os alunos são confrontados com problemas para os quais não têm teoria nem modelo para fazerem um tratamento completo, pelo que são desafiados a desenvolver e defender as suas próprias estratégias. A realização de cada tarefa está organizada em três momentos principais (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003): (i) Apresentação da tarefa, através de um enunciado escrito; (ii) Exploração da tarefa, durante a qual os alunos trabalham em pares ou em pequenos grupos; e (iii) Apresentação à turma das suas estratégias e conclusões. Estas discussões em grande grupo são momentos importantes de aprendizagem, uma vez que, questionados pelos seus colegas e pela professora, os alunos ainda procuram justificações e discutem alguns aspetos sobre os quais não tinham pensado. Entre as fases de exploração e discussão da tarefa, os alunos escrevem um relatório onde explicam as suas estratégias e justificam as suas conclusões. A realização deste relatório encoraja os alunos a refletirem sobre o trabalho desenvolvido, uma vez que requer a articulação de ideias, a explicação de procedimentos e a revisão dos processos usados e dos resultados obtidos. A organização das aulas dedicadas à realização destas atividades e a própria estruturação das tarefas favorece a exteriorização das ideias dos alunos, a explicitação dos seus raciocínios e a discussão de estratégias e resultados. Desta forma, é possível ter acesso aos processos cognitivos utilizados pelos alunos enquanto resolvem as tarefas propostas.

As tarefas de investigação são alternadas com aulas expositivas, onde são abordados aspetos teóricos de Análise Numérica que surgem durante a sua realização e apresentados os restantes tópicos programáticos (Números e erros, Interpolação polinomial e Equações diferenciais) não contemplados nas tarefas. O trabalho em sala de aula também inclui, ao longo do semestre, oportunidades para a resolução de problemas e de exercícios de aplicação e consolidação de conhecimentos.

A recolha de dados inclui a observação dos alunos na realização de tarefas de investigação, os seus relatórios escritos (R) e o registo áudio das entrevistas individuais realizadas aos alunos selecionados como casos, após a exploração de cada tarefa (E). As entrevistas são baseadas em questões que emergem da análise dos seus relatórios escritos e têm como objetivo compreender os seus processos de raciocínio e obter dados para clarificar aspetos ambíguos.

Neste artigo, as duas tarefas apresentadas e discutidas são intencionalmente escolhidas para ilustrar a diversidade de aspetos interessantes relativos aos processos de raciocínio dos três alunos (Carlos, Gonçalo e Luís) que são objeto de estudos de caso. Para cada tarefa, descrevo o trabalho dos alunos e documento-o com excertos das suas explorações. A base para a categorização dos processos matemáticos usados pelos alunos durante a exploração da tarefa são os processos matemáticos discutidos em Ponte, Brocardo & Oliveira (2003), como a formulação de questões, a formulação de conjeturas específicas e a sua generalização, o teste de conjeturas e a sua posterior justificação. As diferentes representações usadas pelos alunos na sua exploração são analisadas com base nos modos de representação de Duval (2006) e categorizadas como representações essencialmente discursivas (linguagem natural, notações simbólica e algébrica) ou representações essencialmente visuais (representações gráficas, tabelas). Examino, ainda, a função que essas representações desempenham na exploração das tarefas, de acordo com a categorização de Stylianou (2011) e a presença de processos de tradução e de conversão entre representações.

Q1. Observe as seguintes situações

$[1, 2] + [5, 7] = [6, 9]$ $\quad$ $[0, 1] + [-5, 2] = [-5, 3]$ $\quad$ $[-3, -1] + [1, 3] = [-2, 2]$

a) Será possível deduzir uma regra que permita determinar a soma de dois intervalos de valores reais? Investigue se todos os intervalos de valores reais seguem esta regra.

b) Investigue se a regra deduzida poderá ser utilizada para outras operações com intervalos, por exemplo, a subtração (X–Y), a multiplicação (X×Y) e a divisão (X/Y). Em caso negativo, deduza novas regras para essas operações.

Q2. Considere a função $f: D \subset IR \rightarrow IR$, real de variável real, definida por $f(X) = X + X$ e $X = [x_1, x_2] \subset D$, um intervalo de valores reais pertencente ao seu domínio.

a) Se $X = [2, 7]$, qual a sua imagem através da função f? Explique como chegou a essa conclusão.

b) O que pode concluir sobre a imagem de um intervalo real qualquer, se a função f passar a ser definida por $f(X) = X^2$ ou por $f(X) = e^X$?

Figura 1.—Enunciado da Tarefa 1

Raciocínio matemático dos alunos

Tarefa 1

Esta tarefa (Figura 1), de natureza exploratória, é o ponto de partida para a introdução de conceitos e para a dedução e formalização de regras relativas à aritmética intervalar, ainda desconhecidas dos alunos.

A primeira questão remete para casos particulares como forma de envolver os alunos e os levar a compreender a tarefa. As questões seguintes pretendem orientar os alunos na dedução e justificação dessas regras. Para isso é necessário a formulação, teste, refinamento e justificação de conjeturas a partir da exploração de casos particulares de operações elementares conhecidas (adição, subtração, multiplicação e divisão) utilizando intervalos de números reais. A segunda questão tem características semelhantes à anterior e pretende alargar o âmbito da aritmética intervalar às funções. Para a resolver, os alunos necessitam de recorrer a conhecimentos anteriores de funções e suas propriedades. Além disso, a representação gráfica, se usada, pode facilitar a sua resolução.

Luís inicia a exploração da tarefa tentando interpretar a informação fornecida no enunciado, procurando analogias em experiências anteriores:

> Como nunca tinha feito uma soma de intervalos associei logo à soma de vetores porque era a única coisa que era parecido com a soma de coordenadas. De acordo com as soluções encontradas nos exemplos ilustrados, verificamos que estes obedecem ao mesmo critério da adição de vetores. (Luís, E)

Com base na observação dos exemplos e nos seus conhecimentos sobre as propriedades dos vetores, o aluno formula uma conjetura para a soma de intervalos, usando um processo de raciocínio essencialmente indutivo. Apresenta a conjetura recorrendo à linguagem natural e simbólica: «Sendo o vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e o vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$, a soma destes vetores é feita de acordo com o seguinte modo: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$» (Luís, R). O aluno não sente a necessidade de testar ou justificar a sua conjetura, provavelmente porque está a aplicar um resultado já conhecido (a regra da adição de vetores). Luís abandona esta conjetura inicial quando, ao tentar conjeturar regras para as outras operações, por analogia com a da adição, enfrenta algumas dificuldades:

> (…) A multiplicação e a divisão constituíam problemas. A multiplicação de vetores podia-se fazer pelo produto externo ou o produto escalar. [No entanto] o resultado do produto escalar é um número e (…) um intervalo é sempre representado por dois números, ou seja, o limite inferior e o limite superior. O produto externo … Também tem dois números, é verdade. Mas depois? (…) Já não sei, não me lembro. Mas depois como era intervalo tinha que colocar os outros números no meio, ou entre o limite inferior e superior e assim já não dá. (Luís, E)

Nesta altura, Luís opta por procurar regularidades nos exemplos que são fornecidos no enunciado, à semelhança do que fazem os seus colegas Carlos e Gonçalo. Como referem, a partir da observação desses exemplos os alunos identificam o padrão que lhes está subjacente e conjeturam a regra da adição de intervalos, que apresentam em linguagem natural descrevendo os seus raciocínios: «Chegamos a essa conclusão efetuando a soma dos extremos inferiores e dos extremos superiores [dos intervalos], partindo dos exemplos apresentados» (Gonçalo, R).

A generalização de conjeturas a partir da observação de um número reduzido de exemplos é encarada com naturalidade e, por isso, os alunos não sentem a necessidade de as testar ou justificar. Para generalizarem a regra anteriormente descrita em linguagem natural, os alunos apercebem-se que devem repetir a mesma informação num «formato matemático» e usam a notação simbólica para apresentarem a conjetura, realizando a necessária conversão: «$\forall X, Y \in \mathbb{R}, X + Y = [x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$» (Luís, R).

A validade da regra só é testada pelos alunos quando o enunciado da tarefa o pede explicitamente. Nesta altura, recorrem à experimentação de mais alguns casos, sem sistematização aparente. Este comportamento revela que estes alunos não estão despertos para a necessidade de validar as suas conjeturas, o que é natural sendo a primeira vez que realizam este tipo de trabalho investigativo.

As primeiras conjeturas para as restantes operações (subtração, multiplicação e divisão) surgem de forma imediata, por analogia com a regra da adição deduzida anteriormente e são apresentadas num misto de linguagem natural e simbólica: «Para a multiplicação utilizamos o mesmo sistema que na adição. Multiplicamos os limites inferiores e os superiores dos dois intervalos: $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] = [x_1 \times y_1, x_2 \times y_2]$» (Luís, R).

No entanto, a observação de exemplos não é suficiente para os alunos compreenderem as propriedades dos intervalos que são relevantes para a dedução e justificação das regras para outras operações. Como os alunos não questionam a validade da regra nem a tentam verificar ou justificar através de algum raciocínio que possa detetar os erros cometidos, as conjeturas apresentam-se incorretas. Também é notória a falta de compreensão do que significa um intervalo resultante de uma operação aritmética entre dois intervalos de valores reais.

Gonçalo foi o primeiro a reconhecer o erro na regra da subtração e reformula-a tendo em conta as propriedades dos números reais e suas operações. Usa a linguagem natural para apresentar os seus raciocínios e conclusões:

> Para a subtração (…) apenas é aceite se transformarmos a subtração numa soma, isto é, $a-b=a+(-b)$. Trocaríamos b_1 e b_2 de extremos e assim já se podia aplicar a soma de extremo [com] extremo. (Gonçalo, E)

Carlos e Luís só refutam as suas conjeturas quando, incentivados a validá-las, testam alguns casos, de forma aleatória e incompleta e encontram contra-exemplos. Nesta altura, utilizam o raciocínio dedutivo e conjeturam corretamente a regra da subtração intervalar, com base nas propriedades dos números reais e suas operações e recorrendo à linguagem algébrica, efetuando tratamentos dentro desse sistema de representação para simplificar as expressões:

$$X = [x_1, x_2] \quad Y = [y_1, y_2]$$
$$X - Y = X + (-Y) = [x_1, x_2] + (-[y_1, y_2]) = [x_1, x_2] + ([-y_2, -y_1]) =$$
$$= [x_1 - y_2, x_2 - y_1] \text{ (Luís, R)}$$

A compreensão do conceito de intervalo, que os alunos evidenciam, é fundamental na correta formulação das conjeturas para as regras da multiplicação e da divisão:

> Basicamente era tentar encontrar o extremo mínimo, era encontrar a menor multiplicação entre os dois intervalos, a menor de todas as combinações possíveis, e a maior. E uma maneira fácil de fazer isso era fazer todas as multiplicações dos extremos destes dois porque iam conter o maior e o menor quer no caso da multiplicação, quer da divisão. (Gonçalo, E)

> Observamos que multiplicando o maior valor de um intervalo com o menor de outro, o valor obtido não estava compreendido no intervalo que era descrito pelo produto dos dois valores mínimos até ao valor traduzido pelo produto dos dois valores máximos (Carlos, R)

Gonçalo procura validar as conjeturas formuladas mas recorre à experimentação de casos, como explica na entrevista: «Verificamos que de facto, todas as regras funcionam em todos os intervalos reais após efetuar a experiência em diferentes intervalos. Tendo em conta que funcionou para os intervalos experimentados, aceitamos como verdadeira para todos» (Gonçalo, E). Carlos também sente a necessidade de verificar a conjetura porque esta operação não segue a regra observada no exemplo inicial. No entanto, utiliza apenas um exemplo e confunde esse processo com a justificação, como refere na entrevista: «O exemplo prova isso mesmo: $[-2,1]\times[3,7]=[\min C, \max C]=[-14,7]$, com $C=\{(-2\times3),(-2\times7),(1\times3),(1\times7)\}=\{-6,-14,3,7\}$» (Carlos, E). Luís, por seu lado, não sente a necessidade de verificar nem de justificar a validade das regras.

A generalização das conjeturas é feita, novamente, recorrendo à notação simbólica para as apresentar. No entanto, o uso de notação simbólica parece ser difícil para os alunos, uma vez que apresentam, frequentemente, expressões incompletas, não sentindo necessidade de explicitar o domínio das variáveis utilizadas, apesar de conhecerem as limitações das regras (que verbalizam várias vezes, por exemplo, no caso da divisão em relação ao zero). Luís é o único que inclui, de forma correta, quantificadores matemáticos na sua escrita:

$$\forall Y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, X/Y = \frac{[x_1, x_2]}{[y_1, y_2]} = \left[\frac{x_1}{y_2}, \frac{x_2}{y_1}\right], \text{ (Luís, R)}$$

Na segunda questão desta tarefa, relacionada com funções, os alunos já utilizam diferentes estratégias. Carlos e Luís recorrem às regras que encontraram anteriormente e voltam a utilizar o raciocínio dedutivo e a manipulação algébrica para justificarem raciocínios e obterem soluções:

> $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(X) = X + X$ com $X = [x_1, x_2] \subset D$
> $f([x_1, x_2]) = [x_1, x_2] + [x_1, x_2] = [x_1 + x_1, x_2 + x_2] = [2x_1, 2x_2] = 2[x_1, x_2]$
> (…) Assim, $f([2, 7]) = [2, 7] + [2, 7] = [4, 14]$. (Luís, R)
>
> Neste caso, o X^2 é um produto de dois intervalos e tínhamos que ir aplicar as regras da multiplicação que tínhamos encontrado na alínea anterior. (Carlos, E)

Esta estratégia de analogia, baseada na aplicação, sem compreensão, de métodos que os alunos conhecem de tarefas semelhantes, pode suscitar algumas dificuldades quando as rotinas familiares não funcionam por diferentes razões. De facto, na última questão, surge uma contradição: Duas estratégias diferentes, que parecem ser possíveis e razoáveis, dão origem a valores diferentes para o resultado. Nos casos onde a função não é monótona, a utilização da representação algébrica não permite detetar conflitos e erros na solução obtida. Como não estabelecem qualquer relação entre a expressão algébrica e outro tipo de representação que permita desenvolver compreensão da imagem de um intervalo através de funções, as respostas obtidas nem sempre estão corretas.

Luís mostra reserva em relação à conjetura formulada: «Mas acho que ainda não é certo (…). De acordo com a multiplicação, multiplicar duas vezes o *X*». Perante estas dúvidas, o aluno coloca uma questão que o conduz a nova conjetura: «Porque é que não poderia fazer o limite inferior ao quadrado e o limite superior ao quadrado?» (Luís, E). Nesta altura, o aluno testa as duas conjeturas com base na experimentação de casos e conclui que não são válidas: «Ao experimentar casos não dava o mesmo resultado de uma maneira e de outra» (Luís, E). O aluno fica confuso, uma vez que não compreende porque é que diferentes resoluções, aparentemente corretas, não conduzem a resultados iguais. No entanto, não identifica o motivo que poderá refutar uma das conjeturas e não procura outro tipo de raciocínio que o auxilie a ultrapassar esta dificuldade. Como está convencido sobre a sua veracidade, dá por terminada a exploração da tarefa deixando as conjeturas iniciais erradas.

Questionado sobre a possibilidade de utilização da representação gráfica para compreender e explorar a situação, facilitando a formulação de uma conjetura para a regra, Carlos obtém resultados diferentes (E):

> Professora: Qual seria a imagem do intervalo [–1,1] através desta função?
> [Carlos desenha o gráfico da função $f(X) = X^2$ e responde com base nele]
>
> Carlos: Iria ser de zero a 1.
>
> Profrossora: E considera que são duas estratégias equivalentes?
> [Verifica $[-1,1]\times[-1,1]=[-1,1]$, através da aplicação direta da regra e apercebe-se das diferenças]
>
> Carlos: Ou seja, não são iguais. A parábola só está definida de zero para cima, logo não faz sentido termos –1.

O aluno é capaz de construir o gráfico da função, a partir da sua expressão algébrica e de interpretar a informação nele representada. Apesar disso, a utilização de duas representações introduz ambiguidade no raciocínio e quando confrontado com distintas soluções, opta pela solução algébrica, na qual confia mais. A sua relutância em utilizar a representação gráfica nesta situação parece estar relacionada com a dificuldade em dar significado à informação representada: «Para mim é difícil imaginar um intervalo ao quadrado numa parábola, não consigo visualizar essa imagem …» (Carlos, E). O aluno também vê a construção da representação gráfica como uma tarefa mais complexa e trabalhosa, talvez por não estar habituado a usá-la: «[Aplico a regra] porque é mais fácil. Olhamos para aqui e o que é que vemos? *X* vezes *X*. Isto [alternativa gráfica] obriga a pensar …» (Carlos, E).

Gonçalo é o único que prossegue a exploração tentando ganhar convicção nas suas conjeturas verificando o seu resultado através de um gráfico e recorrendo à experimentação (sistematizada) de vários intervalos. Conclui:

> Primariamente analisamos o gráfico da função e concluímos que a imagem de um intervalo $X = [a, b]$ aleatório vai dar um intervalo de imagens e este vai depender do valor das coordenadas. Por exemplo se uma era positiva, se era negativa, se o módulo de uma era maior que outra … Não podíamos generalizar apenas numa expressão o resultado pretendido. Por isso dividimos a função nos vários tipos de intervalos possíveis e obtivemos as várias opções (…). (Gonçalo, E)
>
> Se $a < 0, b < 0,\ f([a,b]) = [b^2, a^2]$

> Ex: $[a,b] = [-4,-2] \Rightarrow f([-4,-2]) = [4,16]$
> (...)
> Se $a < 0, b = 0,\ f([a,b]) = [0,a^2]$
> Ex: $[a,b] = [-2,0] \Rightarrow f([0,2]) = [0,4]$ (Gonçalo, R)

Deste modo, Gonçalo revela ser capaz de relacionar as representações algébrica e gráfica da função e utilizar essa relação para confirmar os resultados obtidos ao aplicar as regras deduzidas e para identificar propriedades das funções (monotonia) que são fundamentais para o aluno construir significado para a imagem de um intervalo através de funções e obter respostas corretas. A representação gráfica serve, neste caso, vários propósitos. O aluno utiliza-a como um meio para ganhar compreensão do problema, como ferramenta de exploração, para identificar informação que permita realizar inferências e como ferramenta de avaliação, para confirmar os seus resultados.

Em relação à função $f(X) = e^X$, Gonçalo volta a basear-se na análise do gráfico para formular as suas conjeturas. A opção pela representação gráfica, como ferramenta de exploração parece facilitar a identificação correta de todos os casos possíveis e a obtenção eficiente das suas imagens, as quais conduzem à formulação de conjeturas corretas.

Tarefa 2

Esta tarefa (Figura 2) é o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização de métodos numéricos para resolver equações não lineares. Em particular, pretendo criar oportunidades para os alunos discutirem o método da bisseção, construírem o respetivo algoritmo e compreenderem a teoria que está na sua base.

Os alunos não usam qualquer representação para ganhar compreensão sobre a equação a resolver e não se apercebem da sua não linearidade. A primeira opção dos três alunos para a tentar resolver, é a manipulação algébrica. Os alunos utilizam tratamentos dentro do sistema de representação algébrico para tentar simplificar a expressão de modo a isolar a incógnita mas não são bem sucedidos, como clarifica Luís: «Não consegui isolar totalmente a variável x de modo a obter um valor para esta variável» (E). A opção dos alunos por esta representação parece estar relacionada com a sua experiência escolar anterior, como evidencia Gonçalo: «Tentámos resolver como antigamente [refere-se à resolução através de manipulação algébrica] mas não conseguimos chegar a nenhum valor» (E).

Como a utilização desta representação não permite obter uma solução, os alunos resolvem a equação através da representação gráfica, recorrendo à máquina de calcular, como refere Luís: «Visto que a equação (...) apresenta vários problemas na determinação das suas raízes, pensamos em dar solução à mesma recorrendo à representação gráfica» (Luís, E). Para isso, usam diferentes estratégias, como as apresentadas na Figura 3.

Luís introduz a expressão algébrica da função na máquina de calcular e procura a interseção do seu gráfico com o eixo das abcissas. Carlos e Gonçalo transformam a equação dada no enunciado numa outra equivalente, através de tratamentos algébricos, representam as funções que compõem cada um dos membros da equação e procuram o seu ponto de interseção. Em qualquer das estratégias, os alunos descrevem e justificam infor-

Q1. Considere a função f (x) = ln (x) - e^{-x}. Como resolve a equação f (x) = 0?

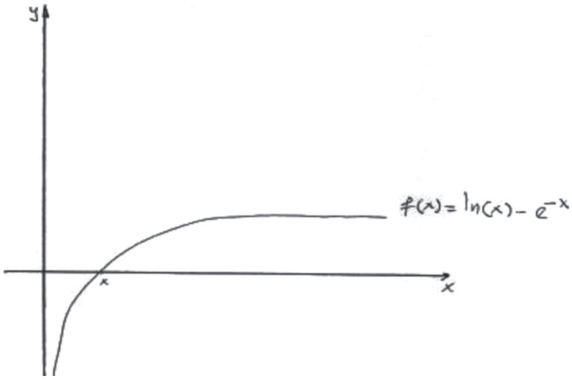
Q2. Observe a seguinte sequência de intervalos de valores reais contendo a raiz de f,

[1.000, 2.000][1.000, 1.500][1.250, 1.500][1.250, 1.375][1.250, 1.313][1.281, 1.313]

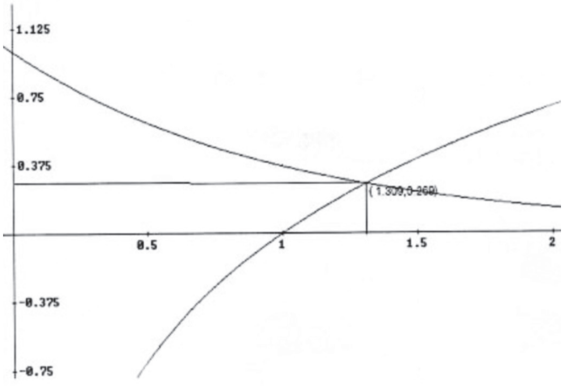
a) Qual será o próximo elemento da sequência? Explique como chegou a essa conclusão.

b) Será possível encontrar uma regra geral para construir qualquer elemento da sequência apresentada?

Figura 2.—Enunciado da tarefa 2



Dada uma função f(x), os seus zeros são as raízes da equação f(x) = 0. Sendo assim, os zeros da função são as abcissas dos pontos em que o gráfico da função intersecta o eixo das abcissas (eixo dos xx). (Luís, R)



Ao igualarmos a nossa função a zero, temos que ln(x) = e-x. O valor que procuramos trata-se do x para o qual as duas funções são iguais. Então fizemos o traçado do gráfico das duas funções para ver qual o valor de x no qual se dava a intersecção. (Gonçalo, E)

Figura 3.—Exemplos de estratégias dos alunos na resolução gráfica da equação malmente, em linguagem natural, o processo de obtenção de solução através das representações gráficas. Os alunos interpretam corretamente os resultados obtidos graficamente e revelam facilidade em realizar conversões entre a representação algébrica e gráfica das funções. Deste modo, utilizam a representação gráfica de modo flexível na exploração da tarefa, manipulando conceitos, adicionando informações através de conexões com conhecimento anterior e dando significado à solução.

Carlos parece não estar confortável com a representação gráfica para resolver a equação, apesar de adequada e constrói, igualmente, uma tabela para o auxiliar a encontrar o valor aproximado da solução da equação e a confirmar o resultado obtido. A análise dos seus valores permite-lhe, também, atribuir significado à solução obtida, como justifica de modo informal, em linguagem natural, na descrição que acompanha a tabela:

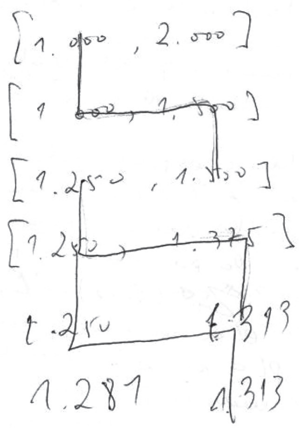
> Podemos criar uma tabela com o objetivo de atribuir valores a x em $\ln(x)$ e em e^{-x} para nos aproximar do valor da raiz, concluindo que se encontrava entre $x = 1$ e $x = 3/2$ (…) porque é quando o valor da função logarítmica é maior que a exponencial.

x	$\ln(x)$	e^{-x}
0	n.d.	1
1/2	–0,6931	0,6065
1	0	0,3679
3/2	0,4055	0,2231

> (Carlos, E)

Neste caso, esta forma de representação tabelar articula-se não só com a representação algébrica, como ponto de partida para a sua construção mas também com a representação gráfica, quando ao analisá-la procura o ponto de interseção entre as duas funções representadas nas duas colunas, verificando-se uma conversão entre os dois registos. Comparada com a representação gráfica, a tabela enfatiza mais os padrões e regularidades entre os números, nos quais o aluno se baseia e com os quais parece estar mais familiarizado para obter a solução da equação.

Os três alunos começam a exploração da questão seguinte observando a sequência de intervalos apresentada e procuram regularidades no modo de formação dos seus elementos. Gonçalo explica no seu relatório: «Tentámos encontrar um padrão e perceber o que estava a acontecer em concreto de intervalo para intervalo» (R). No entanto, os alunos enfrentam algumas dificuldades: «Ficámos um pouco desmotivados ao início pois não estávamos a conseguir encontrar nenhuma relação que nos parecesse válida» (Gonçalo, R). Para resolver a questão original, Gonçalo formula dois problemas mais acessíveis: (i) Será que existe um padrão na diminuição da amplitude dos intervalos da sequência? e (ii) De que modo se formam os extremos desses intervalos? A observação da sequência de intervalos sugere uma primeira conjetura baseada na identificação, correta, do padrão de diminuição da amplitude dos intervalos: «Apercebemo-nos de imediato que os intervalos



(Carlos, E)

1 – [1.000 2.000] –
2 – [1.000 1.500] +
3 – [1.250 1.500] –
4 – [1.250 1.375] – (…)
Observamos que quando ocorriam alterações no extremo superior, se tratava deste ser reduzido, no caso do extremo inferior, se ocorresse alteração, estes seriam aumentados.

(Gonçalo, R)

Figura 4.—Exemplos de esquemas construídos pelos alunos.

estavam a tornar-se cada vez mais pequenos, ou seja, o valor da amplitude do intervalo seguinte é sempre metade da amplitude do intervalo anterior. Sendo que isto acontece em todos os intervalos» (Gonçalo, E).

Pelo seu lado, Carlos e Luís começam por formular uma nova questão, mais simples que a questão proposta, procurando identificar o padrão relativo a uma propriedade dos intervalos, a amplitude mas não consideram neste ponto a identificação do padrão de formação dos extremos. Registam o cálculo da amplitude de cada intervalo e identificam, corretamente, que o padrão de diminuição dos intervalos está relacionado com essa propriedade, formulando uma primeira conjetura parcial que apresentam em linguagem natural:

> Ao olharmos para a sequência verificamos que a amplitude dos intervalos vai diminuindo para metade relativamente ao intervalo anterior. (Luís, R)

> Os intervalos diminuem de amplitude, para metade da amplitude anterior. Chegamos a essa conclusão subtraindo ao valor máximo do intervalo o valor mínimo.
>
> Cálculos: $2{,}000 - 1{,}000 = 1{,}000$
> $1{,}500 - 1{,}000 = 0{,}500$
> $1{,}500 - 1{,}250 = 0{,}250$, etc. (Carlos, R)

A formulação de um critério de decisão sobre o extremo do intervalo a reduzir levanta algumas questões aos três alunos que não identificam qualquer regularidade apenas por observação. Neste caso, os alunos recorrem a diversos esquemas, como os apresentados na Figura 4.

A representação que Carlos utiliza é mais visual, a que chama «método da cadeira» pela semelhança deste objeto com os traços apresentados. Gonçalo utiliza um esquema numérico de contagem, com símbolos de mais e menos para indicar as alterações ocorridas na referida sequência. Estas representações são utilizadas pelos alunos, como ferramentas de compreensão e registo, para procurar regularidades e obter compreensão sobre propriedades importantes dos elementos da sequência e têm a vantagem da informação que é apresentada não ter que estar ativa na memória de trabalho todo o tempo, ajudando os alunos a focarem-se no raciocínio.

Estas representações facilitam um processo indutivo de raciocínio que conduz os alunos à formulação de conjeturas sobre o padrão dos extremos dos intervalos. Depois, utilizam a linguagem natural para apresentar as suas conjeturas sobre o modo de formação dos elementos da sequência:

> Nestes três em que se mantinha o limite superior, era sempre o limite inferior que ia diminuir. Três vezes. Depois alterava e passava a ser o limite superior, duas vezes. Assim, para um caso genérico [*a*, *b*], o mínimo (a) varia de três em três intervalos enquanto que o máximo (b) tinha em dois intervalos seguidos o mesmo valor, e no intervalo a seguir a esses tinha outro valor diferente. (Luís, E)

A utilização da linguagem natural parece facilitar a organização da informação de forma sequencial, preservando as relações temporais e lógicas, tal como os alunos a exploram. No entanto, estas estratégias baseadas na simples observação ou contagem não são suficientes para uma identificação correta do modo de formação dos intervalos da sequência, uma vez que não usam toda a informação disponível (como por exemplo, a raiz de f). Carlos e Luís não testam nem justificam as suas conjeturas e não se apercebem que estão incorretas. Só quando são incentivados a uma leitura cuidada do enunciado é que verificam, através de experimentação, que os intervalos construídos não verificam todas as condições exigidas: «Só a partir deste raciocínio verificamos que o valor da raiz de f(x) não estava contida em todos os intervalos» (Luís, E). O teste das suas conjeturas leva então os alunos à sua reformulação, apresentando-as, novamente, em linguagem natural:

> Subtraímos sempre ao máximo e somamos sempre ao mínimo. Mas quando passasse… Quando o valor do máximo passasse a ser inferior ao valor da raiz, que encontrámos no gráfico, trocávamos, e somávamos ao mínimo. Fazemos sempre por comparação. (Luís, E)

> O elemento do intervalo (máximo ou mínimo) que se encontrava mais distante do valor da raiz é que varia, mantendo-se o outro constante. Seguindo este raciocínio, o intervalo a seguir é o seguinte:
>
> $1{,}313-1{,}281=0{,}032$, portanto o próximo terá metade da amplitude que este, ou seja, 0,016. O elemento mais distante do valor da raiz, isto é 1,281, será aproximado em 0,016 passando a 1,297 sendo isto traduzido

> em [1,297 ; 1,313]. (Carlos, R)

Os alunos agora já verificam estas conjeturas mas apenas para os intervalos da sequência apresentada no enunciado da tarefa. No entanto, não sentem a necessidade de as justificar.

Gonçalo também formula a sua conjetura baseado num esquema de contagem, considerando as condições dadas no enunciado mas, ao contrário dos seus colegas, o aluno toma espontaneamente a iniciativa de testar a sua conjetura e apercebe-se que está incorreta: «Após recordar que a raiz de f estava contida no intervalo, apercebi-me imediatamente que o método estava incorreto» (Gonçalo, E). O aluno usa o seu conhecimento sobre funções para identificar a regularidade: «Como tínhamos como regra que o zero da função se encontra dentro do intervalo, o que fazemos é desprezar de um intervalo para o seguinte a metade que não contém o nosso zero» (Gonçalo, E). Deste modo, o teste das suas conjeturas facilita a sua reformulação.

Concluída a exploração da tarefa para o caso particular da função dada, o passo seguinte natural na exploração desta tarefa seria formular questões idênticas às anteriores, para uma função qualquer. Na função dada, de um intervalo para o seguinte, ocorre uma transformação de acordo com uma regra consistente com algumas condições. Para Carlos e Luís, a generalização desta regra reflete, em grande parte, o trabalho exploratório anterior e, numa tentativa de formalização da conjetura, utilizam um misto de linguagem natural e algébrica. No entanto, os alunos revelam dificuldades no uso dos símbolos matemáticos e a notação que apresentam nem sempre traduz, de forma adequada, o que é corretamente descrito anteriormente, em linguagem natural:

> A partir do que foi dito anteriormente, podemos definir a seguinte regra: Se $x - \max > (f(x) = 0)$, então o intervalo seguinte será $[\min, x - \max]$ ou $[x + \min, \max]$ se e só se $x - \max < (f(x) = 0)$. (Luís, R)
>
> Passando os cálculos realizados nos intervalos anteriores a termos genéricos temos: Sendo ai e bi os extremos duma dada ordem do nosso intervalo, os seguintes serão deduzidos da seguinte forma: $bi - ai = ci$, em ci é a amplitude do intervalo. Então $ci + 1 = ci/2$ e o extremo mais distante de x (valor da nossa raiz) será acrescido ou decrescido do valor de $ci+1$, sendo ele o extremo mínimo ou máximo respetivamente. (Carlos, R)

Os alunos não se apercebem que a sua conjetura depende de uma raiz desconhecida (desta função específica) e, portanto, se aplica ao seu caso particular mas não ao caso geral.

Pelo contrário, Gonçalo, é capaz de utilizar corretamente símbolos matemáticos para apresentar uma regra para construir intervalos numa forma algorítmica, com os elementos da sequência definidos por recorrência, mas aplicável a qualquer função contínua num intervalo e com raízes desconhecidas:

> Como regra geral e tomando em conta o modo como chegamos ao intervalo seguinte, temos o intervalo $[a, b]$ com $v_{\text{méd}} = (a + b)/2$. Fazemos os

seguintes passos:
1.º Encontrar o valor médio ($v_{\text{méd}}$)
$v_{\text{méd}} = (a + b)/2$.
2.º Encontrar $f(v_{\text{méd}})$
Se $f(v_{\text{méd}}) > 0$ então ficamos com o intervalo seguinte $[a, v_{\text{méd}}]$
Se $f(v_{\text{méd}}) < 0$ então ficamos com o intervalo seguinte $[v_{\text{méd}}, b]$
(Gonçalo, R)

O aluno volta a utilizar a linguagem natural para justificar o seu algoritmo, baseando-se em propriedades e teoremas matemáticos, incluindo o teorema de Bolzano e os seus corolários: «Como a função é contínua, e como $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, apenas tínhamos que manter os extremos com estes sinais para que o próximo intervalo contivesse também o zero. Sendo vméd sempre extremo, bastava ver o sinal de $f(v_{\text{méd}})$» (Gonçalo, E). Deste modo, o aluno constrói, intuitivamente, o método da bisseção para resolver equações não lineares.

Conclusões

Neste estudo, os alunos foram desafiados a realizar tarefas de natureza diferente das que estão habituados nas aulas de Matemática no ensino superior, que os estimularam a experimentar diversos processos característicos da atividade matemática, como a procura de regularidades, formulação de questões, formulação e teste de conjeturas, generalização e justificação. A procura de regularidades é muito importante no seu trabalho e baseia-se, essencialmente, na observação de exemplos, em diagramas visuais ou sequências numéricas ou em cálculos simples. As dificuldades na identificação de padrões surgem quando os alunos não têm em conta toda a informação (necessária) disponível, o que limita fortemente a formulação de conjeturas corretas.

O processo de conjeturar é o que surge mais automática e frequentemente durante o seu trabalho e tem por base processos de raciocínio essencialmente indutivos, a partir da observação de casos particulares e de analogias. A sua conceção de resolver uma tarefa como processo de obtenção de um resultado levou os alunos a formular conjeturas como afirmações e a aceitá-las como conclusões, sem sentirem necessidade de as testar ou as justificar, como verificado noutros trabalhos anteriores (por exemplo, Ponte, 2007). Deste modo, as conjeturas que formulam nem sempre são corretas. Este comportamento evoluiu com a experiência e os alunos passaram a compreender o estatuto das conjeturas. Na maioria das vezes, Carlos e Luís só testam as suas conjeturas quando são solicitados e recorrem à experimentação de casos particulares (frequentemente os exemplos do enunciado). Contudo, algumas vezes, os alunos explicam o seu raciocínio dando justificações baseadas em propriedades matemáticas e raciocínio dedutivo, caso em que o teste de conjeturas coincide com a sua justificação. Além disso, quando, através do teste, os alunos rejeitam as suas conjeturas, tentam reformulá-las. O processo de justificação de conjeturas tem uma presença muito reduzida no trabalho dos alunos, surgindo poucas vezes de forma espontânea. Numa fase inicial do trabalho desenvolvido com a turma, os alunos não sentem necessidade de justificar as conjeturas que lhes parecem verdadeiras após a realização de testes. Apesar disso, os alunos são capazes de utilizar raciocínio dedutivo para as justificar e, como seria de esperar neste nível de ensino (AMATYC, 2006), a justificação é apoiada em conhecimento anterior de procedimentos, propriedades e conceitos matemáticos.

Um outro passo importante na exploração das tarefas é a generalização de conjeturas iniciais. Carlos e Luís parecem não compreender que as conjeturas podem ser válidas para casos particulares mas não para o caso geral e tendem a considerar a generalização um simples processo de formalização. Gonçalo, por seu lado, alarga o âmbito das suas conjeturas para obter soluções mais gerais, levando-o a construir o método da bisseção corretamente. Salienta-se, ainda, que o trabalho desenvolvido pelos alunos, nesta tarefa, contempla ainda a formulação de questões de forma implícita, identificáveis pelas conjeturas que enunciam. Estas questões são formuladas quando os alunos elaboram conjeturas a partir de exemplos ou geram problemas mais acessíveis a partir de um problema maior.

Estes resultados mostram que os alunos são capazes de usar tanto o raciocínio indutivo, como o dedutivo mas que é necessário reforçar alguns processos de raciocínio onde apresentam maiores dificuldades, como por exemplo a generalização e a justificação.

Da análise dos resultados destaca-se, como aspeto significativo, a variedade de representações que os alunos utilizam, associadas às diferentes funções que desempenham na exploração das tarefas de investigação propostas. Os alunos utilizam a linguagem natural, como ferramenta de apresentação, para descrever e justificar os seus processos de raciocínio e as suas soluções, mesmo quando estas são obtidas com base noutras representações. A preferência dos alunos por este modo de representação sugere, por um lado, uma certa facilidade no seu uso induzida pelo facto da informação apresentada num texto estar organizada de forma sequencial, preservando as relações temporais e lógicas, à semelhança dos seus raciocínios, como referido em Kollöffel (2008). Por outro lado, a utilização da linguagem natural para produzir argumentos aceitáveis para validar os procedimentos de resolução de problemas parece ser mais fácil, para os alunos, quando comparada com o modo algébrico de representação, situação também identificada em Boero et al. (2008).

No entanto, quando solicitados a generalizar os resultados obtidos através de raciocínios de natureza indutiva e a justificá-los, os alunos consideram necessário recorrer à notação simbólica, apesar de evidenciarem dificuldades na sua utilização, uma vez que as expressões que apresentam nem sempre traduzem aquilo que descrevem de forma correta em linguagem natural. Estas dificuldades são reversíveis a favor da representação algébrica, segundo Leung, Low e Sweller (1997), se os alunos tiverem mais tempo e prática com esta forma representacional. Gonçalo tem mais facilidade em usar símbolos matemáticos e em articulá-los com a linguagem natural, mostrando um melhor desempenho que os seus colegas. Deste modo, o domínio da linguagem algébrica é necessária para explorarem, de forma completa, as tarefas propostas, pois facilita o raciocínio dedutivo e, consequentemente, o processo de generalização e justificação formal de conjeturas.

A representação gráfica tem uma presença reduzida no trabalho dos alunos e só surge quando explicitamente solicitada ou quando outras representações (sobretudo a algébrica) não permitem obter resultados. A falta de prática em níveis educativos anteriores, as dificuldades cognitivas dos alunos que não veem a sua utilidade porque a consideram mais difícil de interpretar e de construir e as suas dificuldades culturais baseadas na crença que o uso de representações gráficas constitui um raciocínio pouco formal e rigoroso, podem estar na origem desta tendência (Arcavi, 2003). Apesar disso, os alunos são capazes de utilizar representações gráficas como ferramenta de exploração, para encontrarem soluções e de avaliação para verificarem as suas conjeturas. Por vezes, os alunos constroem esquemas visuais para identificar regularidades e ganhar compreensão sobre propriedades fundamentais na formulação de conjeturas. Estes esquemas desempenham a dupla função de compreensão e registo pois são selecionadas com base na clarividência que o aluno pode obter sobre a informação apresentada e, simultaneamente, permitem diminuir o trabalho de memória, uma vez que os elementos da informação representada não têm que ser mantidos ativos na memória todo o tempo e, deste modo, os alunos podem concentrar-se nos raciocínios.

Apesar da facilidade que os três alunos revelam na tradução e conversão de representações, usam-nas de modo pouco flexível ao longo do processo de exploração e só Gonçalo se mostra capaz de as articular e tirar partido dessa relação para formular conjeturas e obter resultados corretos. De um modo geral, só quando relacionam as representações algébricas com outros tipos de representações (linguagem natural, gráficos ou tabelas) é que os alunos constroem significado para expressões algébricas e identificam propriedades que são fundamentais na formulação e justificação de conjeturas, evidenciando maior capacidade de realizar raciocínios dedutivos. Estes resultados apoiam a ideia que a utilização de múltiplas representações é benéfica para a compreensão, para desenvolver o raciocínio e para a construção de conhecimento (Ainsworth, 2006; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Greeno & Hall, 1997). No entanto, é fundamental ajudar os alunos a ganhar consciência dos diferentes papéis que as representações podem ter em momentos diferentes da sua exploração e a desenvolver a capacidade de as articular de modo apropriado na promoção dos seus processos de raciocínio.

Finalmente, os resultados deste estudo evidenciam o potencial das tarefas de investigação para promover o raciocínio matemático dos alunos, desenvolvendo a sua compreensão de vários processos que caracterizam a atividade matemática, permitindo-lhes trabalhar e familiarizarem-se com diferentes formas de representação e construir conhecimento de conceitos e procedimentos da disciplina. Sugerem, igualmente, que as tarefas de investigação podem ser usadas, com sucesso, nos cursos superiores, nomeadamente no domínio da Análise Numérica.

Referências

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*(3), 183–198.

American Mathematical Association of Two-Year Colleges (2006). *Professional standards*. Obtido de www.missioncollege.org/depts/maths/hobbs/standars.html em 09/12/2009.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241.

Boero, P., Douek, N., & Ferrari, P. L. (2008). Developing mastery of natural language. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 262–295). New York, NY: Routledge.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. London: Springer.

Carpenter, T. P., Frank, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41–53.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1985). *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: F. Alves.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T., & Hadas, N. (1996). Proof as an answer to the question why. *ZDM*, *96*(1), 1–5.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–26). Columbus, OH: ERIC.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131.

English, L. (1997). The development of fifth-grade children»s problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 183–217.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645–657.

Goldenberg, E. P. (1998). «Hábitos de pensamento»: Um princípio organizador para o currículo (I). *Educação e Matemática*, *47*, 31–44.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.197–218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1–23). Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 45–85). London: Routledge.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, *78*(5), 361–367.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, *9*, 20–23.

Henriques, A. C. (2011). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da Análise Numérica num contexto de atividades de investigação* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). (disponível em http://repositorio.ul.pt)

Henriques, A. C., & Ponte, J. P. (2008). Atividades de investigação na aprendizagem de Análise Numérica. *Revista de Educação*, *2*, XVI, 5–32.

Joint Quality Initiative (2002). *Dublin descriptors*. Obtido de www.jointquality.org em 16/01/2011.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kollöffel, B. (2008). *Getting the picture. The role of external representations in simulation based inquiry learning*. Enschede: PrintPartners Ipskamp.

Lannin, J., Ellis, A., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade8*. Reston, VA: NCTM.

Leung, M., Low, R., & Sweller, J. (1997). Learning from equations or words. *Instructional Science*, *25*, 37–70.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison–Wesley.

Mathematical Association of America (2004). Undergraduate programs and courses in the mathematical sciences: CUPM curriculum guide 2004. Obtido de http://www.maa.org/cupm/cupm2004.pdf em 03/11/2008.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Obtido em 16/01/2008 de DGIDC-ME: http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/Programa-Matematica.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e avaliação da Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

Neria, D., & Amit, M. (2004). Students preference of non-algebraic representations in mathematical communication. In S. A. Liederman, W. C. Wolf & P. York (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 409–416). Bergen, Norway: PME.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*. New Jersey, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (2002). The goals of mathematical education. *Mathematics Teaching*, *181*, 42–44.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM, Mathematics Education*, *39*, 419–430.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfirio & M. Baía (Eds.), *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49* (pp. 3–14). Setúbal: Escola Superior de Educação de Setúbal.

Ponte J. P., Brocardo J., & Oliveira H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York, NY: MacMillan.

Silver, E. A. (1993). On mathematical problem posing. In I. Hirabayashi (Ed.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 66–85). Tsukuba, Japan: PME.

Silver, E. (1996). Acerca da formulação de problemas de matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 139–162). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Small, D. (2008). *An urgent call to improve traditional college algebra programs*. Obtido de http://www.maa.org/t_and_l/urgent_call.html em 03/11/2008.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*, 344–350.

Stake, R. E. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stylianou, D. (2011). An examination of middle school students» representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, *76*, 265–280.

Resumo. O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos exige uma perceção aprofundada dos processos que lhe estão associados. Este artigo apresenta os resultados de uma experiência de ensino realizada numa disciplina de Análise Numérica e tem como objetivo analisar os processos matemáticos utilizados por alunos universitários na exploração de tarefas de investigação e perceber o seu valor na promoção do raciocínio matemático. O estudo usou uma abordagem de investigação qualitativa e interpretativa baseada em três estudos de caso. Os dados foram recolhidos utilizando observação participante, relatórios de investigação elaborados pelos alunos e entrevistas realizadas após as tarefas. Os resultados revelam que a realização das tarefas de investigação contribuiu para promover o raciocínio matemático dos alunos, estimulando-os a experimentarem vários processos característicos da atividade matemática, incluindo a formulação de questões, a formulação e o teste de conjeturas, a generalização e, embora de modo mais incipiente, a sua justificação.

Palavras-chave: Raciocínio matemático; Ensino superior; Tarefas de investigação; Representações; Análise Numérica.

Abstract. The development of students' mathematical reasoning requires a deep understanding of the mathematical processes. This paper reports a teaching experiment in a university level numerical analysis course and aims to analyze students' mathematics processes when exploring investigation tasks and to understand the potential of these tasks in promoting students' mathematical reasoning. The study follows a qualitative and interpretative approach based on three case studies. Data collection includes participative observation, students written reports and interviews. The results show that the investigations contributed to promote students' mathematical reasoning providing them opportunities to experience several mathematical processes, including posing questions, formulating and testing conjectures, generalizing and proving results.

Keywords: Mathematical reasoning; Higher education; Investigation tasks; Representations; Numerical analysis.

■ ■ ■

ANA CLÁUDIA HENRIQUES

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
achenriques@ie.ul.pt

(Recebido em abril de 2012, aceite para publicação em outubro de 2012)