A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação

Fátima Mendes
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Joana Brocardo
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Introdução

A partir dos anos 90 do século XX tem sido ampla a investigação sobre a aprendizagem das operações aritméticas em que os investigadores centram a sua atenção na turma ou em pequenos grupos de alunos em interação, integrados numa mesma sala de aula (Verschaffel, Greer & de Corte, 2007). Olhando globalmente para estes estudos verifica-se que os que se focam na multiplicação e divisão são em menor número (Fuson, 2003). Também, analisando as várias vertentes em que estas operações foram estudadas identifica-se a necessidade de melhor compreender a multiplicação (e a divisão), pensadas numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número (Mendes, 2012). Esta perspetiva constitui uma orientação curricular forte tanto a nível internacional como a nível nacional: "O seu estudo [dos números e das operações] tem por base três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência de cálculo" (ME, 2007, p. 7).

Este artigo foca uma parte de uma investigação mais ampla, que partilha esta orientação curricular. A investigação foi conduzida pela primeira autora deste artigo (investigadora), e seguiu uma modalidade de experiência de ensino orientada por uma conjetura (Confrey & Lachance, 2000). Neste âmbito, foi concebida e concretizada, numa sala de aula do 3.º ano de escolaridade, uma trajetória de aprendizagem da multiplicação (e divisão) que decorreu do trabalho conjunto entre a investigadora e Isabel, professora titular da turma, com 23 alunos, onde foi desenvolvida a experiência de ensino.

O artigo, tendo subjacente uma investigação sobre o modo como evoluem os alunos do 3.º ano na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem, procura responder à seguinte questão — Como evoluem os procedimentos usados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?

Aprendizagem da multiplicação e desenvolvimento do sentido de número

Os traços gerais do desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação são claramente indicados por vários autores e orientações curriculares. Por exemplo, o documento do NCTM (2007) explicita as características gerais do trabalho a realizar na aula. Numa primeira fase, para os três primeiros anos (K-2), salienta a importância de explorar diversas situações associadas à multiplicação, realçando as que correspondem à repetição de grupos iguais (sentido aditivo da multiplicação). Entre o 3.º e o 5.º ano, o trabalho a realizar com os alunos deve promover a compreensão aprofundada desta operação utilizando números cada vez maiores e alargando progressivamente o universo numérico que passará a incluir os números racionais não negativos na sua representação decimal.

Fosnot e Dolk (2001) perspetivam o tipo de contextos a usar indicando que, para além de apostar na sua diversidade — ideia igualmente salientada pelo NCTM (2007) — importa propor contextos que estruturem progressivamente a multiplicação, começando com grupos de objetos com o mesmo cardinal e avançando para situações relativas a grupos de objetos aos quais se associe uma disposição retangular.

O desenvolvimento das ideias e procedimentos associados deve permitir que os alunos compreendam os vários significados da operação (sentidos da multiplicação), sejam capazes de resolver problemas que envolvam diferentes formas de calcular (cálculo exato ou aproximado, de acordo com cada situação) e de fazer estimativas plausíveis.

O modelo de McIntosh, Reys e Reys (1992), considerado um modelo de referência relativamente à caracterização de sentido de número (Mendes, 2012), é igualmente muito relevante para perspetivar quais os aspetos fundamentais a considerar na aprendizagem da multiplicação. Este modelo organiza as componentes do sentido de número em três grandes áreas: (a) conhecimento e destreza com os números; (b) conhecimento e destreza com as operações; e (c) aplicação do conhecimento e destreza com os números e operações em situações de cálculo.

Conhecimento e destreza com os números. Esta área, de acordo com os referidos autores, engloba várias componentes: (i) sentido da ordenação dos números; (ii) múltiplas representações dos números; (iii) sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e (iv) sistemas de valores de referência. Tanto o sentido da ordenação dos números como o sentido da grandeza relativa e absoluta dos números, embora sempre presentes, não estão intimamente ligados às operações aritméticas e assumem maior predominância nas fases de aprendizagem em que os alunos alargam o seu universo numérico.

Relativamente às múltiplas representações dos números, McIntosh *et al.* (1992) sublinham o saber usar diferentes representações dos números de acordo com o contexto e/ou os problemas que é necessário resolver, fazer composições e decomposições adequadas e comparar números com outros de referência ou usar valores aproximados que facilitem o cálculo e permitam decidir da razoabilidade de um valor obtido. Quanto a esta a esta componente, realçamos, ainda, a perspetiva de Kraemer (2008), que salienta que factos e relações exploradas a um nível elementar, devem ser continuamente ampliados e consolidados. Assim, na aprendizagem da multiplicação importa desenvolver a passagem de um raciocínio aditivo para um multiplicativo que permita perceber, por exemplo, que $5+5+5+5=4\times 5$ e, também, relacionar 4×5 com 5×4, 4×50 ou $20\div 5$ (figura 1).

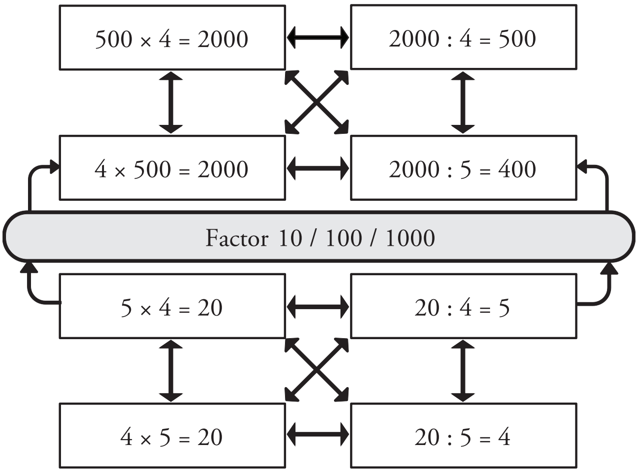


Figura 1 — Relações numéricas que podem ser estabelecidas a partir de 4×5 (Brocardo, 2011)

Esta perspetiva de progressão articula-se também com a componente (iv) de McIntosh *et al.* (1992), referente ao uso de valores de referência que, no caso da multiplicação, estão relacionados com os múltiplos de dois, cinco e dez, conceitos de metade e de dobro e as suas várias representações (0,5; 1/2; 50%,).

Conhecimento e a destreza com as operações. Segundo McIntosh *et al.* (1992), esta área inclui a compreensão (i) do efeito das operações: (ii) das propriedades matemáticas; e (iii) das relações entre as operações. Na aprendizagem da multiplicação assumem especial relevo a compreensão e uso das propriedades comutativa, associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição, que se constituem como importantes suportes para desenvolver a proficiência multiplicativa dos alunos (Heirdsfield, 2001).

As relações entre as operações estabelecem-se sobretudo, entre a adição, a multiplicação e a divisão. De facto, na introdução da multiplicação está presente, inicialmente, a adição sucessiva. Contudo, importa, igualmente, privilegiar a relação entre a multiplicação e a divisão (Fosnot & Dolk, 2001; ME, 2007; van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo. Esta área inclui, de acordo com McIntosh *et al.* (1992) quatro vertentes: (i) a compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários; (ii) a consciencialização da existência de múltiplas estratégias; (iii) a inclinação para usar uma representação e/ou um método eficaz; e (iv) a inclinação para rever os dados e a razoabilidade dos resultados. Estas vertentes estão presentes em vários documentos curriculares (ACARA, 2010; ME, 2007; NCTM, 2007; van den Heuvel-Panhuizen, 2008) que perspetivam a importância de desenvolver a compreensão da multiplicação a partir da resolução de problemas em que esta operação surja em contextos diversificados.

Procedimentos de cálculo associados à multiplicação

Há diferentes modos de caracterizar os procedimentos de cálculo. A tabela 1 mostra as categorizações adotadas por Baek (1998, 2006), Ambrose, Baek e Carpenter (2003), Hartnett (2007), Heirdsfield *et al.* (1999) e Foxman e Beishuizen (2002).

A análise da tabela permite identificar dois grandes grupos de procedimentos. No primeiro grupo incluem-se os procedimentos em que se efetuam cálculos considerando os números como um todo, tirando partido das suas características e das relações numéricas que podem ser estabelecidas. No segundo grupo incluem-se aqueles em se realizam decomposições, decimais ou não, de um ou dos dois fatores envolvidos.

Para Baek (1998, 2006) e Hartnett (2007) os procedimentos de compensação constituem um terceiro grupo, a acrescentar aos anteriores, e para Heirdsfield *et al.* (1999) incluem-se nos procedimentos holísticos. Para Foxman e Beishuizen (2002) os procedimentos de compensação constituem uma categoria geral que pode ser usada articuladamente com cada uma das categorias principais referidas inicialmente. Efetivamente, ao usar este procedimento, um dos números iniciais (ou vários) é substituído por outros, considerando as suas características, de modo a facilitar os cálculos, compensando-se depois.

Verschaffel *et al.* (2007), numa síntese recente da investigação sobre a temática, organizam os procedimentos associados à multiplicação nas seguintes categorias: modelação direta, número completo, partição de números e compensação. Estas são consistentes com as apresentadas na tabela 1.

As categorizações de procedimentos de divisão, propostas por diversos autores, constam da tabela 2. Tal como para a multiplicação, sobressaem duas grandes categorias de estratégias: de número completo e baseadas na decomposição. A primeira inclui estratégias alicerçadas nas características dos números envolvidos nos cálculos, e que são trabalhados como um todo. A segunda abarca os procedimentos baseados em decomposições do dividendo.

Tal como para a multiplicação, o procedimento de ajustar e compensar é incluído em categorias diferentes: Hartnett (2007) considera-o como mais um a acrescentar; Heirdsfield *et al.* (1999) incluem-no nos holísticos e Foxman e Beishuizen (2002) consideram-no como uma categoria transversal. Como acontece para a multiplicação, estas categorias gerais de procedimentos de divisão, são consistentes com as identificadas por Verschaffel *et al.* (2007) na síntese de investigação que efetuam sobre a temática.

Tabela 1 — Análise comparativa das categorizações dos procedimentos na resolução de problemas de multiplicação

<table>
<tr><th rowspan="2">Autores</th><th colspan="2">Baek</th><th colspan="2" rowspan="2">Ambrose, Baek e Carpenter (2003)</th><th rowspan="2">Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (1999)</th><th rowspan="2">Hartnett (2007)</th><th colspan="2" rowspan="2">Foxman e Beishuizen (2002)</th></tr>
<tr><th>(1998)</th><th>(2006)</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Categorias</td><td colspan="2">Modelação direta</td><td colspan="2">Modelação direta</td><td>Estratégias de contagem</td><td>Contar para a frente e para trás</td><td rowspan="3">Número complexo</td><td rowspan="6">Arredondar, multiplicar e compensar</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td>Uso de factos básicos</td><td></td></tr>
<tr><td>Número completo</td><td>Adição repetida

Uso de dobros</td><td>Uso de adições e de dobros</td><td>Adição de dobros

Uso complexo de dobros

Construção a partir de outros factores</td><td rowspan="2">Estratégias holísticas</td><td>Usar dobros e/ou metades</td></tr>
<tr><td colspan="2">Compensação</td><td></td><td></td><td>Ajustar e compensar</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Partição de números</td><td rowspan="2">Algoritmos inventados usando o dez</td><td>Partição do multiplicador em dezenas e unidades</td><td>Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da direita para esquerda</td><td>Usar partições de números</td><td rowspan="2">Decomposição</td></tr>
<tr><td>Partição do multiplicador e do multiplicando</td><td>Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da esquerda para a direita</td><td>Usar o valor de posição</td></tr>
</table>

Tabela 2 — Análise comparativa das categorizações dos procedimentos na resolução de problemas de divisão

<table>
<tr><th>Autores</th><th>Ambrose, Baek e Carpenter (2003)</th><th>Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (1999)</th><th>Hartnett (2007)</th><th colspan="2">Foxman e Beishuizen (2002)</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Categorias</td><td>Trabalhar com um grupo de cada vez</td><td>Estatégias de contagem</td><td>Contar para a frente e para trás</td><td rowspan="4">Número complexo</td><td rowspan="7">Arredondar, multiplicar e compensar</td></tr>
<tr><td></td><td>Uso de factos básicos</td><td></td></tr>
<tr><td>Não decompor o dividendo</td><td rowspan="3">Estratégias holísticas</td><td>Usar dobros e/ou metades</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estratégias de construção</td><td>Usar o valor de posição</td></tr>
<tr><td>Ajusta e compensar</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Decompor o dividendo</td><td>Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da direita para esquerda</td><td rowspan="2">Usar partições de números</td><td rowspan="2">Decomposição</td></tr>
<tr><td>Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da esquerda para a direita</td></tr>
</table>

Metodologia

No estudo que enquadra este artigo, verifica-se uma interdependência entre o desenho de ensino e a investigação, característica que Cobb, Zhao e Dean (2009) realçam para caracterizar uma família de abordagens metodológicas habitualmente designada por *design research*. Também, tinha como propósito desenvolver uma teoria local, alicerçada na compreensão do modo como os alunos evoluem na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número e de natureza essencialmente intervencionista, aspetos que Cobb *et al.* (2009) salientam para caracterizar a *design research*.

Um dos tipos de estudo incluído na *design research* são as experiências na sala de aula (Kelly & Lesh, 2000; Steffe & Thompson, 2000). Nelas, uma equipa de investigadores (ou apenas um investigador) colabora com um ou mais professores que têm a responsabilidade do ensino na aula (Confrey & Lachance, 2000). É precisamente nesta modalidade de *design research* que se insere a investigação desenvolvida.

A experiência de ensino foi desenvolvida ao longo de um ano letivo. Semanalmente, a investigadora reunia com Isabel, para conceber/selecionar tarefas adequadas ao trabalho a desenvolver e para refletir sobre a atividade matemática dos alunos suscitada pelas tarefas propostas. No total foram construídas cerca de 30 tarefas, de natureza diversificada, organizadas em onze sequências, como se procurará detalhar e fundamentar na seção intitulada *A experiência de ensino*. A investigadora esteve presente em todas as aulas associadas à exploração destas tarefas.

As fontes principais de dados do estudo foram as aulas observadas, num total de 30, as reuniões de trabalho com Isabel, a própria professora e os alunos. Foram objeto de análise as notas de campo resultantes da observação em sala de aula e das conversas informais da investigadora com Isabel, os relatórios elaborados logo após as aulas, os registos videogravados das aulas, as transcrições de excertos das aulas videogravadas, as produções dos alunos resultantes da resolução das tarefas propostas e documentos de natureza variada, tais como outros materiais de apoio às aulas, os memorandos produzidos pela investigadora na preparação das reuniões semanais com a professora e os relatórios de observação.

O primeiro nível de análise de dados decorreu durante o desenvolvimento da experiência de ensino na sala de aula e teve como principal objetivo ajustar e aprofundar questões relacionadas com esta experiência. O segundo nível de análise, análise retrospetiva, iniciou-se com uma observação atenta das produções dos alunos, com o visionamento dos vídeos das aulas, a leitura dos relatórios de observação das aulas e das reuniões com Isabel e das notas de campo resultantes de conversas informais.

Procurando evitar repetições que, inevitavelmente, surgiriam na análise de tarefa a tarefa e de sequência a sequência, organizaram-se quatro grupos de sequências de tarefas: tarefas de multiplicação com números naturais, tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal, tarefas de divisão com números naturais e tarefas de multiplicação (sentido proporcional) com números racionais não negativos na representação decimal (tabela 3). Estes grupos, embora mantendo a sua sucessão cronológica, juntam tarefas com particularidades comuns que se evidenciaram neste segundo nível de análise.

Tabela 3 — Organização das tarefas para análise dos procedimentos usados pelos alunos

Grupos de tarefas	**Tarefas**	**Subtarefas**
Tarefas de multiplicação com números naturais	Tarefa 1 — Mercearia da Piedade 1	Subtarefas 1 e 2
	Tarefa 2 — Mercearia da Piedade 2	Subtarefas 1
	Tarefa 4 — Carteira de cromos	Subtarefas 1, 2 e 3
	Tarefa 7 — Cortinas	Subtarefas 1, 2, 3 e 4
	Tarefa 8A — Pátio do João	Subtarefas 1, 2, 3 e 4
	Tarefa 8B — Pátio do Cristóvão	Subtarefas 1, 2, 3 e 4
	Tarefa 10 — Pilhas de caixas	Subtarefas 1, 2 e 3
Tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal	Tarefa 13 — Garrafas e mais garrafas	Subtarefas 1, 2, 3 e 4
	Tarefa 16 — Contar moedas 1	Subtarefas 1
	Tarefa 17 — Contar moedas 2	Subtarefas 4, 5 e 6
Tarefas de divisão com números naturais	Tarefa 19 — Colecionar cartas	Subtarefas 1 e 2
	Tarefa 20 — Máquinas de bebidas	Subtarefas 1 e 2
	Tarefa 25 — Outra máquina de bebidas	Subtarefas 1
	Tarefa 26 — Miniaturas de animais	Subtarefas 1
Tarefas de multiplicação (sentido proporcional) com números racionais não negativos na representação decimal	Tarefa 29 — Ida ao teatro	Subtarefas 1, 2 e 3
	Tarefa 30 — Ida à mercearia da Piedade	Subtarefas 1, 2 e 3

O terceiro nível de análise dos dados centrou-se nos procedimentos dos alunos de acordo com as suas características. Voltaram a ser lidos todos os relatórios de observação de aulas e visionados os vídeos, mas organizadamente, de acordo com os grupos de tarefas considerados. Foram observadas repetidamente as produções associadas a cada grupo de tarefas com o objetivo de identificar um esquema organizativo que permitisse relatar todo o processo e, por outro, analisar os aspetos associados às características dos procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e divisão.

De modo a ter uma perceção global dos procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas e da sua evolução ao longo da experiência de ensino, a sua frequência foi quantificada em tabelas, considerando cada uma das tarefas/subtarefas. A análise global e transversal das tabelas relativas às frequências de cada procedimento e a distribuição dessas frequências em termos cronológicos, permitiu identificar alguns aspetos relevantes relacionados não só com os procedimentos usados mas, também, com a sua evolução. Para efeitos de investigação, o termo procedimento é entendido como a escolha, por parte dos alunos, das opções associadas à estrutura da tarefa e o modo como organizam e realizam os cálculos que efetuam, de acordo com os números envolvidos (Mendes, 2012). A palavra evolução, em evolução dos procedimentos dos alunos, tem o significado que lhe confere o Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea da Academia das Ciências de Lisboa: "processo de transformação gradual que se opera ao longo de determinado período de tempo" (Volume I, 2001, p. 1622). Significa que a análise da evolução dos procedimentos considera não só as transformações no sentido da progressão mas, também, as que correspondem a regressões ou a estabilizações.

Finalmente, a análise da evolução dos procedimentos usados pelos alunos para além da análise das suas produções escritas, tem subjacente as práticas matemáticas de sala de aula, ou seja, inclui as discussões associadas às tarefas propostas e foca-se na explicitação de raciocínios dos alunos e partilhados com os colegas, nos argumentos utilizados que, por vezes, incluem linguagem simbólica. Mais concretamente, a evolução dos procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas associadas à multiplicação tem subjacente a construção das grandes ideias (*big ideas*) associadas ao raciocínio multiplicativo, identificadas por Fosnot e Dolk (2001).

A experiência de ensino

A experiência de ensino foi orientada por uma conjetura que inclui duas dimensões inter-relacionadas: de conteúdo matemático e pedagógica. A dimensão de conteúdo matemático assume o desenvolvimento do sentido de número como eixo orientador da aprendizagem da multiplicação e tem em consideração as grandes ideias associadas a esta operação, os modelos que suportam o raciocínio multiplicativo e os procedimentos informais dos alunos que se vão transformando em procedimentos baseados nas propriedades da operação (Fosnot & Dolk, 2001). A dimensão pedagógica inclui aspetos relativos ao ambiente da sala de aula e às tarefas a propor aos alunos, tendo como base uma perspetiva de aprendizagem da Matemática com compreensão. Fundamentam-se, em seguida, as principais opções relacionadas com estas duas dimensões.

Aprendizagem da multiplicação

A experiência de ensino centra-se na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, assumindo-se este como um eixo orientador. A aprendizagem foi organizada dando especial relevância às grandes ideias associadas à multiplicação, aos modelos que suportam o raciocínio multiplicativo e aos procedimentos informais dos alunos que, gradualmente, se vão transformando em procedimentos mais potentes, baseados em propriedades da operação (Fosnot & Dolk, 2001). Tomando como base as conceções teóricas de Fosnot e Dolk (2001) foram identificadas as grandes ideias, as estratégias e os modelos relacionados com a multiplicação nos quais se fundamenta a experiência de ensino.

Grandes ideias associadas à multiplicação. A construção das "grandes ideias" está na base da progressão que os alunos vão fazendo em termos do raciocínio multiplicativo. Uma vez que as "grandes ideias" estão relacionadas com as estruturas da própria Matemática, compreender as relacionadas com a multiplicação significa compreender a estrutura multiplicativa em si e as relações entre as partes e o todo da própria estrutura. Associadas à multiplicação são identificadas como "grandes ideias": o entendimento de um grupo como unidade (*unitizing*); a propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição e à subtração; a propriedade comutativa da multiplicação; os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez e a propriedade associativa da multiplicação.

Procedimentos[1] *associados à multiplicação*. Os procedimentos usados pelos alunos quando resolvem problemas de multiplicação estão intimamente relacionados com as ideias que estes têm sobre esta operação. Deste modo, a sua progressão nos procedimentos que utilizam está subjacente à construção gradual das ideias que as suportam. De acordo com Treffers e Buys (2008), a evolução dos procedimentos de cálculo usados pelos alunos corresponde a uma progressiva esquematização através de diferentes níveis de desenvolvimento da operação multiplicação.

Modelos associados à multiplicação. No início da aprendizagem da multiplicação os modelos construídos pelos alunos estão bastante associados à sua interpretação da situação proposta e emergem da sua representação da ação, sendo modelos de situação (Fosnot & Dolk, 2001; Gravemeijer, 2005). Ainda assim, não é porque se planeia uma determinada tarefa pensando num modelo que daí emerge, que todos os alunos a vão interpretar e resolver recorrendo a ele. Contudo, à medida que o professor utiliza modelos como uma ferramenta didática para explicitar as estratégias usadas pelos alunos, estes também vão sendo capazes de recorrer a eles para representar o seu próprio modo de pensar. Assim, os modelos que inicialmente eram modelos de situação passam por ser modelos de procedimentos e transformam-se em modelos para pensar. Deste modo vão evoluindo para modelos enquanto ferramentas para pensar, ou seja, modelos matemáticos de relações numéricas (Fosnot & Dolk, 2001; Gravemeijer, 2005).

Inicialmente, os modelos construídos pelas crianças para representar situações multiplicativas estão associados à ideia de multiplicação como adição sucessiva de parcelas iguais, o que significa que o uso da linha vazia facilita as suas representações deste tipo de situações. No entanto, à medida que as ideias sobre a multiplicação vão evoluindo, também os modelos devem acompanhar o desenvolvimento progressivo das ideias e das estratégias relacionadas com a multiplicação. Assim, são usadas, entre outras, disposições retangulares que suportam o raciocínio multiplicativo e tabelas de razão que suportam o raciocínio proporcional. Estes modelos são incluídos, explicitamente, como representações de situações associadas a algumas das tarefas propostas nesta experiência de ensino.

A opção pela disposição retangular é justificada por autores que a consideram uma das representações mais potentes que suporta a evolução do raciocínio multiplicativo (Barmby, Bilsborough, Harries & Higgins, 2009; Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Borrow, 1998). Em particular, permite visualizar a propriedade comutativa da multiplicação e as várias partições dos números que podem ser feitas, tendo subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, o que auxilia os alunos quando passam para o cálculo em coluna (Barmby *et al.*, 2009).

Relação entre a multiplicação e a divisão

Uma das opções assumida na experiência de ensino foi de propor tarefas aos alunos que favorecessem o estabelecimento da relação entre a multiplicação e a divisão. Assim, foram incluídas tarefas cujo contexto é de divisão mas que os alunos podem resolver usando o conhecimento que já possuem sobre as outras operações e, em particular, a multiplicação. Esta opção está de acordo com o apontado por alguns autores (Anghileri, 2003; Fosnot & Dolk, 2001; van den Heuvel-Panhuizen, 2008). Além disso, ter consciência da relação entre as operações, especificamente, entre a multiplicação e a divisão é um dos aspetos contemplados no conhecimento e a destreza com as operações, uma das componentes do quadro de referência sobre o sentido de número de McIntosh *et al.* (1992).

Contextos das tarefas

A importância da exploração de contextos adequados está subjacente a uma perspetiva de desenvolvimento do sentido de número (Fraivillig, 2001). Os contextos das tarefas têm um papel preponderante na aprendizagem da multiplicação uma vez que: (i) revelam aspetos basilares das estruturas multiplicativas associadas e (ii) permitem fazer uma primeira abordagem às propriedades da multiplicação, facilitando o cálculo associado a esta operação (Fosnot & Dolk, 2001; Mendes & Delgado, 2008; Treffers & Buys, 2008).

De acordo com Fosnot e Dolk (2001) os contextos das tarefas devem integrar três componentes: (i) permitir o uso de modelos, (ii) fazer "sentido" para os alunos e (iii) criar surpresa e suscitar questões.

Os contextos das tarefas que fazem parte da experiência de ensino foram construídos e/ou adaptados considerando as características realçadas anteriormente. Assim, foram utilizados como contextos, imagens de produtos do quotidiano embalados de diversas formas, tais como de caixas de fruta em que esta está organizada segundo uma disposição retangular ou de garrafas de água embaladas em grupos de seis. Também foram usados contextos que envolvem dinheiro e onde se recorre a tabelas de preços. Foram, ainda, propostas aos alunos tarefas com um contexto puramente matemático – cadeias numéricas, na aceção de Fosnot e Dolk (2001).

Nos contextos das tarefas incluem-se os números que são propostos e com os quais é necessário calcular. Considerando que a experiência de ensino assume como eixo orientador da aprendizagem da multiplicação o desenvolvimento do sentido de número e que este está associado a uma compreensão global e intuitiva sobre os números e as operações e a uma flexibilidade e compreensão sobre o cálculo com números (McIntosh *et al.*, 1992), foi feita a opção de incluir nas tarefas propostas, para além dos números naturais, outros números racionais não negativos, em particular, na sua representação decimal.

Além disso, os números incluídos nas tarefas foram selecionados considerando dois aspetos: (i) a sua progressão em termos da sua ordem de grandeza e (ii) as relações numéricas que poderiam ser estabelecidas entre eles. Por isso, foram usados números cada vez maiores, em termos da sua ordem de grandeza, e números de referência (McIntosh *et al.*, 1992) tais como múltiplos de dois, de cinco e de dez, bem como números que sugerissem certos procedimentos. Esta última opção relaciona-se com "o capitalizar oportunidades para usar estratégias sensíveis aos números em situações de resolução de problemas", de acordo com Nickerson e Whitacre (2010, p. 233). Uma estratégia sensível aos números define-se como uma abordagem que cada aluno seleciona de entre as possíveis de usar e que tem significado para si próprio (Nickerson & Whitacre, 2010). Ora, potenciar o recurso a procedimentos sensíveis aos números é uma das condições que promove o desenvolvimento do sentido de número dos alunos.

Tipos de tarefas e sua alternância

Na experiência de ensino foram propostas aos alunos dois tipos diferentes de tarefas: problemas e cadeias numéricas.

Os problemas têm como objetivo que os alunos usem determinados procedimentos de cálculo, de modo a irem construindo, gradualmente, as grandes ideias relacionadas com a multiplicação. Após a sua resolução, individualmente ou em pares, é organizada uma discussão pela professora, na qual toda a turma é incentivada a intervir. A sua finalidade, para além da apresentação e comparação das várias resoluções dos alunos, é evidenciar um determinado procedimento de cálculo ou uma relação numérica que facilita a realização do problema.

As cadeias numéricas, o outro tipo de tarefas proposto no âmbito da experiência de ensino, têm como intuito desenvolver nos alunos um cálculo mental eficiente, evidenciando determinadas ideias e procedimentos de cálculo associados a propriedades dos números e da multiplicação. O modo como a cadeia está estruturada, incluindo cálculos sequenciais e encadeados, influencia os procedimentos dos alunos, uma vez que um determinado cálculo pode ser baseado num dos cálculos realizado na(s) linha(s) anterior(es) (Fosnot & Dolk, 2001; Treffers & Buys, 2008).

Ao longo do ano letivo os problemas foram sendo intercalados com cadeias numéricas, de forma que os alunos identificassem e relacionassem os procedimentos utilizados num caso e noutro. Num processo cíclico, apresentado na Figura 2, os alunos poderiam identificar, nas cadeias, procedimentos que poderiam ter construído informalmente aquando da resolução dos problemas. Por sua vez, as relações identificadas nas cadeias numéricas anteriores, poderiam ser potenciadas nos problemas seguintes, progredindo, assim, no uso de procedimentos flexíveis, baseados em relações numéricas e propriedades da multiplicação.

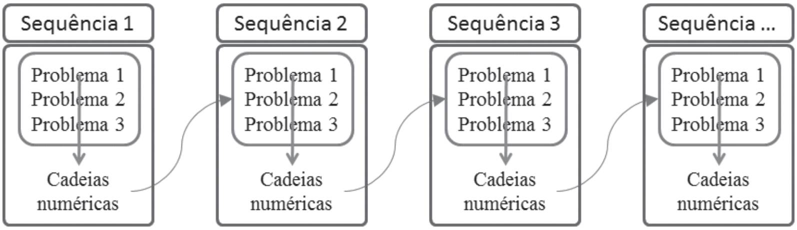


Figura 2 — Processo de alternância entre problemas e cadeias numéricas (Mendes, 2012)

Ao longo deste processo esperava-se que os alunos construíssem uma teia de relações numéricas, com significado para eles e à qual recorreriam, de modo flexível, nos seus procedimentos de cálculo mental, uma das manifestações associada a ter sentido de número (Greeno, 1991).

Cultura de sala de aula

É consensual, hoje em dia, que os alunos devem aprender Matemática com compreensão (NCTM, 2007), participando ativamente, através da experiência, na construção do seu próprio conhecimento, o que envolve momentos de aprendizagem individual e em interação social. Durante a experiência de ensino, a assunção desta perspetiva teve consequências ao nível da cultura de sala aula, onde, para além dos momentos de trabalho individual ou em pares, foram privilegiados, também, os momentos de interação com toda a turma, orquestrados pela professora, a propósito da apresentação e discussão das tarefas realizadas, tal como preconizam diversos autores (Smith *et al.*, 2009; Stein *et al.*, 2008).

Houve um investimento, por parte da professora Isabel, na construção e estabelecimento de certas normas sociais e normas sociomatemáticas, na aceção de Cobb *et al.* (2001), que regulassem as práticas matemáticas na aula. As normas sociais que foram, gradual e sistematicamente, negociadas entre a professora e os alunos sublinhavam a necessidade de: (i) explicar e justificar o seu raciocínio; (ii) ouvir e tentar compreender as explicações de outros;(iii) indicar quando não compreendiam e, se possível, pedir esclarecimentos, e (iv) referir quando não consideravam as soluções válidas e explicar as razões para essa apreciação.

As normas sociomatemáticas basearam-se nas identificadas por Cobb *et al.* (2001): aceitar partilhar o mesmo propósito, modos de raciocinar usando ferramentas e símbolos, e formas de argumentação matemática. As normas sociais e sociomatemáticas foram sendo ajustadas com os alunos ao longo da experiência de ensino de modo a contribuir para a construção do seu conhecimento matemático.

Concretização da experiência de ensino — a trajetória de aprendizagem

A experiência de ensino e a conjetura que a orientou consubstanciaram-se, ao nível da sala de aula, numa trajetória de aprendizagem da turma do 3.º ano. O constructo trajetória hipotética de aprendizagem, instituído por Simon (1995), está associado a um caminho de aprendizagem, antecipado à partida, norteado por objetivos de aprendizagem e orientado por um conjunto de tarefas concebidas/selecionadas pelo professor, considerando as ideias e os procedimentos que quer que o aluno desenvolva e tendo em conta as hipóteses do professor sobre processos de aprendizagem. O atributo "hipotética" pretende realçar, na perspetiva do autor que, à partida, o professor coloca apenas hipóteses e que a trajetória efetiva só é conhecida depois de realizada.

Consideramos promissor pensar numa trajetória de aprendizagem para um coletivo, a turma, tal como sugerem Cobb, Gravemeijer e Yackel (2011). Todavia, pensar no grupo turma não significa que todos os alunos progridam de modo idêntico ou que todos resolvam as tarefas propostas da mesma forma. Traduz, antes, que se deve ter em atenção a diversidade dos modos de pensar matematicamente dos alunos. Efetivamente, pensar numa trajetória de aprendizagem em termos do grupo turma não significa que todos os alunos tenham de seguir o mesmo caminho fechado e pré-determinado, mas que se tem em conta as participações de todos, necessariamente diferenciadas, nas práticas de sala de aula que se estabelecem (Cobb *et al.*, 2011).

Uma primeira versão da trajetória de aprendizagem, incluindo ideias para tarefas e sequências de tarefas, foi discutida com a professora Isabel, e com ela foram feitas algumas alterações. Este planeamento inicial tentou evidenciar um fio condutor entre as várias tarefas, tendo como pano de fundo as ideias teóricas anteriormente apresentadas e as experiências profissionais tanto da professora do 1.º ciclo como da investigadora. Inicialmente hipotética, a trajetória foi sendo adaptada ao longo e de acordo com sua concretização na sala de aula.

A figura 3 sintetiza o processo dinâmico que se desenvolveu durante a experiência de ensino, interrelacionando o conjeturado e antecipado com o que ia acontecendo na sala de aula e realçando, também, os aspetos que contribuíram para a construção e exploração da trajetória de aprendizagem.

Evolução dos procedimentos usados pelos alunos

A evolução dos procedimentos dos alunos está relacionada com o aprofundar da sua compreensão sobre a multiplicação e ancorada na resolução das tarefas e na sua discussão coletiva. De uma forma geral, inclui a progressão de procedimentos de contagem e aditivos para procedimentos de tipo multiplicativo e tem subjacente a mudança para modos

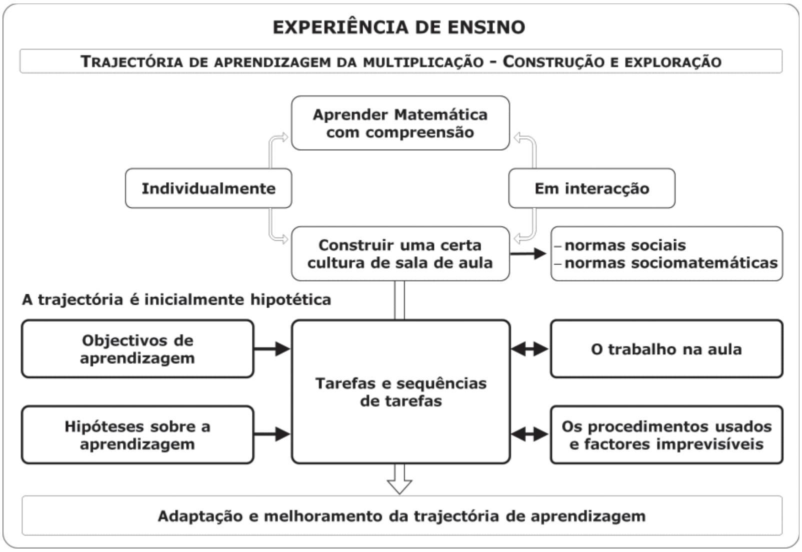


Figura 3 — Processo associado à construção e exploração
da trajetória de aprendizagem (Mendes, 2012)

de resolução mais sofisticados. Ainda assim foram identificados aspetos particulares nessa progressão que não se efetivou do mesmo modo para todos os alunos.

Dos procedimentos de contagem aos procedimentos multiplicativos

No início da experiência de ensino, na resolução das primeiras tarefas de multiplicação com números naturais, muitos dos alunos recorrem a procedimentos aditivos e alguns a procedimentos de contagem. É-lhes difícil, ainda, pensar num grupo enquanto unidade, aspeto essencial ao raciocínio multiplicativo. Embora muitos dos contextos associados às primeiras tarefas tenham subjacente o cálculo do número de objetos organizados segundo uma disposição retangular, coexistem, na sua resolução, procedimentos baseados em contagens 'por saltos' com outros já associados à operação multiplicação, ainda que pouco formalizados. Por exemplo, na resolução da tarefa 8B — Pátio do Cristóvão (sequência 3[2]), em que era necessário calcular o número total de pedras de vários empedrados com a forma retangular ainda há alunos, como Gustavo, que parecem contar por 'saltos'.

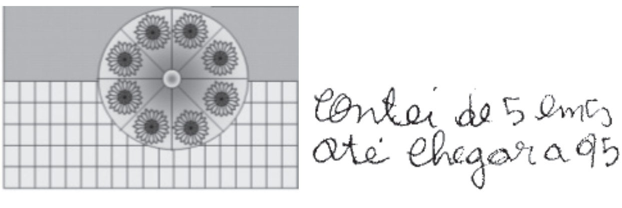


Figura 4 — Resolução de Gustavo da subtarefa 3 — tarefa 8B

Gustavo escreve que contou de cinco em cinco, parecendo tê-lo feito desde a primeira coluna do empedrado até à décima nona, apesar de não ter representado os "saltos" intermédios.

Nos problemas associados à mesma tarefa 8B há alunos que, embora recorram a procedimentos aditivos, parecem já estabelecer uma relação entre a adição e multiplicação. Ana Rita, para efetuar o cálculo associado ao produto 5 × 12, opta por um procedimento aditivo, adicionando cinco vezes a parcela 12, que iguala à expressão multiplicativa correspondente, dando evidência que compreende a relação que estabelece.

$$12+12+12+12+12=5\times12=60$$

Figura 5 — Resolução de Ana Rita da subtarefa 2 — tarefa 8B

Tal como Ana Rita, há alunos que, durante algum tempo, registam igualdades entre expressões que envolvem a adição e a multiplicação, mostrando estabelecer uma relação entre estas duas operações. Contudo, cada vez mais frequentemente, os alunos constroem procedimentos baseados na multiplicação. Estes parecem ser sugeridos pela disposição retangular incluída nos contextos das tarefas e diferem entre si apenas na ordem pela qual aparecem os fatores. Este aspeto decorre diretamente da visualização dos elementos que se repetem e de quantas vezes se repetem ou da identificação, em primeiro lugar, do número de elementos em linha ou em coluna.

Mais tarde, durante a resolução da tarefa 29 — Ida ao teatro (sequência 10), que implica calcular o preço de várias quantidades de bilhetes de cinema a partir de alguns dados incluídos numa tabela, os alunos parecem muito mais seguros no uso de procedimentos e optam, ora por procedimentos aditivos ora por multiplicativos, consoante lhes parece ser mais fácil calcular de acordo com os números envolvidos. Luís e Raquel são um dos pares que, no preenchimento da tabela inicial, utiliza os dois tipos de procedimentos.

8	10 €
10	12,50
20	25,00

2 bilhetes são 2,50 porque 1,25 mais 1,25 é igual a 2,50 e é o dobro de 1,25.
10 bilhetes são 12,50€ porque 8 bilhetes são 10€ com mais 2 bilhetes são*
*os 12,50€.
6 bilhetes são 7,50€ porque, 5 bilhetes costam 5,00€ mais 1,25€ dá 7,50€.
8 bilhetes são 10 € porque vimos que 4 bilhetes era 5,00€ e vimos isso pelo o dobro.
20 bilhetes são 25,00€ 10 bilhetes são 12,50 então 12,50 é metade de 25,00€.

Figura 6 — Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 1 — tarefa 29

Estes alunos usam procedimentos aditivos para saber o preço de, por exemplo, dez bilhetes, adicionando o preço de oito ao preço de dois, calculado previamente. Contudo, referem que recorrem ao dobro do preço de um e de quatro bilhetes para calcular o preço de dois e de oito bilhetes, respetivamente. A opção por procedimentos aditivos ou multiplicativos parece corresponder a um conhecimento das operações em causa e a uma maior facilidade nos cálculos.

Uso progressivo das propriedades da multiplicação

Nas discussões sobre as tarefas que fazem apelo à disposição retangular, a propriedade comutativa surge associada à comparação entre resoluções que identificam em primeiro lugar o número de elementos em linha ou em coluna e à perceção de que o produto não se altera. Há, também, alunos que, nas suas resoluções escritas, evidenciam que compreendem que, na multiplicação, o produto não é afetado pela ordem dos fatores. David, na resolução escrita de um dos problemas da tarefa 8B, regista as duas expressões seguintes:

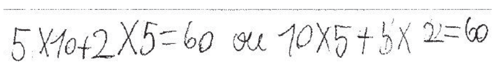


Figura 7 — Resolução de David da subtarefa 2 — tarefa 8B

Este aluno apresenta duas igualdades que só diferem entre si na ordem dos fatores de cada produto parcial. Apesar de, em termos da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, as expressões não corresponderem precisamente a 5×12 ou a 12×5, parecem revelar a sua compreensão, ainda que informal, sobre a propriedade comutativa da multiplicação.

A compreensão e o uso apropriado desta propriedade parecem estar, também, subjacentes a procedimentos multiplicativos onde os próprios alunos trocam a ordem dos fatores para, aparentemente, facilitar os cálculos. Miguel usa o seguinte procedimento num dos problemas da tarefa 8B:

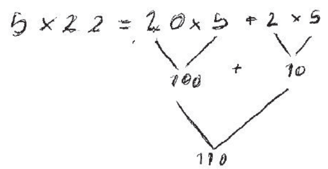


Figura 8 — Resolução de Miguel da subtarefa 4 — tarefa 8B

Este aluno representa o produto a calcular através da expressão 5×22, provavelmente decorrente da contagem de cinco linhas, cada uma com 22 pedras ou de pensar em cinco linhas e em 22 colunas. No entanto, para realizar o cálculo, troca a ordem dos fatores ao decompor o 22, efetuando, de facto, 22×5. Este aspeto parece estar relacionado com a facilidade no cálculo dos múltiplos do fator cinco. Deste modo Miguel obtém dois produtos de referência 20×5 e 2×5 que, presumivelmente, já automatizou.

A decomposição de um dos fatores para realizar um produto, tendo subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, tal como Miguel faz, está na base da maior parte dos procedimentos multiplicativos de resolução das tarefas cujo contexto recorre à disposição retangular e em que, pelo menos um dos fatores, é maior que dez. Guilherme é um dos alunos que usa a decomposição decimal de 19 para calcular 5 × 19 (subtarefa 3 — tarefa 8B) e que explicita o seu modo de pensar na discussão final com toda a turma: "Eu fiz cinco vezes o dez mais cinco vezes o nove e deu-me 50 mais 45 que são 95".

Após a resolução individual ou a pares, Isabel orienta a discussão com toda a turma e desafia Luís a explicitar o seu raciocínio associado ao cálculo 22 × 5, baseado no estabelecimento de relações entre os cálculos das várias tarefas. O aluno explica: "Podia ser 10 × 5 que é 50 e é a zona do empedrado vazio e depois somávamos 12 × 5 que é 60 e já sabemos pois é da zona das boias".

Luís recorre a produtos parciais já calculados (10 × 5 e 12 × 5) e Isabel realça este modo de pensar e preocupa-se em perceber se todos o compreendem. Este aspeto facilitador do cálculo, decompor 22 recorrendo a dois números de referência, 10 e 12, mesmo que os produtos parciais não tivessem sido anteriormente calculados, parece ser reconhecido por outros alunos e, por isso, a maior parte responde afirmativamente à pergunta da professora.

Na resolução das tarefas que partem de um contexto de disposição retangular é identificado, também, um procedimento de ajustar e compensar, baseado na propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração. Francisco opta por este procedimento para calcular 19 × 5, a propósito da resolução da subtarefa 3 da tarefa 8B (figura 9).

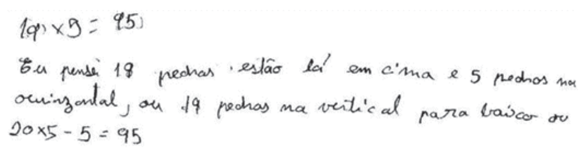


Figura 9 — Resolução de Francisco da subtarefa 3 — tarefa 8B

De facto, na justificação que apresenta sobre o modo como pensou, Francisco, além de associar a cada um dos fatores o número de pedras na vertical e na horizontal, escreve uma expressão onde se percebe que calcula primeiro 20 × 5 e compensa a seguir, subtraindo cinco. Considerando que este procedimento é usado apenas por Francisco, embora sendo bastante eficaz em determinadas situações, Isabel solicita a sua apresentação na discussão coletiva.

Nas discussões centradas nos seus procedimentos, os alunos começam a perceber as vantagens da utilização de procedimentos multiplicativos, sobretudo, à medida que os números envolvidos aumentam. Para esta evolução contribuem, não só as discussões coletivas a propósito das resoluções das tarefas mas, também, os registos dos procedimentos, recorrendo à simbologia matemática, realizados no quadro.

O uso de procedimentos baseados em propriedades da multiplicação foi sendo cada vez mais frequente ao longo da experiência de ensino. Por exemplo, Eva e Mariana optam por procedimentos multiplicativos na tarefa 29, quando é preciso calcular o preço de 250 bilhetes sabendo o preço de um bilhete (1,5€) (figura 10).

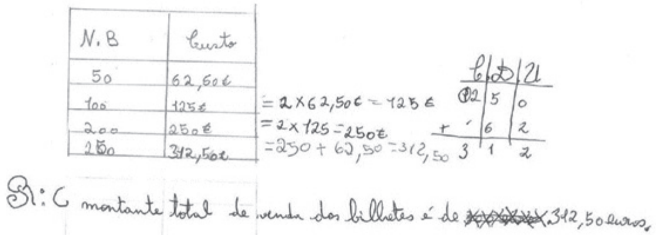


Figura 10 — Resolução de Eva e Mariana da subtarefa 3 — tarefa 29

As alunas organizam a informação em forma de tabela, à semelhança do contexto inicial, e partem do preço de 50 bilhetes para determinar o preço de 100 e 200, recorrendo ao uso de dobros. Para calcular o custo de 250 bilhetes, adicionam o preço de 200 com o preço de 50. A sua opção por procedimentos multiplicativos ou aditivos relaciona-se com a facilidade com que realizam os cálculos necessários.

Também na realização da tarefa 30 — Ida à mercearia Piedade, onde é preciso preencher tabelas incompletas de preços de vários produtos, os alunos optam por usar procedimentos de tipo aditivo ou multiplicativo, de acordo com o que lhes parece ser mais adequado nas várias situações. Os raciocínios de tipo multiplicativo fazem apelo, frequentemente, a relações do dobro ou a procedimentos de decomposição. Ainda assim, por vezes, os cálculos efetuados revelam-se complexos e com algumas incorreções, sobretudo quando os alunos não identificam certas regularidades associadas aos contextos propostos.

Enzo e Guilherme são um dos pares que, na tarefa 30, começa a preencher a tabela recorrendo a um procedimento aditivo. Contudo, após identificarem a regularidade que lhes permite calcular mais rapidamente, mudam de procedimento (figura 11).

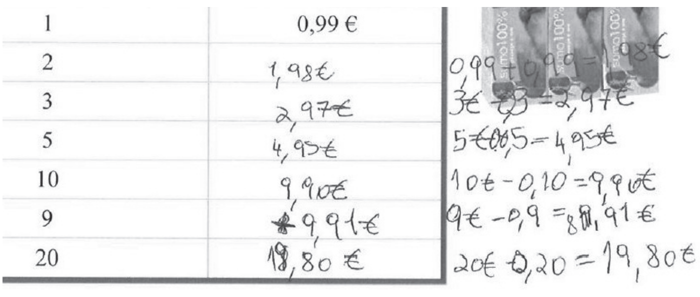


Figura 11 — Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3.1 — tarefa 30

Estes alunos reconhecem que 0,99€ é muito próximo de um euro, identificando que $0{,}99 = 1{,}00 - 0{,}01$ e, a partir do cálculo de três embalagens, recorrem sempre a um procedimento de compensação, multiplicando primeiro por um euro e efetuando depois a subtração.

Na discussão final, uma vez que houve algumas dificuldades na resolução desta tarefa, Isabel desafia Enzo e Guilherme a explicar como pensaram, de modo a realçar a regularidade identificada. Guilherme explicita: “Podíamos pensar em dois euros menos dois cêntimos. Dá 1,98€. Porque 99 cêntimos é quase um euro”. A discussão que continua em torno do procedimento de compensação mostra aos alunos a sua adequação neste contexto. Para realçar a sua utilização, Isabel propõe aos alunos cadeias numéricas que têm subjacentes procedimentos de compensação, baseados na propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração, e que são realizadas facilmente por eles.

Aspetos críticos da evolução dos procedimentos

À medida que os alunos vão realizando as tarefas propostas, os seus procedimentos de cálculo vão evoluindo para um maior grau de sofisticação, como vimos. Esta evolução parece estar relacionada com uma maior compreensão sobre a multiplicação que lhes permite optar por procedimentos adequados às tarefas propostas. Ainda assim, essa progressão não se efetuou, naturalmente, do mesmo modo para os 23 alunos da turma. Houve alunos que demoraram mais tempo a progredir para procedimentos multiplicativos mais potentes e outros que voltam a usar procedimentos que pareciam ter abandonado. Estas características da evolução dos procedimentos parecem relacionar-se com aspetos das tarefas, como o contexto e os números usados[3].

Ligados aos contextos de divisão. A análise dos procedimentos de cálculo usados pelos alunos e das suas interações ao nível da aula permitiu identificar dificuldades por parte de alguns na resolução de problemas de divisão. Inicialmente, estes foram propostos, de modo integrado, com tarefas de multiplicação. Na sua resolução, alguns alunos manifestaram dificuldades o que, por vezes, correspondeu a optar por procedimentos que já não usavam, nessa altura, em tarefas de multiplicação.

Na resolução dos primeiros problemas da tarefa 10 — Pilhas de caixas (sequência 4), os alunos recorrem apenas a procedimentos multiplicativos, revelando algum domínio no uso da multiplicação e suas propriedades.

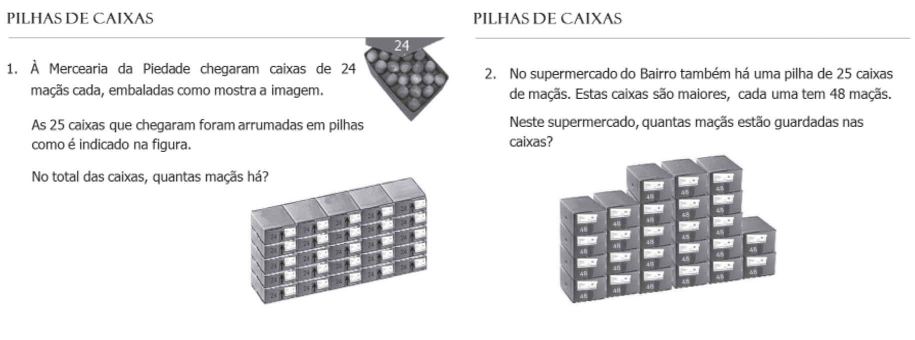


Figura 12 — Subtarefas 1 e 2 — tarefa 10

Contudo, na resolução do problema seguinte, subtarefa 3, com um contexto de divisão, alguns alunos revelam dificuldades.

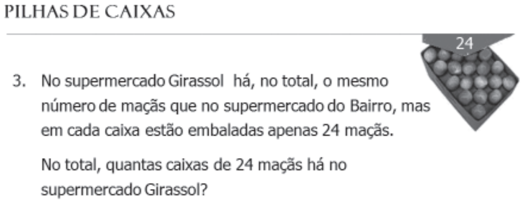


Figura 13 — Subtarefa 3 — tarefa 10

Enquanto nas tarefas anteriores todos os alunos tinham construído corretamente procedimentos baseados na multiplicação, nesta há três pares que não a resolvem ou o fazem incorretamente. Por exemplo, David e Diogo começam por desenhar um esquema baseado num procedimento aditivo (figura 14). Representam, umas a seguir às outras, 25 caixas de 24 maçãs, mas não continuam esta resolução. Depois fazem uma outra tentativa, partem de 1200, número total de maçãs, e iniciam um procedimento subtrativo tentando tirar 24, do qual também desistem.

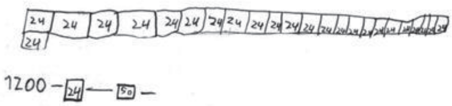


Figura 14 — Resolução de David e Diogo da subtarefa 3 — tarefa 10

Apenas os alunos, excetuando um par, que conseguem relacionar esta tarefa com as duas anteriores a resolvem corretamente. Seis desses pares estabelecem uma relação de dobro com a subtarefa 1. Eva e Guilherme são dois desses alunos.

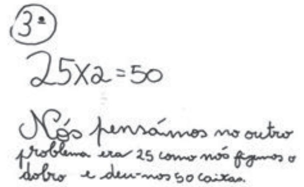


Figura 15 — Resolução de Eva e Guilherme da subtarefa 3 — tarefa 10

Na sua resolução escrita (figura 15) estes alunos referem uma relação de dobro entre o número total de caixas dos dois problemas, tendo subjacente, embora não explicitamente, a relação de dobro entre o número total de maçãs num e noutro problema. Dadas as dificuldades manifestadas por alguns colegas, na discussão coletiva, Eva é solicitada a explicitar o seu raciocínio, afirmando: "Fomos ao primeiro problema onde também havia 25 caixas mas fizemos o dobro".

Um único par, Duarte e Tiago, resolve a subtarefa 3 estabelecendo uma relação de dobro e de metade, ligando o terceiro ao segundo problema. Na discussão coletiva, Isabel solicita-lhes que verbalizem o modo como pensaram, uma vez que apela a relações multiplicativas diferentes das anteriores:

> Duarte — Nós fomos buscar o 25 ao segundo problema, pois nesse eram 25 caixas de maçãs.
> Isabel — E quantas maçãs tinha cada caixa nesse problema?
> Duarte — 48. E nós fizemos o dobro de 25.
> Isabel — Porquê?
> Duarte — Porque 48 é o dobro de 24 e no supermercado Girassol as caixas têm 24 maçãs. E nós fizemos 25 vezes dois porque 25 eram as caixas do outro problema.
> Isabel — Então, agora era necessário o dobro das caixas?
> Duarte — Porque eram metade das maçãs em cada caixa.

Na sua explicação, Duarte identifica a relação entre o número de maçãs de cada caixa nos dois problemas e associa-a à ligação entre o número de caixas necessário no terceiro problema. Apesar de não indicar, explicitamente, que o total de maçãs é o mesmo em ambos os problemas, este aspeto parece estar subjacente ao seu raciocínio.

Ainda assim, apesar as dificuldades manifestadas por alguns alunos da turma nas tarefas de divisão intercaladas com tarefas de multiplicação, quando lhes são propostas sequencialmente tarefas de divisão, no grupo específico dedicado a esta operação (sequências de tarefas 7, 8 e 9), os seus procedimentos progridem. Começam por recorrer a procedimentos de tipo aditivo e subtrativo e avançam para procedimentos baseados na relação inversa com a multiplicação.

Ligados aos números. A análise dos dados permitiu identificar, também, que os números envolvidos nos cálculos são um outro aspeto que influencia os procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas. Esta influência foi identificada a dois níveis diferentes – através de dificuldades sentidas ou no uso de procedimentos sensíveis aos números.

As dificuldades sentidas pelos alunos e associadas aos números revelaram-se, sobretudo, quando o universo numérico das tarefas foi ampliado para o conjunto dos números racionais não negativos na sua representação decimal. Esta ampliação verificou-se, quase em simultâneo, com a introdução destes novos números e a construção do seu significado associado a contextos do quotidiano.

Por exemplo, na tarefa 13 — Garrafas e mais garrafas (sequência 5), o segundo e o terceiro problemas têm um contexto de divisão. Contudo, enquanto na resolução do segundo se calcula com números naturais, no terceiro, apesar de se manterem o contexto e a relação subjacente, trabalha-se com números na representação decimal.

GARRAFAS E MAIS GARRAFAS

2. Imagina que queres comprar 30 litros de água em garrafas de 2 litros. Mostra como consegues saber quantas garrafas tens de comprar.

3. Na loja só há garrafas de 0,5 litros mas queres comprar a mesma quantidade de água. Mostra como consegues saber o número de garrafas que tens de comprar.

Figura 16 — Subtarefas 2 e 3 — tarefa 13

Na resolução da subtarefa 2, considerando o contexto de divisão, há oito alunos que, ultrapassadas as dificuldades iniciais, recorrem a procedimentos aditivos. Os restantes constroem procedimentos multiplicativos tais como o uso de produtos conhecidos, o uso de relações de dobro, de relações de dobro e metade e o recurso a decomposições decimais de um dos fatores.

Na resolução da subtarefa 3, que envolve calcular com números na representação decimal, identificam-se muitas dificuldades e quase metade da turma não a realiza ou fá-lo incorretamente. Também há vários pares de alunos que ou adicionam sucessivamente 0,5 ou adicionam as parcelas duas a duas, até perfazer o total de 30 litros. Bernardo e João utilizam um procedimento aditivo na resolução deste problema (figura 17).

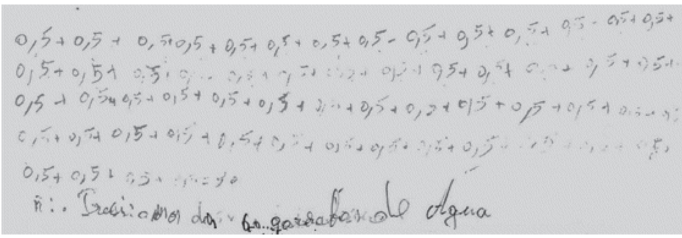


Figura 17 — Resolução de Bernardo e João da subtarefa 3 — tarefa 13

Embora seja um procedimento moroso e suscetível de enganos, pois corresponde à adição de 60 parcelas, os alunos conseguem fazê-lo corretamente. Na discussão coletiva, Bernardo clarifica o modo como pensaram: “Nós fomos sempre fazendo 0,5 mais 0,5 mais 0,5 mais 0,5 … até fazer 30 litros. E depois contámos as garrafas”.

Alguns alunos identificam, todavia, que meio litro é metade de um litro e utilizam um procedimento de dobro/metade, relacionando este problema com o primeiro (Quantas garrafas de um litro são necessárias para perfazer 30 litros). Nem todos apresentam a expressão multiplicativa correspondente mas fazem um esquema que fundamenta a relação que estabelecem entre os números dos dois problemas. É o caso de Gustavo e Leandra que constroem um esquema para resolver esta tarefa (figura 18).

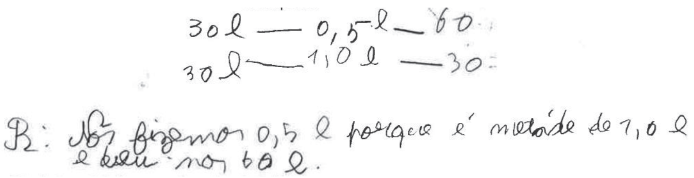


Figura 18 — Resolução de Gustavo e Leandra da subtarefa 3 — tarefa 13

O esquema clarifica a relação entre a capacidade das garrafas e a quantidade necessária para ter um total de 30 litros. A sua resposta final evidencia que associam o facto da capacidade de cada garrafa ter passado para metade com o dobro do número de garrafas necessário, comparando os dados dos dois problemas.

Na discussão coletiva, considerando as dificuldades manifestadas pelos alunos, uma vez que onze deles nem sequer resolveram o problema, Isabel reforça a relação de dobro/metade que pode identificar-se. Associado a estas dificuldades está, assim, o conhecimento ainda pouco profundo que os alunos têm sobre os números racionais, as suas representações, e as relações numéricas que podem ser estabelecidas entre eles e com os números naturais.

A relação entre os números das tarefas e os procedimentos usados diz, igualmente, respeito à construção de procedimentos sensíveis aos números, ou seja, que refletem a sua influência. Ora, nem sempre os alunos usaram os procedimentos sugeridos pelos números incluídos nas tarefas.

Um dos procedimentos sensíveis aos números, e que nem sempre os alunos utilizaram, foi o de ajustar e compensar, tanto com números naturais como com números racionais na representação decimal. Por exemplo, na resolução da subtarefa 3.1 — tarefa 30 apenas oito alunos o usam (figura 11).

Também o uso de relações de dobro e de metade, um outro procedimento sensível aos números, nem sempre foi escolhido pelos alunos, mesmo que os números o sugerissem. Por exemplo, na resolução da subtarefa 3 — tarefa 13 houve apenas onze alunos que a ele recorreram.

Considerações finais

A análise dos procedimentos de cálculo usados pelos alunos ao longo da experiência de ensino permitiu dar resposta à questão do estudo sobre o modo como evoluem esses procedimentos. De modo sintético podemos afirmar que:

— Os procedimentos usados pelos alunos evoluem de procedimentos de contagem e aditivos para procedimentos multiplicativos.

— A evolução dos procedimentos dos alunos não se processa do mesmo modo para todos os alunos.

— Os contextos ligados à disposição retangular e a crescente grandeza dos números envolvidos nos cálculos contribuem para o uso de procedimentos multiplicativos.

— Na resolução de tarefas com contexto de divisão, intercaladas com outras de multiplicação, alguns alunos voltam a usar procedimentos aditivos e evidenciam dificuldades. Contudo, nas sequências de tarefas de divisão, propostas sistematicamente, as suas resoluções mostram uma progressão para procedimentos multiplicativos.

— Há aspetos críticos associados à evolução dos procedimentos dos alunos que se relacionam com os números envolvidos nos cálculos. A influência dos números nos procedimentos dos alunos foi identificada a dois níveis: (i) nas dificuldades sentidas no cálculo com números racionais não negativos na representação decimal e (i) no uso de procedimentos sensíveis aos números.

— Há alunos que manifestam flexibilidade nos procedimentos que usam e adaptam-nos aos números envolvidos nos cálculos. Contudo, nem sempre isso acontece por parte de todos os alunos, nem em todas as tarefas que o sugerem. São exemplos os procedimentos ajustar e compensar e o uso de relações de dobro e de metade, que nem todos os alunos utilizam mesmo quando os números os inspirem.

— A evolução dos procedimentos não é independente do ambiente de aprendizagem construído, em que os alunos são encorajados a construir os seus próprios procedimentos que apresentam e discutem com os colegas.

Os resultados deste estudo relativos à evolução dos procedimentos de cálculo estão, em muitos aspetos, em consonância com os apresentados por vários autores. Há, ainda assim algumas diferenças.

Baek[4] (2006) enfatiza, nomeadamente, que os alunos são capazes de construir procedimentos multiplicativos flexíveis e eficazes, baseados nas características dos fatores, na resolução de tarefas com números naturais.

Para o uso de procedimentos multiplicativos baseados na decomposição de um dos fatores, contribuiu o recurso à disposição retangular, tal como é referido por vários autores (Barmby *et al.*, 2009; Battista *et al.*, 1998; Bobis, 2006). Estes realçam que o modelo retangular permite visualizar diferentes partições dos cálculos a efetuar, baseadas na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e na propriedade comutativa da multiplicação, suportando o desenvolvimento do pensamento multiplicativo.

A evolução dos procedimentos dos alunos, embora não se processe do mesmo modo para todos, é orientada por um percurso comum ao identificado em outras investigações (Baek, 2006; Downton, 2010; Mullingan & Watson, 1998) — dos procedimentos de contagem, passando pelos procedimentos aditivos aos procedimentos multiplicativos adequados às situações propostas.

Os resultados obtidos estão, também, de acordo com três aspetos que Downton (2010) considera serem comuns aos estudos sobre procedimentos de cálculo na resolução de problemas de multiplicação: (i) os procedimentos[5] intuitivos progridem segundo o seu grau de sofisticação, transitando do pensamento aditivo para o pensamento multiplicativo; (ii) o facto de um aluno dominar um procedimento mais sofisticado não significa que o use e (iii) existem fatores, como a grandeza dos números, o ser múltiplo de outros e os efeitos do ensino que influenciam o seu uso.

O voltar a procedimentos menos potentes parece relacionar-se com o referido por Bobis (2006) — cada novo procedimento vai competir com outros preexistentes e familiares dos alunos, durante um longo tempo. Daí os alunos não usarem os procedimentos consistentemente, havendo alturas em que regressam a procedimentos anteriores.

Alem disso, evidencia-se, ainda, que as tarefas de divisão são mais complexas para a maioria dos alunos, quando comparadas com as de multiplicação, o que contraria outros estudos em que a divisão é encarada de modo semelhante à multiplicação (Ambrose *et al.*, 2003). Ainda assim, quando os alunos resolveram tarefas de divisão, inseridas no grupo específico dedicado a esta operação, os seus procedimentos foram evoluindo, desde os aditivos e subtrativos até aos baseados na relação inversa com a multiplicação.

A influência dos números nos procedimentos de cálculo é referida, também, por diversos autores (Ambrose *et al.*, 2003; Fosnot & Dolk, 2001b; Fuson, 2003a). Em particular, Nickerson e Whitacre (2010) relacionam essa influência com o uso de procedimentos sensíveis aos números que, por sua vez, está associado à proficiência no cálculo (Heirdsfield, 2001). Esta inclui a flexibilidade no seu uso, de acordo com as diferentes combinações de números que inspiram as opções tomadas pelos alunos. Ora os alunos da turma do 3.º ano revelaram proficiência no cálculo em muitas das situações mas nem todos, em todas as ocasiões, optaram pelos procedimentos que, à partida, poderiam ser sugeridos pelos números envolvidos. Ou seja, a proficiência de cálculo de alguns alunos não lhes permite, ainda, ter flexibilidade no uso de procedimentos, uma vez que aquela está ligada a um conhecimento de base amplo e em rede sobre os números e as relações numéricas (Heirdsfield, 2001) que ainda não desenvolveram.

Embora a evolução dos procedimentos usados pelos alunos não se processasse do mesmo modo para todos, houve uma mudança efetiva para procedimentos mais sofisticados mesmo no caso dos que evidenciaram mais dificuldades. Contudo nem todos alcançaram o mesmo nível de aprendizagem da multiplicação, havendo alguns que necessitam percorrer um caminho mais longo. O processo pelo qual os alunos passam do uso dos seus procedimentos preferidos e habituais para os mais eficientes é complexo, uma vez que o recurso a um certo procedimento é modificado de acordo com as exigências do problema e as limitações do conhecimento do aluno (Bobis, 2006).

Embora o estudo realizado não tenha como propósito qualquer generalização, parece ser possível, tomando-o como ponto de partida, desenvolver outras experiências de ensino sobre a aprendizagem da multiplicação. Ainda que a experiência de ensino tenha sido realizada num contexto muito específico, com aqueles alunos e aquela professora, pode ser usada como referência para organizar a aprendizagem da multiplicação noutros contextos, ajustando-a, naturalmente, às características particulares dos seus participantes. Um aspeto que sobressai do estudo realizado é a importância da seleção das tarefas, dos seus contextos e dos números utilizados, pois é a partir daí que se desenvolvem os raciocínios dos alunos e que é possível orquestrar discussões produtivas e ricas em conhecimento matemático que contribuem para novas aprendizagens.

Notas

1 Fosnot e Dolk (2001) usam o termo estratégia e não procedimento.

2 Os enunciados das tarefas analisadas, não apresentados no texto do artigo, foram incluídos em anexo.

3 Apesar de os números usados numa tarefa fazerem parte do seu contexto, por facilidade de análise, considerámos os números separadamente.

4 Baek (2006) usa o termo estratégia e não procedimento.

5 Downton (2010) usa o termo estratégia e não procedimento, mas no mesmo sentido.

Referências

Academia das Ciências de Lisboa. (2001). *Dicionário da língua portuguesa contemporânea* (Vol. I). Lisboa: Editorial Verbo.

ACARA. (2010). *The Australian Curriculum. Mathematics*. Obtido em 31 de Julho de 2011, de ACARA Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority: http://www.australiancurriculum.edu.au/Mathematics/Curriculum/F-10

Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Edits.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 305–336). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Anghileri, J. (2003). Issues in teaching multiplication and division. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 184–194). Buckingham: Open University Press.

Baek, J. M. (1998). Children's invented algorithms for multidigit multiplication problems. In L. Morrows, & M. Kenney (Edits.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 151–160). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Baek, J. M. (2006). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. *Teaching Children Mathematics*, *12*(5), 242–247.

Barmby, P., Bilsborough, L., Harries, T., & Higgins, S. (2009). *Primary mathematics. Teaching for understanding*. Berkshire, England: Open University Press.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(5), 503–532.

Bobis, J. (2006). From here to there: The path to computational fluency with multi-digit multiplication. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *12*(4), 22–26.

Brocardo, J. (2011). Uma "lente" para analisar tarefas numéricas. *Educação e Matemática*, *115*, 47–52.

Cobb, P., Gravemeijer, K., & Yackel, E. (2011). Symbolizing and instructional design — developing instructional sequences to support students' mathematical learning — introduction. In E. Yackel, K. Gravemeijer, & A. Sfard (Edits.), *A journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb* (pp. 75–84). New York: Springer.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, *10* (1&2), 113–163.

Cobb, P., Zhao, Q., & Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers' learning: a reflection from the field. *Journal of the Learning Sciences*, *18*(2), 165–199.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231–266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Downton, A. (2010). Challenging multiplicative problems can elicit sophisticated. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Ed.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 169–176). Fremantle: MERGA.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Foxman, D., & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in UK. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1–2), 41–69.

Fraivillig, J. (2001). Strategies for advancing children's mathematical thinking. *Teaching Children Mathematics*, *7*, 454–459.

Fuson, K. C. (2003a). Developing mathematical power in whole number operations. In J. Kilpatrick, G. W. Martin, & D. Schifter (Edits.), *A research companion to principles and standards for schools mathematics* (pp. 68–94). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about this? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Edits.), *Educação matemática: caminhos e encruzilhadas* (pp. 83–101). Lisboa: APM.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22* (3), 170–218.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30)*. I, pp. 345–352. Hobart: MERGA.

Heirdsfield, A. (2001). Integration and compensation in accurate mental computation. *24th Annual MERGA Conference* (pp. 292–299). Sidney: Merga.

Heirdsfield, A., Cooper, T. J., Mulligan, J., & Irons, C. J. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference*, (pp. 89–96). Haifa, Israel.

Kelly, A., & Lesh, R. (2000). Part III: Teaching experiments. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 191–196). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2–8 & 44.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Um estudo com alunos do 1.º ciclo*. (Tese de Doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. In http://repositorio.ul.pt/handle/10451/5893.

Mendes, F., & Delgado, C. (2008). A aprendizagem da multiplicação e o desenvolvimento do sentido do número. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Edits.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 159–182). Lisboa: Escolar Editora.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Obtido em 6 de Outubro de 2009, de http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Mulligan, J. T., & Watson, J. (1998). A developmental multimodal model for multiplication and division. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(2), 61–86.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Nickerson, S. D., & Whitacre, I. (2010). A local instruction theory for the development of number sense. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(3), 227–252.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145.

Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(9), 549–556.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Treffers, A., & Buys, K. (2008). Grade 2 (and 3) — Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 61–88). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

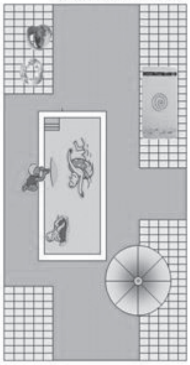
van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.). (2008). *Children learn mathematics*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Verschaffel, L., Greer, B., & de Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. II, pp. 557–628). Reston, VA: NCTM.

Anexo — Tarefas mencionadas no artigo

Sequência 3
Tarefa 8 – Pátio do Cristóvão

O pátio do Cristóvão tem quatro zonas com empedrado rectangular.



Sequência 3
Tarefa 8 – Pátio do Cristóvão

O PÁTIO DO CRISTÓVÃO

Vais calcular o número de pedras em cada uma daquelas zonas e explicar como o fizeste.

Zona do empedrado vazio
Zona do chapéu-de-sol
Zona das boias
Zona da toalha

Sequência 10
Tarefa 29 – Ida ao teatro

IDA AO TEATRO

Os alunos do 3º B vão outra vez ao teatro com a professora Isabel. Para facilitar o pagamento, ao lado da bilheteira está um quadro com uma tabela de valores.

1. Alguém apagou partes da tabela. Podem completá-la? Expliquem como pensaram.

Número de bilhetes	(Euros)
1	1,25 €
2	
6	
	10 €
10	
20	

2. Se os 23 alunos da turma forem ao teatro com a professora Isabel qual o preço total dos bilhetes? Expliquem como pensaram.

Número de bilhetes	Custo (Euros)
1	1,25 €
2	2,50 €
6	7,50 €
8	10,00 €
10	12,50 €
20	25,00 €

3. A lotação do teatro é de 250 lugares. Se todos os lugares estiverem ocupados, qual será o montante total da venda dos bilhetes? Expliquem como.

Sequência 10
Tarefa 30 – Ida à Mercearia da Piedade

IDA Á MERCEARIA DA PIEDADE

1. Na Mercearia da Piedade, um saco de laranjas custa um euro e sessenta cêntimos.

1.1. Preencham o resto da tabela para ser afixada à entrada da mercearia. Expliquem como pensaram.

Número de sacos	Custo (Euros)
1	1,60 €
2	
5	
6	
10	
9	
20	

1.2. Quanto gastamos se comprarmos:

- 4 sacos de laranjas?
- 12 sacos de laranjas?
- 24 sacos de laranjas?

Expliquem como pensaram.

Adaptado de Fosnot (2007)

Sequência 10
Tarefa 30 – Ida à Mercearia Piedade

IDA Á MERCEARIA DA PIEDADE

2. Na Mercearia da Piedade as maçãs estão a ser vendidas, em sacos de 1kg, por um euro e dez cêntimos.

2.1. Preencham o resto da tabela para ser afixada na mercearia. Expliquem como pensaram.

Número de sacos	Custo (Euros)
1	1,10 €
2	
10	
5	
3	
4	
20	

2.2. Quanto gastamos se comprarmos:

- 6 sacos de maçãs?
- 8 sacos de maçãs?
- 40 sacos de maçãs?

Expliquem como pensaram.

Sequência 10
Tarefa 30 – Ida à Mercearia Piedade

IDA Á MERCEARIA DA PIEDADE

3. Na Mercearia da Piedade, uma embalagem de sumo de pêssego custa 99 cêntimos.

3.1. Preencham o resto da tabela para ser afixada na mercearia. Expliquem como pensaram.

Número de embalagens de sumo	Custo (Euros)
1	0,99 €
2	
3	
5	
10	
9	
20	

3.2. Quanto gastamos se comprarmos:

- 6 embalagens de sumo?
- 8 embalagens de sumo?

Expliquem como pensaram.

Resumo. Este artigo apresenta e discute alguns resultados sobre a evolução dos procedimentos de cálculo usados por alunos de uma turma do 3.º ano de escolaridade, na resolução de tarefas de multiplicação. Estes resultados integram um estudo mais abrangente que teve como propósito a compreensão do modo como os alunos aprofundam a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem. A investigação seguiu uma metodologia de *design research*, na modalidade de experiência de ensino. A análise das produções dos alunos e de episódios relativos às discussões coletivas que ocorreram na aula revelou uma evolução significativa dos procedimentos usados pelos alunos que parece ser suportada pelas características das tarefas propostas — contextos, números e sua articulação — e pelo ambiente da aula. O estudo permite perceber que esta evolução não se processa do mesmo modo para todos os alunos, sendo evidenciados alguns aspetos críticos nos procedimentos relativos a tarefas com particularidades específicas.

Palavras-chave: Aprendizagem da multiplicação, Procedimentos dos alunos, Experiência de ensino.

Abstract. This paper presents and discusses some results on the evolution of calculation procedures used by 3rd year students, when solving multiplication tasks. These results are part of a larger study aimed to understand how students learn multiplication in a number sense development perspective, in the context of a learning trajectory. It was developed a teaching experience, a form of design research adequate to studies that intertwine research and teaching. The analysis of students' written productions and classroom episodes revealed that an important evolution of the students' procedures which seems to be supported by the characteristics of the proposed tasks — contexts, numbers and their articulation — and the classroom culture. The study also shows that this evolution is not a linear process, and that it differs from student to student, being evident some critical points in the procedures related to certain specific features of the tasks.

Keywords: Learning of multiplication, Students procedures, Teaching experiment.

■ ■ ■

FÁTIMA MENDES
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
fatima.mendes@ese.ips.pt

JOANA BROCARDO
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
joana.brocardo@ese.ips.pt

HÉLIA OLIVEIRA
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

(Recebido em fevereiro de 2013, aceite para publicação em abril de 2013)