Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática

Teresa Pimentel
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
Isabel Vale
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

Introdução

No âmbito *Projeto Matemática e Padrões no Ensino Básico: Perspetivas e experiências curriculares de alunos e professores* (Padrões)[1] estudamos os efeitos de uma intervenção didática centrada no estudo dos padrões, quer ao nível do desenvolvimento de conceitos quer de processos matemáticos, em professores e alunos do ensino básico. Um dos maiores impactos refere-se à importância dos contextos figurativos no trabalho com conceitos matemáticos, em particular o desenvolvimento do pensamento algébrico, na formulação de conjeturas e na expressão da generalização. Os alunos dos primeiros níveis do ensino básico chegaram em muitos casos à expressão simbólica de forma natural, o que resultou de um trabalho consistente através do modo como foi explorada a proposta didática, e que seria impensável noutros contextos.

Neste artigo procuramos relacionar o trabalho que temos vindo a desenvolver com padrões com os processos de raciocínio utilizados na atividade matemática. Focamo-nos em alguns tipos especiais de padrões, designadamente aqueles que ocorrem em sequências de crescimento, embora assumindo que os padrões, de todos os tipos, têm um papel central em matemática, vista como a ciência dos padrões. Damos algum destaque à necessidade teórica que sentimos de situar o conceito de padrão em matemática. Dentro das tarefas com padrões valorizamos de modo muito especial os padrões figurativos, por permitirem a ligação de vários modos de representação, e por haver evidência de que a necessidade de consistência entre essas representações permite o enriquecimento da compreensão da estrutura matemática subjacente, conduzindo, de modo mais eficaz, à conjetura e generalização, à explicação e argumentação, e, em última análise, à prova.

Esta discussão sobre o aprofundamento da estrutura matemática e sobre os processos de raciocínio utilizados na descoberta de padrões baseia-se em ideias de autores de referência e será clarificada e sustentada pela apresentação alguns exemplos ilustrativos.

Os padrões em matemática

Padrão é um termo de algum modo vago no âmbito da educação matemática, que normalmente é referido sem definição pelos seus utilizadores, mas de que aparentemente todos conhecem o significado. Pode aparecer associado aos termos: regularidade, sequência, modelo, paradigma, etc. Consideramos desta feita importante balizar o seu conteúdo e significado numa plataforma consensual, de modo a podermos saber com alguma acuidade a que nos referimos quando utilizamos algum destes termos.

À procura de uma definição de padrão

Padrão é um termo que nos últimos anos tem tido bastante visibilidade em educação matemática, principalmente a partir das publicações do National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989; 2000), e também da publicação em 2002 de *Matemática: A ciência dos padrões,* de Keith Devlin, que veio reforçar esse destaque. Antes de nos debruçarmos mais propriamente sobre o conceito de padrão analisemos então alguns termos/conceitos que a ele surgem muitas vezes associados.

Mason (2011) refere que os padrões são aquilo que experienciamos quando reconhecemos uma relação entre dois ou mais objetos que temos pela frente. Para Sawyer (1955), «Padrão é qualquer tipo de regularidade que possa ser reconhecida pela mente» (p. 12). Na mesma linha, para Frobisher, Monaghan, Orton, Orton, Roper e Threlfall (1999) usa-se o termo padrão em matemática quando se procura ordem ou estrutura, e por isso regularidade, repetição e simetria estão muitas vezes presentes. Se quisermos especificar melhor, teremos de distinguir os contextos numéricos dos geométricos. Num contexto geométrico, o termo padrão tem um significado matemático preciso (Veloso, 1998), referindo-se a disposições formadas por cópias de um motivo que se repete por translações em determinadas condições. Em contextos geométricos, e numa abordagem elementar, o termo padrão pode estar associado a propriedades das transformações geométricas (rotações, translações, reflexões, homotetias) mas pode recorrer apenas a figuras para explorar conceitos geométricos que podem ser traduzidos em números (e.g. área, perímetro), ou simplesmente para as utilizar como suporte de contagens.

Não queremos, porém, cingir-nos a um contexto particular, pretendendo uma definição mais abrangente de padrão. Em trabalhos anteriores, consideramos que o termo padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores, sons, onde se detetam regularidades (Vale et al., 2009). Esta concetualização é muito próxima da de Orton (2009), que associa a padrão numérico as noções de ordem, regularidade, repetição e simetria em e entre objetos matemáticos tais como símbolos.

Um termo que é muitas vezes confundido com padrão é sequência. Uma sequência, no seu significado matemático, refere-se a uma lista ordenada de objetos, números, etc. Ou seja, é uma correspondência estabelecida entre o conjunto dos números naturais ou um seu subconjunto finito e um conjunto de objetos, números, etc. Pode diferir neste aspeto do termo sucessão, função em que o domínio é todo o conjunto IN. Torna-se assim simples estabelecer desde já uma distinção fundamental: podemos ter uma sequência e não ter nenhum padrão. Basta pensar, por exemplo, na sequência das casas decimais do número π. Claro que muitas sequências envolvem um padrão. É o caso, por exemplo, das progressões aritméticas ou geométricas, em que cada termo surge de forma previsível, já que se obtém do anterior adicionando-lhe ou multiplicando-o por uma constante. E por isso é possível a generalização, obtendo-se uma expressão geral que é a lei de formação dessa sequência.

Outros dois termos, modelo e paradigma, poderão estar associados ao termo padrão mas encarando este num contexto mais amplo, e mesmo não matemático. Paradigma é empregue normalmente numa aceção filosófica, ou seja, relaciona-se com o modo de ver o mundo e é composto por pressupostos filosóficos que orientam e dirigem o pensamento e a ação. Quando falamos, por exemplo, em paradigma positivista e paradigma interpretativo certamente que há um padrão de comportamento, de pressupostos, de ações, etc., onde prevalece a ideia de repetição ou de invariante. Da observação de factos e da realidade, encontramos algumas relações que permitem estabelecer categorias nas quais arrumar os objetos ou ideias. E nesse sentido paradigma inclui o conceito de padrão mas o inverso não é verdade.

Modelo, em termos simples, pode ser entendido como uma representação/interpretação de algo. Em matemática pode representar ou interpretar um dado fenómeno da realidade, através de ferramentas matemáticas como sejam expressões, equações, funções, fórmulas matemáticas, e nessa ordem de ideias poderá ser considerado a generalização de um padrão. De qualquer modo, os dois termos são utilizados para distinguir coisas diferentes. Pode fazer-se a analogia com a utilização das palavras quadrado e retângulo para referir coisas normalmente diferentes, embora um quadrado seja um retângulo.

Padrão e regularidade

Afastando então os termos sequência, modelo e paradigma, restam os termos padrão e regularidade, que analisaremos mais de perto nas suas relações.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação [ME], 2007) optou por utilizar o termo regularidade no campo numérico e o termo padrão no campo geométrico. No entanto, a literatura utiliza o temo padrão (pattern) tanto em contextos numéricos como geométricos. Por exemplo, para a mesma tarefa de completar uma tabela dos cem, uma das primeiras experiências formais em matemática onde se revela o poder da perceção dos padrões pela criança, podemos encontrar, na referência à estrutura sobre o modo como os dígitos dos números são repetidos, o termo padrão (Frobisher et al., 1999) ou regularidade (ME, 2007).

Entendemos que padrão matemático tem o mesmo significado que regularidade[2], podendo considerar-se qualquer relação detetada num arranjo, e que corresponde a uma lei ou regra claramente definida.

Contudo, pode não se determinar uma única regra, dependendo dos contextos em que determinado arranjo é apresentado ou interpretado. Por exemplo, observe-se a imagem da Figura 1.

Figura 1.—Um ou mais padrões?

Esta imagem pode ser considerada uma sequência de figuras com um padrão de repetição, em que o motivo que se repete é apresentado na Figura 2.

Figura 2.—Motivo que se repete

Sendo assim, podemos perguntar se o nono (ou o centésimo) termo estará na vertical ou na horizontal. Nesta perspetiva, a imagem é explorada do ponto de vista numérico: por exemplo, os termos de ordem ímpar estão na horizontal e os de ordem par na vertical. Embora partindo de figuras geométricas, é feita uma abordagem e exploração numérica. No entanto, podemos ver na imagem um friso de figuras geométricas. E nesse sentido podemos averiguar, por exemplo, as simetrias presentes no friso, sejam de reflexão, de translação, de rotação ou de reflexão deslizante, situando-nos com esta exploração no campo puramente geométrico.

Verifica-se assim que o mesmo arranjo pode dar origem a interpretações diferentes, correspondendo a padrões ou regularidades diferentes.

Mesmo em contextos mais restritos é possível encontrar diferentes interpretações. Destacamos em particular nestas circunstâncias as sequências numéricas. Por exemplo, na sequência

1, 2, 4, …

é possível ver um número indeterminado de leis de formação:

1, 2, 4, 8, …
1, 2, 4, 7, …
1, 2, 4, 2, …
1, 2, 4, 1, …
…

conforme o modo como cada pessoa faz a sua interpretação do arranjo apresentado. No primeiro caso, cada elemento é o dobro do anterior, com a lei $u_n = 2^{n-1}$; no segundo, cada termo é a soma do termo anterior com o número de ordem desse termo anterior, com a lei $u_n = n(n-1)/2+1$; no terceiro caso os termos evoluem com uma lei de simetria e no quarto com uma lei de repetição. Haveria ainda um número indeterminado de possibilidades modeladas por funções verificadas pelos três pares ordenados: (1,1), (2,2) e (3,4).

O contexto pode limitar o número de possibilidades, mas a apreensão de um padrão tem sempre um carácter subjetivo, é o resultado de uma interpretação pessoal. Ao observar o arranjo temos a sensação intuitiva de alguma estrutura, que pode ser ou não univocamente determinada.

Surge-nos assim uma possibilidade, dentro da matemática, para a definição:
Padrão ou regularidade é uma relação discernível, apreendida de modo pessoal, num arranjo de qualquer natureza, através de um processo mental que pode ser partilhado, e que corresponde a uma estrutura traduzível por uma lei matemática.
Assim, um padrão ou regularidade pressupõe uma estrutura que relaciona conjuntos de objetos num arranjo interpretado. Esta estrutura subjacente ao padrão é algo de muito poderoso que, uma vez detetado, pode conduzir a um enriquecimento da exploração, designadamente permitindo a explicação e a justificação da generalização feita. Vejamos um exemplo, que está descrito em Vale et al. (2009); a tarefa *Sapos e rãs*.

> *Dois sapos e duas rãs precisam de atravessar um lago e têm cinco pedrinhas para não ter de mergulhar na água fria.*
> *Podem avançar para a pedra seguinte ou saltar por cima de um companheiro de outra espécie, mas não podem voltar para trás.*
> *Qual é o número mínimo de movimentos necessários?*
> *Resolve o mesmo problema para três animais de cada espécie.*
> *E se fossem 100 rãs?*

Este problema foi resolvido por uma turma do 4º ano, que conseguiu obter uma regra recursiva e depois chegar à generalização algébrica para dar resposta ao caso de 100 rãs (e 100 sapos). Esta foi atingida por factorização dos números obtidos em cada caso, registados numa tabela como a da Figura 3.

Número de rãs (ou sapos)	**Número de movimentos**
1	$3 = 1 \times 3$
2	$8 = 2 \times 4$
3	$15 = 3 \times 5$
4	$24 = 4 \times 6$

Figura 3.—Tabela de registo do número de movimentos

Assim, para 100 rãs haveria 100×102 movimentos e genericamente, para n rãs, $n \times (n+2)$ movimentos. O problema, permitindo uma abordagem inicial dramatizada, o uso de material manipulável por cada aluno, diferentes formas de representação e registo, a descoberta de padrões, a formulação de conjeturas e a generalização, tanto aritmética como algébrica, é extremamente rico e desafiante; o trabalho dos alunos, que foi por nós observado, revelou-se excelente, e não seria razoável ir mais além já que se tratava de uma turma do 4º ano. No caso desta turma, a relação funcional, já na última fase da aula, foi descoberta por tentativa e erro através da manipulação numérica dos sucessivos números de movimentos, e a generalização surgiu de forma algo mágica, isto é, sem plena compreensão da sua razão de ser. Mas com alunos de um nível mais avançado seria possível a questão: «Porquê?»

Olhando para a estrutura subjacente ao padrão encontrado podemos chegar à explicação e prova da validade da lei $n\times(n+2)=n^2+2n$ para um número qualquer n de sapos (e de rãs). Na verdade, os movimentos possíveis são avançar para a pedra seguinte ou saltar por cima de um companheiro de outra espécie. Consideremos o caso de 3 sapos e 3 rãs, tal como está representado na Figura 4.

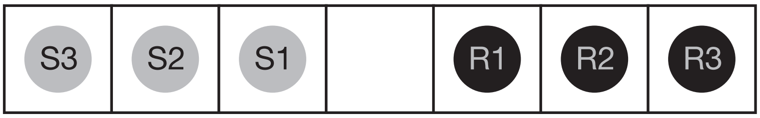

Figura 4.—Caso de três sapos e três rãs

O primeiro sapo, S1, tem de vir a ocupar a posição R3, já que nenhum outro sapo pode ultrapassá-lo; do mesmo modo, S2 tem de ir para R2 e S3 para R1, o mesmo acontecendo com as rãs. Assim, cada animal terá de se deslocar 4 casas. Como são seis animais (23), terá de haver $2\times3\times4=24$ deslocações, e, se cada deslocação correspondesse a uma casa, haveria ao todo 24 movimentos. Mas as coisas não se passam assim porque, embora o avanço corresponda à deslocação de uma casa, o salto por cima do companheiro de espécie diferente corresponde a duas. Neste ponto verificamos a importância de contar o número de saltos. De facto, se conseguirmos contá-los, basta a 24 tirar esse número, já que cada salto corresponde a duas casas.

Uma vez que cada sapo tem de saltar por cima de uma rã para passar para o outro lado (ou ser saltado por uma rã com o mesmo efeito), o mesmo acontecendo com as rãs, e há 3 animais de cada espécie, teremos um total de $3^2=9$ saltos.

Assim, o resultado final será $2\times3\times4-3^2=24-9=15$ movimentos.

Generalizando o problema para n sapos e n rãs, com $2n+1$ casas no total, o número de casas a deslocar por cada um é $n+1$; o número total de deslocações é $2n(n+1)$; o número de saltos é n^2; assim, o número total de movimentos será dado pela expressão

$$2n\times(n+1)-n^2$$

que é equivalente a qualquer uma das expressões referidas atrás.

Deste modo, como vemos, a análise aprofundada da estrutura subjacente permite explicar o porquê da generalização feita e, em simultâneo, justificar a sua validade em qualquer caso.

Os padrões figurativos

O ser humano capta a realidade através dos sentidos mas é no cérebro que se faz a interpretação. A perceção está de acordo com associações estabelecidas através da nossa experiência, o que torna a interpretação de uma imagem subjetiva, e daí a importância dos conhecimentos prévios. Por outro lado, a nossa atenção pode ter diferentes formas; dirigir-se ao todo (observar); aos detalhes (características e atributos); atender ao reconhecimento de relações (parte-parte; parte-todo); interpretar as propriedades; e deduzir a partir de definições (raciocinar sobre propriedades). O que está subjacente ao processo de perceção visual humano é o desejo de dar sentido ao que vemos.

Por exemplo, se olharmos por alguns momentos para o arranjo das retas na Figura 5 vemos neste arranjo geométrico abstrato um padrão de repetição que pode ser visto de dois modos: cinco pares de retas próximas ou então quatro pares de retas mais afastadas. De acordo com os psicólogos gestaltistas, a nossa mente tenta interpretar as sensações e experiências como um todo organizado e não como uma coleção de elementos separados.

Figura 5.—Arranjo de retas

Os defensores desta teoria acreditam que nos apercebemos imediatamente da estrutura subjacente às figuras de modo a dar-lhes sentido. Na perspetiva gestaltista é realçada a importância das estruturas na aprendizagem. Os psicólogos gestaltistas têm alguns princípios para explicar as tendências de visualização (e.g. proximidade, fechamento, encerramento, semelhança, continuidade, forma, proximidade, vizinhança, simetria). Neste exemplo, temos mais frequentemente tendência a ver cinco pares de retas porque de outro modo deixaríamos duas retas isoladas, uma em cada um dos extremos, e ainda porque temos uma maior predisposição para associar coisas que estão próximas. A nossa interpretação do que vemos também parte daquilo que nos interessa e que sabemos, de modo a dar sentido às imagens.

Há investigadores, como Reisberg (1997), que distinguem perceção visual — que significa a imagem de um objeto obtida quando e como é vista — de imagem visual *(imagery)* que significa a produção mental de um objeto na sua ausência. De acordo com Gilbert (2007), qualquer uma destas perspetivas envolve processos mentais semelhantes que se apoiam mutuamente, e a sua distinção tem mais interesse ao nível da psicologia do que da educação matemática. Deste modo, quando se fala em visualização englobam-se aquelas perspetivas.

O visual está muitas vezes associado à geometria. No entanto, usamos as representações visuais não só na geometria mas também em conceitos aritméticos (e.g. a multiplicação como arranjo retangular), quando pretendemos transmitir uma ideia sobre aritmética através de um desenho. De acordo com Gilbert (2007), o termo visualização é usado para significar a apresentação visual da informação de modo sistemático e focado na forma de tabelas, diagramas e gráficos. Frobisher, Frobisher, Orton e Orton (2007) usam o termo visualização para significar o procedimento mental que permite passar de um objeto físico visível para a sua representação mental. Parece ser amplamente aceite a importância da visualização na aprendizagem e em fazer matemática.

Ver um padrão é necessariamente um primeiro passo na exploração de padrões (Freiman & Lee, 2006), mas os estudantes devem ter agilidade percetual para «ver» vários padrões, o que lhes permitirá abandonar aqueles que não lhes são úteis.

Podem ser detetados padrões em arranjos numéricos, geométricos ou de outra natureza. Na sequência do que foi referido, consideramos de particular importância, sobretudo para a exploração com alunos de níveis mais elementares, a utilização de padrões figurativos, em que o modo de ver o arranjo pode ajudar a estabelecer relações e consequentemente a produzir a generalização (Vale & Pimentel, 2009). De acordo com Arcavi (2003), a visualização é uma componente-chave do raciocínio, da resolução de problemas e mesmo da prova. Na mesma linha, Tripathi (2008) defende que a capacidade para usar várias formas de raciocínio pode ser desenvolvida através de experiências envolvendo a visualização. Argumentando a favor da importância do raciocínio visual, esta autora preconiza que os alunos devem ser encorajados a relacionar a visualização com outras formas de representação. Assim, o ensino deve propor tarefas desafiantes que enfatizem a compreensão da generalização através, não só dos seus aspetos numéricos, mas também figurativos, capitalizando a capacidade inata dos alunos de pensar visualmente (Rivera & Becker, 2005).

No fulcro da ideia de padrão ou regularidade está uma regra de consistência que tem de aplicar-se a todas as representações relevantes que transmitem explicitamente o padrão. E esta regra de consistência é extremamente útil no aprofundamento da compreensão das relações entre os objetos do arranjo que manifesta uma estrutura. Com este apoio, o aluno que explora o padrão terá mais facilidade na produção de uma lei de formação que traduza matematicamente a estrutura subjacente ao padrão. Digamos que a visualização explica dum modo muito mais claro — e muitas vezes justifica — a generalização feita, que de outro modo, ou não poderia simplesmente ser efetuada por falta de ferramentas matemáticas, ou, efetuada apenas numericamente, converter-se-ia num mero exercício de tentativa e erro e de manipulação simbólica com pouco significado.

Por exemplo, pode ser dada a alunos do ensino básico uma sequência numérica do tipo

$$4, 7, 10, 13, \ldots$$

Na determinação dos termos seguintes os alunos fazem normalmente a interpretação mais óbvia abduzindo uma lei por recorrência que permite construir cada termo adicionando três unidades ao anterior. Mas esta lei revela-se manifestamente insuficiente quando é o caso de indicar, por exemplo, o vigésimo termo, e aí torna-se necessário recorrer a um raciocínio funcional. Se o aluno não possui ainda ferramentas matemáticas que lhe permitam obter facilmente uma lei de formação, fica muito limitado na sua capacidade de conjeturar e generalizar. E é neste momento que se revela a força da visualização.

Se o arranjo em estudo, em vez da sequência numérica anterior, for uma sequência de crescimento como o exemplo das cancelas, construídas com palitos, apresentado na Figura 6, a tradução numérica do padrão é a mesma, mas o aluno tem ao seu dispor um meio poderoso de apoio ao processo de generalização.

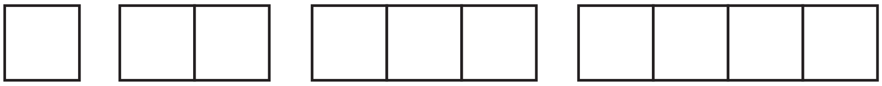

Figura 6.—Sequência de crescimento das cancelas

O reconhecimento de um padrão nesta sequência de figuras pode dar origem a mais do que uma lei de formação, dependendo do modo como aquele é apreendido e interpretado. Apresentam-se na Figura 7 três hipóteses de entre as várias possíveis.

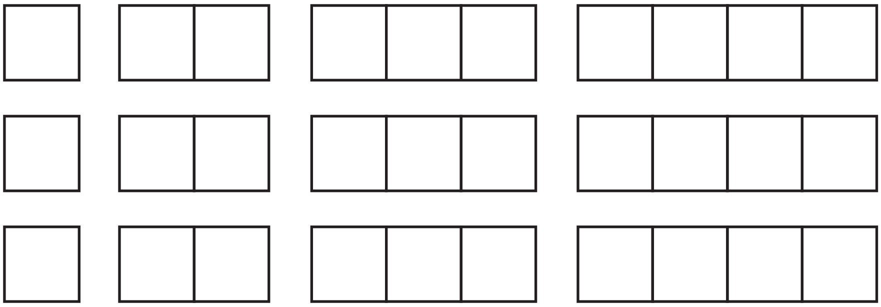

Figura 7.—Hipóteses de apreensão do padrão das cancelas

No primeiro caso a pessoa intui ou apreende um padrão na sequência, e interpreta-o no arranjo como sendo um quadrado inicial que vai sendo acrescentado de sucessivos grupos de três palitos; o segundo é idêntico ao anterior; porém, é visto, não um quadrado inicial, mas um palito a que se vão acrescentando grupos de três palitos; no último, e para o mesmo padrão, outra pessoa «vê» uma sequência com um número crescente de quadrados a que são retirados os «lados» duplicados. Para a primeira, o padrão é traduzido pela expressão geral $4+(n-1)\times 3$ para a figura n; para a segunda o padrão apresenta a forma $1+n\times 3$ e para a terceira é $n\times 4-(n-1)$. Repare-se que, embora estas expressões sejam equivalentes, não são idênticas, exprimindo cada uma um modo diferente de ver o padrão.

Em suma, pode dizer-se que o padrão numérico inicial é enriquecido com um contexto visual que lhe dá significado, permitindo uma compreensão mais profunda das relações em jogo através da regra de consistência entre dois tipos diferentes de representação, o numérico e o figurativo. Esta compreensão ajuda a explicar e a justificar de modo informal a generalização feita, apoiada num contexto que dá sentido aos números.

Na secção seguinte procuraremos explicitar melhor, em termos teóricos, alguns conceitos-chave na atividade matemática em geral, mas focada em particular na exploração de padrões, e já abordados anteriormente neste texto: o raciocínio e uma das suas componentes, a generalização.

A atividade matemática, o raciocínio e a generalização

A atividade matemática, assim como os processos de pensamento matemático, estão ligados à natureza dos entes matemáticos e de determinadas características que a distinguem de outras ciências, fatores estes que vão influenciar a aprendizagem da matemática.

Um dos argumentos que os alunos mais referem para a dificuldade que sentem em estudar matemática é: «A matemática é muito difícil. É muito abstrata!» Na verdade, a abstração faz parte da matemática; os objetos matemáticos são todos abstratos. Outra característica importante da atividade matemática, também abstrata, é a linguagem própria que utiliza, recorrendo a uma simbologia adequada que permite representar eficazmente do ponto de vista operativo as entidades com que lida. Os conceitos matemáticos surgem da interação entre o sistema de signo/símbolo e os contextos de referência/objetos (Steinbring, 1999). Esta simbologia está ligada ao que Dreyfus (1991) distingue na atividade matemática como sendo as representações simbólicas. Além destas, aquele autor ainda considera as representações mentais. Estas ocorrem quando falamos, ou pensamos sobre qualquer objeto ou processo matemático e que cada um de nós relaciona com algo que tem em mente. É outra forma de utilizar os objetos matemáticos. Enquanto que a representação simbólica é escrita, ou falada, com a finalidade de facilitar a comunicação sobre o conceito, uma representação mental refere-se a esquemas internos que são usados para interatuar com o mundo exterior e que pode diferir de pessoa para pessoa. Representar um conceito é criar uma imagem dele. A visualização é um dos processos conducentes às representações mentais. Uma representação é rica se contém bastantes aspetos ligados do conceito. É importante ter muitas representações dum conceito, de modo a permitir o seu uso flexível na resolução de problemas.

Estes aspetos da abstração e das representações na atividade matemática estão ligados aos processos de pensamento usados. Classicamente há dois tipos fundamentais de raciocínio: o raciocínio indutivo e o raciocínio dedutivo. O primeiro parte do particular para o geral; parte da observação de dados, sobre os quais formula hipóteses explicativas, e, com base na experimentação em vários outros casos, generaliza a conclusão a um conjunto mais vasto. O segundo surge da necessidade de verificar a validade dessa generalização, e baseia-se em argumentos lógicos do tipo *modus ponens*:

$$\frac{\begin{array}{l} A \text{ implica } B \\ \quad A \text{ é verdadeiro} \end{array}}{B \text{ é verdadeiro}}$$

É esta necessidade de verificação que faz da matemática uma ciência distinta das demais. Pode mesmo afirmar-se que a matemática como ciência começou com esta necessidade de prova (Davis & Hersch, 1995; Nickerson, 2010). No entanto, há vários autores (e.g. Radford, 2008; Rivera, 2008) que, com base no trabalho de Peirce, consideram um outro tipo de raciocínio: o raciocínio abdutivo. De acordo com a Stanford Encyclopedia of Philosophy (2010), Peirce apresenta a abdução como uma inferência não necessária que designa por suposição (*guessing*), uma hipótese explicativa prévia, surgindo assim como uma evidência de como as ideias aparecem inicialmente na mente. O autor considera que, apesar de este ser o modo de inferência menos seguro, é exigido pela economia de tempo da investigação, e o seu sucesso depende da intuição e do conhecimento prévio. Defendemos também o realce deste tipo de raciocínio no âmbito deste trabalho com forte referência à descoberta de padrões, pois ele é a porta de entrada no raciocínio indutivo, correspondendo à fase de procura da hipótese preliminar sobre o que têm em comum os dados analisados, assumindo assim uma importância fulcral no avanço duma exploração matemática. De facto, as hipóteses formuladas são apenas plausíveis uma vez que não é utilizado o raciocínio dedutivo, mas é nesta fase abdutiva que intervém fortemente a criatividade na elaboração de novas ideias (Rivera, 2008). Esta fase prediz, duma forma necessariamente incompleta, uma conclusão que se aspira a validar; mas sem esta fase seria impossível a validação, baseada na dedução, pela inexistência de uma conjetura. Mesmo em termos da história da matemática, todo o processo de descoberta é muito anterior às provas acabadas que os matemáticos publicam. Poincaré (1920) refere que não é uma memória prodigiosa, capaz de guardar grandes doses de regras e procedimentos, que está na base do poder criativo matemático, mas sim a intuição associada a um modo matemático particular. A complementaridade das componentes intuição e raciocínio na atividade matemática é resumida por este autor quando refere que a intuição é o motor e a razão é o travão.

Na prova ou demonstração evidencia-se todo o formalismo da matemática, que aparece como uma estrutura dedutiva, a partir de um conjunto de axiomas previamente estabelecidos. Apesar de esta ser a ideia que muitos têm sobre a matemática, não significa que no seu processo de criação e desenvolvimento tenha sido — e seja — assim. Muitas vezes esse processo é indutivo, fortemente assente na intuição, que permite ver, através do aparecimento de uma ideia luminosa, que surge por uma espécie de processo empírico, aquilo que é a verdade. A dedução aparece apenas posteriormente, estabelecendo e validando essas ideias. Polya (1954) chama a esta fase inicial da criação matemática raciocínio plausível, defendendo que, antes de se atingir a certeza absoluta, há que passar por uma conjetura plausível, precisando do provisório antes de atingir o definitivo, tal como precisamos de andaimes para construir um edifício. Este autor denomina de inferência plausível um raciocínio do tipo:

$$\frac{\begin{array}{l} A \text{ implica } B \\ \quad B \text{ é verdadeiro} \end{array}}{A \text{ é mais credível}}$$

Polya considera este o padrão indutivo fundamental. De facto, a verificação da consequência *B* não prova a conjetura *A*, mas a testagem da consequência em vários dados torna a conjetura mais plausível.

Referindo-nos agora à generalização como uma das facetas do raciocínio matemático, podemos verificar que, em termos filosóficos, a generalização está na origem de todos os conceitos. Se a generalização não fosse possível viveríamos num mundo de objetos particulares, todos diferentes, e o conhecimento reduzir-se-ia a um perpétuo «*a* é diferente de *b*» (Radford, 2008). A generalização é assim crucial na atividade matemática. Mason (1996) considera a generalização como sendo «o sangue vital, o coração da matemática» (p. 74). Esta ideia é reforçada quando afirma que uma aula que não dê aos alunos oportunidades de generalizar não é uma aula de matemática, pois não está a ocorrer pensamento matemático. As generalizações são construídas através de representações e argumentações, e vão sendo expressas de um modo gradualmente mais formal de acordo com a idade (e.g. Blanton & Kaput, 2005). Ora as tarefas com padrões dão oportunidades aos estudantes de desenvolver o pensamento algébrico, processo no qual generalizam diferentes ideias matemáticas pela observação de um conjunto de evidências. Na verdade, vários investigadores preconizam o estudo de padrões figurativos de crescimento (e.g. Orton, Orton & Roper, 1999; Vale & Pimentel, 2009) como uma das possíveis abordagens para ajudar os estudantes a generalizar e a representar relações.

Lannin, Ellis e Elliot (2011) defendem que a generalização envolve identificar aspetos comuns entre os casos ou estender o raciocínio para além do domínio no qual foi originado, fazendo assim a ponte entre a saída de um mundo de objetos particulares e o tipo de raciocínio que designamos por abdutivo.

Procuramos em seguida relações entre os vários tipos de raciocínio e o processo de generalização. Rivera e Becker (2007) definem o raciocínio abdutivo como gerador de hipóteses, não no mero sentido de «palpites» mas na seleção de hipóteses que produzem a melhor explicação, embora sejam inferências falíveis e ampliáveis. A abdução é criativa pois, tal como a indução, parte de «conhecimento incompleto», contrariamente à dedução, onde não há lugar para a descoberta já que não pode basear-se em conhecimento incompleto. Contudo, enquanto que a abdução consiste na escolha da hipótese, a indução já envolve a sua testagem. A abdução é o processo que introduz uma nova ideia, a formulação de uma conjetura; a indução corresponde à etapa seguinte, a de testar a conjetura em mais dados. Este processo pode ser cíclico até ser construída uma generalização da regularidade R na forma F, que se assume abranger toda a classe de objetos. O esquema da Figura 8 ilustra esta ideia.

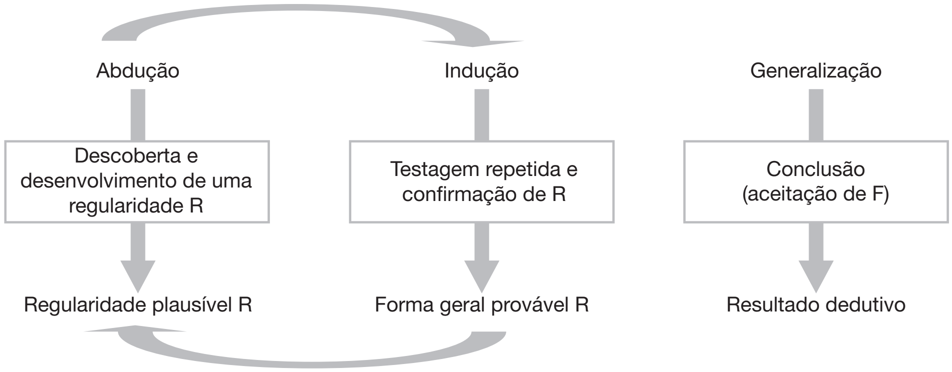

Figura 8.—O processo de raciocínio abdutivo-indutivo em padrões lineares (Rivera & Becker, 2007).

Assim, para estes autores, o processo de generalização ocorre quando há aceitação de uma forma geral obtida por um processo cíclico de abdução e indução. A indução, definida classicamente como a passagem do particular para o geral, necessita inicialmente da afirmação abdutiva que é depois sujeita ao teste repetido de confirmação para verificar a sua resistência, processo este que é a essência da indução. Em sintonia com estes autores, Yu (2006) resume de forma clara e concisa as ideias principais destes três tipos de raciocínio, afirmando que a abdução cria, a indução verifica e a dedução explica.

Centrando-nos no ensino e aprendizagem, e na ideia de que o raciocínio é a essência de toda a atividade matemática, defendemos que é necessário ajudar os alunos, desde os níveis mais elementares, a desenvolver o seu raciocínio matemático. Este está intimamente ligado, como vimos, ao uso da generalização. No Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o raciocínio é apresentado como uma capacidade transversal que envolve a formulação e teste de conjeturas e, mais tarde, a sua justificação; a compreensão do que é uma generalização, um caso particular e um contraexemplo; a distinção entre raciocínio indutivo e dedutivo; o conhecimento de métodos de demonstração; e a construção de cadeias argumentativas. Também, de acordo com Lannin et al. (2011), «Raciocinar em matemática é um processo evolutivo que envolve conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos» (p.10). Estes autores estabelecem um modelo do processo de raciocínio matemático que relaciona de forma interativa a conjetura e generalização, a compreensão do «porquê» e a justificação ou refutação, de acordo com o esquema da Figura 9.

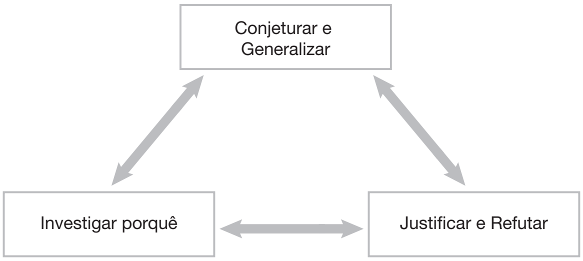

Figura 9.— Modelo interativo do processo de raciocínio matemático (Lannin et al., 2011, p.11)

Os autores dividem cada um destes aspetos em compreensões essenciais que o aluno deve possuir por forma a poder exercer o raciocínio nas diversas etapas. No primeiro aspeto, que abrange a conjetura e a generalização: (a) conjeturar inclui o raciocínio sobre relações com vista a estabelecer afirmações que se procura que sejam verdadeiras embora não se saiba; (b) generalizar envolve a busca de aspetos comuns entre casos ou a extensão do raciocínio para lá do domínio inicial; (c) generalizar envolve reconhecer o domínio relevante; e (d) conjeturar e generalizar incluem usar e clarificar o significado de termos, símbolos e representações. No segundo aspeto o raciocínio leva à pesquisa de vários fatores que podem explicar porque é que a generalização é verdadeira ou falsa. No terceiro, envolvendo a justificação ou refutação: (a) a justificação é um argumento lógico baseado em ideias previamente compreendidas; (b) uma refutação envolve demonstrar a falsidade de um caso particular; (c) a justificação e a refutação incluem a avaliação da validade dos argumentos; e (d) uma justificação válida de uma afirmação geral não pode basear-se em argumentos de autoridade, perceção, senso comum ou exemplos.

Os padrões e o raciocínio indutivo

Os aspetos enumerados referem-se à abordagem de qualquer tema da matemática, adquirindo importância fundamental no processo de descoberta de padrões. De facto, o processo de generalização, em particular, embora possa aplicar-se a toda a produção de conhecimento matemático, está em forte ligação com as tarefas de exploração de padrões usadas como veículo para o pensamento algébrico. Radford (2010) sugere como definição para a generalização algébrica de um padrão a capacidade de compreender aspetos comuns detetados em alguns elementos de uma sequência S, tendo consciência de que estes aspetos comuns se aplicam a todos os termos de S, e sendo capaz de os usar para fornecer uma expressão direta de qualquer termo de S.

No trabalho que temos desenvolvido com padrões tem sido dado destaque à visualização como uma forma de aprender e fazer matemática (e.g. Stylianou & Silver, 2004). Esta importância deriva do facto de que a visualização não está relacionada somente com a mera ilustração mas também é reconhecida como uma componente do raciocínio (profundamente envolvida com o concetual e não só com o percetual), da resolução de problemas — uma das heurísticas de Pólya consiste em fazer um desenho — e mesmo da prova (Nelsen, 1993). Na verdade, esta última afirmação é polémica, já que os puristas não consideram prova matemática algo que assente completamente na visualização, mas, ainda que não possa ser considerada prova, não deixa de fornecer uma explicação clara da veracidade de uma afirmação, estimulando o pensamento matemático, e ajudando a ver por onde começar para fazer uma prova formal.

Analisa-se em seguida uma tarefa de descoberta de padrões em números poligonais ou figurados realizada por uma turma de alunos de um curso de formação de professores de educação básica. A maioria destes alunos possui apenas o 9º ano de matemática. Esta descrição será analisada à luz do modelo de Lannin et al. (2011) atrás descrito.

Foi distribuído aos alunos material concreto (cubos unitários fixáveis) e foram informados que, na Antiguidade Grega, os matemáticos figuravam os números para criar as suas teorias. Criaram, por exemplo, a sequência dos números triangulares e a dos números retangulares.

Sugeriu-se então aos alunos que imaginassem como é que os matemáticos gregos teriam criado cada uma destas sequências. Começando pela dos números triangulares, os alunos construíram uma sequência do tipo apresentado na Figura 10, identificando o número natural correspondente.

Ao questionar os alunos sobre como continuar a sequência, um respondeu:

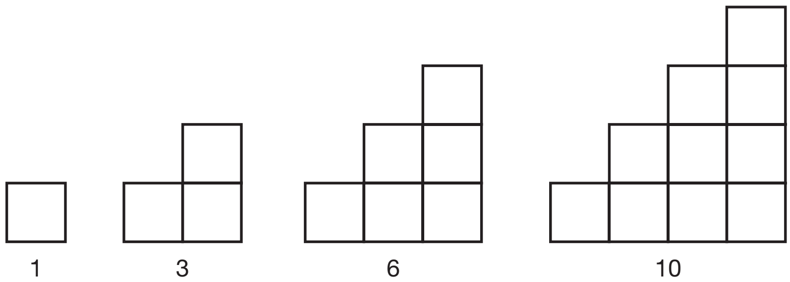

Figura 10.—Sequência dos números triangulares

> Aluno 1: Vai-se acrescentando sempre mais uma coluna às que tinha o elemento anterior.
>
> Aluno 2: O número é mais dois, mais três, mais quatro … que o anterior.

Verifica-se a simbiose entre a abordagem visual e a numérica, servindo uma para compreender e esclarecer a outra.

> Prof.: E então se quiséssemos o 5º número triangular?
>
> Aluno 3: Somávamos mais 5 ao 4º.
>
> Prof.: E se quiséssemos o 40º?
>
> Aluno 4: Somávamos 40 ao 39º!

Aqui foi feito um registo da situação e perguntou-se aos alunos se se davam por satisfeitos. Uma aluna então questionou:

> ALUNO 5: Ah, pois é, mas como é que sabemos o 39º?
>
> ALUNO 6: É mais 39 que o 38º!
>
> PROF.: E como é que sabemos o 38º?
>
> ALUNO 7: Ah, já sei! Vem-se por aí abaixo a descer a escada. É $38+37+\ldots$ até … até 1.

Fez-se novo registo: $t_{40}=40+39+38+\ldots+3+2+1$

> PROF.: Mas então digam: a que é igual o centésimo termo?
>
> ALUNO 8: É a soma.
>
> PROF.: Mas quanto é?
>
> ALUNO 8: Tínhamos de fazer as contas.
>
> PROF.: Mas não se torna muito prático, com tantas parcelas…
>
> ALUNO 9: Pois é. Temos que arranjar uma fórmula.
>
> ALUNO 10: É $n+(n-1)$.
>
> PROF.: Fez uma conjetura. Mas experimente a ver se dá.

Depois de experimentarem nalguns casos verificaram que falhava. Depois de mais algum tempo para arranjarem outra não surgiu mais nada, e então foi sugerido que passassem para a sequência dos números retangulares.

Aqui surgiram logo dúvidas sobre que tipo de retângulos teriam os matemáticos gregos idealizado, já que era possível formar muitas sequências com retângulos. Informou-se que começava com um retângulo de lados 1 e 2 e depois seguia acrescentando sempre uma unidade a cada dimensão. Os alunos construíram a sequência ilustrada na Figura 11.

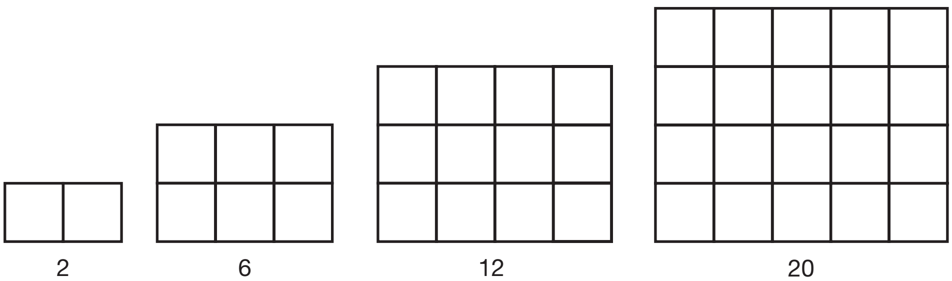

Figura 11. Sequência dos números retangulares

O aluno que fez o registo no quadro contou, na 3ª figura, 1, 2, 3, … e, passado um segundo, escreveu 12, o mesmo se passando com o 20. Quando se pediu para dizer qual seria o 5º número retangular, respondeu, tendo em conta o seu modo de contar:

> Aluno 11: É … tem cinco linhas … é 5×6.

Este procedimento foi explicitado de forma mais pormenorizada à turma.

Perguntou-se em seguida qual seria o 40º número retangular, e aqui alguns alunos consideraram que era $40\times40+1$, embora a maioria tivesse apresentado 40×41. Pediu-se depois uma generalização para um número retangular qualquer e a maioria dos alunos conseguiu escrever a expressão algébrica $n\times(n+1)$. Instado a explicar, um aluno disse:

> Aluno 12: Cada retângulo tem n linhas e mais uma coluna do que o número de linhas.

Neste ponto, a professora disse:

> Prof.: Vamos lá ver agora se este resultado nos serve de ajuda para o que deixámos incompleto há bocado sobre a sequência dos números triangulares …

Os alunos trabalharam em grupos durante mais um tempo e chegaram finalmente a uma conclusão, que foi justificada tanto numericamente como visualmente com uma imagem semelhante à da Figura 12: cada número triangular é metade do número retangular correspondente.

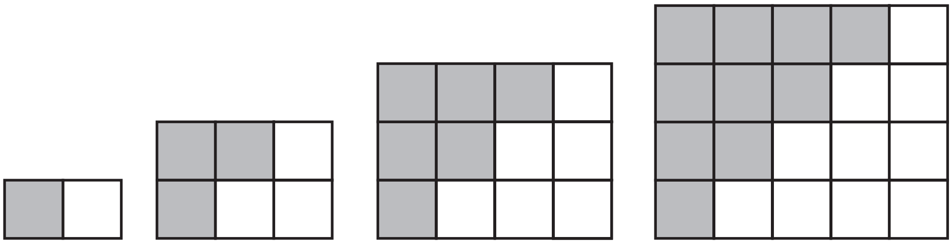

Figura 12.—Justificação visual

A partir dessa conclusão foi possível generalizar algebricamente, deduzindo para os números triangulares a expressão:

$$t_n=n\times(n+1)/2$$

Esta generalização foi verificada para alguns casos particulares, de modo a confirmar que «funcionava», embora já tivesse sido produzida uma justificação visual.

Associando as várias ações descritas ao modelo de Lannin et al. (2011), podem evidenciar-se: (a) ocorrências de conjetura no raciocínio sobre relações entre termos consecutivos de cada uma das sequências, e generalização na identificação de facetas comuns aos vários termos encarados na sua representação figurativa, seguida de extensão a um domínio mais vasto. Neste processo verifica-se, consistentemente com Radford (2010), que a primeira abordagem conduz a uma generalização aritmética, já que os alunos começam por detetar um aspeto comum local observado em algumas figuras (mais 2, mais 3, mais 4), sem serem capazes de usar essa informação para gerar um termo qualquer da sequência. Só depois da intervenção da professora, ao questioná-los se se davam por satisfeitos, é que os alunos se aperceberam de que a generalização feita era insuficiente e, em diálogo, produziram uma generalização mais forte, já algébrica embora não expressa com o simbolismo da álgebra: $40+39+\ldots+3+2+1$. No entanto, foi-lhes pedido mais. Radford (2010) afirma que quando se chega a uma fórmula por tentativa e erro, não há generalização mas apenas indução *naïve*. Consideramos que isso acontece quando os alunos não «veem», aproveitando a representação figurativa da sequência, mas estão mais preocupados com a descoberta de relações numéricas. Neste caso, com a tentativa falhada de nova generalização algébrica com a conjetura $n+(n-1)$, pensamos que os alunos produziram um misto entre uma generalização e uma indução, já que não se fixaram exclusivamente nos números tentando «adivinhar» uma fórmula — esta é que era demasiado complexa para o seu nível; (b) compreensão do porquê de a generalização algébrica ser verdadeira, quer no caso dos números retangulares, baseando-se no modelo retangular da multiplicação, quer depois no dos triangulares, na relação de metade com a sequência dos números retangulares; e (c) ocorrências de justificação ou refutação. A refutação foi efetuada para a primeira conjetura algébrica para os números triangulares, verificando que ela não resistia aos dados. A justificação foi feita com apoio visual, ao concluírem que cada termo da sequência dos números triangulares é metade do termo correspondente da dos retangulares. Pensamos que esta inferência é totalmente explicada pela visualização, podendo considerar-se, numa perspetiva não restritiva, tal como foi referido anteriormente, que constitui uma prova. Deste modo, podemos afirmar que foram percorridas todas as etapas do raciocínio prescritas por Lannin et al. (2011).

Verifica-se que a condução da tarefa com início na sequência dos números triangulares criou uma certa tensão por não ter sido possível atingir uma generalização algébrica, o que se revelou produtivo na parte final, uma vez que foi mobilizado o novo conhecimento sobre números retangulares como apoio. Verificou-se assim que uma descoberta pode ajudar a atingir outra mais desafiante e obscura; o processo de construção de sentido, desenvolvendo a compreensão da situação explorada na sequência dos números triangulares, desenrolou-se com base na relação estabelecida com outra sequência, a dos números retangulares, mais óbvia e elementar para os conhecimentos dos alunos. Nesta, os alunos não tiveram dificuldades em justificar a generalização feita, uma vez que ela deriva diretamente da interpretação da multiplicação como arranjo retangular; deste modo, e com base nela, os alunos puderam produzir uma generalização algébrica para a sequência dos números triangulares que tem a sua justificação natural precisamente nessa base. Uma nova generalização é construída, faz sentido e é explicável ao longo deste processo.

A concluir

A incursão pelo significado de alguns termos associados ao termo padrão conduziu-nos a uma possibilidade de definição de padrão que poderá contribuir para um maior esclarecimento quando se faz uso deste termo.

Ao longo do estudo desta temática foi valorizada a importância da visualização e da análise da estrutura subjacente ao padrão como contributos para o enriquecimento do raciocínio matemático (Vale et al., 2009). Este aspeto é igualmente defendido por Lannin et al. (2011), tendo-se verificado que o trabalho efetuado permite percorrer todas as etapas categorizadas por estes autores como componentes fundamentais do raciocínio. A visualização tem um papel primordial na abordagem inicial da tarefa que conduzirá ao processo de generalização, permitindo estabelecer relações que possibilitam a abdução encarada como a formulação de conjeturas plausíveis, o que é consistente com as ideias expressas por Rivera (2008). A consideração da estrutura matemática subjacente à apreensão de um padrão poderá contribuir fortemente para a explicação e a prova das conjeturas feitas, na fase posterior ao processo de generalização.

Fazendo a ponte com o nosso principal interesse, o ensino e a aprendizagem da matemática, referimos Davis & Hersch (1995) quando apontam como fatores da crise na compreensão da matemática a impaciência e a falta de persistência em relação ao assunto em estudo. De facto, este é o resultado de séculos de estudos de dezenas ou centenas de matemáticos brilhantes, mas os alunos (e os professores) tendem a querer compreender tudo de uma vez e, se não o conseguem, têm tendência a desistir. A compreensão é difícil e exige persistência. Daí que seja necessário, na medida do possível, fazer com que os alunos percorram todas as etapas, para poderem experienciar de forma gradual todas as cambiantes do raciocínio matemático atrás enunciadas. A exploração de tarefas com padrões figurativos aponta no sentido desse percurso, já que permite trabalhar diferentes representações, diferentes raciocínios com foco no indutivo, e ainda a generalização e justificação, componentes essenciais da atividade matemática (Tripathi, 2008; Mason, 1996; Radford, 2008). Este processo de aprender matemática é fortemente condicionado pela ação dos professores, que podem potenciar ou limitar as aprendizagens dos seus alunos, em função da sua motivação e do seu conhecimento matemático e didático. Daí a importância da formação de professores, quer inicial quer contínua, pela necessidade de eles próprios fazerem matemática com significado, bem como em refletirem, comunicarem e discutirem as suas ideias matemáticas (Ponte & Chapman, 2008).

A fase do ensino básico é particularmente apropriada para iniciar os alunos nas diferentes formas de representação visual das ideias matemáticas e as atividades de descoberta de padrões são extremamente ricas para atingir esse objetivo.

Notas

1 Projeto financiado pela FCT com a referência PTDC/CED/69287/2006

2 Agradecemos as valiosas opiniões sobre o assunto de Ferdinand Rivera, John Lannin e Tom Roper (comunicações pessoais, março 2012)

Referências

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36(5)*, 412–446.

Davis, P. & Hersch, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.

Freiman, V. & Lee, L. (2006). Developing Algebraic Thinking through pattern exploration. *Mathematics teaching in Middle School*, *11(9)*, 428–433.

Frobisher, L., Frobisher, A., Orton, A. & Orton, J. (2007). *Learning to teach shape and space*. Cheltenham, UK: Nelson Thornes.

Frobisher, L., Monaghan, J., Orton, A., Orton, J., Roper, T. & Threlfall, J. (1999). *Learning to teach number: A handbook for students and teachers in the primary school*. Cheltenham, UK: Stanley Thornes.

Gilbert, J. (2007) (Ed.). *Visualization in Science Education*. Dordrecht: Springer.

Lannin, J., Ellis, A. & Elliot, R. (2011). *Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten — Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra*, pp. 65–86. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (2011). Trabalhando com padrões. In P. Palhares, A. Gomes & E. Amaral (Coords.), *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa, APM/IIE, 1991].

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa, APM, 2007].

Nelsen, R. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking (Classroom resource materials, v.1*). Washington DC: MAA.

Nickerson, R. (2010). *Mathematical Reasoning: Patterns, Problems, Conjectures, and Proofs*. New York: Psychology Press — Taylor & Francis Group.

Orton, A. (2009). Reflections on pattern in the mathematics curriculum. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.), *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática/Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp. 15–28). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação — Projecto Padrões.

Orton, J., Orton, A. & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell.

Poincaré, H. (1920) *Science et Méthode*. Paris: Ernest Flammarion.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning Vol.2: Patterns of plausible inference*. New Jersey: Princeton University Press.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In Lyn English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (*2nd Edition*, pp. 225–263). New York: Routledge.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 83–96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4(2)*, 37–62.

Reisberg, D. (1997). *Cognition: Exploring the science of the mind*. New York: Norton.

Rivera, F. & Becker, J. (2005). Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11(4)*, 198–203.

Rivera, F. & Becker, J. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 140–155.

Rivera, F. (2008). On the pitfalls of abduction: complicities and complexities in patterning activity. *For the learning of mathematics*, *28*, *1* (march, 2008). FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada.

Sawyer, W. (1955). *Prelude to Mathematics*. Harmondsworth: Penguin.

Stanford Encyclopedia of Philosophy (2010). *Charles Sanders Peirce* (Rev. Ed.). Acedido março 7, 2012 em `http://plato.stanford.edu/entries/peirce/`

Steinbring, H. (1999). Reconstruction the mathematical in social discourse — aspects of an epistemology-based interaction research. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1* (pp. 40–55). Haifa: Technion, Israel Institute of Technology.

Stylianou, D., & Silver, E. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning*, *6(4)*, 353–387.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *v. 13*, *8*, 438–445.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). Visual pattern tasks with elementary teachers and students: a didactical experience. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.), *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática/Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp.151–162). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação — Projecto Padrões.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática — propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: ESEVC — Projecto Padrões.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais. Materiais para professores*. Lisboa: IIE.

Yu, C. (2006). Abduction, Deduction, and Induction: Their implications to quantitative methods. *The American Educational Research Journal* (*AERA*), *Vol. 43*.

Resumo. O ponto de partida para este artigo reside na análise e reflexão sobre um trabalho realizado no âmbito do projeto Padrões. Esta reflexão conduziu a um esclarecimento do nosso entendimento sobre o conceito de padrão e sobre o(s) raciocínio(s) associado(s) a um tipo particular de tarefas: a descoberta de padrões em contextos figurativos. A reflexão é sustentada pelas ideias de autores de referência e pelo trabalho desenvolvido com alunos de diferentes níveis de ensino, incluindo a formação de professores, na exploração de tarefas de padrões, de que se apresentam alguns exemplos ilustrativos. O nosso objetivo é revelar as potencialidades da resolução de tarefas de padrão, numa perspetiva de ensino exploratório, para o desenvolvimento do raciocínio matemático, em particular da abdução como componente do raciocínio indutivo.

Palavras-chave: Padrões, visualização, raciocínio abdutivo e indutivo, generalização.

Abstract. The starting point for this article is the analysis and reflection on a work performed under the project Patterns. This regard led to the clarification of our understanding of the concept of pattern and the type(s) of reasoning associated to a particular task: the discovery of patterns in figurative contexts. Reflection is grounded on the ideas of experts and on the work with students from different educational levels, including teacher education, in the exploration of pattern tasks, of which we present some illustrative examples. Our goal is to reveal the potential of solving pattern tasks, in a perspective of exploratory learning, in the development of mathematical reasoning, in particular the abduction as a component of inductive reasoning.

Keywords: Patterns, visualization, abductive and inductive reasoning, generalization.

■ ■ ■

TERESA PIMENTEL
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
teresapimentel@ese.ipvc.pt

ISABEL VALE
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt

(Recebido em abril de 2012, aceite para publicação em outubro de 2012)