A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4.º ano[1]

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Introdução

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) considera o raciocínio matemático como uma das três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática, referindo que esta capacidade fundamental envolve a formulação e teste de conjeturas, e numa fase mais avançada a demonstração, e que os alunos deverão compreender o que é uma generalização, um exemplo e um contraexemplo. No que concerne ao 1.º Ciclo do Ensino Básico, o programa salienta que «o desenvolvimento do raciocínio é promovido suscitando a explicação de ideias e processos, a justificação de resultados e a formulação e teste de conjeturas simples por parte dos alunos» (ME, 2007, p. 29). Ainda no que respeita a este nível de ensino, o programa releva a importância das experiências que são proporcionadas aos alunos no sentido de lhes permitirem expressar e desenvolver as suas ideias e de clarificar e organizar os seus raciocínios, salientando a importância dos momentos de partilha e debate na aula e apontando o papel fundamental do professor como dinamizador desses momentos.

Estas ideias estão em sintonia com o que o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1994) preconiza considerando que o ensino da Matemática, como um exercício de raciocínio, deve ser uma atividade corrente em sala de aula, onde os alunos devem participar em discussões matemáticas onde são estimulados a explicar e a justificar os seus raciocínios. Salienta ainda que dar ênfase ao raciocínio no ensino da Matemática permite desenvolver o poder matemático dos alunos, conferindo-lhes também autoridade nessa aprendizagem no sentido em que podem chegar a conclusões e justificar as suas afirmações sem necessitar da validação do professor ou do manual. Como capacidade essencial para a compreensão da Matemática, em todos os níveis de ensino, os alunos de-

1 Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

verão perceber e acreditar que a matemática faz sentido, através do desenvolvimento de ideias, da exploração de fenómenos, da justificação de resultados e da utilização de conjeturas matemáticas em todas as áreas de conteúdo (NCTM, 2000). De acordo com o documento *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000), os alunos do 3.º ao 5.º ano de escolaridade deverão, com frequência, formular conjeturas sobre relações matemáticas, investigar essas conjeturas e elaborar argumentos matemáticos baseados nas suas experiências.

Lannin, Ellis e Elliot (2011) consideram o raciocínio matemático como essência da atividade matemática, referindo que este ajuda a compreender porque é que as relações matemáticas existem e é crítico para o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda da Matemática. Estes autores inspiram-se na definição de raciocínio matemático de Russell (1999, citado em Lannin, Ellis & Elliot, 2011), entendendo-o como o desenvolvimento, a justificação e a utilização da generalização matemática. Desta forma, os autores concebem-no como um processo que envolve conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos.

Ball (2002) considera que o raciocínio matemático é definido como um conjunto de práticas e normas, que não são necessariamente individuais ou idiossincráticas. Neste sentido, Yackel e Hanna (2003) entendem o raciocínio matemático como uma atividade partilhada, onde quem aprende participa enquanto interage com outros para resolver problemas matemáticos.

Este artigo enquadra-se no âmbito de uma investigação mais ampla, de implementação de uma experiência de ensino ao longo de um ano letivo, com o principal objetivo de desenvolver o pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade, centrando-se nos processos de generalização e simbolização e na mobilização do pensamento relacional e do pensamento funcional. No âmbito dessa investigação, este artigo foca-se na generalização enquanto aspeto central do pensamento algébrico e como processo de raciocínio matemático. É objetivo deste artigo compreender como a generalização emerge e se desenvolve nas práticas sociais de sala de aula, no momento de discussão coletiva, no contexto de uma prática de ensino-aprendizagem exploratória, de acordo com uma perspetiva dialógica do desenvolvimento do conhecimento matemático.

Contexto de ensino-aprendizagem exploratório

A aprendizagem que os alunos fazem está dependente da atividade que realizam e da reflexão que fazem sobre a mesma (Ponte, 2005), e deste modo a seleção das tarefas que são trabalhadas em sala de aula deve ter em conta o tipo de atividade que propõe aos alunos. Assim, tarefas que conduzem a procedimentos rotineiros são diferentes de tarefas que exigem aos alunos pensar conceptualmente e que os estimulam a estabelecer conexões (Stein & Smith, 1998). As tarefas são «um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos» (Ponte, 2005, p. 23).

A principal característica do ensino-aprendizagem exploratório é que promove nos alunos a descoberta e a construção do conhecimento (Ponte, 2005). Para tal, a exploração de tarefas abertas e a gestão que das mesmas se faz na aula, proporcionando aos alunos momentos de discussão entre pares e coletivamente, são oportunidades fundamentais para a construção do conhecimento.

Baxter e Williams (1996, citado em Baxter & Williams, 2010) propõem a designação do «ensino orientado pelo discurso» (*discourse-oriented teaching*, no original) para descrever as ações do professor que promovem a construção do conhecimento matemático através da comunicação entre os alunos. Os mesmos autores descrevem o ambiente de sala de aula que promove este tipo de ensino de acordo com a estrutura seguinte: (1) as tarefas matemáticas são apresentadas aos alunos; (2) os alunos trabalham na tarefa a pares ou em pequenos grupos, enquanto o professor circula pelos grupos encorajando-os, desafiando-os, questionando-os e dando-lhes sugestões, se necessário; (3) os alunos apresentam as suas resoluções à turma; (4) o professor sistematiza as apresentações. Conscientes da dificuldade inerente à implementação desta estrutura de sala de aula, os autores referem que o professor deverá promover suportes sociais que ajudem os alunos a trabalhar em conjunto. Por exemplo, os alunos devem ser encorajados a explicar as suas formas de pensamento e a compreenderem as explicações dos colegas. As regras que conduzem a esta forma de comunicação na sala de aula devem ser explicitamente identificadas e postas em prática até fazerem parte da cultura de sala de aula. À medida que os alunos interiorizam essas regras, assumem um papel de maior responsabilidade no discurso matemático de sala de aula. Baxter e Williams (2010) concluem que em salas de aula onde existe esta prática de ensino, os professores falam menos e os alunos mais do que o que seria esperado numa sala de aula de ensino mais tradicional, pois o tempo de aula é organizado para que sejam dadas mais oportunidades de comunicação aos alunos, tanto em pequeno grupo como durante a discussão coletiva com toda a turma.

Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) consideram que as discussões coletivas devem ser impulsionadas por tarefas matemáticas cognitivamente exigentes e que o papel que o professor assume deverá permitir a construção de um sentido pessoal e coletivo das ideias matemáticas exploradas na aula. Para isso, as discussões coletivas devem suportar a aprendizagem matemática dos alunos, ajudando-os a aprender o discurso matemático, tornando o seu pensamento público para que possam construir e avaliar as suas ideias matemáticas e as dos outros.

Na perspetiva de Wells (2000) as salas de aula devem assumir-se como comunidades de investigação, onde a turma trabalha colaborativamente em torno de um mesmo objetivo, construindo dialogicamente o conhecimento e onde também o professor deve assumir-se como investigador integrante dessa comunidade. O professor, enquanto líder e organizador da comunidade de investigação, não pode evitar a responsabilidade de selecionar atividades que promovam a melhor oportunidade possível para o desenvolvimento individual e social de cada membro da comunidade. De acordo com este autor, os princípios que definem uma sala de aula enquanto comunidade de investigação numa perspetiva dialógica do conhecimento são os seguintes:

- As atividades propostas aos alunos envolvem-nos inteiramente como indivíduos que encontram um sentido real para a sua participação. Desta forma, a aprendizagem é entendida não como simples aquisição de capacidades ou informações isoladas.
- As atividades são situadas e únicas, situadas no tempo e espaço. As atividades são influenciadas por se desenvolverem numa comunidade com indivíduos particulares que utilizam ferramentas particulares e que têm as suas próprias histórias.
- O currículo é entendido como meio e não como fim. Os saberes e capacidades prescritos no currículo são ferramentas culturais que deverão ser usadas significativamente tanto individual como socialmente.
- Os resultados de uma atividade são tanto planeados como emergentes, pois embora os objetivos da atividade sejam conhecidos, ela alimenta-se da imprevisibilidade da situação em que ocorre.
- As atividades devem permitir a diversidade e a originalidade para que promovam o desenvolvimento de cada um dos participantes, individualmente e como comunidade.

Na conceptualização de uma sala de aula enquanto comunidade de investigação, a turma trabalha colaborativamente, o conhecimento é construído dialogicamente e o currículo orientado pela perspetiva investigativa (Wells, 2000).

A promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula

O pensamento algébrico pode ser encarado como «um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade» (Blanton & Kaput, 2005, p. 413). Tendo em conta a definição mais recente de pensamento algébrico apresentada por Kaput (2008), Blanton (2008) salienta as duas vertentes que considera essenciais para uma compreensão mais abrangente desse conceito: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. Enquanto a primeira se prende com a utilização da aritmética para desenvolver e expressar generalizações, a segunda consiste na identificação de padrões numéricos e geométricos para descrever relações funcionais.

O atual corpo de investigação, sobre a introdução da Álgebra no ensino elementar, enfatiza a aritmética conceptualizada de forma algébrica e assenta no pressuposto de que a compreensão da Álgebra começa com a aprendizagem da Aritmética (Kieran, 2007). Esta autora salienta que os resultados da investigação apontam para a necessidade de promover a generalização algébrica nos primeiros anos de escolaridade e que uma das possíveis abordagens para o desenvolvimento do pensamento algébrico baseia-se no caráter potencialmente algébrico da aritmética, ou seja, na aritmética generalizada.

Desta forma, e como referem Carraher e Schliemann (2007), a introdução do pensamento algébrico na escola elementar acarreta novas visões sobre a Aritmética e a Álgebra e a forma como estas se relacionam, assumindo que se pode construir uma ponte entre elas. Nesta perspetiva, Russell, Schiffer e Bastable (2011) identificaram quatro atividades matemáticas que podem constituir a referida ponte: «compreensão do comportamento das operações; generalização e justificação; extensão do sistema numérico e utilização da notação com significado» (p. 44). Os autores argumentam que este tipo de atividades matemáticas tem também o potencial de fortalecer os alicerces do cálculo para todos os alunos, pois providenciam «um meio para os alunos reexaminarem e obterem uma compreensão fortemente alicerçada sobre o significado das operações e formas de pensar em matemática» (p. 67).

Também Rivera (2006) sugere que os sistemas numéricos devem ser ensinados de tal forma que os alunos percebam as propriedades ou relações numéricas existentes em objetos individuais para, progressivamente, verificarem que estas são invariantes independentemente dos objetos de que partiram. As regularidades que os alunos encontram nas operações aritméticas podem constituir a base para a exploração da generalização sobre os números e operações e também de práticas como a formulação, o teste e a prova dessa generalização. Bastable (2007) refere-se a essas práticas como centrais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Neste sentido, Kieran (2004) defende que o pensamento algébrico nos primeiros anos deve envolver o desenvolvimento de formas particulares de pensar que permitam analisar relações entre quantidades, identificar a estrutura, analisar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever, e onde pode ser feito (mas não necessariamente) uso do simbolismo algébrico como ferramenta. Esta autora sugere ajustamentos no tratamento da aritmética, devendo: (a) focar-se nas relações e não apenas no cálculo e na resposta numérica; (b) focar-se nas operações e suas inversas; (c) focar-se simultaneamente na representação e na resolução; (d) focar-se em números e letras, e não apenas nos números; e, (e) reforçar o significado do sinal de igual.

Fujii e Stephens (2008) defendem a utilização de expressões numéricas generalizáveis como ponte entre a aritmética e o pensamento algébrico. Segundo estes autores, as explicações gerais dos alunos sobre o porquê da veracidade de uma expressão numérica como $78-49+49=78$ e a sua capacidade de usar exemplos específicos daquilo que mais tarde será uma relação geral ($a-b+b=a$) podem ser descritas como o *pensamento quase–variável*. A expressão *quase-variável* significa «um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados» (Fujii, 2003, p. 59). Desta forma, os alunos podem usar expressões numéricas generalizáveis, centrando a atenção na estrutura dessas expressões, e identificar e discutir a generalização algébrica antes da introdução da simbologia algébrica formal.

O estudo de Britt e Irwin (2011) mostra como os alunos conseguiram aplicar um conjunto de estratégias de cálculo mental para resolver diferentes problemas numéricos e detetar as relações entre os números envolvidos, assim como a estrutura subjacente a essas estratégias. Os autores destacam o papel crucial da generalização matemática e salientam a necessidade de os alunos mais novos trabalharem em diferentes níveis de compreensão da generalização que envolva a expressão dessa generalização em palavras, imagens e gráficos, assim como com símbolos numéricos que atuem como *quase-variáveis*. Para tal, os autores sugerem o seguinte percurso: primeiramente, os alunos devem ser encorajados a trabalhar com números como quase-variáveis; depois a expressar a generalização em linguagem natural e; em seguida, usando os símbolos da Álgebra. Nesta linha de pensamento, Russell, Schiffer e Bastable (2011) defendem que a introdução da notação algébrica no momento em que os alunos já tenham articulado as suas ideias em palavras e imagens permite-lhes aceder ao significado dos símbolos. Os autores referem que essa nova forma de representação não só providencia uma expressão concisa das ideias dos alunos como oferece novas formas de percecionar as relações matemáticas. Arcavi (1994, 2005) introduz a noção de *sentido de símbolo*, em analogia com a noção de sentido de número da aritmética, caracterizando-a como um complexo e multifacetado *sentir* sobre os símbolos e que se traduz na capacidade para interpretar e usar, de forma criativa, a simbologia matemática na descrição de situações e na resolução de problemas, reconhecendo o seu poder e adequação, manipulando-a flexivelmente e dando-lhe sentido em diferentes contextos. Para este autor deve procurar-se desenvolver o sentido de símbolo em contextos ricos que aportem significado à actividade que os alunos realizam sobre os símbolos, de modo que estes não sejam encarados como entidades formais e sem sentido, mas como poderosas formas de compreender e resolver problemas e de comunicar.

De acordo com Kaput (2008) o pensamento algébrico «é composto por processos complexos de simbolização que servem o propósito da generalização e do raciocínio com generalizações» (p. 9). Desta forma, Kaput, Blanton e Moreno (2008) consideram a generalização e a simbolização como processos estritamente relacionados, referindo que a simbolização ao serviço da generalização permite uma expressão unificadora, ou seja, uma forma de unificar a multiplicidade. Consideram o processo de simbolização como dinâmico e aditivo que é construído a partir do momento em que os alunos são confrontados com uma situação de sala de aula que procuram descrever usando palavras, desenhos ou outras representações. Esta construção é coletiva porque é mediada pelas intervenções dos alunos, quando inseridos em salas de aulas onde as discussões matemáticas são «nutridas e apoiadas» (p. 28), e vive de aditivas redefinições desenvolvendo uma *cadeia de significação* (Cobb et al., 1997, citado em Kaput, Blanton e Moreno, 2008) que é orquestrada pela ação do professor. Desta forma, no processo de simbolização a sua natureza construtiva e aditiva é oposta ao produto que dele resulta, abstrato e subtrativo. Kaput, Blanton e Moreno (2008) referem-se à simbolização como uma necessidade sentida pelos alunos no decurso do processo de generalização, apoiando-se na perspetiva de Mason (2008) de que estes são *poderes* que os alunos já possuem para compreenderem o mundo que os rodeia. No entanto, e de acordo com este último autor, estes poderes necessitam ser exercitados, desenvolvidos e também relevados para que sejam usados intencionalmente. Estes autores realçam ainda que a álgebra não pode ser entendida como uma simples manipulação simbólica, como uma *aritmética com letras*, mas antes como uma linguagem poderosa, sucinta e manipulável que expressa generalizações.

A generalização enquanto prática coletiva

De acordo com diversos autores (e.g. Kaput, 2008; Mason, 1996, 2008; Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Blanton, 2008), a generalização é um elemento central do pensamento algébrico. A generalização matemática envolve «uma afirmação de que uma propriedade ou técnica é válida para um conjunto de objetos matemáticos» (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008, p. 3). Para Mason (1996) uma das formas de desenvolver a generalização é sensibilizar para a distinção entre olhar para e olhar através, conjugando-se esta última com a capacidade de ver a generalização a partir do particular. A generalização pode ser expressa de diversas formas. Inicialmente, as crianças podem expressar as generalizações que observam no mundo com palavras e, gradualmente, usar formas mais simbólicas (Blanton, 2008).

Ellis (2011) caracteriza a generalização como um processo dinâmico, socialmente situado, que se desenvolve através de ações colaborativas. Esta perspetiva da generalização atende às interações sociais, às ferramentas, à história pessoal e ao ambiente partilhado por quem se envolve em ações de generalização. Esta autora define a generalização como uma atividade onde as pessoas dentro de um contexto sociomatemático específico se envolvem em pelo menos uma das três ações seguintes: a) identificam o que é comum entre os casos; b) estendem o raciocínio para além do caso original; c) derivam resultados mais amplos a partir dos casos particulares. Neste sentido, a generalização surge de uma representação coletiva que tem raiz na comunidade, ocorrendo através de experiências mediadas pela interação, linguagem e outras ferramentas próprias. As interações dos alunos suportam e moldam as atividades de generalização, pois são eles que tomam decisões sobre o que tem interesse e o que querem validar. Naturalmente que o papel do professor é também crucial pela promoção de uma cultura de sala de aula que incentive a partilha de generalizações e o encorajamento de justificações e clarificações. Ellis (2011) refere que a ação de generalização decorre em ciclos de interação onde uma generalização inicial pode revestir-se de novas formas, passando pela interação e reflexão coletivas, sendo a versão de generalização final não o produto de um só aluno, mas resultante do desenvolvimento feito na interação do grupo.

Nesta linha de pensamento, Jurrow (2004) considera a generalização como uma prática matemática central que resulta de um processo entre alunos, tarefas, atividade envolvente e ferramentas de modelação. Esta autora salienta que o simples facto de os alunos se envolverem em atividades significativas não é suficiente para começarem a formular generalizações. Para tal, os alunos necessitam ser guiados na reflexão e terem oportunidades para falarem, escreverem e representarem o que é geral numa situação e as discussões coletivas podem ser um bom contexto para se envolverem neste tipo de atividades. Ao professor cabe a responsabilidade de tornar essas práticas rotineiras na sala de aula, orientando a reflexão, pedindo aos alunos para discutirem e criticarem as abordagens de uns dos outros, fazerem conexões entre as abordagens aos diferentes problemas e tentarem identificar padrões gerais que surjam da comparação dessas abordagens e soluções.

Metodologia

Opções metodológicas

O *design* do estudo segue de perto o que Gravemeijer e Cobb (2006) denominam como «experiência de ensino em sala de aula», que agrega o desenvolvimento de processos de planeamento e ensino, assim como a investigação sobre a aprendizagem e desenvolvimento dos alunos num contexto social, a sala de aula, e deste modo, procura ser, simultaneamente, educativa e científica (Kelly, 2003). A experiência de ensino desenvolveu-se de acordo com três fases: diagnóstico da situação de partida e desenho da experiência de ensino numa primeira fase, implementação da experiência de ensino na sala de aula na segunda fase, e, na terceira fase, avaliação da experiência de ensino. No entanto, a análise das atividades instrucionais foi contínua e acompanhou a realização da experiência de ensino (Gravemeijer & Cobb, 2006), sendo usada tanto para reavaliar e desenhar as tarefas matemáticas, como para traçar o percurso de aprendizagem dos alunos.

Uma experiência de ensino integra uma sequência de episódios de ensino que incluem, entre outros elementos, um professor e um ou mais alunos, e um método de recolha de dados que incide sobre esses episódios (Steffe & Thompson, 2000), que visa a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem, e em que o investigador está envolvido como um educador (Kelly, 2003). Deste modo, uma característica distintiva deste tipo de abordagem é a rutura com a diferenciação entre professor e investigador (Molina, 2006), sendo que em muitos casos o investigador assume o papel de professor, tal como sucedeu no presente estudo.

Desta forma, nesta experiência de ensino, as aulas foram conduzidas pela investigadora (primeira autora deste artigo), tendo a professora titular de turma assumido um papel de coadjuvante na aula. Refira-se que a investigadora é professora de 1.º Ciclo na mesma escola da turma onde se implementa a experiência de ensino e que, anteriormente a esta investigação, já mantinha um contacto direto com a professora titular da turma e os alunos, nomeadamente a partir da coordenação de projetos. A segunda autora deste artigo participou também na experiência de ensino, trabalhando em conjunto com a investigadora na planificação e construção das tarefas e na reflexão produzida ao longo da experiência de ensino, tendo assistido e recolhido dados em algumas destas aulas.

Neste artigo a análise centra-se nos momentos de discussão coletiva de três das tarefas realizadas pela turma. Para recolha de dados, as aulas foram gravadas em formato vídeo e analisados os momentos de discussão coletiva e foram, ainda, recolhidas e analisadas as produções escritas dos alunos. Com base numa análise preliminar dos momentos de discussão coletiva de cada uma das tarefas foi possível identificar três momentos significativos no processo de construção da generalização, a partir da realização de diferentes tarefas: 1) a utilização de *quase-variáveis* para a expressão da generalização; 2) a emergência da linguagem matemática simbólica; e, 3) a apropriação do sentido de símbolo. Tendo em conta a perspetiva da construção coletiva da generalização, os dados são analisados de acordo com os seguintes aspetos: descrição da forma como emerge e evolui a generalização nas tarefas apresentadas, e relação entre a emergência e evolução da generalização com o modelo de ensino-aprendizagem exploratório, mais concretamente no que respeita aos momentos de discussão coletiva desenvolvidos.

A experiência de ensino

A experiência de ensino decorreu durante o ano letivo 2010/11 e foram desenvolvidas 42 tarefas, organizadas em cinco sequências de acordo com os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma, respeitando a perspetiva de conceber o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. De acordo com a potencialidade de tratamento algébrico de cada um dos tópicos matemáticos da planificação anual da turma, as tarefas foram introduzidas na experiência de ensino com uma média de duas tarefas por semana e com a duração de cerca de duas horas cada uma. O modelo de aula desenvolvido desde o início da experiência de ensino procurou respeitar os princípios do ensino exploratório, organizando a aula em quatro fases distintas: apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. No momento de trabalho autónomo, os alunos desenvolveram a exploração das tarefas em pares.

A turma onde decorreu a experiência de ensino era constituída por 19 alunos, 7 raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade. Embora a turma estivesse a trabalhar de acordo com o PMEB (ME, 2007) desde o 3.º ano de escolaridade, no início da experiência de ensino os alunos revelavam algumas dificuldades na exploração de questões que envolviam o sentido de número, privilegiando quase exclusivamente a utilização dos algoritmos na resolução das tarefas. Esse facto era expresso inclusivamente quando os alunos comunicavam os seus raciocínios, referindo que colocavam os números «em cima» e «em baixo», ilustrando o procedimento que efetuam quando resolvem o algoritmo. Também a exploração de relações numéricas denotava algumas fragilidades por parte dos alunos. Refira-se, como exemplo, que ao iniciar a exploração de sequências numéricas, diversos alunos ficaram muito surpreendidos quando lhes surgiu a expressão 11×3 como parte de uma tabuada, argumentando que «a tabuada do 3 terminava no 10×3».

A exploração das tarefas trabalhadas durante a experiência de ensino tinha como objetivos gerais a identificação de regularidades e expressão da generalização através da linguagem natural, e a iniciação de um percurso em direção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. Tal como foi referido, cada sequência de tarefas procurava respeitar o tema e tópico matemático em desenvolvimento, de modo a articular o trabalho desenvolvido nas aulas da experiência de ensino com as aulas ministradas pela professora titular de turma. Para tal, a investigadora reuniu frequentemente com a professora titular de modo a assegurar essa articulação, embora nas aulas ministradas pela professora não houvesse qualquer objetivo de desenvolvimento do pensamento algébrico.

O quadro 1 sistematiza as cinco sequências de tarefas realizadas ao longo da experiência de ensino, identificando os aspetos do pensamento algébrico tratados em cada uma e os temas, tópicos e subtópicos do programa onde se enquadram.

De acordo com o Programa de Matemática (ME, 2007)			Experiência de Ensino	
Temas	Tópicos-Subtópicos	Objectivos específicos	Aspetos do pensamento algébricos explorados	Sequências de tarefas
Números e Operações	Números naturais –Relações numéricas –Múltiplos e divisores	–Identificar e dar exemplos de múltiplos e de divisores de um número natural –Compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores)	–Regularidades nos múltiplos e divisores –Relações numéricas –Relação de igualdade –Expressão da generalização em linguagem natural	I
	Operações com números naturais –Multiplicação	–Utilizar estratégias de calculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades. –Compreender os efeitos das operações sobre os números.	–Propriedades das operações –Relação de igualdade –Propriedades das operações –Operações inversas –Tradução da inguagem natural para a linguagem simbólica –Outras representações (tabelas, diagramas)	III
			–Propriedades das operações –Relação de igualdade –Variação –Diferentes representações (linguagem natural, tabelas, diagramas, linguagem simbólica	
Medida	Comprimento e área –Perímetro –Área	Resolver problemas envolvendo perímetro e área	–Variação e covariação –Relações funcionais –Diferentes representações (linguagem natural, tabelas, diagramas, gráficos, linguagem simbólica)	IV
Números e Operações	Regularidades –Sequências	-Investigar regularidades numéricas –Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional	–Relações numéricas –Relações funcionais –Diferentes representações (linguagem natural, tabelas, diagramas, linguagem simbólica)	V

Quadro 1.—Sistematização da Experiência de Ensino, de acordo com o Programa de Matemática.

A introdução à linguagem simbólica realizou-se no final da segunda sequência com a exploração da tarefa «Salas de cinema» que consistia na descoberta das formas possíveis de organizar uma sala de cinema com cem cadeiras, de modo a que cada fila tivesse o mesmo número de cadeiras. Nessa tarefa foi introduzido pela investigadora, na altura da discussão coletiva, o símbolo «?» para designar «qual o número» (por exemplo, em expressões como $? \times 2 = 100$ ou $? \times 50 = 100$), e esse foi o primeiro momento em que os alunos se confrontaram com um símbolo não numérico para representar um número desconhecido. Nas tarefas seguintes foi iniciado o percurso de tradução da expressão da generalização para a linguagem simbólica, inicialmente com recurso ao símbolo «?» para designar «qualquer número» e, progressivamente, com a introdução de outros símbolos não numéricos escolhidos pelos alunos.

Apresentação dos resultados

Nesta secção apresentar-se-á a exploração de três tarefas, analisando excertos de momentos da discussão coletiva em sala de aula que permitiram aos alunos a construção coletiva da generalização e a evolução das suas formas de expressão da linguagem natural para uma linguagem progressivamente mais simbólica. São apresentadas tarefas de diferentes sequências: uma tarefa da segunda sequência - «Calcular usando o dobro» — (a 13.ª tarefa da experiência de ensino), uma tarefa da quarta sequência — «Os cromos da Ana e do Rui» — (a 22.ª) e uma tarefa da quinta e última sequência — «Os colares» — (a 38.ª).

A utilização de quase-variáveis para expressão da generalização

A primeira tarefa em análise neste artigo — «Calcular usando o dobro» (figura 1) — explora a relação de dobro e metade entre as tabuadas do quatro e do oito. Usa três ex-

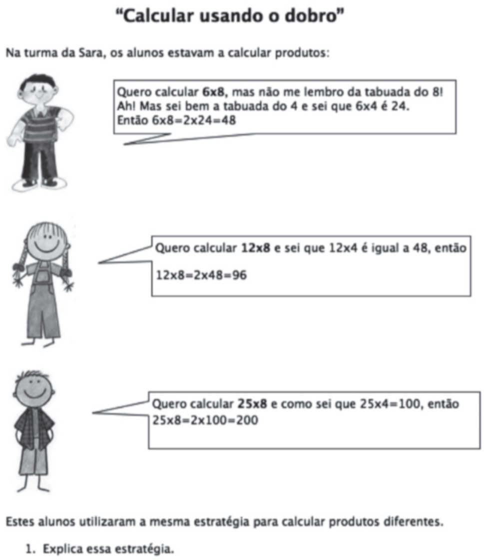

Figura 1.—Enunciado da tarefa «Calcular usando o dobro».

pressões numéricas que ilustram a mesma estratégia de cálculo e solicita aos alunos que expliquem essa estratégia. Nesta tarefa está subjacente a perspetiva do pensamento quase-variável de Fujii (2003), ou seja, a utilização de expressões numéricas particulares para conduzir à generalização da relação matemática.

Inicialmente, os alunos trabalharam a pares e conseguiram reconhecer as relações de dobro e metade envolvidas na estratégia de cálculo. Na exploração coletiva da tarefa, foram explorados alguns casos particulares da estratégia de cálculo e os alunos apresentaram exemplos para além das expressões numéricas enunciadas na ficha de trabalho. Em seguida, a investigadora conduziu a discussão com o objetivo de os alunos generalizarem a estratégia de cálculo para além dos casos estudados.

> Investigadora: Ok. Temos lá três exemplos, mas esta estratégia só serve para aqueles exemplos?
>
> Vários alunos: Não.
>
> Fábio: A estratégia que nós fizemos dá para todas as contas.
>
> Investigadora: E como podemos resumir de forma clara essa estratégia? Que estratégia foi essa?
>
> Diogo: Fizemos a conta do dobro.
>
> Investigadora: O dobro de quê?
>
> Diogo: O dobro do resultado.
>
> Investigadora: És capaz de explicar melhor? Acrescentar mais um bocadinho?
>
> (O Diogo não responde.)
>
> Investigadora: Qual era a tabuada que queríamos trabalhar?
>
> Vários alunos: A do 8.
>
> Investigadora: E para trabalhar a tabuada do 8, usámos qual tabuada?
>
> Vários alunos: A do 4.
>
> Rita: Podemos usar as metades.
>
> Investigadora: E o que é que nós descobrimos? Eu posso fazer a tabuada do 8 usando qual?
>
> Vários alunos: A do 4.

Em seguida, uma aluna, Rita, consegue expressar a generalização da estratégia de cálculo para além dos casos particulares, mas ainda usando uma linguagem confusa e repetitiva. Neste sentido, a investigadora solicita que a expressão seja mais simples e clara, encaminhando os alunos nesse processo.

> Rita: Se nós formos à tabuada do 4, depois multiplicarmos o 4 pelo número que queríamos da tabuada do 8, se multiplicarmos duas vezes, vai dar o resultado da tabuada do 8.

> INVESTIGADORA: Como é que eu posso dizer isso de forma mais simples?
>
> CAROLINA: Para sabermos 25x8 fazemos a partir do 25x4.
>
> INVESTIGADORA: Estás a usar um exemplo em particular. Mas e se for mais geral? Estávamos a falar na tabuada do 8 e na tabuada do 4. Posso dizer isso de uma forma muito simples. Para saber a tabuada do 8, eu faço o quê?
>
> VÁRIOS ALUNOS: O dobro da tabuada do 4.

A partir deste momento, um aluno, João V., propõe a generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural e vai ao quadro escrevê-la (figura 2).

Figura 2.—Expressão da generalização em linguagem natural, feita pelo João V.

A partir da construção da generalização em linguagem natural, a discussão foi conduzida pela investigadora no sentido de ser feita a sua tradução para a linguagem matemática. A estratégia de cálculo apresentada na tarefa envolve as relações de dobro e metade, através das tabuadas do quatro e do oito. Neste momento da experiência de ensino, a investigadora considerou que os alunos já estavam preparados para contactar com uma expressão mais explícita dessa relação numérica, conduzindo os alunos à tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica. Desta forma, e por ser a primeira vez que os alunos são confrontados com esta situação, a investigadora procura que estes entendam o que significa a escrita da generalização para a linguagem matemática.

> INVESTIGADORA: (…) Agora quero que pensem nesta frase que o João V. escreveu e que a escrevam na linguagem matemática. Como é que eu posso usar a linguagem matemática?
>
> VÁRIOS ALUNOS: Com contas.
>
> INVESTIGADORA: Então como é que eu posso escrever isto? Mas atenção que eu não quero para casos particulares como o 6×8, o 12×8 ou o 25×8, eu quero para todos os números da tabuada do 8 e do 4.
>
> RITA: Podemos fazer para 7×8.
>
> INVESTIGADORA: Isso é um caso particular. Eu quero que dê para todos os casos.
>
> RITA: Como assim?
>
> INVESTIGADORA: Para todos os casos da tabuada do 8. O que é que acontece na tabuada do 8?

Aluno: É sempre mais oito.

Investigadora: Vamos acrescentar sempre mais oito. Ou seja, se usarmos a multiplicação estamos a fazer o quê?

Alunos: Sempre a multiplicar por oito.

Investigadora: Como é que eu posso escrever isso?

Rita: Usamos um ponto de interrogação.

Fábio: Vezes oito.

Ao referir-se ao «ponto de interrogação», Rita utiliza o símbolo que tinha sido usado na tarefa «Salas de Cinema», descrita sucintamente acima. Essa foi, de facto, a tarefa onde o símbolo surgiu pela primeira vez, proposto pela investigadora. Rita vai ao quadro e consegue escrever a expressão descrita na figura 3.

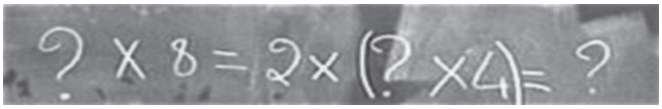

Figura 3.—Expressão da generalização em linguagem matemática, feita pela Rita.

A expressão sugerida pela Rita é discutida com a turma. A investigadora propõe a substituição do «ponto de interrogação» por um número qualquer, procurando que os alunos atribuam sentido àquele símbolo e que verifiquem a veracidade da expressão apresentada por Rita. Inicialmente, os alunos sugerem a utilização do número seis e a investigadora substitui o símbolo por esse número. Posteriormente, a investigadora solicita que escolham outro número e realiza com os alunos o mesmo procedimento, procurando que estes concebam o símbolo com o sentido de uma representação de um número inteiro genérico (figura 4).

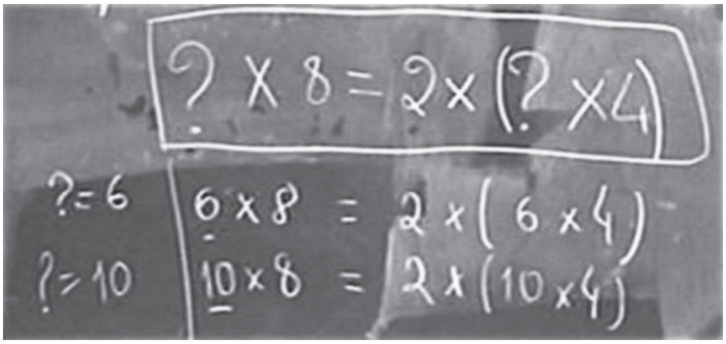

Figura 4.—Exploração da expressão apresentada pela Rita.

A partir da análise da expressão apresentada pela Rita, com a substituição do símbolo pelos valores numéricos, a investigadora leva os alunos a interpretar a expressão numérica obtida.

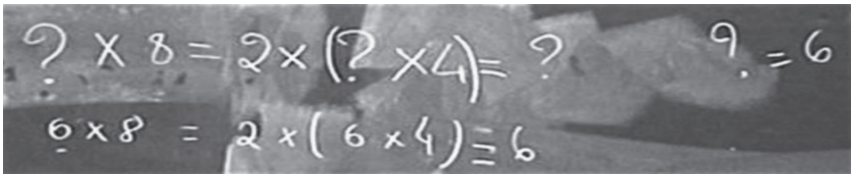

Figura 5.—Continuação da exploração da expressão apresentada pela Rita.

Desta forma, os alunos constatam que a expressão apresentada pela Rita não pode ser verdadeira. Apercebem-se, então, que a seguir ao sinal de igual não deverá estar o «ponto de interrogação».

> INVESTIGADORA: Então 6×8 é igual a 2×6×4. Está bem? Isso é igual a…
>
> VÁRIOS ALUNOS: 48.
>
> INVESTIGADORA: Mas a Rita tem aqui igual ao símbolo, ao ponto de interrogação …
>
> FÁBIO: Assim, é igual a 6.
>
> INVESTIGADORA: Se nós dissemos que aqui o símbolo valia 6, então seria igual a 6, pode ser assim?
>
> VÁRIOS ALUNOS: Não.
>
> CALEÇA: É igual a duas vezes o ponto de interrogação vezes quatro.
>
> RITA: Mas aqui não se mete igual a um número?
>
> VÁRIOS ALUNOS: Não.
>
> INVESTIGADORA: Se colocares este símbolo como fizeste, se aqui ele vale 6, aqui — referindo-se a depois do sinal de igual — também vale 6. Se aqui vale 10, aqui também vai valer 10. Se eu substituir por outro número vai sempre valer esse número.

Nesta sua última intervenção, a investigadora procura que os alunos percebam que na expressão em causa, o símbolo utilizado corresponde sempre ao mesmo valor numérico. Como resultado desta exploração coletiva, a expressão final de tradução da generalização em linguagem natural para a linguagem matemática foi a descrita na figura 6.

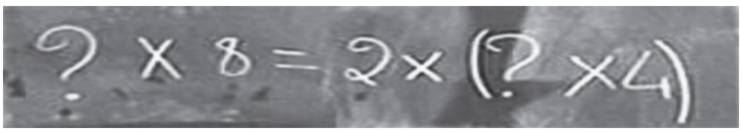

Figura 6.—Expressão final da generalização em linguagem matemática, feita coletivamente.

Na exploração coletiva desta tarefa, os alunos conseguiram facilmente expressar a generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural, embora no sentido restrito das tabuadas trabalhadas nas expressões numéricas apresentadas na tarefa. As expressões numéricas foram, assim, utilizadas como quase-variáveis (Fujii, 2003) permitindo a expressão da generalização e a compreensão da estrutura subjacente à estratégia de cálculo apresentada. A expressão da generalização em linguagem natural e a sua iniciação para a tradução para a linguagem simbólica foi realizada coletivamente no momento de discussão com a turma, a partir das contribuições dos alunos. Em particular, a introdução da linguagem simbólica surge a partir da sugestão de uma aluna de se usar o símbolo «?», já trabalhado numa tarefa anterior com o significado de incógnita, para representar agora «qualquer número» inteiro. A forma como a aluna inicialmente construiu a expressão «$? \times 8 = 2 \times (? \times 4) = ?$» poderá estar relacionada com o facto de os alunos, muitas vezes, terem a conceção de que a seguir ao sinal de igual deverá vir um resultado numérico (Carpenter, Levi, Franke & Zeringue 2005), evidenciando, assim, alguma dificuldade na aceitação da igualdade no sentido relacional. Esta situação foi útil para evidenciar a generalização da relação trabalhada na tarefa, estabelecendo uma ponte para os casos particulares, já assumidos pelos alunos como expressões numéricas generalizáveis (quase-variáveis). A forma como decorreu a exploração coletiva desta tarefa vem ao encontro das perspetivas de Ellis (2011) e Jurrow (2004) ao considerarem a atividade de generalização como um processo dinâmico e coletivo.

A emergência da linguagem matemática simbólica

A segunda situação analisada centra-se na tarefa «Os cromos da Ana e do Rui» (adaptada de Stephens & Wang, 2008) que envolve igualdades numéricas com duas variáveis (figura 7). Esta tarefa foi a primeira onde os alunos foram confrontados com a situação de dois números desconhecidos inter-relacionados numa igualdade. Também aqui se pode assumir a perspetiva de pensamento quase-variável de Fujii (2003), onde são utilizadas expressões numéricas particulares, neste caso envolvidas numa igualdade, para conduzir à generalização da relação matemática. Tendo em conta a complexidade da tarefa, foi construído um contexto de modelação ancorado na realidade de forma a dar sentido aos conceitos mais abstratos apresentados (Tabach & Friedlander, 2008).

A discussão coletiva centrou-se na exploração da alínea c) onde se pretendia que os alunos generalizassem a relação apresentada, reconhecendo a relação entre as variáveis A e B, mantendo a igualdade. No trabalho autónomo desenvolvido pelos alunos, os diferentes pares conseguiram com facilidade expressar a generalização da relação em linguagem natural. Desta forma, no início da discussão coletiva, um aluno, Gonçalo, vai escrever no quadro a forma como expressou a generalização da relação em linguagem natural: «A relação que existe entre os números que usei para as caixas A e B é que a B tem sempre menos dois cromos do que a A». Neste momento, e sem que lhe tenha sido solicitado, outro aluno, Fábio, acrescenta que a relação entre os números relativos às caixas A e B poderia ser escrita em linguagem matemática. Quando lhe é pedido para escrever no quadro aquilo a que se referia, o aluno apresenta a expressão descrita na figura 8.

Os cromos da Ana e do Bruno

A ana e o Bruno estão a fazer uma colecção de cromos. o domingo passado, a avó ofereceu a cada um deles a mesma quantidade de cromos para colarem nas suas cadernetas. A Ana colou 18 cromos na cadernete e guardou os restantes na caixa A. O Bruno colou 20 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa B.
Podemos representar **a quantidade de cromos que a Ana tem**, da seguinte forma:

$$\underbrace{18}_{\text{número de cromos colados na caderneta}} + \underbrace{A}_{\text{número de cromos guardados na caixa A}}$$

Podemos representar **a quantidade de cromos que o Bruno tem**, da seguinte forma:

$$\underbrace{20}_{\text{número de cromos colados na caderneta}} + \underbrace{B}_{\text{número de cromos guardados na caixa B}}$$

Como os meninos têm o mesmo número total de cromos, podemos construir a seguinte igualdade:

$$18+A=20+B$$

a) Quantos cromos terá a Ana na caixa A e quantos cromos terá o Bruno na caixa B?

b) Descobre se existem outros valores para o número de cromos das caixas A e B, de modo a que o numero total de cromos dos dois meninos continue a ser igual.

$$18+A=20+B$$

c) Que relação existe entre os números que usaste para as caixas A e B?

Figura 7.—Enunciado da tarefa «Os cromos da Ana e do Rui».

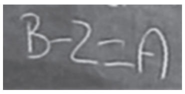

Figura 8.—Representação do valor de A apresentada pelo Fábio.

Evitando emitir qualquer juízo de valor sobre a veracidade da expressão apresentada por Fábio, a investigadora conduz a turma à sua verificação. Para isso propõe a construção de uma tabela no quadro, com possíveis pares de valores para A e B, que os alunos vão sugerindo. A apresentação final da tabela é apresentada na figura 9.

A	B
4	2
6	4
8	6
10	8
2	0
5	3

Figura 9.—Tabela explorada durante a discussão coletiva.

Em seguida, a investigadora retoma a expressão apresentada por Fábio, questionando a turma sobre a sua veracidade. Outra aluna sugere que a forma correta deveria ser A=B+2. Essa representação foi escrita no quadro e foram experimentados alguns valores da tabela para confirmar se estava correta (figura 10).

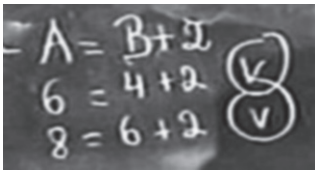

Figura 10.—Representação de A durante a discussão coletiva.

Analisando este momento desta aula, pode perceber-se que os alunos expressam a generalização em linguagem natural com facilidade e que procuram por sua iniciativa traduzir essa generalização em linguagem simbólica. De facto, a tentativa de um aluno de encontrar a forma de escrever B em relação a A, sem que isso lhe tenha sido solicitado, evidencia que já começou a reconhecer utilidade nessa forma de representação. A subsequente discussão com a turma mostra também que estão, nesta fase, num processo de atribuição de valor e sentido à linguagem matemática simbólica. Após esta exploração na aula, a investigadora sugeriu diferentes representações para expressar as relações existentes, tais como o modelo da balança e o diagrama de setas. Na continuidade desta tarefa, os alunos começaram a utilizar a expressão da generalização em linguagem simbólica com maior frequência e correção, mesmo nos momentos de trabalho autónomo a pares (Mestre & Oliveira, 2011). Também nesta tarefa se evidencia a perspetiva da construção social da generalização (Ellis, 2011; Jurrow, 2004) e ainda da construção coletiva da simbolização (Kaput, Blanton & Moreno, 2008). Parece ainda evidente que os alunos começam a sentir necessidade da utilização da simbolização para servir o propósito da generalização (Kaput, 2008), tornando mais explícita a relação matemática que querem descrever.

A apropriação do sentido do símbolo

A última tarefa apresentada neste artigo — «Os colares» (adaptada de Ponte, Silvestre, Garcia & Costa, 2010) — explora as relações funcionais envolvidas numa sequência pictórica crescente (figura 11). Pretendia-se que os alunos reconhecessem as relações entre as variáveis envolvidas e expressassem a generalização dessas relações em linguagem natural e em linguagem simbólica.

Tarefa «Os colares»

A Maria está a fazer colares para oferecer às suas amigas. Só tem contas de cores azuis e vermelhas. Começou por construir o primeiro colar:

1.º colar

Depois, fez o segundo e o terceiro colares:

2.º colar

3.º colar

1. Desenha o quarto colar construído pela Maria.

2. Preenche a tabela:

Número de contas azuis	Número de contas vermelhas

3. Como podes escrever a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas? Mostra como pensaste.

Figura 11.—Enunciado da tarefa “Os colares”.

A expressão da generalização em linguagem natural foi facilmente conseguida por todos os pares de alunos. Na discussão coletiva, após alguns alunos apresentarem a sua forma de resolução, a investigadora solicita a um par de alunos que utilizou a representação simbólica, para mostrar aos colegas o seu trabalho. Assim, os alunos Gonçalo e Henrique mostram e explicam pormenorizadamente a forma como expressaram a relação entre as contas vermelhas e as contas azuis (figura 12).

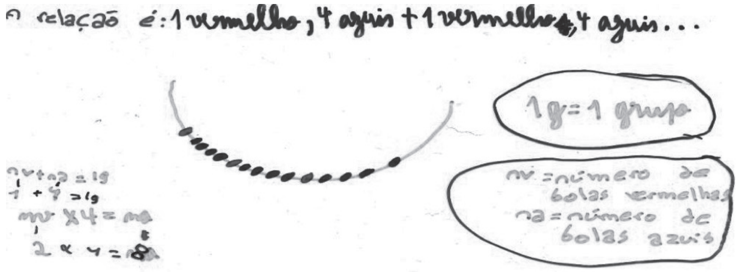

Figura 12.—Resolução do par Gonçalo e Henrique.

> Gonçalo: Primeiro vimos que … a relação era sempre 1 vermelho, 4 azuis, mais 1 vermelho e 4 azuis, mais 1 vermelho e 4 azuis e sempre assim. Depois, só para explicar primeiro antes disso, «1g» é 1 grupo, «nv» é número de bolas vermelhas e «na» é o número de bolas azuis. Aqui fizemos só um exemplo de um colar e aqui fizemos «nv + na = 1g». É assim, «nv» o número de bolas vermelhas dando o exemplo do 1, tinha de ser o 1, depois o «na» que é o número de bolas azuis que era o 4, era igual a grupo, por exemplo, deste vermelho até este azul era um grupo, deste vermelho até este azul era outro grupo, deste vermelho até este azul era outro grupo, depois ia haver muitos mais grupos.
>
> Carolina: Sim, mas como é que 1 mais 4 igual a 1 grupo?
>
> Gonçalo: 1 mais 4 [aponta para o desenho do colar] o grupo era este pedaço. E depois aqui há o «nv × 4 = na», por exemplo, era como tinham na tabela, eles disseram que era 2 vezes 4 o 8, que era o 8.

Em seguida, a investigadora solicita ao par Marco e Fábio que mostre a sua resolução. Estes alunos também representam simbolicamente a relação entre as contas vermelhas e as contas azuis, mas utilizam uma simbologia diferente do par anterior. Fábio explica à turma o significado da simbologia utilizada pelo seu grupo:

> Fábio: Então, fizemos um exemplo que era com 10 contas vermelhas, fizemos 10 contas vermelhas vezes 4 para saber as contas azuis que eram 40. Depois o «v» é igual ao número total de contas vermelhas e o «a» é igual

a número total de contas azuis, então fizemos «v» vezes quatro que é igual a «a», que é o número de contas azuis. E depois fizemos o inverso, com quatro contas azuis, temos quatro contas azuis a dividir por quatro que é o número de contas azuis, que é igual a uma conta vermelha, depois aqui é uma conta vermelha.

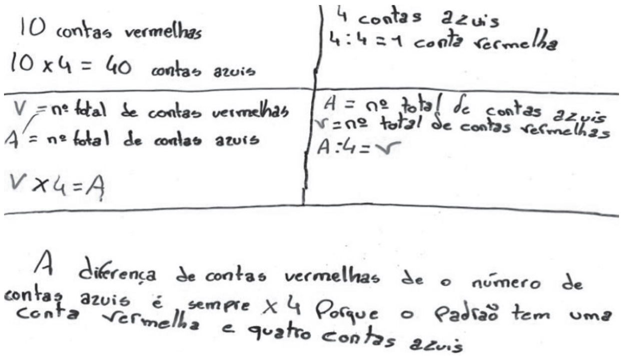

Figura 13.—Resolução do par Marco e Fábio.

Após a apresentação do par Marco e Fábio, a investigadora propõe a comparação entre as representações usadas por este par e pelo par Gonçalo e Henrique. Para que seja mais fácil essa comparação, projeta os dois acetatos em simultâneo. Desta forma, a investigadora pretende que os alunos estabeleçam uma conexão entre as duas resoluções e que isso contribua para o desenvolvimento do seu sentido de símbolo. Os alunos comparam as duas representações, referindo as suas diferenças (figura 14).

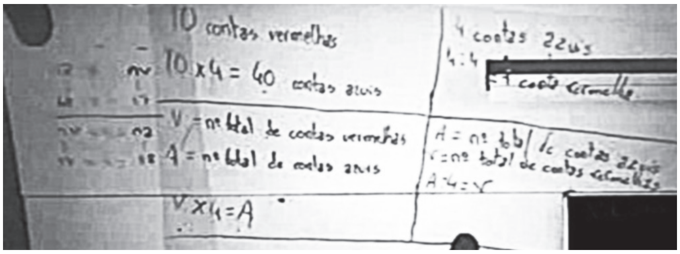

Figura 14.—Comparação entre as resoluções dos pares Gonçalo-Henrique e Marco-Fábio

Gonçalo: É a mesma coisa. O «v» se não fosse um número qualquer eles punham lá um número. O «v» significa qualquer número, mas têm de ser vermelhas e o «a» qualquer número de azuis e é a mesma coisa.

Carolina: Está ali escrito «v igual a número total de contas vermelhas».

João: Então, mas pode ser um número qualquer… ali o «a» pode ser o 20, o 40, pode ser um qualquer.

> Fábio: Não podem ser números ímpares nem múltiplos de 4.
>
> Investigadora: Pronto, isso é verdade na relação, mas entre esta forma de escrever a relação e esta forma de escrever há grandes diferenças? (…) mesmo assim qual será aquela que é mais fácil de usar?
>
> Lawry: A do Fábio.
>
> Investigadora: Porquê? O que é que a do Fábio e do Marco mostra que possa parecer mais fácil?
>
> Daniel: É mais simples.
>
> Rita: Professora, eu acho que a do Gonçalo é mais fácil …

Enquanto os alunos se dividem sobre a opção que tomariam para representar a expressão da generalização da relação, a investigadora aproveita para clarificar um aspeto que considera importante na utilização da representação simbólica, através da intervenção do Gonçalo.

> Gonçalo: É a mesma coisa, mas só que o meu grupo acrescentou os «n's».
>
> Investigadora: É importante o que está a dizer o Gonçalo porque nós temos de saber que aquele «a» ali não é conta azul, é o número de contas azuis e aquele «v» ali representa o número de contas vermelhas.

Na fase da experiência de ensino em que foi trabalhada esta tarefa, os alunos já mobilizavam com facilidade a expressão da generalização em linguagem natural e encontravam-se numa fase de apropriação da expressão da generalização em linguagem simbólica. Assim, o excerto da discussão coletiva apresentado mostra como os alunos usam esses momentos para explicarem o significado que atribuem aos símbolos e para confrontarem as diferentes representações usadas. Conjugam-se, assim, a perspetiva de construção coletiva da generalização (Ellis, 2011; Jurrow, 2004) com a perspetiva da construção coletiva da simbolização ao serviço da generalização (Kaput, Blanton & Moreno, 2008).

Considerações finais e conclusões

Neste estudo, assume-se o papel central da generalização no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e entende-se a simbolização como uma forma de expressão dessa generalização.

A análise das tarefas apresentadas neste artigo permite traçar um percurso em torno do desenvolvimento da expressão de generalização dos alunos desta turma. Assim, na primeira tarefa analisada, verifica-se que através da utilização de expressões numéricas que atuam como quase-variáveis (Fujii, 2003) foi possível aos alunos acederem à expressão da generalização em linguagem natural e à sua tradução em linguagem matemática, dentro do contexto (familiar) das tabuadas exploradas. Nessa tarefa, os alunos, embora ainda no sentido restrito das tabuadas usadas, conseguiram, no coletivo, encontrar formas de expressão das relações numéricas subjacentes à estratégia de cálculo explorada, fazendo emergir a generalização dessas relações matemáticas. Na segunda tarefa apresentada, os alunos confrontam-se com uma maior exigência numa situação que envolvia dois valores desconhecidos numa igualdade. Apesar dessa exigência, os alunos expressam com bastante facilidade a generalização em linguagem natural e começam a evidenciar que estão num processo de atribuição de valor e sentido à linguagem matemática simbólica, enquanto expressão da generalização. Na última tarefa, é notória a forma como os alunos já estão envolvidos no processo de simbolização, apresentando diferentes propostas de representação e defendendo-as com argumentos matematicamente válidos. Este percurso de desenvolvimento da generalização encontra eco nas sugestões de Britt e Irwin (2011): primeiramente devem ser exploradas expressões numéricas que atuem como quase-variáveis, em seguida deve ser impulsionada a expressão da generalização em linguagem natural e, finalmente, deve promover-se a utilização da linguagem simbólica.

Atendendo à forma como foi conduzido o processo de simbolização nas diferentes tarefas, poderemos considerar que os produtos finais foram objeto de uma construção coletiva, na perspetiva identificada por Kaput, Blanton e Moreno (2008), desenvolvendo-se por sucessivas redefinições através do contributo de diferentes alunos. Não constituindo o desenvolvimento precoce da linguagem simbólica um objetivo final da experiência de ensino, foi possível a sua iniciação, gradual, atendendo à construção do significado coletivo enquadrado nos contextos específicos de cada tarefa e como forma de expressar matematicamente a generalização descrita em linguagem natural. Deste modo, a simbolização serviu consistentemente o propósito da generalização e do raciocínio com generalizações (Kaput, 2008) e foi ao encontro da necessidade de uma maior clareza das ideias dos alunos, oferecendo novas formas de percecionar as relações matemáticas (Russell, Schiffer & Bastable, 2011).

O processo de ensino-aprendizagem descrito neste estudo insere-se numa perspetiva dialógica de construção do conhecimento e é caracterizado pelo envolvimento dos alunos enquanto comunidade de investigação, com um objetivo comum que é partilhado (Wells, 2000). De facto, pelos pequenos excertos apresentados pode constatar-se a forma como os alunos integram a discussão coletiva, assumindo um papel ativo tanto na explicação das suas formas de pensamento como na compreensão das explicações dos colegas (Baxter & Williams, 2010), inclusivamente reconstruindo os produtos apresentados de modo a dar-lhes sentido individualmente e na comunidade que integram.

Atendendo a este contexto que proporcionou a emergência e evolução da expressão da generalização por parte dos alunos, poderá reforçar-se a importância dos momentos de discussão coletiva que proporcionam a partilha de ideias, seu confronto, clarificação e justificação, promovendo momentos de reflexão conjuntos que conduzem a ciclos de interação onde a generalização inicial pode revestir-se de novas formas, até à construção da sua versão final (Ellis, 2011). Assim, e como refere Ellis (2011), a generalização surge de uma representação coletiva, onde o produto final não é resultante do trabalho de um aluno, mas da turma enquanto comunidade.

Como aspeto central do pensamento algébrico, a promoção da generalização deverá ser intencional e inserida em um processo de ensino-aprendizagem continuado e significativo. Em todo este processo destaca-se o importante papel do professor (Jurrow, 2004). Nas diferentes tarefas apresentadas, o professor assume-se pelo seu papel de promotor da discussão coletiva, encorajando o questionamento e a clarificação, pedindo justificações, estimulando a análise e comparação de ideias, promovendo a discussão de erros e identificando as ideias matemáticas importantes de cada tarefa. Desta forma, ele é o promotor, em primeira análise, do ambiente de sala de aula que permite esta cultura dialógica de construção do conhecimento (Wells, 2000) e, em segunda análise, da orquestração do processo que conduz à formulação de generalizações e à necessidade de emergência da simbolização como recurso para a expressão dessas generalizações.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics 14*(3), 24–35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics 25*(2), 42–48.

Ball, D. L. (2002). What does it take to (teach to) reason in primary grades? In *Proceedings for the international congress of Mathematics* (pp. 908–911). Beijing, China: Higher Education Press.

Baxter, J. A. & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education*, *13*, 7–26.

Blanton, M. L. (2008). Algebra and the elementary classroom. *Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann: Portsmouth, NH.

Blanton, M. & Kaput, J., (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Britt, M. S. & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a pathway for learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (pp. 137–159). New York, NY: Springer.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: developing relational thinking. *ZDM — The International Journal on Mathematics Education*, *37*(1), 53–59.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Mathematics teaching and learning*. (pp. 669–705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 3–22.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-Promoting actions: how classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for research in mathematics education*, *42*(4), p. 308–345.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 49–65). Honolulu: PME.

Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: seventieth yearbook*, (pp. 127–149). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., Blanton, M. L. & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. (pp. 19–55). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5–26.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it?. *Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Lannin, J.; Ellis, A. B. & Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics, USA.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches of algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65–86). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades*. (pp. 57–94). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2011). Compensação e variação: um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4.º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte, (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 195–218). Póvoa de Varzim: EIEM.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo de igual en alumnos de tercero de educación primaria* (Tese de doutoramento). Universidade de Granada.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C. & Costa, S. (2010). O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidades. Tarefas para o 1.º e o 2.º ciclos do Ensino Básico. Materiais de apoio ao professor. Projeto *IMLNA — Promover a aprendizagem matemática em números e álgebra*. IE e UBI.

Rivera, F. D. (2006). Changing the face of arithmetic: teaching children algebra. *Teaching children mathematics*, *12*(6), 306–311.

Russell, S. J., Schiffer, D. & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (pp. 43–69). New York, NY: Springer.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*, 268–275.

Stephens, M. & Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and year 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematical Education*, *1*(1), 28–39.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2008). The role of context in learning beginning algebra. In C. Greenes

& R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook*, (pp. 223–232). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wells, G. (2000). Dialogic inquiry in education: Building on the legacy of Vygotsky. In C. D. Lee and P. Smagorinsky (Eds.) *Vygotskian perspectives on literacy research* (pp. 51–85). New York: Cambridge University Press. Retirado de `https://www.csun.edu/~SB4310/601%20files/dialogicinquiry.pdf`

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick,W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227–236). VA: NCTM.

Resumo. Este artigo reporta-se ao desenvolvimento da generalização enquanto processo de raciocínio matemático, no âmbito de uma experiência de ensino de promoção do pensamento algébrico em alunos do 4.º ano de escolaridade. Analisa os momentos de discussão coletiva de três tarefas em aula, relativas a diferentes fases da experiência de ensino, e procura compreender como a generalização emerge e se desenvolve ao longo do tempo nas práticas sociais de sala de aula, tendo em conta uma perspetiva dialógica de construção do conhecimento matemático. As aulas que dizem respeito a este estudo foram conduzidas pela investigadora (a primeira autora), tendo-se recorrido, essencialmente, ao registo vídeo das aulas para recolha dos dados. O estudo demonstra a importância dos momentos de discussão coletiva para a emergência e evolução da generalização e o surgimento e maturação da linguagem simbólica matemática como recurso para a expressão da generalização. Os alunos começam a encontrar formas de expressão das relações numéricas subjacentes à estratégia de cálculo explorada na primeira tarefa, fazendo emergir a generalização dessas relações matemática e, posteriormente, já conseguem expressar com bastante facilidade a generalização em linguagem natural e começam a evidenciar que estão num processo de atribuição de valor e sentido à linguagem matemática simbólica, enquanto expressão da generalização. O processo de desenvolvimento da expressão da generalização descrito neste estudo evidencia a sua construção coletiva, onde o produto final é resultado do trabalho da turma enquanto comunidade de investigação.

Palavras-chave: pensamento algébrico, generalização, simbolização, discussão coletiva, perspetiva dialógica.

Abstract. This paper focuses on the development of the generalisation as a process of mathematical reasoning, in a context of a teaching experiment to promote algebraic thinking in one grade 4 class. It analyses the moments of collective discussions of three mathematical tasks explored in the classroom, in different stages of the teaching experiment, to understand how generalisation emerges and develops over time in the context of classroom social practices, according to a dialogic inquiry of mathematical knowledge construction. The lessons were taught by the researcher (the first author) and the data were collected by video recordings. This study shows the importance of the collective discussion moments to the emergence and evolution of the generalisation and to the appearance and maturation of symbolic mathematical language as a tool to the generalisation expression. Generalisations start to emerge as students begin to find ways of expressing the numerical relationships according to the computation strategies they explored in the first task. In the second and third tasks discussed in the paper, they already are able to express easily the generalisation in natural language and start to give evidence of being in a process of meaning making of symbolic mathematical language, as a form of expression of generalisation. The process of development of the generalisation expression described in this study reflects its collective construction, as the final product results from the work of the class as a community of inquiry.

Key-words: algebraic thinking, generalisation, symbolisation, collective discussion, dialogic inquiry

■ ■ ■

CÉLIA MESTRE

Agrupamento de Escolas Romeu Correia
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
celiamestre@hotmail.com

HÉLIA OLIVEIRA

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

(Recebido em abril de 2012, aceite para publicação em outubro de 2012)