As dificuldades dos alunos quando trabalham com tarefas de exploração e investigação

Maria Gorete Pires Branco
Escola Secundária de Caldas das Taipas — Guimarães

Introdução

As mudanças que se têm verificado na sociedade, resultantes dos avanços tecnológicos, científicos e sociológicos, têm exigido, naturalmente, mudanças nos sistemas educativos e em particular na educação matemática. As *Normas do National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007) apontam mudanças no ensino e aprendizagem da Matemática, no sentido de levar os alunos a adquirir poder matemático, através da realização de tarefas de investigação, da resolução de problemas que desenvolvam o raciocínio matemático, da formulação de conjeturas e conexões matemáticas, da comunicação e da argumentação. Deixa-se para trás a centralidade na memorização de técnicas, a procura mecanicista de respostas e o tratamento matemático como um corpo de conceitos e procedimentos isolados, o que representa uma viragem do trabalho mecânico para o trabalho cognitivo, propiciando uma predisposição favorável em relação à Matemática.

Estas mudanças pressupõem que o professor, como agente dinamizador e regulador do processo ensino-aprendizagem, crie situações motivadoras e proponha tarefas significativas que despertem a curiosidade e o entusiasmo dos alunos e que os envolvam na construção do seu conhecimento e na apropriação de novas ideias e conceitos, através de processos de reflexão sobre a atividade que vão desenvolvendo e sobre a sua aprendizagem. É propondo "tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade do aluno" (Ponte, 2005, pp. 11–12). São as tarefas e situações de aprendizagem que dão oportunidade aos alunos de se envolverem na criação da sua própria Matemática e de refletirem sobre o seu próprio processo de aprendizagem (Bishop & Goffree, 1986).

Ao se considerar o envolvimento dos alunos na sua aprendizagem, é de ter em conta a relevância do contributo que a atividade investigativa pode ter na sala de aula. Vários estudos têm mostrado que as tarefas de natureza exploratória e investigativa constituem uma poderosa forma de construir conhecimento (Abrantes, 1999; Oliveira, Segurado & Ponte, 1999; Rocha, 2003) e podem proporcionar um maior envolvimento efetivo dos alunos resultante da sua maior confiança no trabalho matemático e promover, assim, conceções e ideias mais positivas sobre a Matemática e sobre a sua aprendizagem (Martins, Maia, Menino, Rocha & Pires, 2002). Estas tarefas representam boas oportunidades para pôr os alunos a debater questões, a expor os seus raciocínios, a estabelecer conjeturas, a usar e aplicar a Matemática. De acordo com Segurado (1997), este tipo de tarefas proporciona um contexto rico em desafios e os alunos sentem-se motivados e empenhados na sua realização.

A motivação dos alunos e as suas atitudes face à Geometria, assim como as dificuldades e o insucesso dos mesmos na aprendizagem deste tema, continuam a ser uma preocupação para professores e investigadores. A Geometria é, no entanto, uma área particularmente propícia para um ensino baseado na resolução de situações de natureza exploratória e investigativa e em atividades de construção, de manipulação e de resolução de problemas (Abrantes, 1999). Estas situações fornecem um bom contexto para que os alunos compreendam a necessidade de justificar as suas afirmações ao expressar o seu raciocínio junto do professor e dos colegas (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas, 1999).

Neste artigo, pretende-se compreender como é que os alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade, trabalhando em pequenos grupos, realizam atividades com tarefas de exploração e investigação. Com este propósito estabeleceu-se a seguinte questão de investigação: Que dificuldades manifestam os alunos de uma turma do 10.º ano e como evoluem, na atividade desenvolvida em tarefas de exploração e investigação no âmbito da Geometria?

Enquadramento teórico

As tarefas de natureza exploratória e investigativa como tarefas matemáticas

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de descobrir, de explorar e de investigar. Só assim se pode perceber o que é a Matemática e compreender a sua função e utilidade na intervenção sobre o mundo (Braumann, 2002). Para este autor, aprender Matemática passa por uma vertente investigativa, na qual a exploração e descoberta de estratégias são processos indispensáveis e que só se podem apreender fazendo investigação matemática.

A importância da realização de investigações matemáticas pelos alunos tem vindo a ser defendida por vários autores (*e.g.*, Ernest, 1996; Goldenberg, 1999; Mason, 1996; Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003; Santos, Brocardo, Pires & Rosendo, 2002).

As investigações matemáticas podem propiciar atividades educativas importantes, no desenvolvimento e consolidação de conceitos e de ideias matemáticas e podem permitir uma visão mais ampla da Matemática, muito mais próxima da verdadeira prática do matemático (Ponte & Matos, 1996). Ao estimularem a participação dos alunos favorecendo uma aprendizagem significativa e ao proporcionarem pontos de partida diferentes facilitando o envolvimento dos alunos com diferentes níveis de competências e o estabelecimento de conexões, as investigações matemáticas apresentam importantes potencialidades educacionais (Santos *et al.*, 2002). Martins *et al.* (2002) referem que o trabalho com investigações matemáticas pode permitir: (1) o desenvolvimento de competências matemáticas, integrando atitudes, capacidades e conhecimentos; (2) a oportunidade de abordar e relacionar conteúdos matemáticos, valorizando as suas conexões e (3) uma compreensão global da natureza da atividade matemática.

Neste estudo as tarefas de exploração e investigação são entendidas como tarefas de cunho aberto, ou seja, tarefas que comportam algum grau de indeterminação no que é dado, no que é pedido ou em ambas as coisas (Ponte, 2005). É de realçar que não se faz distinção entre tarefas de natureza mais exploratória ou mais investigativa, chamando-se tarefas de exploração e investigação ou investigações matemáticas a todas elas. Isso, porque é complicado saber à partida qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos (Ponte, 2003a).

De acordo com vários autores (*e.g.*, Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira & Oliveira, 1999) na realização de investigações matemáticas identificam-se quatro etapas. A primeira está relacionada com o reconhecimento da situação, a sua exploração inicial e a formulação de questões a investigar; a segunda refere-se ao processo de formulação de conjeturas; a terceira ao teste das conjeturas e eventual reformulação e a quarta diz respeito à justificação, prova e avaliação do trabalho realizado. Ponte (2003b) salienta que nem sempre estas etapas seguem a ordem indicada, muitas vezes, uma conjetura inicial aparece em simultâneo com a formulação das questões e o teste e validação de uma conjetura podem levar, por exemplo, à formulação de novas questões e novas conjeturas. Esta ideia é também defendida por outros autores (*e.g.*, Brocardo, 2001; Yeo, 2007). Brocardo (2001) sublinha que a atividade investigativa envolve um ciclo marcado por vários processos matemáticos:

> [que] não podem ser apenas seguidos de uma forma linear e ordenada. (…) A recolha e organização de dados, a formulação e teste de conjeturas são fases do processo investigativo que devem ser percorridas tanto num sentido como noutro, sendo fundamental analisar as interações entre elas. (p. 541)

Exploração e formulação de questões. Ponte e Matos (1996) e Yeo (2007) sublinham que o estabelecimento de objetivos bem definidos e precisos e a formulação de questões e problemas é um aspeto de grande relevância na realização de uma investigação. Para Yeo e Yeap (2009), quando os alunos realizam uma investigação devem primeiro tentar entender a tarefa e, em seguida, formular os seus próprios problemas para resolver. Na mesma linha de ideias encontram-se Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.* (1999) ao salientarem que, após um certo trabalho de explicitação da situação proposta, é necessário começar por colocar questões produtivas e interessantes.

Formulação e teste de conjeturas. Depois de compreendida a questão ou a situação matemática que serve como ponto de partida para a atividade e o estabelecimento de objetivos ou problematização, o aluno analisa casos específicos ou dados empíricos, que levam à formulação de conjeturas (Yeo & Yeap, 2009). Esta é uma etapa fundamental da experiência matemática, é aí que a intuição dos alunos pode intervir e fortalecer-se

(APM, 2009). Para Mason, Burton e Stacey (1988) a formulação de conjeturas é o processo de perceber ou 'adivinhar' que alguma coisa deve ser verdade e que implica investigar a sua veracidade. Uma conjetura "é uma afirmação que parece razoável, mas cuja veracidade não foi demonstrada. Em outras palavras, não foi justificada convincentemente e não se sabe tão pouco se existem exemplos que a contradigam" (Mason *et al.*, 1988, pp. 73–74). Estes autores salientam que é importante começar por analisar exemplos particulares, para formular as primeiras conjeturas. Estas, à medida que mais especialização é feita, ou seja, que mais exemplos são analisados, começam naturalmente a ser refutadas ou então reformuladas, dando origem a novas conjeturas. O processo de formulação de conjeturas pode, assim, ser representado como um processo cíclico como mostra a figura 1.

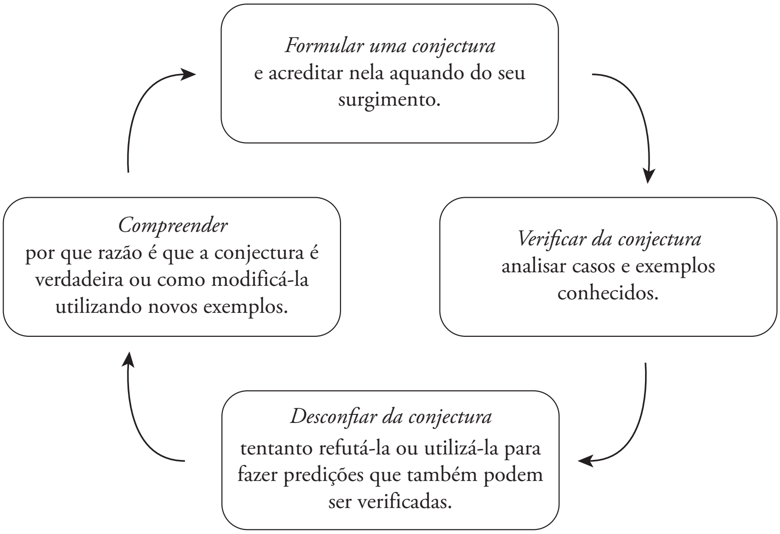


Figura 1 — Processo de formulação de conjeturas (Mason *et al.*, 1988)

Uma vez formulada, a conjetura tem de ser testada, ou seja, tem de se investigar para ver se se pode validar, ou se se deve modificar, ou então refutar. Para refutar uma conjetura, basta um contraexemplo, contudo o erro pode estar no contraexemplo. Pode acontecer também que uma conjetura que se mostra falsa, com uma pequena modificação, se torne numa conjetura válida (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999).

Justificação e prova de conjeturas. Uma conjetura, depois de formulada e testada, não tem ainda o estatuto de verdade matemática, é preciso procurar argumentos convincentes e matematicamente consistentes que a validem (Brocardo, 2001). Alguns autores designam este processo por demonstração ou prova (*e.g.*, Battista & Clements, 1995; Hanna, 2000) outros, como Mason *et al.* (1988), por justificação e convencimento. Para estes últimos, justificar uma conjetura significa encontrar um esquema subjacente ou uma relação que ligue aquilo que se sabe com o que se quer justificar. Os autores consideram importante que cada um se convença a si e aos outros da validade das conjeturas que formulou e indicam que é essencial adquirir hábitos de tratar as afirmações como conjeturas, procurar testá-las, tentando refutá-las ou encontrar justificação e analisar criticamente tanto os seus argumentos como os dos outros.

Hanna (2000) considera que a função da prova a nível da sala de aula é promover a compreensão matemática, "a prova ajuda a ver não só que é verdade, mas também porque é verdade" (p. 8). E especifica que uma das formas mais eficazes para usar a prova com essa finalidade é tirar partido da visualização, da exploração e de argumentos baseados na observação, de modo a promover a compreensão da Matemática. Para Lakatos referido em Davis e Hersh (1995) uma demonstração significa "explicações, justificações, elaborações que tornam a conjetura mais plausível e mais convincente, ao mesmo tempo que vai ficando mais pormenorizada e precisa sobre a pressão dos contraexemplos" (p. 324).

Neste estudo estende-se a justificação convincente e a prova ou demonstração como processos que permitem compreender o porquê das conjeturas serem verdadeiras. Sendo a prova ou demonstração conceitos mais amplos que se referem a um raciocínio convincente e suficientemente rigoroso que valida ideias matemáticas.

As dificuldades dos alunos na realização de explorações e investigações

A exploração de investigações envolve processos de raciocínio complexos que requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte dos alunos (Ponte & Matos, 1996). Diversos trabalhos empíricos têm mostrado que os alunos apresentam dificuldades nas várias fases da atividade investigativa. Uma das dificuldades que eles revelam prende-se com a exploração e a formulação de questões. Brocardo (2001), ao estudar a evolução de três alunos do 8.º ano relativamente ao modo de explorar as tarefas de investigação, concluiu que os alunos tiveram dificuldade em entender a investigação como um todo, tendiam a dar resposta *alínea* a *alínea* sem as relacionar entre si. Contudo, ao longo da experiência, a autora notou que os alunos começaram a manifestar preocupação em relacionar as observações iniciais e procurar perceber o foco da investigação. A formulação de questões foi um aspeto a que os alunos não deram muita importância durante todo o estudo. Segundo a autora, "depois de realizarem várias explorações iniciais, os alunos não usaram o modo *interrogativo*, mas sim, o modo *afirmativo* avançando várias conjeturas" (p. 538). A dificuldade em formular questões é igualmente salientada por Diezmann, Watters e English (2001), na sequência de um estudo que envolveu alunos do 1.º ciclo, na realização de investigações matemáticas. Os autores referem que foram apresentadas aos alunos situações a investigar, dando-lhes alguns exemplos de questões que poderiam ser formuladas e perante uma situação foi-lhes pedido para formularem as suas próprias questões e os alunos, ao invés disso, normalmente selecionavam um exemplo de questões que lhe tinha sido dado.

Henriques e Ponte (2008), num trabalho que teve por base a realização de uma proposta pedagógica visando promover nos alunos a aprendizagem de conceitos e métodos fundamentais da Análise Numérica, através de uma abordagem de natureza investigativa, com alunos do 2.º ano dos cursos de licenciatura da Escola Naval, salientam que a atividade dos alunos não contemplou a formulação de questões — após a exploração inicial da tarefa surgiram logo as primeiras conjeturas.

A formulação de conjeturas desempenha um papel importante no trabalho de investigação. As conjeturas podem surgir ao aluno de diversas formas: por observação direta de um número finito de casos, nos quais é observado um padrão constante; por manipulação de dados; por analogia com factos conhecidos ou a partir de uma representação visual de um problema (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid & Yevdokimov, 2007). Mas este trabalho indutivo tende muitas vezes a ficar confinado ao pensamento do aluno, não se verificando uma formulação explícita das conjeturas, como é salientado por Ponte *et al.* (2003) com base na análise de dados de uma investigação realizada por alunos do 7.º ano. Também Brocardo (2001) observou que, inicialmente, os alunos formulavam as conjeturas apenas implicitamente e que, muitos deles, só ao fim de algum tempo conseguiram entender o seu *estatuto*, tinham tendência a tomar as conjeturas como conclusões. A autora refere:

> É muito forte nos alunos a ideia de que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões e que a evolução para uma postura realmente investigativa em que formulam conjeturas e desenvolvem vários ciclos de confirmação ou refutação destas, é um processo demorado e que tem de ser objeto de um trabalho explícito por parte do professor. (p. 540)

As conclusões obtidas por Henriques e Ponte (2008) e Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.* (1999) apontam no mesmo sentido. Henriques e Ponte salientam que, num dos grupos, só com o trabalho continuado e com a discussão em grande grupo é que os alunos compreenderam o *estatuto* de uma conjetura.

O teste de conjeturas parece não colocar muitas dificuldades aos alunos. No entanto, Ponte *et al.* (2003) salientam que existe alguma tendência para os alunos aceitarem uma conjetura com base num número reduzido de testes. Esta tendência, de acordo com Brocardo (2001), parece estar mais relacionada com as dificuldades iniciais dos alunos em perceber as características do processo investigativo do que propriamente com dificuldades relacionadas com a realização de testes. A autora refere que os dados recolhidos pelos alunos eram testados por eles com facilidade, o problema residia no descuido em analisar outros casos e em assumir como conclusão uma conjetura que resultava do estudo de um ou dois exemplos.

A justificação e a prova das conjeturas são processos de grande relevância na atividade de investigação. As conjeturas que resistiram a sucessivos testes para serem consideradas matematicamente válidas precisam de ser justificadas com base em argumentos lógicos ou, pelo menos, plausíveis (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999). Diversos estudos têm mostrado que os alunos, por si, sentem pouca necessidade de justificar as suas conjeturas. Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.* (1999) indicam que os alunos, de um modo geral, não sentem essa necessidade nem parecem ter a noção do tipo de argumentos que podem utilizar para justificar uma conjetura. A perceção dos alunos em perceber a necessidade da prova não parece estar relacionada somente com as dificuldades, mas também com a sua visão da Matemática e da aprendizagem.

Rocha (2003) refere que a prova foi o processo matemático da atividade investigativa que os alunos que participaram no seu estudo mais evitaram e aquele em que menos evoluíram. Um dos alunos, algumas vezes omitia esta fase da investigação, optando por avançar, envolvendo-se novamente na exploração, com o intuito de formular mais conjeturas, deixando a prova para o final da sua atividade, o que levou, na maior parte das situações, à não validação das conjeturas. Esta conclusão é consistente com os resultados apresentados por Ponte *et al.* (2003) — os alunos transformavam as conjeturas em conclusão sem passarem por um processo de justificação ou prova. Estes autores consideram que, "a justificação ou prova das conjeturas é uma vertente do trabalho investigativo que tende, com alguma frequência a ser relegada para segundo plano ou até mesmo a ser esquecida" (p. 37).

Brocardo (2001) refere que os alunos inicialmente "encararam a prova das suas conjeturas como uma complicação desnecessária introduzida pela professora" (p. 544). Para eles, uma conjetura que tinha resistido a sucessivos testes era claramente verdadeira, não sentindo qualquer necessidade de a provar. Com o decorrer da experiência vários alunos começaram a perceber o que significava justificar as suas conjeturas e a tentar procurar o porquê de uma relação se verificar. Contudo, esta tentativa só era feita se fosse explicitamente solicitado pela professora ou pedido no enunciado da tarefa. Numa fase final, grande parte dos alunos já tinha a noção de que era preciso pensar na prova das conjeturas que formulavam.

Metodologia

Opções metodológicas. Atendendo ao objetivo da experiência, optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, pois tal como afirmam Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos através do contacto direto do investigador com o fenómeno no seu contexto natural. Como *design* de investigação, optou-se pelo estudo de caso interpretativo. A opção por estudos de caso prendeu-se com o facto de se tratar de uma investigação de natureza empírica, que se baseou fortemente no trabalho de campo, ocorrendo em contexto real e que se preocupou principalmente com as questões do "como" e do "porquê", procurando tirar partido de múltiplas fontes de evidência, como documentos, observação e entrevistas (Ponte, 2006; Yin, 2009).

Participantes. A investigação envolveu uma turma do 10.º ano de escolaridade constituída por 20 alunos, com uma média de idade de 15 anos, e a respetiva professora de Matemática A, incidindo de uma forma particular em dois grupos de alunos, cada um com três elementos. O grupo I formado por Diana, Francisca e Matilde e o grupo II constituído por Luís, Nelson e Pedro.

As três alunas do grupo I estudaram juntas desde o primeiro ciclo do ensino básico, no entanto, esta foi a primeira vez que trabalharam no mesmo grupo. Já tinham trabalhado com investigações matemáticas no 9.º ano de escolaridade. Diana era uma aluna reservada e insegura, revelava algumas dificuldades em argumentar perante as refutações dos colegas e não gostava muito de participar na discussão com a turma, por não se sentir muito à vontade. Considerava a Geometria um tema difícil. Francisca era uma aluna empenhada, organizada e responsável. Era participativa, quer no trabalho em pequeno grupo, quer na discussão com a turma e tinha um poder de argumentação bastante razoável. Referia ter algumas dificuldades na aprendizagem da Geometria, por envolver muitos conceitos. Matilde era uma aluna muito aplicada e com bons resultados escolares. Nas aulas, assumia uma atitude de interesse, tinha um bom poder de argumentação e era colaborativa e participativa nos trabalhos de grupo. A Geometria não era a matéria favorita de Matilde, no entanto, revelava não ter muitas dificuldades na sua aprendizagem.

Os alunos do grupo II nunca tinham trabalhado com tarefas de exploração e investigação. Luís era um aluno interessado e empenhado, perspicaz e participativo. Achava a Geometria uma matéria importante e gostava de a estudar. Nelson era empenhado, mas um pouco distraído, era participativo nas discussões com a turma e colaborativo nos trabalhos de grupo e tinha um poder de argumentação razoável, embora apresentasse algumas dificuldades em termos de comunicação escrita. Gostava de estudar Geometria. Pedro era um aluno com grande sentido de humor, muito distraído, pouco organizado e com muita dificuldade em termos de comunicação escrita. Não gostava de estudar Geometria, por não ter jeito para desenhar.

Contexto pedagógico. A experiência de ensino decorreu em aulas de 90 minutos da disciplina da Matemática A, no ano letivo 2010/2011. Os alunos realizaram, em grupo, várias tarefas de natureza exploratória e investigativa. Neste artigo, serão objeto de análise duas dessas tarefas: *Investigação com Quadriláteros* e *Sólidos Platónicos Truncados* (Anexo I). A primeira foi realizada com auxílio do programa de geometria dinâmica *Geometer's Sketchpad* (GSP) e pretendia que os alunos investigassem o tipo de quadrilátero que se obtém quando se unem os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero inicial qualquer e que estabelecessem relações entre os dois quadriláteros. Foi adaptada de Coxford, Burks, Giamati e Jonik (1993). Decorreu durante duas aulas e meia e era a segunda tarefa de exploração e investigação que os alunos realizavam. A segunda foi realizada com auxílio do *Cabri 3D* e tinha por objetivo que os alunos estabelecessem relações entre as propriedades dos sólidos platónicos truncados e as dos sólidos originais. Foi adaptada das propostas elaboradas pela equipa do projeto Explorar e Investigar para Aprender Matemática (2001). Decorreu durante duas aulas e era a quinta tarefa que os alunos realizavam.

As aulas em que foram realizadas as tarefas compreenderam três momentos distintos: (i) a apresentação da tarefa pela investigadora; (ii) desenvolvimento da tarefa pelos alunos e (iii) discussão de resultados no grupo turma.

Métodos de recolha de dados. A recolha de dados foi realizada através da observação, de entrevistas e da análise documental. Estas são segundo Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (2005) as técnicas que estão normalmente associadas à investigação qualitativa.

A observação foi participante ativa, uma vez que o papel de observador foi desempenhado pela investigadora, que trabalhou em assessoria com a professora da turma e interagiu com os indivíduos sujeitos a observação com a finalidade de recolher dados sobre as suas ações, opiniões e perspetivas. Ocorreu no contexto natural onde se desenvolveu a investigação e foi efetuada sobre a forma de registo escrito de notas pela investigadora, após a interação com os alunos ou a observação da interação entre os alunos e entre estes e a professora e complementada com o registo áudio e vídeo, de modo a obter informações mais reais e completas da dinâmica da sala de aula.

No final da experiência, realizou-se uma entrevista semiestruturada a cada um dos dois grupos que são objeto de estudo de caso, com o objetivo de esclarecer alguns pontos do trabalho realizado e obter informações mais detalhadas sobre a opinião dos alunos em relação à experiência. Esta entrevista, embora obedecendo a um guião (Anexo II) previamente preparado, de perguntas abertas, foi flexível permitindo uma recolha de dados num ambiente natural de conversa, deixando os participantes falar livremente sobre os seus pontos de vista.

Recorreu-se, ainda, à análise de documentos escritos produzidos pelos alunos. Este foi um meio para obter dados mais significativos, sobre a mobilização de conhecimentos e a compreensão de processos usados pelos alunos na realização das tarefas de exploração e investigação.

Análise de dados. A análise de dados foi realizada em duas fases. A primeira ocorreu durante a recolha dos dados, foi realizada a partir do visionamento das gravações vídeo de cada aula, compatibilizando-as com as gravações áudio e da transcrição integral das mesmas. Durante a transcrição, foram registados alguns comentários sobre o que foi observado e tomadas notas que referenciavam episódios mais importantes. Na segunda fase, procedeu-se a uma nova leitura de todo o material existente referente aos grupos-caso e procuraram-se regularidades e padrões para se elaborar uma lista de codificação/categorização, que fosse ao encontro do objetivo de investigação.

A apresentação dos dados foi, assim, efetuada através de um sistema de categorias que emergiu dos próprios dados e teve por base o referencial teórico. A estrutura adotada compreende três categorias: Exploração inicial e formulação de questões; formulação e teste de conjeturas; justificação e prova. Tendo sido consideradas, para além das notas de registo da investigadora, para a primeira categoria as transcrições das gravações das aulas e das entrevistas de grupo; para a segunda as transcrições das gravações das aulas e os documentos escritos produzidos pelos alunos e para a terceira, as transcrições das gravações das aulas e das entrevistas e as produções dos alunos relativas ao trabalho desenvolvido.

Apresentação de resultados

Exploração inicial e formulação de questões

Os enunciados das tarefas foram entregues aos alunos e optou-se por não fazer a leitura, uma vez que estes estavam claros, deixando assim, que os alunos iniciassem a sua exploração com mais autonomia. Apenas lhes foi recordada a importância do registo, do trabalho que iam desenvolvendo, para a discussão de resultados no grupo turma. Na tarefa *Investigação com Quadriláteros*, os alunos começaram por ler o enunciado da primeira questão e, de seguida, por representar um quadrilátero com auxílio do *GSP*, com o intuito de dar uma resposta. Não procuraram clarificar o foco da investigação, exploraram questão a questão, sem as relacionar entre si e sem tentar entender a investigação como um todo. Apesar da segunda questão ser aberta, os alunos não formularam questões a investigar de forma explícita e usaram o modo *afirmativo* como se pode observar pelo episódio seguinte:

Luís: Vamos tirar as medidas do de fora para vermos os perímetros.
Pedro: Não é preciso.
Nelson: Então temos que estabelecer relações com o de fora, temos que fazer.
Pedro: Está bem.
Nelson: Vamos também fazer a área do de fora.
(…)
Pedro: Também podemos ver se tem [alguma relação] entre os lados.

Avançaram algumas ideias para procurar relações entre um quadrilátero qualquer e o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos desse quadrilátero mas não usaram o modo *interrogativo*. O mesmo se verificou com as alunas do grupo I. Com base na observação das representações construídas e na sua manipulação, foram formulando várias conjeturas e, ao longo desse processo, iam referindo por exemplo: "Vamos ver outra coisa, podemos ver as medidas dos lados"; "Vamos agora às áreas".

Na tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*, verificou-se alguma evolução. Os alunos de ambos os grupos para além de definirem estratégias de organização e registo de dados, revelaram preocupação em relacionar as observações iniciais com o foco da investigação, como se pode verificar pelo diálogo seguinte ao iniciarem a exploração da tarefa:

Matilde: É a tua vez de apontar. [Diz Matilde para Francisca].
Francisca: Pomos faces, vértices e arestas, não é?
Diana: É, e temos que comparar e também vamos ter que comparar nos outros, diz aqui na [questão] 2.
(…)
Matilde: Podemos já ver relações, para as faces, já vamos adiantando e percebendo.
Francisca: Pois, pode ser. 6 são do cubo e depois as outras são as que foram cortadas, que são 8. São as faces do inicial mais o número de cortes.

Os alunos, à medida que iam estudando cada um dos sólidos, não se limitaram a fazer comparações entre os elementos de um sólido original e do truncado mas procuraram, desde logo, estabelecer relações entre esses elementos no sentido de as generalizar. Porém, continuaram a não formular questões de forma explícita.

Na entrevista quando foram questionados acerca da formulação de questões para investigar, os alunos referiram:

Luís: Nós estávamos habituados a responder logo. E por isso, por exemplo quando queríamos ver relações pensávamos, bom, vamos ver com perímetros e começávamos a ver como devíamos fazer.

Nelson: Íamos fazendo, mas não nos lembrávamos disso das questões.
Pedro: Como disse o Luís, nós estávamos habituados a ver os exercícios e responder logo.

Os alunos associaram a falta de preocupação em relação à formulação de questões à falta de hábito. O facto de estarem habituados a um ensino em que as tarefas que lhes são propostas estão completamente formuladas terá contribuído para a dificuldade e falta de preocupação em formular questões e em procurar estabelecer objetivos de pesquisa.

Formulação e teste de conjeturas

Os alunos de ambos os grupos, depois de construírem um quadrilátero e de unirem os pontos médios dos lados consecutivos desse quadrilátero, com base na observação de um número limitado de exemplos, obtidos através de manipulações restritas da construção, avançaram algumas conjeturas relativamente ao tipo de quadrilátero que obtiveram: "Parece um quadrado"; "É um trapézio" ou "É sempre um retângulo". Os alunos manifestaram alguma preocupação em testar as conjeturas, como se pode observar pelo diálogo mantido entre as alunas do grupo I relativo à terceira conjetura:

Diana: Primeiro vamos medir. Tem os lados iguais dois a dois.
Francisca: E tem ângulos de 90º?
Diana: Não sei.
Matilde: Vamos então ver se é um retângulo.
Diana: Temos que medir os ângulos, primeiro.
Matilde: A figura tem todas as propriedades de um retângulo. Lados iguais dois a dois e ângulos de 90º.
Diana: Não é, olhem este já dá 98,7º.
Matilde: Como isso é possível se tem os lados iguais dois a dois?
Francisca: Se for inclinado é um paralelogramo.

As alunas refutaram a conjetura e formularam uma nova: "É um paralelogramo". Realizaram vários testes, arrastaram um dos vértices do quadrilátero inicial e iam observando os valores das medidas do comprimento dos lados e das amplitudes dos ângulos do quadrilátero inscrito. Tiveram o cuidado de registar a conjetura que foi refutada e apresentar um contraexemplo, como mostra a figura 2.

Conjecturas:

1. Obtivemos um rectângulo porque a figura tem todas as propriedades deste quadrilátero.

Conjectura inválida, pois a figura não tem ângulos de 90º.

m $\overline{AB}$ = 1,69 cm	m∠DCA = 87,31°
m $\overline{DC}$ = 1,69 cm	m∠CAB = 92,69°
m $\overline{BD}$ = 3,73 cm	m∠BDC = 92,69°
m $\overline{CA}$ = 3,73 cm	m∠DBA = 87,31°

Figura 2 — Registo feito pelas alunas do grupo I para uma das conjeturas que formularam

Ao estabelecerem relações entre os dois quadriláteros, as alunas, com base na manipulação da construção feita, formularam a conjetura: "As diagonais do quadrilátero inicial são paralelas aos lados do inscrito" que, depois de realizarem alguns testes e de alguma discussão, foi reformulada. Formularam novas conjeturas algumas das quais foram refutadas aquando do teste, como por exemplo: "A razão dos perímetros é constante". Esta conjetura foi avançada pelas alunas com base num número muito reduzido de movimentos dos vértices do quadrilátero inicial. Quando este número aumentou, a conjetura foi refutada. Contudo, e apesar de terem registado uma ou outra conjetura que tinha sido refutada, esta conjetura não foi registada. Os alunos de ambos os grupos mostraram alguma tendência para registar as conjeturas que lhes pareciam válidas, desvalorizando as que se revelaram falsas apresentando, assim alguma dificuldade em entender que essas não constituem erros, mas fazem parte de uma fase do trabalho investigativo. Esta dificuldade foi mais evidente no caso do grupo II.

Nesta tarefa, muito embora a organização dos dados necessários para a formulação das primeiras conjeturas fosse facilitada pelas potencialidades do *GSP*, os alunos conseguiram tomar decisões importantes relativamente à formulação e teste de conjeturas. Com base numa primeira análise dos dados, formularam conjeturas e geraram mais dados de modo a poderem confirmá-las, arrastando um dos vértices do quadrilátero inicial e observando alguns valores das medições obtidas através do *GSP*, que finalmente foram organizados de forma a tornar mais evidente a sua validade. Pode-se dizer que os alunos mostraram preocupação em testar as conjeturas e, para isso, terá contribuído não só a facilidade com que o *GSP* permite gerar dados mas também a discussão final da tarefa realizada na aula anterior, na qual os alunos se aperceberam da importância do teste das conjeturas e naturalmente, as sucessivas chamadas de atenção por parte da professora e da investigadora.

Na tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*, os alunos do grupo II pela observação do cubo truncado e com base em raciocínio aritmético, sem efetuar a contagem avançaram as primeiras conjeturas que relacionavam o número de faces, vértices e arestas do cubo truncado com os elementos do cubo:

> Nelson: As faces são 6 mais esses cortes. Quantos vértices tem o cubo?
> Luís: Tem 8.
> Nelson: Pronto, vai ter 8 e 6, 14 faces. É ou não é?
> Pedro: O quê?
> Nelson: 14 faces.
> Luís: O número de vértices é as faces que estão truncadas.
> (…)
> Pedro: 8×3, quanto é 8×3? 8×3 é... 24, tem 24 vértices. Um triângulo tem 3 vértices e 8×3 dá 24.
> Luís: Agora arestas.
> Pedro: Isso é um bocado mais complicado.
> Luís: Arestas tem mais 24, acho eu. 8×6?

Depois de mais alguma discussão em torno do número de arestas do cubo truncado e da sua relação com elementos do cubo, apresentaram então as conjeturas que se mostram na figura 3.

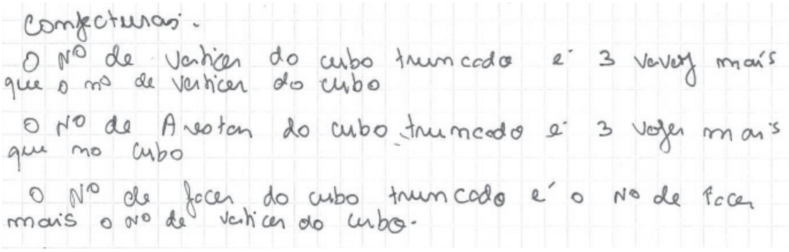

Conjecturas:
O Nº de Vertices do cubo truncado é 3 vezes mais que o nº de vertices do cubo
O Nº de Arestas do cubo truncado é 3 vezes mais que no cubo
O Nº de faces do cubo truncado é o Nº de faces mais o nº de vertices do cubo.

Figura 3 — Conjeturas apresentadas pelo grupo II para o caso do cubo truncado

Os alunos fizeram o estudo para os restantes sólidos platónicos e verificaram que no caso do tetraedro regular, estas relações se mantinham. O mesmo não aconteceu para o octaedro e, então, as conjeturas referentes ao número de vértices e de arestas foram reformuladas, tendo ficado "o número de vértices do octaedro truncado é 4 vezes mais do que no octaedro" e "o número de arestas no octaedro truncado é 4 vezes mais do que no octaedro". Continuaram o estudo para o dodecaedro e icosaedro e formularam conjeturas genéricas como se pode observar na figura 4.

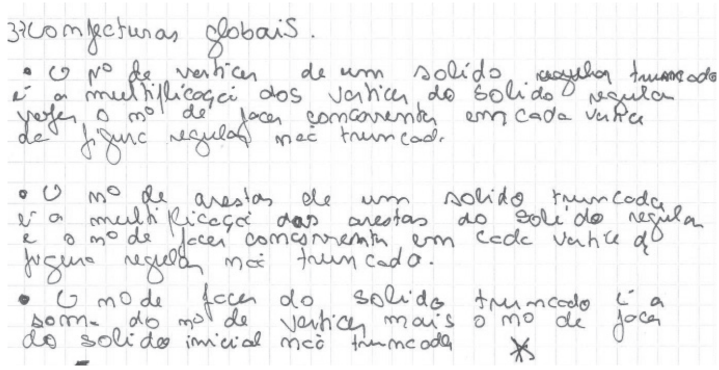

3) Conjecturas globais.
• O nº de vertices de um sólido regular truncado é a multiplicação dos vertices do sólido regular vezes o nº de faces concorrentes em cada vertice da figura regular não truncada.
• O nº de arestas de um sólido truncado é a multiplicação das arestas do sólido regular e o nº de faces concorrentes em cada vertice da figura regular não truncado.
• O nº de faces do sólido truncado é a soma do nº de vertices mais o nº de faces do sólido inicial não truncado

Figura 4 — Conjeturas genéricas estabelecidas pelo grupo II

A partir das conjeturas que tinham formulado para cada um dos sólidos platónicos, os alunos procuraram generalizá-las para todos, só que, como não tinham feito o teste para todos os casos, não se aperceberam que a conjetura que relacionava o número de arestas do sólido truncado com elementos do sólido original não era válida. Só quando procuraram justificá-la é que se aperceberam disso.

Verificou-se alguma tendência para os alunos não realizarem o teste para casos em que lhes parecia que as conjeturas iriam resistir a esse teste e, noutras situações, aceitarem a conjetura com base num número reduzido de testes.

As alunas do grupo I tiveram mais cuidado com o teste das conjeturas. Através da análise dos casos particulares, exploraram as analogias que iam observando e escreveram conjeturas genéricas como mostra a figura 5.

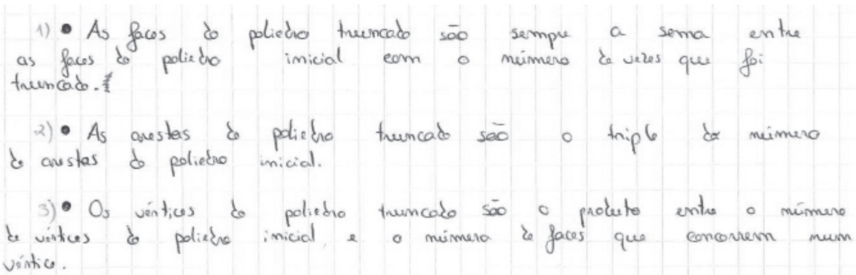

1) • As faces do poliedro truncado são sempre a soma entre as faces do poliedro inicial com o número de vezes que foi truncado.
2) • As arestas do poliedro truncado são o triplo do número de arestas do poliedro inicial.
3) • Os vértices do poliedro truncado são o produto entre o número de vértices do poliedro inicial e o número de faces que concorrem num vértice.

Figura 5 — Conjeturas genéricas formuladas pelo grupo I

Justificação e prova

A justificação e a prova de conjeturas nem sempre estiveram presentes no trabalho dos alunos. Na primeira questão da tarefa *Investigação com Quadriláteros* era pedido para provarem a conjetura que estabelecessem relativamente ao tipo de quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer, mas os alunos do grupo II apenas apresentaram uma justificação baseada na perceção visual e na observação de algumas medições obtidas pelo *GSP*. Tendo registado o que se mostra na figura 6.

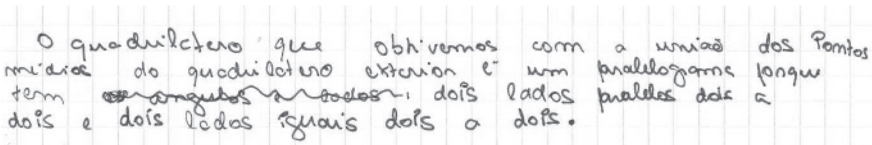

O quadrilátero que obtivemos com a união dos Pontos médios do quadrilátero exterior é um paralelogramo porque tem ~~ângulos e todos~~, dois lados paralelos dois a dois e dois lados iguais dois a dois.

Figura 6 — Resposta apresentada pelo grupo II para a questão 1 da tarefa

As alunas do grupo I tentaram provar que o quadrilátero que se obtém unindo os pontos médios dos lados consecutivos de qualquer quadrilátero é um paralelogramo, "traçando paralelas", ou seja, efetuaram os procedimentos no *GSP* para traçar um reta paralela a um dos lados do paralelogramo e que passasse por um ponto do lado oposto e, como essa reta "passou por cima do lado", então, para as alunas, estava provado que os lados eram paralelos considerando, assim, a função da prova apenas como verificação. A investigadora solicitou às alunas que tentassem procurar razões lógicas que justificassem a sua conjetura, mas elas não conseguiram avançar qualquer ideia para o fazer. Não tinham presente algumas propriedades geométricas envolvidas. Optou-se, então, por fazer a prova em grande grupo, uma vez que os restantes alunos também não tinham conseguido. A investigadora sugeriu, então, que representassem uma das diagonais do quadrilátero inicial, ficando este dividido em dois triângulos. Perante a sugestão apresentada, Matilde foi ao quadro e fez um desenho semelhante ao da figura 7.

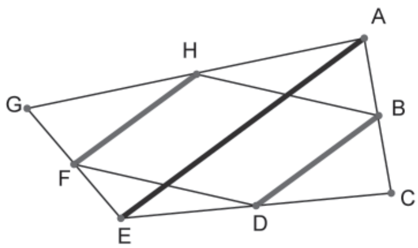


Figura 7 — Representação semelhante à que Matilde fez no quadro

Os alunos foram apresentando algumas ideias para se provar que os lados DB e FH são paralelos, como se pode observar pela seguinte transcrição:

Joaquim: O de fora ficou dividido em dois triângulos.
Pedro: Dois lados do quadrilátero inscrito são paralelos à diagonal [do quadrilátero inicial].
Investigadora: Porquê?
Nelson: Porque o lado do quadrilátero inscrito foi obtido através dos pontos médios.
Matilde: Este triângulo [DCB] e este [EAC] são semelhantes.
Luís: Têm um ângulo comum.

Os alunos acabaram por justificar que os triângulos DCB e EAC são semelhantes porque "dois lados são proporcionais e o ângulo por eles formado é comum". A investigadora questionou-os: "O facto de os triângulos serem semelhantes prova que os lados DB e EA são paralelos?". Matilde afirmou: "Neste caso sim porque estão na mesma posição". Francisca acrescentou: "Podemos ver por aquela propriedade que vimos na última aula". Foi então recordada a proposição de Euclides e Matilde disse de imediato:

> Agora é fácil porque, nós vimos que este [lado DB] é paralelo à diagonal, não é? E por outro lado este [lado FH] também é paralelo à mesma diagonal, pela tal propriedade, porque é a mesma coisa, estes pontos [F e H] também são pontos médios, então os dois lados também são paralelos.

A argumentação de Matilde convenceu os colegas e Carlos afirmou: "Agora traçávamos a outra diagonal e pelo mesmo processo mostrávamos que os outros dois [lados FD e HB] também eram paralelos". Os alunos foram avançando ideias relevantes que, com alguma orientação por parte da investigadora, permitiram realizar a prova.

Na questão dois da mesma tarefa, os alunos de ambos os grupos conjeturaram que a medida da área do quadrilátero inicial era o dobro da medida da área do quadrilátero inscrito, realizaram alguns testes, mas não sentiram necessidade de apresentar qualquer justificação. O facto de terem realizado alguns testes e verificado que a relação se mantinha invariante por arrastamento de um dos vértices do quadrilátero inicial era suficiente para os alunos. Não sentiram a necessidade da justificação nem da prova, como aliás se pode depreender pela afirmação de Luís quando a investigadora explicou, aquando da discussão final, que era necessário provar a conjetura: "Então, mas quando arrastamos a razão dava sempre 2". Os alunos ainda não tinham compreendido o *estatuto* de uma conjetura. Só justificavam as conjeturas se solicitado no enunciado ou pedido pela professora ou pela investigadora.

Para o estudo dos casos particulares de quadriláteros, os alunos apenas procuraram justificar as conjeturas com base na aparência visual e nas propriedades de cada quadrilátero, que eram confirmadas através das medições que obtinham com o *GSP*. A figura 8 mostra a justificação apresentada pelo grupo I para o caso do losango.

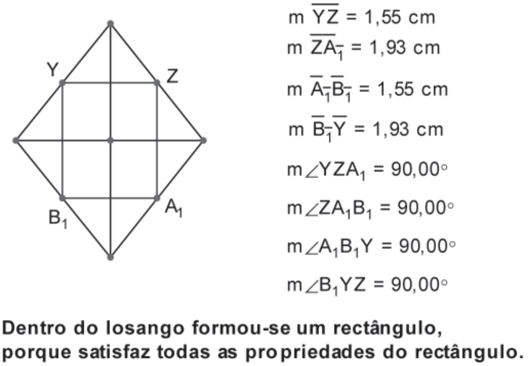


Figura 8 — Representação e justificação apresentadas pelo grupo I para o caso do losango

A prova das conjeturas foi realizada em grande grupo, com alguma orientação da investigadora, uma vez que os alunos apresentaram dificuldades em concretizá-la.

Na tarefa *Sólidos Platónicos Truncados*, a procura de justificações plausíveis por parte dos alunos para as suas conjeturas foi mais evidente. Por exemplo, as alunas do grupo I conjeturaram que o número de arestas de um sólido truncado era o triplo do número de arestas do sólido original e tentaram encontrar razões válidas para a justificar:

Matilde: Agora temos que ver o porquê, do vezes 3.
Francisca: Porque concorrem 3 faces.
Matilde: Vamos fazer num que não concorram 3.
(…)
Matilde: Dá em todos o triplo, mas agora de onde vem o 3?
Francisca: Deve haver uma forma de justificar.
Diana: Em cada vértice concorrem 3 arestas.
Francisca: É sempre vezes 3 porque em cada vértice concorrem 3 arestas.
Matilde: Não estou satisfeita. Isso não chega, temos que encontrar uma razão lógica que explique porque concorrem 3 arestas.

Diana: Mas achas que está mal?
Matilde: Não está mal, mas…
Francisca: Pois e nós pusemos o triplo das arestas, temos que partir das arestas do primeiro [sólido inicial].

As alunas insistiram, mas não conseguiram encontrar argumentos válidos que justificassem a conjetura. Foi na discussão em grande grupo que a conjetura foi justificada. Nesta tarefa, as conjeturas foram justificadas com base na visualização dos sólidos iniciais e em raciocínio aritmético.

As alunas consideraram que justificar as conjeturas foi um trabalho difícil. Na entrevista, referiram:

Matilde: Explicar o porquê foi difícil.
Diana: É, tivemos mais dificuldades em justificar as conjeturas. Formular é mais fácil um bocadinho, justificar é mais difícil.
Investigadora: Porquê?
Francisca: Porque às vezes é difícil arranjar justificações para aquilo que vemos e outras vezes até tínhamos ideias, mas depois para as escrevermos era complicado.
Matilde: Mas, acho que evoluímos porque tornou-se mais comum, isso de explicar e argumentar e eu acho que isso das investigações está-me a fazer muito mais perguntar as coisas, porque é que é assim, em Matemática e mesmo em Física e Química.

De facto, observou-se uma evolução positiva ao longo da experiência, relativamente à preocupação das alunas em procurar explicações e justificação para as suas conjeturas. Matilde salientou que o trabalho com investigações contribuiu para ela tentar procurar "os porquês", mesmo noutras disciplinas, o que é muito positivo.

Também os alunos do grupo II, quando lhes foi perguntado que dificuldades sentiram no trabalho com as tarefas realizadas responderam:

Luís: Justificar. Nós vimos a olho e depois para encontrar justificações e escrevermos é mais difícil.
Pedro: É, fazíamos as coisas, mas depois dizer porquê é difícil.
Luís: Também por não sabermos as regras todos da matemática dificultou o nosso trabalho, porque quando é o professor a explicar a matéria ele vai dizendo quais as regras e aqui não, nós é que temos que descobrir e ver as relações.
(…)
Nelson: Custou porque não estávamos habituados, mas assim ficamos com a certeza se o que parece está certo ou não, e aprendemos melhor. Aprendemos que temos que justificar tudo o que fazemos.
Pedro: Nós não estávamos habituados e ao princípio foi mais difícil porque nunca tínhamos trabalhado com investigações (…). Mas, as aulas assim são mais interessantes.

Os alunos referiram que sentiram dificuldades em justificar as suas conjeturas e que essas dificuldades estavam relacionadas, por um lado, com a falta de hábito em trabalhar com este tipo de tarefas e, por outro lado, com o desconhecimento de algumas "regras matemáticas". Contudo, consideraram que aprenderam "melhor" e que as aulas de realização de tarefas de exploração e investigação "são mais interessantes".

Conclusões

Vários autores salientam que na atividade investigativa é importante começar por uma exploração inicial que permita clarificar a questão ou situação e colocar questões a investigar (*e.g.* Martins *et al.*, 2002; Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999). Os resultados empíricos analisados neste trabalho sugerem que os alunos não dão muita importância a esta fase da atividade investigativa. Na primeira tarefa não procuraram clarificar o foco da investigação, tal como no estudo de Brocardo (2001), os alunos exploraram questão a questão sem muitas vezes as relacionar, revelando assim dificuldades em entender a investigação como um todo. Na segunda tarefa, aos alunos começaram a procurar relacionar as explorações iniciais com o objetivo de investigação e a ideia de que era importante ler todo o enunciado para procurar clarificar o foco de investigação foi evidenciada.

A formulação de questões a investigar foi um processo com uma presença muito reduzida na atividade dos alunos. Após a realização de alguma exploração inicial, os alunos não formularam questões de forma explícita, usaram o modo *afirmativo* em vez do *interrogativo*. Para eles, o facto de terem ou não formulado questões não parecia ser relevante, o que interessava era dar a resposta. Estes dados são consistentes com resultados de vários estudos que destacam a formulação de questões como um aspeto que se reveste de particular dificuldade para os alunos (Brocardo, 2001; Diezmann *et al.,* 2001). Tal como é sublinhado pelos alunos do grupo II na entrevista, o facto de estarem habituados a realizar tarefas completamente formuladas, terá contribuído para a dificuldade e falta de preocupação em formular questões e em procurar estabelecer objetivos de pesquisa.

A formulação de conjeturas teve lugar em qualquer uma das duas tarefas realizadas pelos alunos. Foi, de entre todos os processos, o que surgiu mais naturalmente. Mesmo antes de qualquer exploração inicial emergiam as primeiras conjeturas sob a forma de afirmações que eram confirmadas ou refutadas posteriormente. No entanto, na primeira tarefa, os alunos formularam as conjeturas com base na análise de um ou dois casos e à semelhança do observado noutras investigações (Brocardo, 2001; Henriques & Ponte, 2008; Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999), a ideia dos alunos de que as tarefas matemáticas implicam a procura de respostas/conclusões levou-os a considerar as conjeturas como conclusões após um número reduzido de testes. As conjeturas só eram explicitadas se consideradas como conclusões. O trabalho continuado e principalmente os momentos de discussão em grande grupo da primeira tarefa contribuíram para que os alunos começassem a compreender o *estatuto* de uma conjetura e, na última tarefa, as conjeturas, em geral, eram testadas e justificadas.

Os alunos formularam conjeturas com base na observação empírica e na manipulação de representações e construções de polígonos e sólidos geométricos, na perceção visual de objetos geométricos e em raciocínio aritmético e geométrico. Observou-se que o processo de formulação de conjeturas teve maior presença na tarefa em que os alunos recorreram a um maior número de exemplos particulares, percebendo-se uma forte relação entre o processo de especialização e a formulação de conjeturas, tal como é realçado por Mason *et al.* (1988).

Após a formulação de uma conjetura ela tem que ser testada. Este processo teve presença nas duas tarefas, embora em algumas situações o teste se confinasse a um número reduzido de casos. Estes resultados são consistentes com os de outras investigações (Brocardo, 2001; Henriques & Ponte, 2008). Os alunos não revelaram dificuldades em realizar o teste, no entanto, nalguns casos o facto de realizarem um ou dois testes levou-os a assumir conjeturas que se mostraram falsas aquando da procura de argumentos que as validassem. A realização do teste permitiu aos alunos de ambos os grupos refinar e reformular algumas conjeturas, porém observou-se que o refinamento e reformulação de conjeturas não foi uma preocupação sempre presente na atividade dos alunos. Verificou-se que os alunos inicialmente não registavam a maior parte das conjeturas que se mostravam falsas, revelaram dificuldade em entender que a refutação e reformulação de conjeturas faz parte da atividade investigativa. Os alunos do grupo II só na fase final da experiência, é que mostraram preocupação em proceder ao registo das conjeturas que se vinham a revelar falsas.

O teste de conjeturas foi realizado através da experimentação e da geração de mais exemplos, manipulando as construções e obtendo medições com auxílio do *GSP*, ou manipulando sólidos geométricos com auxílio do *Cabri 3D* e fazendo raciocínio aritmético e geométrico.

A justificação de conjeturas gerou dificuldades aos alunos e nem sempre esteve presente na sua atividade. Diversos estudos têm mostrado que os alunos por si não sentem necessidade de justificar nem provar as suas conjeturas (Ponte, Ferreira, Brunheira *et al.*, 1999; Rocha, 2003). Os dados recolhidos apontam no mesmo sentido. Numa fase inicial, os alunos não sentiam a necessidade de justificar nem provar as suas conjeturas. A justificação só foi apresentada se explicitamente solicitada no enunciado da tarefa ou pedida pela professora ou pela investigadora. O facto de uma conjetura ter resistido a alguns testes foi suficiente para a considerarem válida. A observação dos desenhos e dos dados empíricos gerados pelo *GSP* permitia identificar os quadriláteros pelas suas propriedades e, por isso, a prova não lhes parecia necessária. Todavia, na discussão em grande grupo, aquando da realização da prova de algumas conjeturas, os alunos de ambos os grupos avançaram ideias relevantes para a concretização da mesma.

Com o decorrer da experiência, esta atitude foi-se alterando. Na segunda tarefa os alunos de ambos os grupos evidenciaram preocupação em justificar as suas conjeturas. Procuraram compreender o porquê de certas conjeturas se mostrarem verdadeiras e tentaram encontrar argumentos lógicos que as pudessem validar, apesar de em alguns casos não o terem conseguido e ser necessária alguma orientação e questionamento por parte da investigadora.

Os dados analisados evidenciam que a justificação e a prova de conjeturas são processos que envolvem dificuldade para os alunos. Aliás, esta constatação é de resto referida pelos próprios alunos. A falta de hábito em procurar justificar as suas ideias e asserções aliada a uma certa falta de conhecimentos poderão explicar esta dificuldade.

A realização de tarefas de exploração e investigação envolve vários processos de raciocínio complexo, que requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte dos alunos (Ponte & Matos, 1996) — a exploração inicial e a formulação de questões, a formulação e o teste de conjeturas e a procura de argumentos que possam validar as que resistem a sucessivos testes. Estes processos foram utilizados pelos alunos na sua atividade com tarefas de natureza exploratória e investigativa, contudo constatou-se que a sua presença não foi igual nas duas tarefas e que os alunos revelaram mais dificuldade nuns do que noutros. Constatou-se, ainda, que o trabalho continuado com este tipo de tarefas contribuiu para um melhor entendimento da atividade investigativa.

Deste trabalho emergem ainda alguns aspetos relevantes a considerar quando se propõem aos alunos tarefas de exploração e investigação. É importante que o enunciado da tarefa forneça alguma indicação aos alunos, no sentido de os levar a formular as suas próprias questões para investigar e a justificar ou provar as suas conjeturas, pelo menos até que os mesmos manifestem uma certa compreensão do trabalho investigativo. Uma vez que a formulação de questões e a justificação e prova de conjeturas são processos da atividade investigativa que parecem estar relacionados com os hábitos de trabalho dos alunos. É de salientar ainda que a prova de conjeturas é para os alunos um aspeto complexo da atividade matemática e por isso, requer alguma persistência por parte do professor. Realça-se aqui a relevância dos momentos de discussão em grande grupo, pois, para além de proporcionarem ótimas oportunidades de partilha e debate de resultados, tornam-se fundamentais para provar conjeturas que envolvam raciocínios mais complexos.

Bibliografia

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153–167). Lisboa: Projeto MPT e APM.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática. Seminário de Vila Nova de Mil Fontes 1988: Edição Comemorativa*. Lisboa: APM.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *Mathematics Teacher*, *88*(1), 48–54.

Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspetives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: D. Reidel.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 5–24). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula da Matemática: Um projeto curricular no 8.º ano*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. & Yevdokimov, A. (2007). The conjecturing process: Perspetives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, *5*(1), 55–72.

Coxford, A., Burks, L., Giamati, C. & Jonik, J. (1993). *Geometria a partir de múltiplas perspetivas. Normas para o currículo e a avaliação em Matemática Escolar, coleção de adendas, anos de escolaridade 9–12*. Lisboa: APM.

Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Diezmann, C. M., Watters, J. J. & English, L. D. (2001). Implementing mathematical investigations with young children. In *Proceedings 24th annual conference of the Mathematics Education research group of Australasia* (pp. 170–177). Sydney.

Equipa do projeto Explorar e Investigar para Aprender Matemática (2001). *Investigações matemáticas na sala de aula: propostas de trabalho. Geometria.* Lisboa: APM.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 25–48). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Goldenberg, P. (1999). Quatro funções de investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35–49). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 5–23.

Henriques, A. & Ponte, J. P. (2008). Atividades de investigação na aprendizagem de Análise Numérica. *Revista da Educação*, *16*(2), 5–32.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (2005). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I. & Pires, M. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 59–80). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos, no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 89–105). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1988). *Pensar matematicamente*. Madrid: Ministério de Educación y Ciencia e Labor.

NCTM (2007). *Princípios e normas profissionais para a Matemática escolar*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional. (Original em inglês publicado em 2000).

Oliveira, H., Segurado, I. & Ponte, J. P. (1999). Tarefas de investigação em Matemática: Histórias da sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 189–206). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Ponte, J. P. (2003a). Investigar, ensinar e aprender. *Atas do ProfMat 2003* (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003b). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In *O ensino da Matemática: Situação e perspetivas* (pp. 21–56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de trabalho de investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105–132.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. (1999). Investigando as aulas de investigações matemáticas. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133–151). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L. & Oliveira, H. (1999). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projeto MPT e APM.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119–138). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Rocha, C. (2003). *Uma experiência com atividades de investigação na aula de Matemática. Competências matemáticas, atitudes e conceções de dois alunos do 7.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto, Porto.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M. & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 88–106). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Segurado, I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2.º ciclo*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Yeo, J. B. W. (2007). Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment (Technical Report ME2007-01). Consultado em 21 de janeiro de 2011, em http://math.nie.edu.sg/bwjyeo/publication/MMETechnicalReport2007_MathematicalTasks_ME200701.pdf.

Yeo, J. B. W. & Yeap B. H. (2009). Investigating the processes of mathematical investigation. Paper presented at the 3rd Redesigning Pedagogy International Conference. Singapore. Consultado em 21 de janeiro de 2011, em http://math.nie.edu.sg/bwjyeo/publication/CRPPConf2009Paper_MIGames.pdf.

Yin, R. (2009). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks: Sage.

Anexo I

Tarefa — Investigação com Quadriláteros

Com auxílio do *software* "*The Geometer's Sketchpad*", construam um quadrilátero à vossa escolha. Marquem o ponto médio de cada um dos lados do quadrilátero que construíram e, em seguida, unam os pontos médios de lados consecutivos de modo a obter outro quadrilátero.

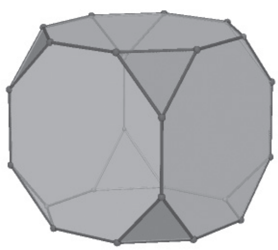
1. Que tipo de quadrilátero obtiveram? Provem a vossa conjetura.
2. Estabeleçam relações entre o quadrilátero inicial e o quadrilátero que obtiveram unindo os pontos médios dos lados consecutivos do quadrilátero inicial.
3. Investiguem agora o que acontece se o quadrilátero inicial for um paralelogramo obliquângulo? Um quadrado? Um losango? Um retângulo? Um trapézio? Um papagaio?

   Formulem e validem as vossas conjeturas.

Adaptada de Coxford, A., Burks, L., Giamati, C. & Jonik, J. (1993). Geometria a partir de múltiplas perspetivas. Normas para o currículo e a avaliação em Matemática Escolar, Coleção de Adendas, Anos de escolaridade 9–12. Lisboa: APM.

Tarefa - Sólidos Platónicos Truncados

1. Abram o ficheiro "*cubo truncado.cg3*", observem o poliedro que resultou do corte de cada vértice do cubo por um plano, obtendo polígonos regulares, tal como mostra a figura.

   Quantos vértices, arestas e faces tem o cubo truncado? Comparem esses dados com os do cubo original.

   Nota 1: Para rodarem a figura pressionem o botão direito do rato, aparece o símbolo  e com o botão do rato pressionado movimentem-no.

2. Façam o mesmo estudo para os restantes sólidos Platónicos.

   Nota 2: Abram um novo ficheiro, na ferramenta  escolham o poliedro regular que pretendem estudar e representem-no. Selecionem o plano base, pressionem o botão direito do rato e escolham esconder/mostrar, para esconderem o plano.

3. Qual a relação entre os elementos do sólido original e do sólido truncado? Encontrem uma justificação para cada relação encontrada.

4. No caso do cubo truncado, as faces correspondentes às secções são triângulos. Analisem o que acontece nos outros poliedros truncados.

Adaptada das propostas elaboradas pela equipa do projeto Explorar e Investigar para Aprender Matemática (2001). Investigações matemáticas na sala de aula: propostas de trabalho. Geometria. Lisboa: APM.

Anexo II — Guião da entrevista aos alunos

Sendo uma entrevista semiestruturada, não se elabora um conjunto muito preciso de questões, são definidos alguns tópicos a abordar:

Opinião sobre a experiência e sobre as aulas de Matemática em que foram trabalhadas as tarefas de exploração e investigação.

Esclarecimento de alguns pontos que suscitaram o interesse da investigadora na resolução das tarefas.

Mais especificamente as questões a colocar são:

O que acharam das aulas em que foram trabalhadas as tarefas de exploração e investigação?

Que tipo de dificuldades sentiram no trabalho com tarefas de natureza exploratória e investigativa?

Gostaram de trabalhar em grupo? Porquê? O facto de trabalharem em grupo ajudou-vos de alguma forma a superar as dificuldades sentidas?

O trabalho desenvolvido ajudou-vos a comunicar e a argumentar os vossos raciocínios? Como?

A discussão no grupo turma ajudou-vos a superar dificuldades?

Resumo. Neste artigo procura-se compreender que dificuldades manifestam os alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade e como evoluem, na atividade desenvolvida em tarefas de exploração e investigação no âmbito da Geometria.

Optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa tendo por base o paradigma descritivo e interpretativo, seguindo a modalidade de estudo de caso. Os participantes foram dois grupos de alunos de uma turma do 10.º ano (com uma média de idade de 15 anos). Os dados foram recolhidos através da observação participante ativa, da análise documental e de entrevistas de grupo.

Os resultados da experiência sugerem que os alunos revelam dificuldades em entender alguns processos inerentes à atividade investigativa. A realização continuada deste tipo de atividade contribui para um melhor entendimento destes processos, sendo a formulação de questões aquele a que os alunos dão menor importância.

Palavras-chave: Tarefas de exploração e investigação; Dificuldades na atividade investigativa.

Abstract. This article seeks to understand what difficulties are students of a class of 10th year of schooling, and how to evolve, in activity developed in exploration and investigation tasks in geometry.

We opted for a qualitative methodology based on the descriptive and interpretative paradigm, following the case study mode. The participants were two groups of students in a 10th grade class (on average 15 years old). The data was collected through participant observation, documentary analysis and group interviews.

The results of the experiment suggest that students reveal difficulties in understanding some processes inherent in the investigative activity. The continuous accomplishment of this kind of activity contributed for to a better understanding of these processes and the formulation of questions that the students give less importance.

Keywords: Exploration and investigation tasks; Difficulties in investigative activity.

■■■

MARIA GORETE PIRES BRANCO
Professora de Matemática da Escola Secundária de Caldas das Taipas — Guimarães
gorete.branco@sapo.pt

(Recebido em setembro de 2012, aceite para publicação em abril de 2013)