L'argumentation en mathématiques et sa relation avec la démonstration

Bettina Pedemonte
DiDiMa srl. — ITD (CNR)

Introduction

L'idéal mathématique est celui d'un univers apodictique[1] dans lequel la validité d'un énoncé dérive par une chaîne de raisonnements déductifs d'un petit nombre de propositions acceptées. Dans cette vision des mathématiques, ce qui est démontré est nécessaire et irréfutable. Ce caractère de nécessité s'exprime aussi dans le langage mathématique, dont l'idéal formaliste est garant de validité. Cependant, il est peut-être un peu réducteur de penser que les mathématiques n'appartiennent qu'à un univers idéal complètement intellectuel. Les mathématiques avancent dans une dialectique en construction qui associe étroitement forme et perception (Otte, 1994). La connaissance mathématique porte sur des objets qui ne peuvent pas s'appuyer complètement sur une description formelle.

Il faut bien distinguer démonstration de dérivation: une démonstration est liée à des aspects conceptuels, elle possède un contenu sémantique lorsqu'une dérivation est un objet syntaxique de quelque système formel (Arzarello, 2007).

La dérivation concerne le formalisme syntaxique, la démonstration concerne le formalisme logique (Arzarello, 2007). La démonstration est une concaténation d'énoncés déterminée par des règles logiques. Cependant, le problème de sa validité n'est pas résolu. Une concaténation logique peut bien être fausse. L'objectif d'une démonstration est alors de rentrer de façon perspicace dans les «raisons formelles» qui expliquent pourquoi une conséquence logique est valide (Arzarello, 2007). Elle est valide si les principes dont elle part et les règles logiques sont vrais. C'est pourquoi la démonstration ne peut pas s'éloigner de la théorie mathématique (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997). La validité d'une démonstration est garantie par la déduction à condition qu'elle soit appliquée à l'intérieur d'une théorie mathématique de référence, c'est-à-dire d'un système de règles de déduction et de principes communément admis.

D'une certaine façon, la démonstration prend en compte l'aspect sémantique, lié au signifié.

Les concepts dont la démonstration s'occupe sont des objets théoriques, construits cependant comme abstractions d'objets réels. La démonstration est le produit final d'un long travail de préparation. Les mathématiques en phase de gestation ressemblent à toute autre connaissance humaine au même stade de développement; il faut imaginer un théorème avant de le démontrer. Selon Polya, «le résultat du travail créateur du mathématicien est un raisonnement démonstratif, une preuve; mais la preuve est découverte par un raisonnement plausible, elle est d'abord devinée» (Polya, 1958, préface de l'auteur)

Tout ce que nous apprenons de neuf sur ce monde implique le raisonnement plausible. Dans le raisonnement plausible l'essentiel est de distinguer une présomption (supposition qui n'est fondée que sur des signes de vraisemblance) d'une autre: une présomption plus raisonnable qu'une autre qui l'est moins. Le travail qui précède une démonstration, c'est-à-dire le processus qui recueille les raisonnements plausibles, est une argumentation. Elle est l'expression d'un raisonnement plausible.

Balacheff, dans la Lettre de la preuve de Mai/Juin 1999, a proposé une problématique de l'argumentation.

> Comprendre la démonstration c'est d'abord construire un rapport particulier à la connaissance en tant qu'enjeu d'une construction théorique, et donc c'est renoncer à la liberté que l'on pouvait se donner, en tant que personne, dans le jeu d'une argumentation. Parce que ce mouvement vers la rationalité mathématique ne peut être accompli qu'en prenant effectivement conscience de la nature de la validation dans cette discipline, il provoquera la double construction de l'argumentation et de la démonstration. (Balacheff, 1999, p. 5)

L'argumentation, en tant que processus moins contraint que la démonstration, permet d'avoir accès à des connaissances des élèves qui dans la démonstration ne sont pas nécessairement explicitées. Le problème de la vérité d'un énoncé se trouve finalement séparé du problème de sa validité. L'accès authentique à une problématique de la vérité et de la preuve se situe dans l'argumentation. C'est donc dans une problématique de l'argumentation que peut s'expliquer une problématique de la démonstration.

Mais, qu'est qu'une argumentation en mathématiques? Et quel est son rapport avec une démonstration? L'objectif de cet article est justement celui de trouver une réponse à ces deux questions.

Dans la suite nous présentons d'abord la problématique de la démonstration en didactique des mathématiques et son rapport avec l'argumentation.

Ensuite nous considérons séparément argumentation en mathématique et démonstration. Pour chacun de ces deux processus nous présenterons une partie historique e quelques théories linguistiques et philosophiques qui nous permettront de caractériser argumentation et démonstration.

Cette caractérisation nous permettra de comparer argumentation et démonstration et d'analyser la relation entre les deux.

Argumentation et démonstration en didactique des mathématiques

L'opposition entre l'objectif réel d'une démonstration et la mauvaise interprétation de cet objectif par élèves et enseignants est à la base d'une problématique didactique. L'objectif de la démonstration est de rendre valide un énoncé à l'intérieur d'un système théorique. La démonstration établit la validité d'un résultat, et pour n'importe quel mathématicien elle doit être établie de façon rigoureuse. D'une part, la validité est garantie par des règles et des axiomes supposés vrais qui sont donnés à priori. La démonstration se construit comme chaîne déductive à partir des énoncés vrais. Néanmoins, les mêmes mathématiciens préfèrent des démonstrations qui favorisent la compréhension de la raison de la vérité (pourquoi cet énoncé est vrai?) par rapport à l'adéquation formelle (Hanna, 1991).

La nécessité de la démonstration et son caractère de validité doivent être compris et assimilés. Autrement, elle perd sa raison d'être. Il est inutile qu'elle soit valide si on ne comprend pas pourquoi elle est valide.

D'autre part, les élèves cherchent dans une démonstration une explication, ils s'efforcent de lire la démonstration comme outil pour convaincre soi-même et les autres. Cet effort est souvent demandé (explicitement ou implicitement) par les enseignants, sans donner aux élèves les outils pour y parvenir. Néanmoins, comme souligné par de Villiers (1990), une démonstration n'est pas un pré-requis de la conviction, au contraire c'est plutôt la conviction qui peut aider à la construction d'une démonstration.

Une bonne démonstration devrait permettre de comprendre le théorème, pas seulement de dire qu'il est vrai mais aussi pourquoi il est vrai (Hanna 1989).

Souvent les élèves ont besoin de faire des essais, des vérifications empiriques, après une démonstration parce que la démonstration ne les convainc pas (Healy & Hoyles, 2000).

Au contraire, la démonstration devrait pouvoir répondre aux doutes des élèves.

> A proof is only meaningful when it answers the student's doubts, when it proves what is not obvious. (Kline, 1973, p. 151)

C'est pourquoi l'argumentation devient nécessaire à la compréhension. Les élèves face à une démonstration déjà construite restent souvent sceptiques, ils ne réussissent pas à comprendre la garantie qu'une démonstration donne par rapport à une argumentation (Chazan, 1993; Healy & Hoyles, 2000). Les interviews de Healy et Hoyles (2000) montrent très bien, que les élèves préfèrent les argumentations narratives (c'est-à-dire les argumentations où les relations mathématiques et les raisonnements sont décrit en langage commun) parce qu'elles sont plus proches de leur façon d'exprimer une justification.

> Les arguments in which mathematical relationships and reasoning were described in everyday narrative or in pictures were chosen by large numbers of students as closest to their own approach. (Healy & Hoyles, 2000, p. 415)

Il serait plus efficace que les élèves construisent eux-même les démonstrations au lieu qu'on les leur montre pour qu'ils puissent accomplir cet apprentissage. En effet, si les élèves construisent par eux-mêmes la démonstration, probablement ils doivent d'abord se convaincre. La construction de la démonstration devient alors un moyen pour se convaincre (Lakatos, 1979). La conviction ne passe pas par une démonstration mais par une argumentation. Pourtant, le problème se déplace: il ne s'agit plus de présenter des démonstrations significatives, mais d'apprendre aux élèves à construire des démonstrations à partir de leurs argumentations.

L'argumentation en mathématiques

Le besoin de parler d'argumentation en mathématiques dérive du besoin de caractériser les processus déployés pendant la résolution d'un problème, c'est-à-dire les processus de découverte, les processus qui construisent une conjecture et ceux qui l'explorent. Ces processus ne sont pas des démonstrations. Les processus qui justifient un énoncé ne proviennent pas toujours d'une démonstration. Souvent les justifications en mathématique sont des argumentations. Cela ne veut pas dire que toutes les justifications mathématiques sont des argumentations mathématiques mais qu'une particularité de l'argumentation en mathématiques est son caractère justificatif. On s'éloigne de Yackel (2001) qui considère argumentation et justification détachées en mathématique. La «justification» argumentative n'est pas simplement l'établissement d'un bien fondé pour l'admission d'une affirmation. Ce caractère de justification s'exprime dans le raisonnement.

Le raisonnement est la démarche d'une inférence explicite qui dérive l'affirmation d'une proposition à partir d'une ou plusieurs propositions données (Duval, 1995). L'argumentation, et en particulier l'argumentation en mathématiques, est avant tout un raisonnement.

En fait, les raisonnements mathématiques ne peuvent pas être réduits aux raisonnements démonstratifs qui permettent de déduire des conclusions à partir de prémisses données par le moyen de règles d'inférence explicitées à l'avance. Il y a des raisonnements mathématiques, spécifiques à l'argumentation qui veulent simplement donner des «raisons» de l'acceptation ou de la réfutation de certaines propositions. Les «raisons» permettent l'explicitation d'une argumentation à partir d'un raisonnement. D'après Toulmin (1958), l'argumentation a une structure ternaire, composée par des données, une conclusion et un permis d'inférer. Les «raisons» sont tous les permis d'inférer possibles qui composent l'argumentation.

C'est à partir de ces considérations qu'on peut affirmer que l'argumentation en mathématiques est avant tout une justification rationnelle.

L'argumentation en mathématiques se détache de l'explication. L'argumentation ne peut pas échapper à la rationalité comme le peut l'explication. L'explication en se vise à faire comprendre, à clarifier des aspects de la pensée qui pourraient ne pas apparaître évidentes aux autres (Yackel, 2001). L'argumentation ne se contente pas de la compréhension, elle veut convaincre.

Dans la suite, on analysera les conditions sociales qui ont permis la naissance d'une théorie de l'argumentation pour voir dans quelle mesure ces conditions sont encore d'actualité.

À partir de quelques recherches linguistiques et philosophiques contemporaines sur l'argumentation, on essayera de développer les caractéristiques d'une argumentation en mathématiques; comme Duval (1995) on veut distinguer entre caractéristiques fonctionnelles et caractéristiques structurelles. Les travaux sur l'argumentation sont nombreux et profondément différents les uns des autres. On va considérer ceux qui nous permettent de déterminer les propriétés spécifiques d'une argumentation en mathématiques.

Développement d'une théorie de l'argumentation

L'apparition des premières théories de l'argumentation est attestée autour des années 450 avant J.-C. à Syracuse. La cité, restée longtemps aux mains de tyrans, a connu sous l'influence grecque, une révolution démocratique. Cette révolution «se traduit immédiatement par une extraordinaire prééminence de la parole sur tous les autres instruments de pouvoir» (Breton & Gauthier, 2000, p. 11). La parole devient un outil politique, fondamental pour communiquer ses propres opinions et pour persuader les autres de ses propres idées. C'est dans une société démocratique, où les discussions, les débats, les désaccords, peuvent vivre, qu'une activité de communication, comme l'argumentation, peut se développer. Son développement est la réponse à un besoin particulier: susciter l'adhésion d'un interlocuteur à une opinion. Elle naît donc avec une finalité persuasive intrinsèque, celle de convaincre.

Dans une telle société une théorie de l'argumentation devient nécessaire; des techniques oratoires se développent. Aristote a été le premier à construire une théorie systématique de la rhétorique, dont la technique, indifférente à la morale, est définie comme «la faculté de découvrir spéculativement ce qui, dans chaque cas, peut être propre à persuader» (Rhétorique, livre I, 2, 1355b). C'est une technique d'argumentation de la vraisemblance et non de la vérité. Le but «est de trouver une méthode qui nous mette en mesure d'argumenter sur tout problème proposé, en partant de prémisses probables» (Topiques, I, 100a, 18). Cependant, la rhétorique n'est pas la seule technique disponible pour persuader un auditoire.

Aristote distingue trois domaines où s'exerce l'art du discours: *rhétorique*, *dialectique* et *analytique* (appelée ensuite logique). Dans sa classification il fait voisiner rhétorique et dialectique parce qu'elles portent sur des questions communes à tous les hommes et ne relèvent pas de la science. Par contre, l'analytique est une argumentation scientifique.

Rhétorique et dialectique sont deux formes de rationalité non scientifique. Elles sont des formes d'argumentation dialogique, c'est-à-dire adressées à un public. Cependant, la dialectique s'adressait à un interlocuteur bien conscient du sujet de l'argumentation, et capable de répondre aux questions ou de réfuter les arguments de celui qui argumente. En revanche, la rhétorique s'adressait à un auditoire plutôt silencieux et composé par plusieurs personnes; celui qui argumentait pouvait utiliser n'importe quelle méthode, n'importe quelle stratégie à fin de persuader ses auditoires.

Les argumentations rhétorique et dialectique n'amènent pas nécessairement à de vraies conclusions car les principes de départ ne sont pas nécessairement vrais. Cependant, celui qui fait de la dialectique part de principes (*endoxa*) qu'il croit être vrais, alors que celui qui fait de la rhétorique n'est pas nécessairement convaincu de la vérité des affirmations qu'il défend.

L'analytique est une forme de rationalité scientifique qui n'est pas nécessairement destinée à un public, c'est une forme d'argumentation monologue. Elle est l'outil (*organon*) qui doit rendre possibles les raisonnements corrects dans les environnements scientifiques.

Cette classification nous permet de situer l'argumentation en mathématiques. D'une certaine façon, l'analytique correspond à la démonstration qui construit des raisonnements corrects en mathématiques. La dialectique, qui n'amène pas nécessairement à de vraies conclusions mais qui part des principes vrais pour celui qui argumente, correspondrait à l'argumentation en mathématiques.

Quand les mathématiques sont en construction, quand on est en train de se demander si un énoncé mathématique est vrai, quand on cherche une solution pour un problème, l'argumentation utilisée est la dialectique. Elle n'est pas analytique parce que les prémisses ne sont pas nécessairement vraies. Elle n'est pas non plus rhétorique parce que celui qui fait une argumentation en mathématiques croit que les principes dont il part sont vrais.

Cependant, par rapport à Aristote, il est important d'observer que la distinction cruciale n'est pas entre analytique et dialectique/rhétorique, mais plutôt entre rhétorique et dialectique/analytique. En effet, dialectique et analytique ont une finalité commune: déterminer la vérité. L'objectif d'une argumentation rhétorique est au contraire de persuader l'interlocuteur sans nécessairement entrer dans une problématique de la vérité, en s'appuyant par exemple sur les sentiments de l'auditoire. Les mathématiques, dans leur nature, se basent sur le vrai. En conséquence, les argumentations doivent «avoir» la recherche de la vérité comme fonctionnalité principale.

Néanmoins, à côté d'une «théorie fonctionnelle» de l'argumentation, dans laquelle Aristote éloigne les trois formes du discours, il développe une «théorie structurelle», dans laquelle rhétorique, dialectique et analytique sont caractérisées par la même structure.

Aristote identifie le syllogisme comme structure commune aux trois formes du discours. Le syllogisme est défini comme "un discours dans lequel certaines choses étant posées, une autre chose différente d'elles en résulte nécessairement" (Topiques, 100a 25)

Le découpage du discours en ses éléments premiers permet de faire une analyse de sa structure formelle. Dans l'élaboration de l'*Organon*, Aristote considère des types différents de discours pour déterminer les règles avec lesquelles on peut prendre un point de vue formel, sans même prendre en compte le contenu.

La doctrine du syllogisme étudie la façon correcte selon laquelle les propositions sont mutuellement en rapport. Un syllogisme est composé de trois propositions: deux prémisses et une conclusion qui relie les deux prémisses. La position des termes à l'intérieur des propositions détermine la figure du syllogisme. Il y a trois figures différentes:

- la première figure est celle dans laquelle le terme moyen est sujet de la prémisse majeure et prédicat dans la prémisse mineure;

- la deuxième figure est celle dans laquelle le terme moyen est prédicat dans les deux prémisses;
- la troisième figure est celle dans laquelle le terme moyen est sujet dans les deux prémisses.[2]

A partir de cette classification, Aristote identifie les syllogismes valides, c'est-à-dire toutes les combinaisons possibles, où prémisses et conclusions forment une inférence correcte.

Cependant Aristote est bien conscient que la validité du syllogisme n'implique pas sa vérité: le syllogisme peut être logiquement correct mais partir de prémisses fausses, et conduire à une proposition fausse.

Au syllogisme dialectique (*épichérème*), qui «conclut des prémisses probables» (Topiques, 100a, 25), correspond le syllogisme rhétorique (*enthymème*), qui ne «conclut qu'en apparence de prémisses probables ou paraissant probables» (Topiques, 100a, 25).

Il y a alors deux idées de base à retenir de la théorie du syllogisme:

- le syllogisme représente la première tentative de définir une structure d'argumentation composée par trois propositions;
- le syllogisme fait de l'argumentation l'expression d'un raisonnement nécessaire. Dans le syllogisme, chaque proposition est nécessairement déduite à partir de deux prémisses, qu'elles soient universelles ou particulières.

On est donc intéressés à la théorie aristotélicienne parce qu'elle nous a permis de focaliser deux caractéristiques de l'argumentation en mathématiques: l'une fonctionnelle et l'autre structurelle. Dans la dialectique, nous avons identifié certaines caractéristiques de l'argumentation en mathématiques. Comme la dialectique, l'argumentation en mathématiques a une finalité: convaincre. Elle doit partir de prémisses que l'on croit être vraies et à partir de celles-ci amener à une conclusion. En outre, le syllogisme fournit un schéma pour décrire la structure de l'argumentation. Cette structure représentera l'élément de liaison entre argumentation et démonstration. C'est donc à partir d'Aristote que, d'une certaine façon, argumentation et démonstration ne sont pas aussi éloignées qu'elles le paraissent souvent.

Le passage direct des théories anciennes aux modernes est justifié par le fait que les théories sur l'argumentation ont eu une longue période de latence jusqu'à l'époque contemporaine:

> L'argumentation a une histoire théorique sinueuse. Pleinement reconnue comme objet de recherche dés l'aube de la civilisation gréco-romaine, elle traverse ensuite une longue période de latence relative entrecoupée de quelques soubresauts pour connaître une renaissance à l'époque contemporaine. (Breton & Gauthier, 2000, p. 3)

L'argumentation en mathématiques à la suite des théories linguistiques et philosophiques contemporaines

Les théories linguistiques et philosophiques contemporaines permettent de fournir une caractérisation de l'argumentation en mathématiques (Plantin, 1990; Toulmin, 1958; Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1992; Ascombre & Ducrot, 1983). En particulier, on va déterminer les caractéristiques fonctionnelles et les caractéristiques structurelles de l'argumentation (Duval, 1995). Les caractéristiques fonctionnelles déterminent la finalité de l'argumentation, son utilité, son rôle à l'intérieur d'un discours. Les caractéristiques structurelles permettent de définir sa structure.

La fonctionnalité de l'argumentation en mathématiques

L'argumentation est un processus de transmission des contenus, des idées, des valeurs épistémiques. Ce sont des éléments évolutifs qui caractérisent la finalité d'une argumentation. Elle a toujours un objectif qui détermine son orientation. Lorsqu'une argumentation se construit, les contenus changent, les idées prennent forme, les valeurs épistémiques évoluent, progressent ou décroissent; une «direction» vient à se définir, et en conséquence sa fonctionnalité apparaît.

La fonctionnalité dont nous parlons, ne s'exprime pas par la fonction «intentionnelle» qu'Anscombre et Ducrot (1983) reconnaissent à l'argumentation. Selon la *sémantique intentionnelle* la finalité d'une argumentation est d'exprimer les intentions du locuteur.

> Anscombre et Ducrot opposent la sémantique intentionnelle à la sémantique vériconditionnelle qui assimile le sens d'un énoncé à l'ensemble de ses conditions de vérité […]. La sémantique intentionnelle définit le sens d'un énoncé en référence aux intentions affichées ouvertement (linguistiquement) par le locuteur. (Plantin, 1990, p. 37)

On est d'accord avec le fait que «l'activité d'argumentation est coextensive à l'activité de parole. Argumenter c'est parler … ». (Anscombre & Ducrot, 1983, p. 38) L'argumentation se sert de la langue naturelle comme outil de communication entre celui qui argumente et son interlocuteur. L'argumentation en mathématiques a une direction, mais le sens d'un énoncé n'est pas réduit à la visée intentionnelle de son locuteur. La détermination des structures intentionnelles dans le discours n'est pas suffisante pour la compréhension du sens d'un énoncé. Pourtant, une argumentation en mathématiques doit s'éloigner de la *sémantique intentionnelle* où le risque est celui de tomber dans la rhétorique. Une argumentation en mathématiques doit «faire la place» à la *sémantique vericonditionnelle*, à la recherche de la vérité.

L'argumentation en mathématiques est une justification rationnelle

On a déjà anticipé que l'argumentation en mathématiques est une justification rationnelle. Le caractère justificatif s'exprime dans sa forme: le raisonnement. La rationalité concerne l'inférence qui relie la suite des propositions d'un raisonnement. C'est pourquoi on va se rapprocher de Toulmin (1958); il considère la rationalité comme caractéristique fondamentale de toute argumentation.

La raison est procédurale et se définit par une démarche d'un certain style dont les grands traits sont indépendants du domaine considéré. La rationalité, caractéristique fondamentale dans les argumentations juridiques (sur lesquelles s'appuie beaucoup Toulmin), doit être retrouvée dans toute argumentation. Les «raisons» exprimés dans une argumentation, permettent l'acceptation ou la réfutation de certaines propositions, et en conséquence elles en sont une justification. Ainsi, la fonction justificatrice est fonction première dans l'argumentation.

> …c'est là, la fonction première des arguments, et que leurs autres utilisations, les autres fonctions que nous leurs prêtons, sont d'une certaine manière secondaires et parasites de leur rôle justificatif qui, lui, est primordial. (Toulmin, 1993, p. 14)

L'argumentation en mathématiques est une tentative de justifier un énoncé ou un ensemble d'énoncés. C'est pourquoi l'argumentation en mathématiques est une justification rationnelle.

L'argumentation en mathématiques a toujours un objectif: la recherche de la vérité

Le paradigme de la rationalité se retrouve notamment dans les modèles juridiques. Le langage du tribunal fournit le paradigme de la rationalité qui se substitue au paradigme logique dans l'analyse des raisonnements quotidiens (Plantin, 1990). Les argumentations en tribunal visent à obtenir que la justice soit rendue.

Le modèle juridique peut représenter un modèle pour l'argumentation. Cette approche est suivie par Perelman et Olbrechts-Tyteca dans le «Traité de l'argumentation — La nouvelle rhétorique» publié en 1958 et par Toulmin (1958) dans «The uses of argument». Cependant, il y a des différences profondes entre ces deux approches théoriques. Comme on le montre dans la suite, le point de vue de Toulmin est plus approprié pour nous aider à caractériser l'argumentation en mathématiques.

D'ailleurs, l'objectif principal de l'argumentation en mathématiques est la recherche de la vérité. En mathématiques on argumente quand on veut convaincre quelqu'un (soi même ou un interlocuteur) de la vérité d'un énoncé. L'argumentation est alors un discours construit avec l'objectif de rechercher le «vrai».

L'argumentation en mathématiques est convaincante et elle s'adresse à un auditoire universel

L'acceptation d'un modèle d'argumentation nous renvoie au concept d'auditoire. L'acceptabilité de la rationalité de toute argumentation fait appel à un auditoire implicite qui détermine les lois de cette acceptabilité. L'auditoire universel et la rationalité nous poussent à retrouver chez Toulmin la dialectique aristotélicienne qui a les caractéristiques de l'argumentation en mathématiques.

Or, nous savons que l'argumentation adressée à un auditoire peut avoir une double finalité: conviction et persuasion. Ce sont deux caractéristiques bien distinctes. La conviction vise à modifier les opinions, les croyances en faisant appel aux «raisons». Elle doit tenir compte d'autrui. Une argumentation est convaincante dans le sens où elle s'adresse à un auditoire universel à fin de lui faire reconnaître la vérité d'un fait ou sa nécessité (dialectique aristotélicienne). En revanche, la persuasion vise à obtenir l'adhésion sans faire nécessairement appel à la raison et sans prendre en compte autrui. Une argumentation est persuasive dans le sens où elle s'adresse à un auditoire particulier, soit un individu soit un petit groupe à fin de l'amener à croire, à faire, ou à vouloir quelque chose, par tous les moyens possibles (rhétorique aristotélicienne).

Convaincre implique persuader et non le contraire. Argumenter en mathématique, c'est convaincre; c'est modifier les opinions en recourant à la rationalité. La persuasion n'est pas suffisante, elle ne serait même pas légitime.

C'est justement ce caractère de «conviction» qui donne sa légitimité à l'argumentation. On argumente lorsqu'on veut amener l'interlocuteur à reconnaître la vérité d'un énoncé. En mathématique, l'interlocuteur est la communauté mathématique, la classe ou celui qui argumente. Dans tous les cas il s'agit d'un interlocuteur universel et non particulier, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un auditoire rationnel qui peut être en accord ou en désaccord avec celui qui argumente, mais dans tous les cas il est apte à répondre.

C'est là qu'on s'éloigne de Perelman et Olbrechts-Tyteca qui, selon Plantin (1990), définissent l'argumentation sans recours à la notion de vérité. Perelman et Olbrechts-Tyteca soutiennent que la visée argumentative n'est pas d'approcher une vérité préétablie mais d'influencer un auditoire.

La théorie de l'argumentation, selon Perelman et Olbrechts-Tyteca, est un renouvellement de la rhétorique aristotélicienne. Les arguments peuvent avoir une structure modelée par une situation rhétorique définie par la présence d'un auditoire. «En effet, comme l'argumentation vise à obtenir l'adhésion de ceux auxquels elle s'adresse, elle est tout entière relative à l'auditoire qu'elle cherche à influencer» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1992, p. 24).

L'argumentation de Perelman et Olbrechts-Tyteca ne fait pas appel à la rationalité, elle est une argumentation persuasive adressée à un auditoire particulier.

Néanmoins, Perelman et Olbrechts-Tyteca propose de faire intervenir la «règle de justice» dans la détermination de la force d'un argument. «La règle de justice exige l'application d'un traitement identique à des êtres ou à des situations que l'on intègre à une même catégorie» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1992, p. 294). Ce qui a pu, dans une certaine situation, persuader, pourra persuader dans une situation semblable. «La force des arguments dépend donc largement d'un contexte traditionnel» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1992, p. 616).

D'après Perelman et Olbrechts-Tyteca, un argument est d'autant plus fort qu'il peut se prévaloir de précédents.

La règle de justice est utilisée dans l'argumentation en mathématiques. Elle exige l'application d'un traitement identique à des situations qui appartiennent à une même catégorie. Les situations mathématiques sont les plus appropriées pour l'application de cette règle parce qu'elles peuvent effectivement présenter des caractéristiques identiques alors que les situations concrètes sont difficilement comparables entre elles et, même quand on peut les comparer, il y a toujours des différences. Si on pense par exemple au tribunal, il est très difficile de retrouver les mêmes situations. Les argumentations juridiques utilisent souvent la règle de justice mais celui qui argumente doit accomplir un grand effort pour trouver une situation analogue à celle qui est en train de traiter. Au contraire, les mathématiques fournissent le meilleur contexte pour l'application de cette règle.

Le champ de l'argumentation

Les assertions qu'il est possible de produire pour soutenir une argumentation sont variées, les raisons qui peuvent servir à justifier les assertions et les chemins que peuvent emprunter les raisonnements justificatifs sont différents.

Ducrot et Anscombre (1979) rejettent l'idée qu'une phrase se suffit à elle-même, qu'elle se donne son sens, au contraire elle possède une relation au contexte et ne peut pas être isolée. «La description linguistique d'une phrase implique que le sens de ses énoncés soit différent selon la situation de discours, et même qu'il y ait de multiples lectures possibles pour un énoncé donné» (Ducrot & Anscombre, 1979, p. 17). Les mots ne peuvent pas garantir une compréhension correcte, il faut chercher dans la phrase, dans le contexte, les informations supplémentaires qui permettent de réduire les malentendus et de comprendre l'argument.

Le caractère multiforme de l'argumentation nous oblige à prendre en compte la notion fondamentale de champ introduite par Toulmin. Le champ est le contexte particulier à toute argumentation.

> On dira que deux arguments appartiennent au même champ lorsque les données et les conclusions constituant chacun de ces deux arguments sont respectivement du même type logique[3]; on dira qu'ils participent à des champs différents lorsque les fondements ou les conclusions ne sont pas du même type logique. Les preuves figurant dans les Eléments d'Euclide appartiennent à un champ, tandis que les calculs sous-tendant une édition de l'Almanach nautique relèvent d'un autre. (Toulmin, 1993, p. 17)

Evidemment, les mathématiques ne constituent pas un champ unique, ce sont plutôt les différents champs des mathématiques qui nous permettent de caractériser l'argumentation en mathématiques. Une argumentation en géométrie n'appartient pas au même champ qu'une argumentation en algèbre car les principes théoriques qui établissent la validité d'un énoncé sont différents (Pedemonte, 2005).

Toulmin analyse des arguments dans des circonstances particulières, dans des champs particuliers de recherche, mais il pose la question de la dépendance (et indépendance) des arguments par rapport à leur champ. Les arguments peuvent avoir des caractéristiques dépendantes de leur champ (*field-dependant*) sous certains aspects et indépendant du leur champ sous d'autres aspects (*field-invariant*). Par exemple, l'évaluation des arguments est dépendante du champ même si les termes d'évaluation ne varient pas en fonction du champ. Le sens du terme «possible» ou «impossible» est indépendant du champ, mais les critères de possibilité ou impossibilité en sont, par contre, dépendants. Ne pas pouvoir fumer dans un compartiment d'un train et le fait que 2 ne puisse pas avoir une racine carrée rationnelle indiquent deux impossibilités mais les critères utilisés pour juger l'impossibilité sont différents dans les deux champs (Toulmin, 1993).

Néanmoins, on ne peut pas conclure que des argumentations appartenant à différents champs ne sont pas comparables. On peut observer que l'argumentation en mathématiques théorique et l'argumentation fournie pour la construction d'une conjecture peuvent avoir la même force pour celui qui argumente (il peut être convaincu de la validité des deux) même si les critères pour l'évaluer ne sont pas du tout les mêmes dans les deux cas.

L'intérêt de Toulmin est d'analyser l'argumentation au moyen d'un modèle qui soit utilisable dans tous les champs. Ce modèle sera analysé dans la partie suivante; il permet de caractériser la structure de toute argumentation et d'expliciter les critères d'acceptabilité de l'argumentation.

La structure de l'argumentation.

L'argumentation est étroitement liée au raisonnement et en conséquence à la science qui s'occupe de celui-ci: la logique. Il ne s'agit pas là de la logique formelle. Toulmin propose un schéma méthodologique en rupture avec la logique comme discipline mathématique. Son but est de donner une extension de la logique jusqu'à l'assimiler à une méthodologie rationnelle capable d'exprimer les processus par lequel s'accroissent nos connaissances en général. La théorie de l'argumentation est alors une sorte de renouvellement de la logique, «plus précisément, Toulmin préconise une transformation de la logique qui la ferait passer d'une science formelle à une science pratique» (Breton & Gauthier, 2000, p. 55).

Le point de vue de Grize (1996) est, sous certaines aspects, similaire à celui de Toulmin. L'argumentation, est pour cet auteur, la manifestation de la logique naturelle. La logique naturelle «cherche à décrire des opérations de pensée, opérations qui servent à constituer et à organiser des contenus et dont elle cherche les traces dans des discours» (Grize, 1996, p. 114).

Cependant, à la suite de Toulmin, si la logique naturelle est une extension de la logique formelle, cela n'est pas le point de vue de Grize. Il s'oppose à la restriction de la logique à la seule logique mathématique: «il conteste la prétention de la logique mathématique à régenter le savoir» (Breton & Gauthier, 2000, p. 97). A la suite de Grize, la logique naturelle et la logique formelle sont complètement détachées. La différence est non seulement dans la forme mais aussi dans les contenus. En fait, la logique formelle s'occuperait des relations entre concepts tandis que la logique naturelle se proposerait de mettre en évidence la construction des concepts et leurs liens (Grize, 1996).

C'est ici que nous nous éloignons de Grize et de la logique naturelle. L'argumentation en mathématiques n'est pas nécessairement liée à la logique formelle; la plus grande partie des argumentations en mathématiques utilise la langue naturelle. Cependant, il ne s'agit pas d'appeler argumentation n'importe quelle activité discursive en mathématique. La logique naturelle est la logique du discours, d'un discours qui peut être argumentatif mais également rhétorique, descriptif, explicatif etc. La logique naturelle est trop vaste pour décrire l'argumentation en mathématique.

L'argumentation mathématique est alors un raisonnement logique, qui peut être décomposé en parties afin d'en faire émerger sa structure. Dans la suite, cette structure est présentée.

Caractérisation de la structure de l'argumentation: schéma ternaire.

La théorie d'Aristote a présenté le syllogisme comme un modèle structurel de l'argument.

Evidemment, ceci ne peut pas être accepté aujourd'hui comme modèle descriptif général des arguments: le syllogisme ne prend en compte que des arguments déductifs, l'énoncé conclusion est finalement déduit à partir des deux prémisses. Il n'est pas exhaustif, tous les arguments ne sont pas nécessairement des syllogismes. Plantin (1990) affirme que la caractéristique du syllogisme est de ne faire avancer aucune connaissance parce que la conclusion doit être contenue dans les prémisses.

> Le propre de l'argumentation, nous l'avons vu, est d'avancer une conclusion qui dépasse ce qu'autorise strictement l'argument: en cela elle ouvre à la polémique et laisse place à l'objection et à la réfutation. Par contre la conclusion d'un syllogisme ne fait que développer strictement le contenu des prémisses: on peut donc soutenir que cette conclusion ne contribue aucunement à l'accroissement de nos connaissances. (Plantin, 1990, p. 173)

En plus, le syllogisme, même s'il est valide logiquement, peut amener à conclusions erronées parce qu'il ne prend pas en compte le contenu des propositions; il est construit indépendamment du contexte. Malgré ces considérations, la théorie du syllogisme a été la première à donner un modèle à la structure de l'argumentation et, comme on a déjà vu, cette structure était composée par trois termes: les deux prémisses et la conclusion.

Aujourd'hui, Toulmin propose un modèle de l'argumentation qui prend en compte la structure ternaire déjà considérée par Aristote. Cependant, par rapport au syllogisme d'Aristote, ce modèle de l'argument est tout à fait original. Avant tout, l'objectif de Toulmin est celui de capter la «forme logique» d'un discours rationnel.

> L'analogie entre l'évaluation rationnelle et la pratique du droit nous offre un modèle concurrent pour réfléchir à l'idée de forme logique. Il apparaît maintenant que les raisonnements ne doivent pas simplement présenter une forme particulière mais également être exposés et présentés selon une séries d'étapes conformes à certaines règles fondamentales de procédures. (Toulmin, 1993, p. 52)

Un argument dans le modèle de Toulmin est composé par un schéma ternaire:

E (claim): l'énoncé ou conclusion qu'apporte l'interlocuteur;

D (data): un certain nombre de données justifiant l'énoncé E;

P (warrant): le permis d'inférer qui fournit une règle, un principe général capable de servir de fondement à cette inférence, de jeter un pont entre D et E.

Le premier pas dans l'argument est l'expression d'un point de vue, c'est la conclusion, le but de l'argument. Cette affirmation doit être soutenue par l'argumentation. Nous appelons énoncé E («claim», Toulmin 1958, p. 97) la conclusion de chaque argument.
Cette conclusion se base sur un certain nombre de données D («data», Toulmin 1958, p. 97) qui sont produites pour soutenir l'énoncé. Les données sont significatives parce qu'elles sont le point de départ de chaque argument. Les donnés peuvent être constituées par des évidences, des faits, des informations, des exemples. C'est sur les données que l'énoncé conclusion s'appuie.

Pour passer des données à l'énoncé conclusion une «autorisation» qui légitime ce passage est nécessaire. Une règle, un principe général, un permis d'inférer P («warrant», Toulmin 1958, p. 98) permet de jeter un pont entre données et énoncé conclusion.

Ce permis d'inférer est la partie de l'argument qui établit la connexion logique entre les données et l'énoncé conclusion. C'est la «raison» de l'acceptation ou de la réfutation de l'argument. C'est le point qui peut être réfuté par l'auditoire. Si l'argument n'est pas accepté, c'est justement le permis d'inférer qui est sous la critique.

> Les données que nous citons lorsqu'on conteste une des nos affirmations dépendent des garanties que nous sommes prêts à utiliser dans ce champ, et les garanties auxquelles nous souscrivons sont implicites dans le passage des données aux affirmations que nous sommes disposés à émettre et à admettre. (Toulmin, 1958, trad. fr. 1993, p. 123)

La figure 1 montre comment peut être schématisé le schéma ternaire:
Ce schéma élémentaire n'est pas complet. L'articulation générale du discours peut être plus complexe et nécessiter de trois étapes auxiliaires:

F (qualifier): l'indicateur de force de l'argument;

R (rebuttal): la réfutation potentielle de l'énoncé conclusion;

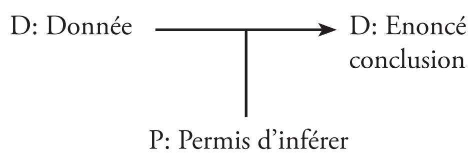

Figure 1.— Le schéma ternaire dans le modèle de Toulmin

B (backing): le support du permis d'inférer.

En général, les règles et les données ne permettent pas d'inférer avec un degré absolu de certitude. C'est pourquoi, on utilise un indicateur de force F («qualifier», Toulmin 1958, p. 102) qui précise avec quelle force le couplage des données à la loi permet d'atteindre l'énoncé. L'indicateur de force de l'argument peut ne pas être explicite, mais l'argument est toujours qualifié comme «vrai», «probablement vrai», «probable», etc. L'adverbe qui le qualifie représente la force de l'argument.

Il se peut que certaines circonstances particulières suspendent l'application du permis d'inférer au domaine des données. Le schéma argumentatif prévoit une place pour la restriction R de son énoncé. S'il y a des exceptions à l'énoncé la force du permis d'inférer est affaiblie. Les conditions des exceptions ou réfutations potentielles R ("rebuttal", Toulmin 1958, p. 102) sont alors prises en considération. Ces réfutations potentielles, ou restrictions, apportent un commentaire sur le rapport entre le permis d'inférer et la légitimité du passage des données à la conclusion; elles signalent les circonstances dans lesquelles il faudra annuler l'autorité du permis d'inférer.

En conséquence, le permis d'inférer peut être mis en question. Il faut donc l'épauler, l'étayer d'un certain nombre de justificatifs, le support S («backing», Toulmin 1958, p. 103).

L'existence d'un permis d'inférer entre donnée et conclusion est justifiée par la légitimité de la question «Dans quelles conditions y a-t-il une relation entre données et énoncé conclusion?». Cependant, une autre question peut se poser: Pourquoi y a-t-il une relation entre données et énoncé conclusion?

C'est pourquoi un support peut être nécessaire dans la schématisation de l'argument. Si l'autorité du permis d'inférer n'est pas acceptée, un support au permis peut être demandé. Le support peut aider l'auditoire à comprendre le permis d'inférer; sans le support il se peut que le permis ne soit pas accepté.

Le schéma complet est représenté en figure 2.

Considérons, par exemple, l'argument suivant: «Deux boules ayant la même forme, une de fer et l'autre de bois sont lâchées d'une tour en même temps. La vitesse de chute semble proportionnelle au temps (Galileo). Donc probablement les deux boules arrivent à terre au même instant … à moins que la boule de fer arrive avant la boule de bois car

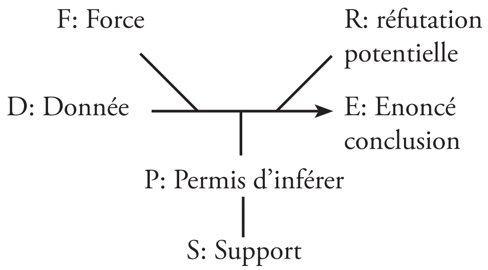

Figure 2.—Le modèle de Toulmin

elle est plus lourde. En fait, selon Newton la loi de la gravitation est $v \propto t$ et $s \propto t^2$» (Pedemonte, 2005).
Le schéma de l'argument est représenté en figure 3.
Un tel modèle de l'argumentation permet de modéliser l'argumentation comme une chaîne de pas argumentatifs, chacun pouvant être comparé avec les pas correspondants de la démonstration. Comme montré par différentes recherches (Pedemonte 2005, 2007, 2008), le modèle permet un découpage de l'argumentation en ses arguments et, en même temps, permet de visualiser leur concaténation. Cela est très utile pour déterminer

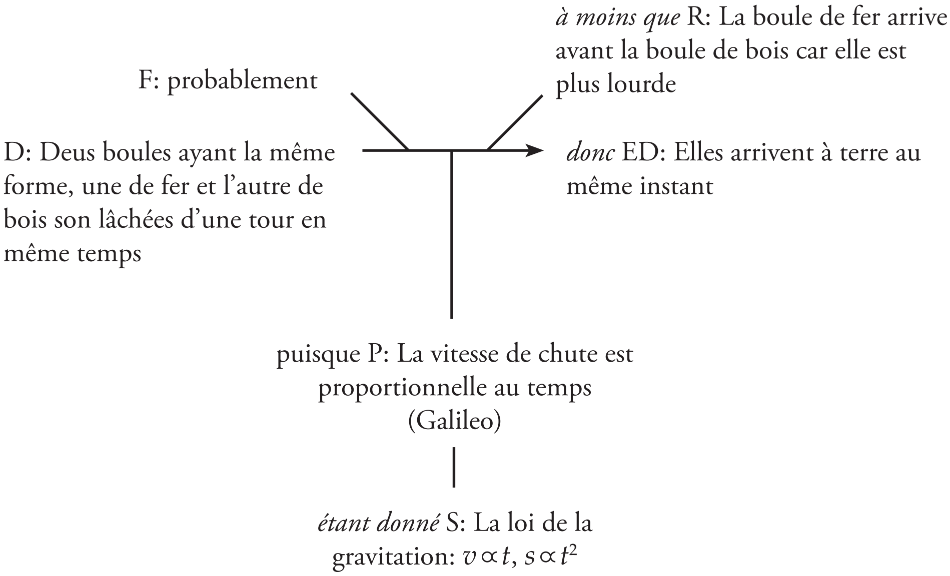

Figure 3.—Exemple du modèle de Toulmin

le type de raisonnement (déductif, inductif, abductif etc.) sous-jacent l'argumentation pour pouvoir le comparer avec celui de la demonstration.

Démonstration

Les caractéristiques fonctionnelles et structurelles de l'argumentation, décrites ci-dessus, nous amènent à regarder la démonstration sous un angle nouveau. En effet, on veut essayer de répondre à la question suivante: Quel est le rapport entre une démonstration et une argumentation en mathématiques?

La démonstration, comme l'argumentation, est un raisonnement (Duval, 1995). Les «raisons» de l'acceptation ou de la réfutation de certaines propositions sont à rechercher dans les théorèmes qui permettent l'explicitation d'une démonstration à partir d'un raisonnement. La démonstration est construite pour valider un énoncé; elle a donc, par nature, un caractère justificatif.

Comme on l'a fait pour l'argumentation on peut affirmer que la démonstration est une justification rationnelle.

Dans la suite, on va analyser la démonstration comme on l'a fait pour l'argumentation. D'abord une partie historique est présentée. Ensuite les réponses des linguistes à propos des rapports entre argumentation et démonstration seront utilisées pour déterminer les caractéristiques fonctionnelles et structurelles d'une démonstration.

Développement d'une théorie de la démonstration

Le développement d'une théorie de la démonstration répond à un double besoin: d'un côté la description d'un savoir et de l'autre l'acceptabilité de celui-ci.

Comme déjà souligné ci-dessus, c'est Aristote qui le premier a donné une théorie de la «forme» de la démonstration: la logique formelle, ainsi nommée car elle porte sur la «forme» du raisonnement, et non sur son «contenu».

Le mérite d'Aristote est sa mise en forme des règles de la déduction par le syllogisme scientifique, c'est-à-dire le syllogisme qui part des prémisses vraies et premières.

«C'est une démonstration quand le syllogisme part de prémisses vraies et premières ou encore de prémisses telles que la connaissance que nous en avons prend elle-même son origine dans des prémisses premières et vraies» (Topiques, 100a, 25). Les prémisses sont vraies et premières quand elles «tirent leur certitude non pas d'autres choses mais d'elles-mêmes» (Topiques, 100a, 30).

Le syllogisme assume un rôle décisif dans la constitution d'une pensée rigoureuse. On peut retrouver chez Aristote le caractère d'apodicticité de la démonstration, qui lui permet, comme Duval (1995) l'écrit, «de distinguer, parmi toutes les variétés de syllogisme possibles, celles qui sont des raisonnements valides et celles qui ne le sont pas» (p. 269).

L'idéal d'Aristote est celui d'une déduction absolue, le même que poursuivaient dans le même temps les mathématiciens dont les travaux aboutiront quelques décennies plus tard à la systématisation d'Euclide. Après ses Eléments, la géométrie deviendra la première science déductive.

Euclide élabore une théorie mathématique qui se distingue de tout ce qui a été fait auparavant par son caractère démonstratif et déductif. A partir de quelques définitions, axiomes et postulats, il déduit des propositions de plus en plus complexes et il construit ainsi une théorie formelle et consistante en respectant scrupuleusement des règles de raisonnement et de logique.

De plus, comme les axiomes et les postulats apparaissent comme des vérités mathématiques adaptées à la description du monde, les résultats qui en découlent sont eux-mêmes aussi en accord avec la réalité. Pour Euclide, la vérité en mathématiques est donc à la fois matérielle et théorique. Elle est matérielle parce que le contenu du discours est conforme à la réalité. Elle est théorique car elle respecte le critère de cohérence et de non-contradiction selon lequel le raisonnement suit les règles de la logique et de la pensée formulées depuis Aristote.

La description d'un savoir et la recherche d'une rigueur sont les caractéristiques essentielles et encore actuelles d'une théorie de la démonstration.

La démonstration selon les voix des linguistes

Les positions des linguistes par rapport à la démonstration sont différentes les unes des autres. Certains considèrent que la démonstration a des caractéristiques particulières et souvent bien différentes de celles de l'argumentation (Duval, 1995). On va s'éloigner de ce point de vue.

En effet, les caractéristiques de la démonstration ne sont pas différentes de celles de l'argumentation en mathématiques, mais au contraire elles en sont un cas particulier.

Vignaux (1999) soutient que «La déduction est au cœur de l'argumentation quotidienne, dans la mesure où partant de principes donnés, elle vise à des conclusions d'apparence rigoureuse» (p. 41). Il considère l'argumentation comme le moteur commun à toute activité rationnelle pour casser d'une certaine façon l'antagonisme existant entre d'une part la rhétorique et la dialectique et d'autre part l'analytique. La démonstration comme l'argumentation est «l'art d'organiser nos discours en vue de réguler nos pensées, d'ajuster l'expression à la pensée, de construire nos connaissances, et surtout de mieux la transmettre» (Vignaux, 1999, p. 78).

Toulmin, comme Vignaux, n'introduit pas de distance entre la démonstration et l'argumentation. L'argument mathématique est assez particulier par rapport aux autres arguments.

> Le problème mathématique n'est pas un dilemme; la validité de sa solution n'est pas limitée dans le temps, il n'implique aucun passage matériel. Il peut être d'une séduisante élégance en tant qu'argument modèle susceptible d'être analysé par les logiciens formels, mais on pourrait difficilement trouver un argument moins représentatif. (Toulmin, 1993, p. 156)

La démonstration est, alors, une argumentation mais une argumentation particulière. Elle ne peut pas représenter toutes les autres argumentations parce que ses caractéristiques sont trop spécifiques pour pouvoir les généraliser à toute argumentation.

Les caractéristiques de la démonstration peuvent alors être déduites de celles de l'argumentation, comme on montre dans la suite.

La démonstration a un objectif: valider

La démonstration a un objectif bien particulier: valider un énoncé. En mathématique, valider un énoncé signifie en attester la vérité à l'intérieur d'une théorie mathématique. D'une certaine façon, la démonstration, comme l'argumentation, a comme objectif la recherche des raisons du «vrai». Son but n'est pas seulement «de provoquer ou d'accroître l'adhésion des esprits aux thèses qu'on présente à leur assentiment» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1992, p. 5). Une démonstration, par nature, a le but de valider une certaine thèse. Selon Perelman et Olbrechts-Tyteca (1992), l'argumentation s'oppose à la nécessité et à l'évidence, son domaine est celui de la vraisemblance, du plausible, du probable.

Au contraire, la démonstration d'une proposition, est obtenue à partir d'un système axiomatique. Ce système axiomatique prive la démonstration de toute ambiguïté (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1992). Cependant, le raisonnement sous-jacent la démonstration, est de la même nature que le raisonnement argumentatif et comme ce dernier il est garant du caractère de justification de l'argumentation et de la démonstration. La seule différence est que la démonstration apporte une justification à l'intérieur d'un domaine théorique, alors que l'argumentation n'y est pas obligée.

La démonstration est convaincante et elle s'adresse à un auditoire universel

La démonstration veut valider, l'argumentation veut convaincre; mais valider est plus que convaincre. La démonstration veut justifier à l'intérieur d'un domaine théorique.

Le caractère de conviction est spécifique à la démonstration, c'est-à-dire qu'elle est construite avec l'objectif de rendre irréfutable ce qu'elle affirme. La démonstration s'adresse à un interlocuteur universel, qui est représenté par la communauté mathématique dans son ensemble. Et comme telle, cette communauté reconnaît la valeur de validation et donc de conviction en droit de la démonstration.

Le champ de la démonstration

La démonstration est relative à un champ, un champ théorique qui en détermine les critères d'acceptabilité. Toulmin accepte la démonstration en tant qu'argumentation.

D'après Toulmin, un pas de démonstration est un argument; les arguments mathématiques sont les arguments les plus analytiques qui soient.

> Etudiés pour eux-mêmes, en tant que mathématiques pures, les arguments qui s'inscrivent dans nos calculs systématiques sont analytiques: tout ce que leur demande le mathématicien, c'est qu'ils évitent les contradictions internes, et répondent aux normes de cohérence et de preuve dans toutes leurs relations internes. (Toulmin, 1993, p. 258)

En effet, Toulmin fait la distinction entre arguments analytiques et arguments matériels. Un argument est analytique si la conclusion est en quelque sorte déjà comprise implicitement ou explicitement dans les prémisses. Il donne comme exemple le syllogisme. Au contraire, un argument est matériel si les raisons ne comprennent pas l'information présentée dans la proposition. La distinction fondamentale entre les arguments analytiques et les arguments matériels se trouve dans la notion de *champ*. En fait, c'est dans une théorie qu'à partir des axiomes et principes déterminés à l'avance, que les autres conclusions peuvent être avancées. En ce sens les conclusions font partie des prémisses.

La structure du pas de démonstration

Depuis Toulmin, grâce à la structure ternaire, l'argumentation prend une place nouvelle. Elle nous permet de comparer argumentation et démonstration sur le plan structurel. En fait, la démonstration est une chaîne déductive de pas constitués par trois termes: les données, un énoncé conclusion, un théorème qui permet le passage des données à la conclusion. A partir des axiomes et des principes premiers, par le moyen d'une démonstration un nouvel énoncé peut être construit.

C'est pourquoi la démonstration, comme l'argumentation, est analysable avec le modèle de Toulmin. Le permis d'inférer dans la démonstration est un théorème, alors que le support est constitué par la théorie mathématique de référence.

Les caractéristiques structurelles et fonctionnelles de la démonstration sont des cas particuliers des caractéristiques que nous avons rappelées pour l'argumentation en nous appuyant sur les travaux qui lui sont spécifiquement dédiés. Finalement, la démonstration semble se révéler comme une argumentation particulière.

Conclusions

Au cours de cet article, on a essayé de caractériser et comparer une argumentation en mathématiques, et une démonstration, au moyen d'une analyse fonctionnelle et d'une analyse structurelle du raisonnement (Duval, 1995). Les caractéristiques fonctionnelles déterminent la finalité de l'argumentation, son utilité, son rôle à l'intérieur d'un discours. Les caractéristiques structurelles permettent d'identifier une argumentation et de définir sa structure.

La première théorie de l'argumentation se développe avec Aristote (384–322 avant J.-C.) comme théorie « fonctionnelle » car elle répond à un besoin: décrire l'*art de la persuasion* face à un auditoire. Elle se développe aussi comme théorie «structurelle» car elle répond à un deuxième besoin: caractériser la structure de trois domaines où s'exerce l'*art du discours*: rhétorique, dialectique et analytique. C'est dans le domaine de la dialectique qu'on peut reconnaitre les premières caractéristiques d'une argumentation en mathématiques, de la même façon que dans le domaine de l'analytique on peut reconnaitre des caractéristiques de la démonstration. En même temps, Aristote, avec le syllogisme, a fourni une analyse structurelle de la dialectique et de l'analytique sans les distinguer, mais au contraire en les rapprochant.

En suivant cette façon d'analyser, on a déterminé les caractéristiques fonctionnelles et structurelles d'une argumentation en mathématiques et de la démonstration à partir des théories linguistiques et philosophiques contemporaines.

Cela a permis de comparer et analyser argumentation en mathématiques et démonstration. La démonstration peut être considérée comme une argumentation mais l'argumentation n'est pas toujours une démonstration. L'argumentation en mathématiques peut anticiper la phase de démonstration, par exemple dans la construction d'une conjecture, mais quand cette conjecture est validée à l'intérieur d'un cadre théorique, l'argumentation devient démonstration.

D'ailleurs, la stricte relation entre argumentation et démonstration a été utilisée dans la recherche pour analyser les relations cognitives, qui sont en jeu dans les deux processus (Boero, Garuti, & Mariotti, 1996; Duval 1995; Pedemonte, 2005, 2007, 2008). Ces recherches sont nombreuses et différentes les unes avec les autres. Certaines soutiennent qu'il y a une distance entre argumentation et démonstration (Duval, 1995).

Dans d'autres recherches on peut observer que la continuité cognitive entre argumentation et démonstration peut favoriser la construction d'une démonstration (Boero, Garuti, & Mariotti, 1996; Pedemonte, 2005), même si certaines fois elle peut représenter un obstacle (Pedemonte, 2007).

Dans la recherche en didactique, il est donc très important d'avoir une définition commune d'argumentation en mathématiques parce que les élèves s'expriment souvent â travers des argumentations et les démonstrations sont souvent le produit final d'une argumentation, nous pourrions dire, une argumentation particulière.

Notes

1 « Apodictique: d'une évidence irréfutable, absolue » (dictionnaire encyclopédique Le Petit Larousse)

2 On appelle *majeure* la prémisse qui contient le *grand extrême*, c'est-à-dire le terme qui devient prédicat dans la conclusion. On appelle *mineure* la prémisse qui contient le *petit extrême*, c'est-à-dire le terme qui devient sujet dans la conclusion. La majeure s'écrit avant la mineure. Le *moyen terme* apparaît dans chacune des prémisses, mais pas dans la conclusion.

3 Toulmin ne donne pas une définition de type logique, il écrit: «La formulation de nos assertions, et l'énonciation des faits destinés à les étayer, correspondent, en termes philosophiques, à des ‹types logiques› très variés — relations d'événements passés et présents, prédictions, verdicts de culpabilité, éloges esthétiques, axiomes géométriques, etc» (Toulmin, 1993, p. 16).

References

Anscombre J. C. & Ducrot O. (1983). *L'argumentation dans la langue*. Bruxelles: Mardaga.

Aristote. Rhetorique. Traduction française par Dufour M. et Wartelle A. Les belles lettres, 1991 pour le livre I et le livre II. Les belles lettres, 1980 pour le livre III.

Aristote. *Organon*. Traduction française par Tricot J. 1962. Paris: Libraire philosophique J. Vrin.

Aristote. *Les topiques: livres I-VIII*. Traduction française par Tricot J. 1974. Paris: Libraire philosophique J. Vrin.

Arzarello, F. (2007). The proof in the 20th century: From Hilbert to automatic theorem proving. In P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology, and cognition to classroom practice* (pp. 43–64). Rotterdam: Sense Publishers.

Balacheff, N. (1999). L'argumentation est-elle un obstacle? Invitation à un débat … Lettre de la prevue (online) Repéré à: `http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeFR.html`

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX*, vol. 2, (pp. 121–128), Valencia.

Breton, P. & Gauthier, G. (2000). *Histoire des theories de l'argumentation*, Paris: Ed. La Découverte.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 359–387.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics (adapted version of the paper P*roof in the mathematics curriculum* presented at the National Subject Didactics Symposyum, University of Stellenbosh).

Ducrot, O. & Ascombre. J. C. (1979). *Les mots du discours*. Paris: Ed. de Minuit.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Suisse: Edition Peter Lang.

Grize, J.-B. (1996). *Logique naturelle et communications*, Paris: Presses Universitaires de France.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In Vergnaud G., Rogalski J., Artigue M. (ed.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, (pp. 45–51), Paris.

Hanna, G. (1991). Mathematical Proof. In: D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 54–61). Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Healy L. & Hoyles C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, *31* (4) 396–428.

Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: the failure of the new mathematic*. New York: St Martin's Press.

Lakatos, I. (1979). *Dimostrazioni e confutazioni La logica della scoperta matematica* Feltrinelli, Milano (Tradution italienne de Lakatos, I. *Proofs and refutations. The logic of Mathematical Discovery*, Cambridge: Cambridge University Press 1976).

Mariotti M. A., Bartolini Bussi M. G., Boero P., Ferri F. & Garuti M. R. (1997) Approaching Geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceeding of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME 21*, vol. 1 (pp. 180–195), Lahti, Finland.

Otte, M. (1994). Mathematical Knowledge and the problem of proof, *Educational Studies in Mathematics*, *24* (4), 299–321.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherche en didactique des mathématiques*, *25* (3) 313–348.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 23–41.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. ZDM — *The International Journal on Mathematics Education*, *40* (3), 385–400.

Perelman C. & Olbrechts-Tyteca L. (1992) *Traité de l'argumentation — La nouvelle rhétorique* Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles (5éme édition du 1958).

Plantin, C. (1990). *Essais sur l'argumentation*. Paris: Kimé.

Polya G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement "plausible"*, Paris: Gauthier — Villars (ed.) (Traduction française de Polya, G. *Mathematics and plausible reasoning* London: Princeton University Press, 1954).

Toulmin S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: University Press.

Toulmin, S. E. (1993). *Les usages de l'argumentation*, Paris: Presse Universitaire de France.

Vignaux,, G. (1999). *L'argumentation. Du discours à la pensée*. Paris: Hatier.

Yackel, E (2001). Explanation, Justification and argumentation in mathematics classrooms, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25*, Van den Heuvel-Panhuizen M. (ed.), vol. 4, 33–40, Utrecht (Olanda).

Resumo. Em educação matemática não existe uma definição partilhada de argumentação, apesar de esta ser uma das atividades mais recorrentes na sala de aula. Mas, o que pode ser considerado como argumentação? O que é a argumentação em Matemática? E qual é a sua relação com a demonstração matemática? O objetivo deste artigo é proporcionar uma resposta a estas questões. Uma vez que a atual investigação em educação matemática não permite esclarecer estes aspetos, foram consideradas teorias linguísticas e filosóficas, históricas e contemporâneas, para sugerir uma possível caracterização da argumentação em Matemática. Mais especificamente, apresentam-se características funcionais e estruturais da argumentação em Matemática. As características funcionais estabelecem a finalidade da argumentação, a sua utilidade, o seu papel no discurso. As características estruturais proporcionam um modelo estrutural, o modelo de Toulmin, para a argumentação. Esta caracterização mostra que a demonstração pode ser considerada como um caso especial da argumentação em Matemática.

Palavras chave: Argumentação em matemática; prova; modelo de Toulmin; retórica dialética e analítica.

Abstract. In mathematics education there is no shared definition for argumentation, even if this is one of the most recurrent activities in the class. But, what can be considered as argumentation? What is argumentation in mathematics? And what is its relation with mathematical proof? The aim of this paper is to provide an answer to these questions. Because current research in mathematics education does not offer much insight on these matters, historical and contemporary linguistic and philosophical theories have been considered to suggest a possible characterisation of argumentation in mathematics. More specifically, functional and structural characteristics of argumentation in mathematics are provided. Functional characteristics establish the finality of argumentation, its utility, its role within a discourse. Structural characteristics provide a structural model, the Toulmin's model, for argumentation. This characterisation shows that proof can be considered as a special case of argumentation in mathematics.

Keywords: Argumentation in mathematics; proof; Toulmin's model; "rhetoric, dialectic and analytic".

■ ■ ■

BETTINA PEDEMONTE

DiDiMa srl. — ITD (CNR)
bettina.pedemonte@gmail.com

(Recebido em maio de 2012; aceite para publicação em outubro de 2012)