Estratégias usadas por alunos do 7.º ano de escolaridade na exploração de padrões

Manuel de Sousa Pereira
Agrupamento de Escolas de Celorico de Basto

Introdução

Apesar da reconhecida importância do tema Álgebra na formação matemática dos alunos do ensino básico, muitas vezes existe um sentimento de insatisfação pela forma como alguns alunos reagem ao tema, pelo seu fraco desempenho e dificuldades que vão revelando (Oliveira, 2009). Destaca-se "a reconhecida dificuldade que a utilização do simbolismo algébrico representa para os alunos" (Oliveira, 2009, p. 84). O desinteresse e a desmotivação dos alunos para a Matemática poderão ter a ver, em numerosos casos, com dificuldades de compreensão da sua linguagem. Verifica-se geralmente a dificuldade dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra, com o surgimento de expressões algébricas no seu percurso escolar, o aproveitamento tem tendência a regredir.

A abordagem da Álgebra que tem sido feita na sala de aula não tem ultrapassado a fronteira da manipulação simbólica, a aplicação de propriedades no cálculo algébrico e sobretudo a memorização de regras e procedimentos, a qual é insuficiente para o desenvolvimento da compreensão da Matemática e do pensamento algébrico (Kaput, 1999; Ponte, Branco & Matos, 2009a). Atualmente começa a ser evidente e consensual que não é possível dissociar o ensino/aprendizagem da Álgebra em contexto, com compreensão e significado.

Assim sendo, é conveniente usar expressões algébricas para representar problemas, usando letras para designar incógnitas ou variáveis, e introduzir expressões com variáveis ligadas a um contexto. O conceito de variável, pela sua complexidade, justifica que os alunos explorem situações variadas em que surjam letras (nomeadamente, expressões algébricas e equações) e discutam os seus significados (Ministério da Educação [ME], 2007).

Também nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007) se defende a mesma perspetiva, afirmando-se que os "alunos deverão começar a compreender os diferentes significados e utilizações das variáveis, por meio da representação de quantidades numa diversidade de problemas e contextos" (p. 263).

Por outro lado, parece tornar-se cada vez mais evidente a importância do contributo dos padrões, na medida em que podem contribuir para uma maior motivação dos alunos e para aumentar a sua compreensão matemática (Vale & Pimentel, 2005). Segundo Ponte *et al.* (2009a) "a aprendizagem do trabalho com expressões algébricas faz-se em simultâneo com a aprendizagem das sequências, das funções e das equações, procurando-se assim que estas façam sentido para os alunos" (p. 77).

O programa de Matemática (ME, 2007) prevê o tratamento da temática dos padrões de forma explícita ao longo de todo o ensino básico. Dando suporte a esta presença constante dos padrões, há autores (*e.g.*, NCTM, 2007; Vale & Pimentel, 2005) que defendem a ideia de que o trabalho com padrões contribui para melhorar significativamente a compreensão da Álgebra. A exploração matemática na procura de padrões é um meio através do qual emergem conceitos matemáticos com significado e compreensão (Vale & Pimentel, 2009). Assim, as tarefas com padrões são manifestamente úteis na introdução à álgebra (Vale & Pimentel, 2005).

O trabalho com padrões é um excelente veículo para promover o pensamento sobre variáveis e funções. Permite aos alunos desenvolver a capacidade de estabelecer generalizações, um aspeto fundamental do raciocínio matemático. Além disso, promove o desenvolvimento da capacidade de fazer representações, quer através de diagramas e esquemas, quer usando a linguagem algébrica (Ponte, Matos & Branco, 2009b).

A aprendizagem da Álgebra envolve saber trabalhar com símbolos de forma significativa, mas trata-se de um processo que não é fácil nem linear. Muitos alunos sentem normalmente dificuldades quando tentam dar sentido a uma expressão algébrica, ou a uma letra nessa expressão, ou quando atribuem significados concretos às letras na transição da linguagem natural para a algébrica, ou quando tentam escrever simbolicamente uma generalização. Além disso, um aluno ensinado, por exemplo, para responder apenas a questões que evoquem a aplicação de um algoritmo, terá sérias dificuldades quando confrontado com questões que impliquem a compreensão e exploração de um conceito (Pereira & Saraiva, 2010).

Este artigo enquadra-se no âmbito de um estudo mais amplo, de implementação de uma intervenção de ensino no 7.º ano de escolaridade na lecionação do tópico *Sequências e Regularidades*. Apresentam-se os principais resultados do estudo de Pereira (2011), tendo como principal objetivo investigar as estratégias usadas pelos alunos em tarefas que envolvem a exploração de padrões, assim como as implicações de tais explorações para a aprendizagem da Álgebra ao nível da generalização. Para aprofundar e contextualizar o problema, definiram-se algumas questões orientadoras da investigação das quais, se abordam neste artigo, apenas as duas seguintes: 1. Que estratégias utilizam os alunos do 7.º ano de escolaridade em tarefas que envolvem a exploração de padrões?; e 2. Em que medida a exploração de padrões contribui para a aprendizagem da Álgebra ao nível da generalização?

Dificuldades na generalização de padrões

Os alunos têm dificuldades no seu trabalho inicial com padrões e regularidades e numa primeira fase não há alternativa ao uso da linguagem natural, seguindo-se, a pouco a pouco, a introdução de elementos simbólicos para desenvolver nos alunos o domínio da linguagem algébrica (Ponte, 2009). A maioria dos alunos perante atividades que envolvem a generalização de padrões figurativos utilizam uma abordagem numérica, e dessa forma podem manifestar insuficiências de resolução, obtendo generalizações incompletas ou uma lei de formação errada. Segundo Vale e Pimentel (2005), geralmente, os alunos que têm mais sucesso na generalização são os que utilizam uma abordagem exclusivamente figurativa ou mista (numérica e figurativa). Também Lannin (2005) refere que nas situações que permitem representações figurativas, ligando o problema com uma representação visual, aumenta a probabilidade de sucesso dos alunos. Portanto, inicialmente, os alunos devem realizar tarefas com uma conexão figurativa pois eles têm uma compreensão superficial das operações aritméticas que inibe o desenvolvimento de generalizações algébricas (Lannin, 2005).

Além disso, devem ser utilizadas tarefas de estrutura semelhante (por exemplo, variando a taxa de mudança ou o número inicial, o 1.º termo) para incentivar os alunos a refletirem sobre o poder matemático das estratégias de generalização, as várias justificações que apresentam e o tipo de justificações que são matematicamente aceitáveis (Lannin, 2005).

Descobrir e descrever generalizações está no cerne da atividade matemática (Kaput, 1999). "A generalização é a perceção de que determinada propriedade de determinado objeto não se apresenta como válida apenas para si, mas para uma coleção maior de objetos e entes matemáticos" (Silva & Domingos, 2010, p. 643). Para estes autores, a generalização nasce da identificação de características particulares dos objetos que passam a estar relacionados através de pontos comuns. Segundo Lins e Gimenez (1997), a generalização emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares. Rodrigues (2010) considera que a particularização e generalização fazem parte integrante do processo de pensar matematicamente, mas é a generalização que constitui a essência do que é a Matemática. Resultados específicos podem ser úteis por si próprios, mas só o resultado geral é que é caracteristicamente matemático. Se o desenvolvimento do pensamento matemático visa a generalização, esta baseia-se na particularização e, assim, a particularização e generalização são processos inseparáveis, desenvolvendo-se esta com a contínua interação entre ambas.

Para Alonso *et al.* (1993) o processo de generalização requer três fases bem diferenciadas: a *observação* para a descoberta de regularidades; a *descrição* da regularidade percebida e a *escrita* da regularidade em linguagem natural ou simbólica, combinando palavras e símbolos com desenhos e tabelas. Esta última fase traz grandes obstáculos aos alunos na medida em que os alunos têm dificuldades em expressar as suas ideias, agravadas pela precisão dos termos utilizados na construção frásica e pela expressão simbólica. Obter uma generalização de uma sequência figurativa por um raciocínio meramente numérico,

descorando as propriedades das figuras, adquire uma maior dificuldade se é necessário um manejo dos números e suas relações, que nem todos os alunos que aprendem Álgebra têm adquirido. A riqueza na experiência dos alunos com atividades de generalização pode permitir uma abordagem mais natural ao conceito de variável e, portanto, uma aproximação a uma Álgebra mais significativa.
Um dos aspetos da generalização envolve o exame de diferentes quantidades e descrever as relações entre os casos (as quantidades) para uma situação particular. Desenvolver uma compreensão das condições da variante (termos, variável dependente) e invariante (ordem do termo, variável independente) pode proporcionar significado de símbolos algébricos (Kaput, 1999).

Estratégias de generalização de padrões

Abordagens à generalização de padrões

Há aspetos matemáticos importantes a ter em conta no trabalho com sequências, como o facto da generalização de uma sequência poder ser representada usando palavras ou expressões algébricas e que para se chegar a uma generalização é, por vezes, muito útil recorrer a tabelas e figuras.

As estratégias usadas na resolução de questões envolvendo sequências podem ser *locais*, indicando como passar de um termo para o termo seguinte com base num processo recursivo; ou *globais*, estabelecendo-se uma relação de natureza geral que descreve toda a regularidade, a qual pode ser representada por palavras ou por uma expressão algébrica designada termo geral (Ponte et al., 2009b). Stacey (1989) usa os termos *generalização próxima* e *generalização distante*, referindo-se ao tipo de abordagem adotado na resolução.

> Neste contexto, a *generalização próxima* é utilizada para designar uma questão que pode ser resolvida passo-a-passo com um desenho ou através de contagem e a *generalização distante* designa uma questão que vai além de limites razoáveis da prática de abordagem passo-a-passo. (p. 150)

Outra ideia a ter em atenção é que nas sequências numéricas cujo termo geral (de ordem n) é do tipo $an+b$, com $a \neq 0$, a diferença entre termos consecutivos é constante. Além disso, duas expressões algébricas resultantes da generalização da mesma sequência podem ser equivalentes e, muitas vezes, há possibilidade de simplificar uma expressão algébrica, contribuindo assim para a compreensão da linguagem algébrica.

No caso das tarefas propostas aos alunos, elas podem envolver sequências de diversos tipos: algumas podem ter uma lei de formação explícita no enunciado; noutras situações a lei de formação está implícita, sendo inequívoca pelas condições dadas e há situações em que são dados alguns termos, podendo existir uma grande variedade de leis de formação.

Os alunos normalmente usam uma variedade de estratégias para a construção da relação funcional em que assenta o padrão. Rivera e Becker (2008) estabeleceram três tipos de estratégias empregues pelos alunos: (1) *numérica*, que utiliza apenas estímulos estabelecidos a partir do padrão listando uma sequência de números ou usando uma tabela para derivar a regra a partir daí, procurando relações aritméticas entre os valores das variáveis; (2) *figurativa*, que se aplica apenas quando se descreve a generalização do padrão utilizando diagramas, sendo a regra totalmente obtida a partir de indícios visuais estabelecidas diretamente a partir da estrutura dos dados, podendo-se recorrer à decomposição das figuras – termos; e (3) uma combinação de ambas as abordagens anteriores (*numérica* e *figurativa*).

De entre as estratégias numéricas, Bezuszka e Kenney (2008) identificaram três estratégias, que envolvem a recursão: (1) *comparação*, quando os termos de uma sequência de números dados são comparados com os termos correspondentes da uma outra sequência cujo regra já é conhecida; (2) *a substituição repetida*, onde cada um dos termos subsequentes de uma sequência numérica se exprime por indicação do termo imediato ao precedente (substituído por este); e (3) *o método das diferenças*, também conhecido como das diferenças finitas em Matemática (diferença entre termos), que é um algoritmo para encontrar fórmulas explícitas (que são expressões polinomiais).

De entre as estratégias figurativas, surge por um lado, a generalização construtiva e desconstrutiva. Uma generalização construtiva implica ver os termos de uma expressão algébrica, representando as partes da figura que não se sobrepõem num padrão figurativo (neste caso as fórmulas surgem com "adições"). A generalização desconstrutiva consiste em ver os termos de uma expressão algébrica que se referem às partes sobrepostas da figura num padrão figurativo (neste caso as fórmulas surgem com "subtrações" para excluir os objetos sobrepostos) (Becker & Rivera, 2006; Rivera & Becker, 2008; Rivera, 2010). A generalização desconstrutiva é a mais difícil de alcançar e por isso a construtiva é a mais utilizada pelos alunos (Rivera & Becker, 2008).

Por outro lado, Chua e Hoyles (2011), além destes dois tipos de estratégia figurativa, apresentam duas outras estratégias. Uma delas ocorre quando um ou mais componentes do diagrama original são reorganizados em algo mais familiar. Esta figura recém-reconfigurada, em seguida, apresenta uma estrutura do padrão que facilita a construção da regra funcional. A outra acontece quando o diagrama original é visto como parte de uma grande figura composta, a partir da qual a regra funcional é gerada subtraindo subcomponentes dessa figura composta.

Estratégias de generalização utilizadas em alguns estudos

Stacey (1989), num estudo sobre generalização utilizando padrões lineares da forma $f(n) = an + b$ com $b \neq 0$, em contexto figurativo e em contexto estritamente numérico, analisa e relata as respostas dos alunos com idades entre 9 e 13 a questões de generalização, documentando os modelos matemáticos que escolheram, as estratégias utilizadas na sua execução e as explicações que deram. Por exemplo, um dos problemas do estudo era a sequência numérica: 4, 10, 16, 22, ____, ____, ____, sendo pedido aos alunos para completarem os três espaços em branco; depois o centésimo termo e, finalmente, o enésimo termo, $S(n)$.

Neste estudo, observou-se uma substancial inconsistência na escolha do modelo adequado e os alunos que iniciaram corretamente a resposta adotaram frequentemente um modelo simples, mas incorreto, sobretudo nas questões envolvendo a generalização distante. Já os alunos que tinham realizado um curso de resolução de problemas, usando implicitamente um modelo linear, deram respostas consistentes com mais frequência e explicações mais frequentemente relacionadas com os padrões. Estes alunos pareciam entender de forma mais completa a relação entre os dados e a regra resultante da generalização.

Ao analisar as estratégias usadas pelos alunos, Stacey (1989) organizou-as em quatro categorias: *Contagem* — contagem a partir de um desenho para descobrirem o termo da sequência; *Diferença* — utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, multiplicando o número da diferença comum. a entre os termos e assumindo que é a adição repetida desse número a, o que conduz à expressão algébrica da generalização. $a \times n$; *Objeto Inteiro* (Whole-Object no original em inglês) — tomar um termo ou um múltiplo de um termo para unidade e usar múltiplos dessa unidade, ou seja, $S(m \times n) = m \times S(n)$, assumindo implicitamente a existência de uma relação de proporcionalidade direta; *Linear* — usando um padrão em que estão envolvidas tanto a multiplicação como a adição e em que os alunos reconhecem a ordem dessas operações, ou seja, implicitamente, usando um modelo linear $S(n) = an + b$ para o termo de ordem n.

O estudo de Lannin (2005) consistiu numa experiência de ensino com 25 alunos do 6.º ano (alunos de 11–12 anos) ao longo de 10 dias. Dos resultados do estudo salienta-se que, nas discussões com toda a turma, os alunos foram, em geral, capazes de apresentar generalizações adequadas e justificar o uso de exemplos genéricos. Os alunos que usaram esquemas geométricos (figurativos) foram mais sucedidos em fornecer argumentos gerais e justificações válidas; no entanto, durante as discussões em pequenos grupos, os alunos raramente justificaram as suas generalizações, recorrendo alguns deles a valores particulares com maior incidência do que a relações gerais. Os alunos tenderam a usar dois tipos de justificação: a justificação empírica e exemplos genéricos. Os quatro alunos-alvo do estudo geralmente utilizaram a justificação empírica para testar as suas regras, e continuaram a fazê-lo, apesar deste tipo de justificação ter ser sido considerada insuficiente durante a discussão com toda a turma. Nestes casos, a justificação empírica era geralmente devida a uma falta de conexão a um esquema geométrico (figurativo) que estabelecesse uma relação com o contexto.

Neste estudo, Lannin ao analisar as estratégias de generalização usadas pelos alunos organizou-as em duas categorias principais: explícitas e não-explícitas. As estratégias explícitas são as que permitem o cálculo direto de um determinado valor da variável dependente conhecido o valor da variável independente, enquanto as estratégias não-explícitas não permitem esse cálculo. Na categoria das estratégias explícitas, o autor incluiu ainda as três subcategorias de estratégias: *Objeto Inteiro*, *Tentativa-e-Erro* e *Contextual*; e na categoria das estratégias não-explícitas o autor inclui duas subcategorias de estratégias: *Contagem* e *Recursiva*.

A estratégia do *Objeto Inteiro*, já referida por Stacey (1989), consiste em usar uma unidade como parte, para construir uma unidade maior, utilizando a multiplicação num raciocínio de proporcionalidade direta (por exemplo: 3 maçãs custam 8 dólares, 9 maçãs custam 24 dólares). Neste caso, posteriormente à multiplicação, pode ou não haver necessidade de um ajustamento do resultado, para mais ou para menos (para , caso não se trate de uma situação de proporcionalidade direta), tendo em vista adequá-lo à situação. A estratégia *Tentativa-e-Erro* consiste em adivinhar uma regra, sem ter em conta por que essa regra pode funcionar. Normalmente, isso envolve experiências com várias operações e números fornecidos na sequência. A estratégia *Contextual* consiste na construção de uma regra relativa a técnicas de contagem baseada em informações figurativas ou numéricas fornecidas na sequência. A estratégia *Contagem*, também já referida por Stacey (1989), consiste em desenhar uma imagem ou construir um modelo para representar a situação e contar o atributo desejado. A estratégia *Recursiva* acontece quando o aluno descreve uma relação entre termos consecutivos da sequência para determinar os termos subsequentes.

Num estudo posterior, Lannin, Barker e Townsend (2006) relatam as estratégias de generalização algébrica utilizadas por oito alunos do 5.º ano (10–11 anos de idade) e os fatores que parecem influenciar essas estratégias. Neste estudo, com base nas respostas dos alunos, foram identificadas quatro categorias de estratégias: *Explícita*, *Objeto Inteiro*, *Partição* (*Chunking*) e *Recursiva*. A estratégia *Explícita* consiste na descoberta de uma regra que permita efetuar o cálculo imediato de qualquer valor da variável dependente (termo), dado o valor da variável independente (ordem). A estratégia *Partição* consiste num raciocínio recursivo com "saltos" (por segmentos), ou seja, em vez de usar um raciocínio termo a termo, o aluno desenvolve um padrão recursivo através da construção de uma unidade para os valores conhecidos do atributo desejado, sendo o recurso a um raciocínio recursivo a forma mais expedita de encontrar o termo pretendido. A estratégia *Recursiva* ocorre quando o aluno descreve uma relação entre valores consecutivos da variável dependente (termos).

Na estratégia do *Objeto Inteiro* os alunos devem aprofundar a compreensão do raciocínio proporcional e reconhecer que este método, muitas vezes, não conduz ao resultado desejado (devendo ser efetuado o devido acerto do resultado para não levar a conclusões erradas). Além disso, as estratégias usadas anteriormente noutros problemas e/ou limitações na perceção da situação-problema podem levar os alunos a continuar a usar estratégias ineficientes ou erradas (Lannin *et al.*, 2006).

No estudo de Alvarenga (2006), com alunos do 5.º ano (10–11 anos), nas estratégias de generalização, os alunos trabalharam em conjunto informações geométricas (figurativas) e numéricas. Nas diferentes resoluções, os alunos nunca recorreram a abordagens exclusivamente numéricas, separando-se das características específicas das tarefas (as propriedades figurativas) e evitando transformar os problemas em meras sequências numéricas, tendo sido mais utilizado o método das diferenças finitas (designado *Diferença* por outros autores) para descrever o padrão. Esta estratégia revelou-se eficaz na maioria das respostas por não exigirem o cálculo de termos muito distantes. Os alunos também usaram os métodos de contagem, de proporcionalidade direta e linear, e utilizaram essencialmente o método de contagem no cálculo dos termos mais próximos porque a maioria dos padrões das tarefas eram figurativos.

No estudo de Matos (2007), agora com alunos do 8.º ano de escolaridade (13–14 anos), verificou-se que a exploração de padrões constituiu uma tarefa nova para os alunos e, talvez por isso, as estratégias utilizadas inicialmente foram a *Contagem* e a *Covariação* (análise do modo como a variação dos valores de uma variável produz a variação nos valores da outra). Após algumas experiências, os alunos alargaram o leque das suas estratégias, adotando estratégias aritméticas (designadas por Rivera e Becker (2008) por estratégias numéricas) e também estratégias figurativas, baseando-se numa relação de correspondência entre as variáveis (termos e ordens), o que lhes permitiu generalizar o padrão (estratégia *Explícita*). Inicialmente exprimiam-se em linguagem natural, mas depois do contacto com a Álgebra formal revelaram à-vontade no uso da simbologia.

Também no estudo realizado por Branco (2008), com alunos do 7.º ano (12–13 anos), os resultados obtidos indicam que nos padrões repetitivos os alunos utilizaram a estratégia *Contagem* e também a estratégia *Explícita*. Nas explorações iniciais verificou-se que a estratégia seguida pela maioria dos alunos foi a *Contagem* e poucos alunos revelaram a capacidade de expressar as regularidades que encontraram utilizando a estratégia *Explícita*.

Nos padrões lineares (em que o termo de ordem n pode ser expresso na forma $an+b$, com $a \neq 0$) os alunos utilizaram a estratégia *Aditiva*, processo recursivo pouco prático na descoberta de termos de ordem elevada quando apenas se conhecem os primeiros termos da sequência. Após as experiências iniciais, apesar das dificuldades, os alunos usaram a estratégia *Explícita* com base na análise das propriedades das figuras (termos), indicando a relação entre a ordem da figura e o seu número de elementos em linguagem natural e alguns começam a utilizar a linguagem algébrica para traduzir a generalização expressa em linguagem natural. Porém, outros utilizaram a estratégia *Objeto Inteiro*, que não conduziu a uma generalização correta. De entre as várias estratégias usadas pelos alunos, a *Aditiva* e a *Explícita* foram as que mais se verificaram neste tipo de padrão.

No estudo de Santos e Oliveira (2008), com alunos do 5.º ano (10–11 anos), nas estratégias de generalização, os alunos inicialmente utilizavam as estratégias *Contagem*, *Recursiva* e até de *Objeto Inteiro*, mas no final da experiência pedagógica os alunos adotaram, tanto nas generalizações próximas como distantes, estratégias *Explícitas* na medida em que procuravam estabelecer uma relação direta entre a variável dependente (termo) e independente (ordem). Para além de se assistir a um desenvolvimento na escolha das estratégias de generalização, surgiram estratégias próprias que se foram tornando intencionais, direcionadas e formais.

Os alunos conseguiram generalizar padrões lineares, descrevendo em termos gerais as propriedades das figuras, estabelecendo relações matemáticas e representando-as através de expressões algébricas com significado, e expressaram as variáveis através de abreviaturas ou símbolos. Foram adquirindo uma maior flexibilidade ao nível do pensamento algébrico, uma vez que algumas das relações estabelecidas eram abandonadas em favorecimento de outras que levavam a uma generalização. Esta flexibilidade foi importante na identificação de relações funcionais e na compreensão dos alunos acerca do modo como poderiam efetuar raciocínios e operações reversíveis (determinar um valor de entrada (ordem) relativo a um valor de saída (termo)).

No estudo de Barbosa (2009), com base nas respostas de alunos do 6.º ano (11–12 anos), a autora identificou cinco categorias de estratégias: *Contagem*, *Termo Unidade* (designada *Objeto Inteiro* por outros autores), *Diferença*, *Explícita* e *Tentativa-e-Erro*. Estas categorias de estratégias já foram referidas em diversos estudos anteriores (*e.g.*, Stacey, 1989; Lannin, 2005; Lannin *et al.*, 2006). A estratégia *Termo Unidade* (*Objeto Inteiro*) foi subcategorizada em sem ajuste e com ajuste numérico ou contextual. A estratégia *Termo Unidade sem ajuste* consiste em considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade e a estratégia *Termo Unidade com ajuste numérico* consiste em considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade, fazendo-se seguidamente um ajuste do resultado com base em propriedades numéricas. Na estratégia *Termo Unidade com ajuste contextual* o ajustamento do resultado efetua-se com base no contexto do problema. A estratégia Diferença foi subcategorizada em recursiva e múltiplo da diferença sem ajuste ou com ajuste. A estratégia *múltiplo da Diferença sem ajuste* consiste em usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ser ajustado o resultado à sequência; enquanto na estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste* se efetua o ajustamento do resultado à sequência.

Dos resultados obtidos, Barbosa (2009) concluiu que as estratégias mais aplicadas pelos alunos foram a *Contagem* e a *Explícita*, sobretudo nas questões de generalização distante. Não se verificou a predominância da estratégia *Diferença*, de forma pouco frequente foi usada a estratégia *Tentativa-e-Erro* e raramente foi utilizada a estratégia *Objeto Inteiro*.

No estudo de Rivera (2010) verificou-se que, em relação à atividade com padrões lineares figurativos, os alunos do 9.º ano, com idade média de 14 anos, revelaram uma disposição para a utilização de uma combinação de estratégias figurativas (visuais) e numéricas. Neste estudo, o autor usa os termos: *aditiva construtiva standard* para o tipo de generalização algébrica que se aplica ao caso de todos os padrões lineares do tipo $y = x + b$, em que o termo de ordem x é y e se adiciona a constante b de figura para figura; *aditiva construtiva não-standard*, que é a versão expandida da expressão da generalização na sua forma não simplificada, incluindo apenas adições de componentes das figuras; *multiplicativa construtiva standard*, em que a expressão da generalização está na sua forma irredutível, $y = ax + b$, para um termo y de ordem x; *multiplicativa construtiva não-standard*, que é a versão expandida da expressão da generalização na sua forma não simplificada, incluindo multiplicações e adições de componentes das figuras; e *desconstrutiva*, em que a expressão da generalização pode estar na sua forma irredutível ou não e inclui subtrações para excluir os objetos sobrepostos.

Finalmente, Radford (2010) argumenta que as generalizações algébricas de padrões não são caracterizadas pelo uso de notações simbólicas, mas sim pela maneira geral como é tratada a generalização, que se desenvolve em três níveis: (i) *factual*, onde o foco continua a ser a generalização a nível do material, no plano concreto, e é o gesto e o ritmo conduzido para mostrar a generalização; (ii) *contextual*, onde o foco da generalização é descritivo e mais abstrato (em relação ao anterior), sendo utilizada uma linguagem orientada para explicar a generalização com referências ao contexto; e (iii) *simbólica*, onde a notação algébrica é usada para descrever a generalização.

Metodologia

O objetivo principal do estudo consistiu em descrever e compreender as estratégias de generalização usadas por alunos do 7.º ano de escolaridade na exploração de padrões, e em que medida os padrões contribuem para a aprendizagem e compreensão da linguagem algébrica, ao nível da generalização, tendo em conta que os alunos não tinham qualquer experiência anterior com padrões.

Os alunos encontravam-se na fase de transição da Aritmética para a Álgebra, iniciando a aprendizagem de diversos conceitos em simultâneo, nomeadamente o de variável e o de relação funcional (relação implícita entre o termo e a respetiva ordem). Assim, procurou-se também identificar e caracterizar as dificuldades e erros dos alunos na exploração de padrões.

No estudo foi usada uma metodologia de investigação qualitativa, seguindo-se o paradigma descritivo e interpretativo de um estudo de caso (Yin, 2009), especificamente uma turma do 7.º ano de escolaridade (12–13 anos de idade), para estudar um fenómeno em toda a sua complexidade, no seu contexto natural e com a intenção de analisar e descrever particularidades, como é o caso das estratégias de generalização de padrões usadas pelos alunos. Estas estratégias de generalização foram estudadas numa intervenção de ensino, que teve por principal objetivo proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem significativa sobre diferentes aspetos da Álgebra, designadamente: desenvolver nos alunos a capacidade de analisar padrões e regularidades; descrever relações e representá-las simbolicamente e promover a compreensão do significado dos símbolos através do estudo de padrões.

Participantes

Nas aulas intervieram os 21 alunos da turma, designados por Ai, com $1 \leq i \leq 21$, e a sua professora de Matemática. Além destes, o investigador desempenhou o papel de observador participante, dialogando ocasionalmente com os alunos, pedindo-lhes alguns esclarecimentos acerca do que faziam, interagindo no sentido de aprofundar o seu conhecimento através de questões e incentivando-os no desenvolvimento do seu trabalho, o que possibilitou o aprofundamento das perspetivas dos participantes.

Na intervenção de ensino, que se prolongou por 11 aulas do ano de 2010, de 90 minutos cada, em que foram exploradas um total de 11 tarefas de padrões, os alunos trabalharam em sete grupos de três elementos e foram acompanhados mais de perto dois desses grupos, designados por grupos-alvo, com o propósito de aprofundar o estudo. Na generalidade dos grupos, teve-se em conta que fossem constituídos por elementos com aproveitamento heterogéneo e que fossem mistos (rapazes e raparigas).

Para selecionar os alunos dos dois grupos-alvo, para além da predisposição para participar, seguiram-se alguns critérios, designadamente a razoável capacidade de comunicação oral e escrita e a elevada assiduidade.

As aulas compreenderam dois momentos distintos: num primeiro momento, o trabalho autónomo dos grupos na resolução das tarefas; e num segundo momento, a apresentação e discussão na turma dos resultados obtidos nos grupos.

Método de recolha de dados

Os dados recolhidos resultaram da observação realizada na sala de aula e das resoluções e relatórios escritos produzidos pelos alunos na realização das tarefas. Nos relatórios, os alunos descreveram a atividade desenvolvida na realização das tarefas, descrevendo as dificuldades sentidas e a forma como as superaram, as ideias e os processos de raciocínio que conduziram à generalização e as formas de representação.

No estudo efetuaram-se gravações de todas as aulas em que decorreu a intervenção de ensino, áudio-gravando o trabalho dos dois grupos-alvo durante o trabalho autónomo e o vídeo-gravando o grupo-turma quando toda a turma se envolvia na apresentação, discussão e síntese da exploração realizada nos grupos.

Tratamento e análise de dados

Os dados relativos às estratégias usadas pelos alunos na exploração dos padrões foram organizados por tarefa, conjugando a informação das resoluções escritas, o relatório e as notas do investigador. Essa conjugação, em algumas ocasiões, revelou-se fundamental para o esclarecimento do pensamento e da estratégia envolvida na resolução do grupo. Seguidamente, na classificação das estratégias de generalização recorreu-se às categorias usadas no estudo de Barbosa (2009): *Contagem*, *Diferença*, *Objeto Inteiro*, *Tentativa-e-Erro* e *Explícita*. Por sua vez, a estratégia *Diferença* foi dividida em três subcategorias: *recursiva*, *múltiplo da Diferença sem ajuste* e *múltiplo da Diferença com ajuste*; e a estratégia *Objeto Inteiro* foi dividida em três subcategorias: *sem ajuste*, *com ajuste numérico* e *com ajuste contextual*.

Além da classificação das estratégias de generalização utilizadas pelos grupos na obtenção das suas respostas, foi verificada a natureza da generalização algébrica — categorizando-a em construtiva ou desconstrutiva (Rivera & Becker, 2008; Rivera, 2010), apurou-se o nível da generalização — situando-a na instanciação aritmética ou algébrica, e esta última subdividida em três subcategorias — factual, contextual e simbólica (Radford, 2010).

Incluíram-se na categoria *Outra* as respostas erradas em que não se compreendia a origem dos erros e que não envolviam as estratégias referidas.

Apresentação de resultados

Em termos da apresentação dos resultados, recorreu-se à estatística descritiva, nomeadamente a tabelas de frequências, e também se apresentam, a título de exemplificação, pequenos excertos das palavras, símbolos ou figuras usadas pelos alunos, de modo a tornar a descrição mais viva e permitir ao leitor julgar a adequação das inferências efetuadas.

Estratégias de generalização usadas pelos alunos

Em termos de resultados obtidos no estudo, apresenta-se o trabalho dos alunos em três tarefas de padrões (tarefas 6, 7 e 10), que foram realizadas em diferentes momentos da intervenção de ensino, e a síntese das estratégias de generalização usadas pelos alunos em todas as 11 tarefas exploradas.

Tarefa 6 – O Pomar

Um agricultor planta macieiras num padrão quadrangular. A fim de proteger as árvores do vento, planta coníferas à volta do pomar. Esta situação está ilustrada no diagrama abaixo representado, no qual se pode observar a disposição das macieiras e das coníferas para as primeiras quatro plantações.

X = conífera
• = macieira

```
                                    X X X X X X X X X
                                    X •   •   •   • X
                    X X X X X X X   X               X
                    X •       • X   X •   •   •   • X
        X X X X X   X           X   X               X
        X •   • X   X •   •   • X   X •   •   •   • X
X X X   X       X   X           X   X               X
X • X   X •   • X   X •   •   • X   X •   •   •   • X
X X X   X X X X X   X X X X X X X   X X X X X X X X X
```

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

a) Completa a tabela seguinte:

Número da figura	Número de macieiras	Número de coníferas
1	1	8
2	4	
3		
4		
…	…	…
n		

b) Existe alguma plantação com 256 macieiras? Em caso afirmativo, indica o número da figura que lhe corresponde.

c) Existe alguma plantação com 800 coníferas? Em caso afirmativo, indica o número da figura que lhe corresponde.

d) Existe um valor de *n* para o qual o número de macieiras é igual ao número de coníferas. Descobre esse valor e explica como pensaste para o encontrar.

e) Para a última plantação o agricultor dispõe de 440 macieiras. Se mantiver o padrão quadrangular, qual é o número máximo de macieiras, por fila, que pode plantar nesse terreno? E quantas macieiras sobram? Explica o teu raciocínio.

Tarefa adaptada de Ramalho, G. (2002).

Na tarefa 6, realizada na aula 6 da intervenção de ensino, apresenta-se um padrão figurativo de crescimento, com questões de generalização próxima e distante. Pretendia-se que os grupos procurassem e identificassem regularidades e as generalizassem, culminando na descrição da regra ou lei de formação da sequência em linguagem algébrica.

Na Tabela 1 apresentam-se as frequências absolutas das estratégias de generalização usadas pelos grupos e referem-se os tipos de generalização envolvidos nas diferentes questões.

Tabela 1 — Estratégias usadas pelos alunos na resolução da tarefa 6

Questões		Tipo de Generalização	Estratégias			
			D	TE	E	O
a)	Sequência das macieiras	Próxima	3	—	4	—
		Distante	—	—	7	—
	Sequência das coníferas	Próxima	7	—	—	—
		Distante	—	—	7	—
b)		Distante	—	6	1	—
c)			—	5	2	—
d)		Próxima	—	5	1	1
e)		Distante	—	7	—	—
Total			10	23	22	1

Estratégias: D — Diferença; TE — Tentativa e Erro; E — Explícita; O — Outra.

Pela Tabela 1 verifica-se que nas generalizações distantes da questão a) todos os grupos utilizaram a estratégia *Explícita*. A partir da questão b) inclusive, registou-se uma preferência acentuada pela estratégia *Tentativa-e-erro*, tendo sido a estratégia mais usada, seguida da estratégia *Explícita*. Na questão a), nas perguntas de generalização próxima da sequência das macieiras, em todas as respostas dadas pela estratégia *Diferença* foi seguida a subcategoria *Recursiva*; enquanto nas perguntas de generalização próxima da sequência das coníferas, em todas as respostas foi utilizada a subcategoria *múltiplo da Diferença sem ajuste*.

A questão a) inclui várias perguntas, umas envolvendo uma generalização próxima e outras envolvendo uma generalização distante. Ambos os grupos-alvo nas perguntas de generalização próxima na sequência das macieiras utilizaram a estratégia (*Diferença*) *Recursiva* ao continuarem a sequência com base na diferença entre termos consecutivos. O diálogo seguinte, do grupo-alvo G5, exemplifica isso mesmo.

A19: Da figura 1 para a 2 aumentou 3; é de 3 em 3 (…)

P: Será?

A12: Não é nada! Da primeira figura para a segunda aumentou 3, mas a seguir já não é 3 o aumento.

A15: Pois não (…)

A12: Até à figura 4 contamos: são 9 na figura 3 e na figura 4 dezasseis macieiras.

A19: Aumentou 5 da figura 2 para a figura 3; a seguir aumentou 7.

A12: Na figura 5 é 16+9 e na figura 6 é 25+11. (Aula 6, 17/11/2010)

Nas perguntas de generalização próxima da sequência das coníferas ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia (*Diferença*) *múltiplo da Diferença sem ajuste*, determinando a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado.

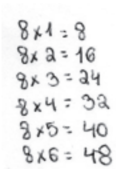


Figura 1 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão a) nas perguntas de generalização próxima da sequência das coníferas

Ainda nesta questão, ambos os grupos-alvo nas perguntas de generalização distante em ambas as sequências das macieiras e das coníferas utilizaram a estratégia *Explícita*. O grupo-alvo G5 na pergunta de generalização distante da sequência das macieiras chegou a $n \times n$, que é uma generalização algébrica, e na pergunta de generalização distante da sequência das coníferas chegou também a generalização algébrica através de um raciocínio indutivo.

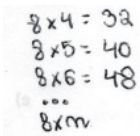


Figura 2 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão a) na pergunta de generalização distante da sequência das coníferas

Na questão b), envolvendo uma generalização distante, ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia *Tentativa-e-erro*, experimentando sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

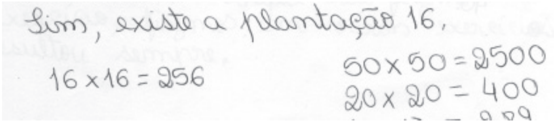


Figura 3 — Resposta do grupo-alvo G2 à questão b)

Na generalização distante da questão c) ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia *Tentativa-e-erro*.

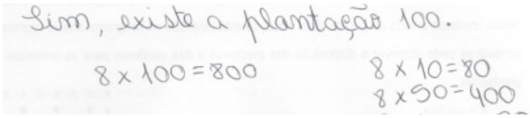


Figura 4 — Resposta do grupo-alvo G2 à questão c)

Na questão d), de generalização próxima, ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia *Tentativa-e-erro*.

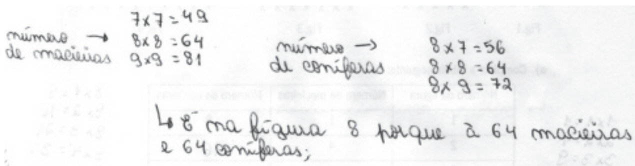


Figura 5 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão d)

Na generalização distante da questão e) ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia *Tentativa-e-erro*.

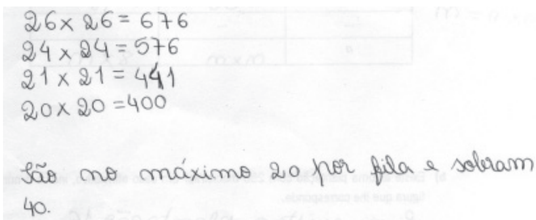


Figura 6 — Resposta do grupo-alvo G2 à questão e)

Durante a fase de trabalho autónomo, que se prolongou por cerca de 35 minutos, não surgiram dúvidas nem perguntas e não foi necessário dar explicações adicionais.

No período de discussão no grupo-turma, que durou cerca de 40 minutos, os grupos apresentaram as respostas dadas às questões, permitindo conhecer os resultados a que chegaram e as justificações que deram nas suas resoluções.

Verificou-se que os grupos, durante o trabalho autónomo, não recorreram à estratégia (*Objeto Inteiro*) *Sem ajuste*, que consiste em considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. Na questão a), na sequência das coníferas, o questionamento da professora levou a que um aluno adotasse essa estratégia.

P: Será que na sequência das coníferas podemos usar outra estratégia para completar a tabela, por exemplo, no caso da figura 6, com base em termos já encontrados?

A1: Na figura 3 há 24 coníferas, na figura 6 há 2×24, que dá 48 coníferas. (Aula 6, 17/11/2010)

Na questão b) verificou-se que o grupo G7 utilizou a estratégia *Explícita* ao descobrir uma regra, com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato da ordem da figura, conhecido o valor do termo correspondente, neste caso, recorrendo à raiz quadrada.

P: Alguém chegou à plantação 16 de outra forma?

A16: Pela raiz quadrada dá 16, porque $\sqrt{256}$ é 16, vi na calculadora. (Aula 6, 17/11/2010)

Em síntese, verificou-se nesta tarefa que os grupos recorreram maioritariamente às estratégias *Tentativa-e-erro* e *Explícita*. No caso da questão b), constatou-se que os grupos não recorreram muito à raiz quadrada.

Tarefa 7 – Tijoleiras

A Andreia que procurava tijoleiras para a entrada de sua casa, observou numa exposição a seguinte sequência de construções com tijoleiras brancas e pretas, dispostas do seguinte modo:

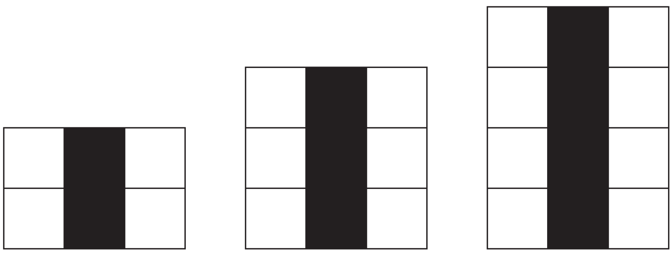


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

a) Completa a tabela seguinte:

Número da figura	Número de tijoleiras pretas	Número de tijoleiras brancas	Número total de tijoleiras
1	2	4	
2			
3			
4			
…	…	…	…
n			

b) Quantas tijoleiras, no total, há na figura 12? Explica a tua resposta.

c) Existe alguma figura da sequência que tenha, no total, 201 tijoleiras? Se existir, indica a ordem que lhe corresponde.

d) O Paulo sugeriu à Andreia que a expressão algébrica $(n+1)+(n+1)+(n+1)$ representa o número total de tijoleiras em cada figura. Concordas com ele? Explica a tua resposta.

e) A Laura, por sua vez, indicou a expressão algébrica $3(n+1)$. A expressão apresentada pela Laura estará correta? Explica a tua resposta.

f) Indica outras expressões algébricas que possam representar o número total de tijoleiras em cada figura.

g) Recorrendo à expressão algébrica da Laura, $3(n+1)$, determina:

1) Os termos de ordem 25 e 52. No contexto da situação apresentada nesta tarefa, o que representam os valores que obtiveste?

2) A ordem do termo da sequência que tem, no total, 297 tijoleiras.

Tarefa adaptada de Alonso, F. *et al.* (1993).

A tarefa 7 apresenta um padrão figurativo de crescimento, com questões de generalização próxima e distante e questões de manipulação algébrica. A expectativa com as questões de generalização era que os grupos procurassem e identificassem regularidades e as generalizassem, culminando na descrição da regra ou lei de formação da sequência em linguagem algébrica.

Na Tabela 2 apresentam-se as frequências absolutas das estratégias de generalização usadas pelos grupos e referem-se os tipos de generalização envolvidos nas diferentes questões.

Tabela 2 — Estratégias usadas pelos alunos na resolução da tarefa 7

Questões		Tipo de Generalização	Estratégias				
			C	D	TE	E	O
a)	Número de tijoleiras pretas	Próxima	3	4	—	—	—
		Distante	—	—	—	7	—
	Número de tijoleiras brancas	Próxima	3	4	—	—	—
		Distante	—	—	—	7	—
	Número total de tijoleiras	Próxima	3	3	—	1	—
		Distante	—	—	—	7	—
b)		Distante	3	1	—	3	—
c)		Próxima	—	—	3	4	—
g1)		Distante	—	—	—	7	—
			—	—	—	7	—
g2)		Distante	—	—	3	2	3
Total			12	12	6	45	2

Estratégias: C — Contagem; D — Diferença; TE — Tentativa e Erro; E — Explícita; O — Outra.

Observando a Tabela 2 verifica-se um elevado número de ocorrências de estratégias de carácter geral, pelo destaque da estratégia *Explícita*. Contudo, registam-se algumas ocorrências da estratégia *Contagem* e (*Diferença*) *Recursiva*. Na questão a), nas perguntas de generalização próxima da sequência das tijoleiras pretas, em todas as respostas dadas pela estratégia *Diferença* foi seguida a subcategoria *Recursiva*. Nesta questão, nas perguntas de generalização próxima das sequências das tijoleiras brancas e do total de tijoleiras, em todas as respostas foi utilizada a subcategoria *múltiplo da Diferença com ajuste*. O grupo que utilizou a estratégia *Diferença* na questão b) seguiu a subcategoria *Recursiva*.

A questão a) inclui várias perguntas, umas envolvendo uma generalização próxima e outras envolvendo uma generalização distante. O grupo-alvo G2 nas perguntas de generalização próxima nas três sequências das tijoleiras pretas, das brancas e do total utilizou a estratégia *Contagem*, contando os objetos das figuras ou desenhando figuras e contando os seus elementos. O relatório deste grupo permite concluir que usou essa estratégia para responder às perguntas de generalização próxima e que recorreu à estratégia *Explícita*, ao nível da generalização algébrica, para responder às perguntas de generalização distante nas três sequências.

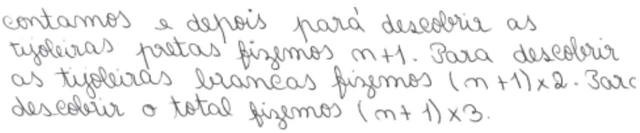

contamos e depois pará descobrir as tijoleiras pretas fizemos n+1. Para descobrir as tijoleiras brancas fizemos (n+1)x2. Para descobrir o total fizemos (n+1)x3.

Figura 7 — Resposta do grupo-alvo G2 à questão a) nas perguntas de generalização distante

O grupo-alvo G5, nas perguntas de generalização próxima, completou a tabela com base na estratégia (*Diferença*) *múltiplo da Diferença com ajuste*, usando a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo e fazendo o ajuste do resultado. O ajuste consistiu em adicionar uma, duas e três unidades ao resultado, respetivamente, nas sequências das tijoleiras pretas, brancas e total.

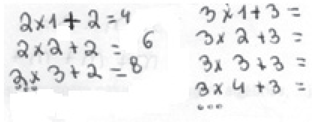


Figura 8 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão a) nas perguntas de generalização próxima das sequências das tijoleiras brancas e total de tijoleiras

No caso das generalizações distantes, o grupo-alvo G5 recorreu à estratégia *Explícita* nas três sequências, obtendo a resposta a partir de um raciocínio indutivo. Em todas as sequências a generalização algébrica é de nível simbólico (usa linguagem algébrica) e de natureza construtiva (a expressão algébrica representa as partes da figura que não se sobrepõem).

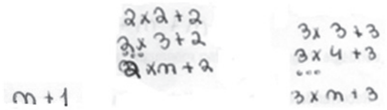


Figura 9 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão a) nas perguntas de generalização distante

Na generalização próxima da questão b), ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia *Explícita*, como se exemplifica no diálogo do grupo-alvo G5.

A15: Quantas tijoleiras no total há na figura 12? É o que diz aí …

A12: As pretas são 12 + 1; são 13.

A15: As brancas são o dobro; dá 26, 26 são brancas.

A19: O total é 39. Vou escrever então (…) (Aula 7, 19/11/2010)

Na questão c), envolvendo uma generalização distante, o grupo-alvo G2 recorreu à estratégia *Tentativa-e-erro*, enquanto o grupo-alvo G5 optou pela estratégia *Explícita*.

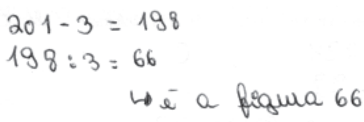


Figura 10 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão c)

A questão g) tem duas perguntas, a g1) e a g2), ambas de generalização distante. Na pergunta g1) ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia *Explícita*.

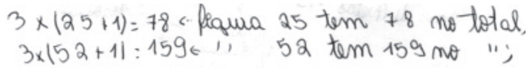

3 x (25 + 1) = 78 ← figura 25 tem 78 no total.
3x(52 + 1) : 159 ← " 52 tem 159 no ";

Figura 11 — Resposta do grupo-alvo G5 à pergunta g1)

Na generalização distante de g2), o grupo-alvo G2 recorreu à estratégia *Tentativa-e-erro*, confundindo a ordem com o termo.

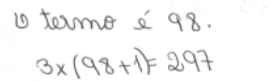

O termo é 98.
3x(98+1)= 297

Figura 12 — Resposta do grupo-alvo G2 à pergunta g2)

Já o grupo-alvo G5 não recorreu à expressão algébrica da Laura, dada no enunciado, como era pedido, utilizando a expressão algébrica descoberta pelo grupo, que é equivalente à dada.

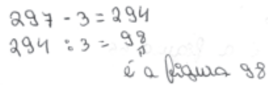

297 - 3 = 294
294 : 3 = 98
é a figura 98

Figura 13. — Resposta do grupo-alvo G5 à pergunta g2)

Relativamente às questões, d), e) e f), na d) ambos os grupos-alvo optaram por substituir valores na expressão algébrica dada no enunciado para verificarem se obtinham os valores já encontrados na questão a) para o total de tijoleiras ou para comparar os resultados.

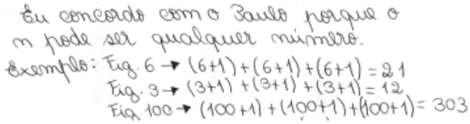

Eu concordo com o Paulo porque o
n pode ser qualquer número.
Exemplo: Fig. 6 → (6+1) + (6+1) + (6+1) = 21
Fig. 3 → (3+1) + (3+1) + (3+1) = 12
Fig. 100 → (100+1) + (100+1) + (100+1) = 303

Figura 14 — Resposta do grupo-alvo G2 à questão d)

Na questão e) também ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia a que tinham recorrido na questão anterior, fazendo substituições na variável e verificando se os resultados coincidem com os já calculados na questão a).

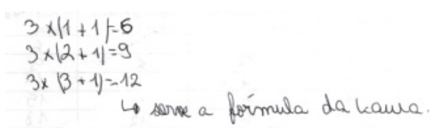
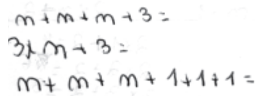

3 x (1 + 1) = 6
3 x (2 + 1) = 9
3x (3 + 1) = 12
↳ serve a fórmula da Laura.

Figura 15 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão e)

Finalmente, na questão f) o grupo-alvo G2 apresentou apenas a expressão algébrica descoberta pelo grupo na questão a), $(n+1)\times 3$, enquanto o grupo-alvo G5 indicou três expressões algébricas equivalentes, incluindo a que o grupo descobriu na questão a).



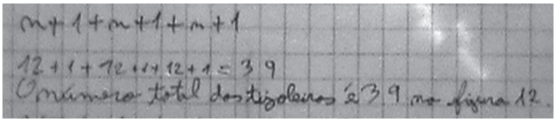
n+n+n+3 =
3×n+3 =
n+n+n+1+1+1 =

Figura 16 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão f).

Também nesta tarefa, durante a fase de trabalho autónomo, que se prolongou por cerca de 45 minutos, não surgiram pedidos de esclarecimento dos alunos sobre a tarefa e a sua resolução.

No período de discussão no grupo-turma, que durou cerca de 35 minutos, os grupos apresentaram e discutiram as respostas dadas e as justificações apresentadas.

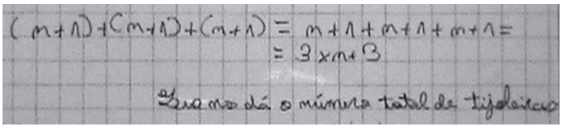
Verificou-se que na questão b), recorrendo à estratégia *Explícita*, surgiu a resposta da Figura 17, que já tinha sido descoberta pelo grupo G7 na questão a).



n+1+n+1+n+1
12+1+12+1+12+1 = 39
O número total dos tijoleiros é 39 na figura 12.

Figura 17 — Resposta do aluno A11 à questão b)

Na questão d), o aluno A16 decidiu-se pela simplificação da expressão algébrica dada, como se mostra na Figura 18.



(n+1)+(n+1)+(n+1) = n+1+n+1+n+1 =
= 3×n+3
Que nos dá o número total de tijoleiros

Figura 18 — Resposta do aluno A16 à questão 7d)

Em síntese, nesta tarefa verificou-se um elevado número de ocorrências da estratégia Explícita nas questões de generalização, podendo significar que a resolução de problemas de padrão melhora a capacidade de generalização dos alunos.

Tarefa 10 — Pontos

A Rita construiu a seguinte sequência de figuras com pontos:

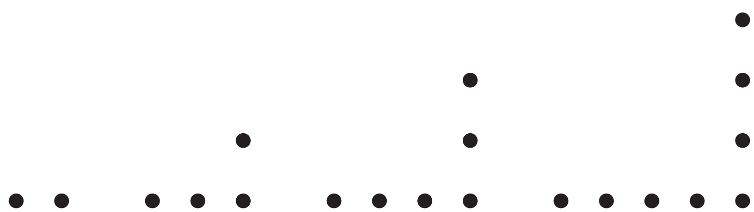


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

a) Completa a tabela seguinte:

Número da figura	1	2	3	4	5	…	n
Número de pontos	2					…	

b) Existe, nesta sequência, alguma figura com 200 pontos? Se existir, indica a ordem que lhe corresponde.

c) Calcula, sucessivamente, a soma dos pontos das duas primeiras figuras; das três primeiras figuras e das quatro primeiras figuras.

d) Calcula a soma dos pontos das seis primeiras figuras da sequência.

e) Escreve uma expressão algébrica que permita determinar a soma do número de pontos das n primeiras figuras da sequência.

f) Considera agora a sequência começando no segundo termo da sequência dada, ou seja, de termos: 4, 6, 8, 10, 12, … Escreve uma expressão algébrica do termo de ordem n desta sequência.

Tarefa adaptada de Alonso, F. *et al.* (1993).

Nesta tarefa 10 apresenta-se um padrão figurativo de crescimento, com questões de generalização próxima e distante e questões de manipulação algébrica. Com as questões de generalização e de manipulação algébrica desta tarefa perseguiam-se os mesmos objetivos da tarefa anterior.

Na Tabela 3 podem observar-se as frequências absolutas das estratégias usadas pelos grupos e indicam-se os tipos de generalização envolvidos nas diferentes questões.

Tabela 3 — Estratégias usadas pelos alunos na resolução da tarefa 10

Questões	Tipo de Generalização	Estratégias					
		C	D	TE	E	O	NR
a)	Próxima	2	5	—	—	—	—
	Distante	—	—	—	6	1	—
b)	Distante	—	—	4	3	—	—
c)	Próxima	2	5	—	—	—	
d)		2	5	—	—	—	
e)	Distante	—	—	—	3	3	2
f)		—	—	—	5	2	—
Total		6	15	4	17	5	2

Estratégias: C — Contagem; D — Diferença; TE — Tentativa e Erro; E — Explícita; O — Outra; NR — Não Resposta.

Pela Tabela 3 constata-se que os grupos recorrem mais frequentemente a estratégias gerais (estratégia *Explícita*), porém regista-se uma grande adesão à estratégia *Diferença*. Verifica-se também, embora residualmente, algumas ocorrências da estratégia *Contagem* e categoria *Outra*. Nas questões a), nas perguntas de generalização próxima, em todas as respostas dadas pela estratégia *Diferença* foi seguida a subcategoria *múltiplo da Diferença sem ajuste*. Nas questões c) e d), de generalização próxima, uma vez que todas as respostas foram dadas com base nas respostas dadas à questão a), também foram classificadas na subcategoria *múltiplo da Diferença sem ajuste*.

Na questão a), ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia (*Diferença*) *múltiplo da Diferença sem ajuste*, usando a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado.

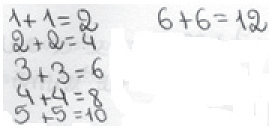


Figura 19 — Resposta do grupo-alvo G2 à questão a) nas perguntas de generalização próxima

Ainda nesta questão, na generalização distante ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Explícita*, chegando à generalização algébrica $n + n$, de nível simbólico, através de um raciocínio indutivo.

Na generalização distante da questão b) o grupo-alvo G5 utilizou a estratégia *Explícita*, enquanto o grupo-alvo G2 optou pela estratégia *Tentativa-e-erro*.

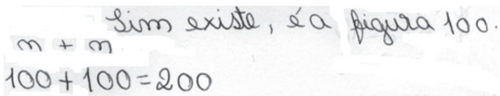


Figura 20 — Resposta do grupo-alvo G2 à questão b)

Na questão c), envolvendo uma generalização próxima, ambos os grupos-alvo, recorrendo à tabela completada na questão a) pela estratégia (*Diferença*) *múltiplo da Diferença sem ajuste*, efetuaram as adições necessárias com os valores encontrados em 10a).

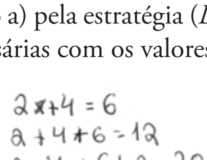


Figura 21 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão c)

Também na generalização próxima da questão d) ambos os grupos-alvo, recorrendo à tabela completada na questão a) pela estratégia (*Diferença*) *múltiplo da Diferença sem ajuste*, efetuaram a adição necessária com os valores encontrados em a).

$2+4+6+8+10+12=42$

Figura 22 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão d)

Na generalização distante da questão e) o grupo-alvo G5 utilizou a estratégia *Explícita*, chegando a uma generalização algébrica de nível simbólico. O grupo reuniu num "retângulo" de pontos 2×3 as duas primeiras figuras e utilizou o conceito de área para calcular o seu número de pontos; de seguida, construiu um "retângulo" de pontos 3×4 com as três primeiras figuras e indicou o seu número de pontos pelo mesmo raciocínio e, finalmente, descobriu por um raciocínio indutivo que a figura n tem $n\times(n+1)$ pontos. Nesta questão a resposta do grupo-alvo G2 foi classificada por Outra.

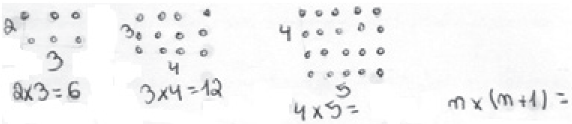


Figura 23 — Resposta do grupo-alvo G5 à questão e)

$(m\times6)+42=42$

Figura 24 — Resposta do grupo-alvo G2 à questão e)

Na questão f), envolvendo uma generalização distante, ambos os grupos-alvo usaram a estratégia *Explícita*, obtendo a resposta por um raciocínio indutivo.

$2\times1+2=4$
$2\times2+2=6$
$2\times3+2=8$
$2\times4+2=10$
$2\times5+2=12$
$2\times m+2$

$2\times m+2$ é a expressão algébrica do termo de ordem m.

Figura 25 — Resposta do grupo-alvo G2 à questão f)

Também nesta tarefa não surgiram perguntas dos alunos e a sua resolução estendeu-se por cerca de 45 minutos.

A discussão no grupo-turma, que durou cerca de 40 minutos, permitiu conhecer os resultados a que chegaram e justificações que deram nas suas resoluções. Nesta discussão, para além do que foi dito atrás, não se verificaram novos contributos matematicamente significativos.

Em síntese, verificou-se que os grupos recorreram mais frequentemente a estratégias de carácter geral, como a estratégia *Explícita*. Por outro lado, no relatório, quatro dos grupos referiram que não sentiram qualquer dificuldade na resolução da tarefa e os restantes indicaram apenas dificuldades pontuais, algumas das quais ultrapassadas com o apoio da professora.

Estratégias de generalização no conjunto de todas as tarefas

Resumem-se na Tabela 4 as frequências, em percentagem, de ocorrência das diferentes estratégias de generalização usadas pelos grupos em cada uma das tarefas e na totalidade das 11 tarefas exploradas pelos alunos nas aulas.

Tabela 4 — Percentagem de utilização das estratégias por tarefa e na globalidade das tarefas

Tarefa	Estratégias					
	C	D	TE	E	O	NR
1 – Números	71	—	—	11	18	—
2 – Polígonos	39	—	—	53	8	—
3 – Quadrados	5	12	12	64	7	—
4 – Palitos	10	44	8	25	13	—
5 – Ainda mais números	—	63	2	10	15	10
6 – O Pomar	—	18	41	39	2	—
7 – Tijoleiras	16	16	8	57	3	—
8 – As sequências da Ana	—	—	18	75	7	—
9 – Molduras	5	22	14	52	7	—
10 – Pontos	12	31	8	35	10	4
11 – As mensagens	—	23	3	60	11	3
Total	14	21	10	44	9	2

Estratégias: C — Contagem; D — Diferença; TE — Tentativa e Erro; E — Explícita; O — Outra; NR — Não Resposta.

Por observação da Tabela 4 conclui-se que na globalidade das tarefas cerca de um em cada dois grupos recorreram a estratégias gerais, nomeadamente à estratégia *Explícita*. Para além da pequena percentagem de grupos que não responderam, no caso das restantes estratégias de generalização salienta-se a *Diferença* e, em menor percentagem, a *Tentativa-e-Erro* e a *Contagem*.

Por outro lado, à medida que se progrediu na intervenção de ensino, verifica-se uma maior frequência na adesão à estratégia de generalização *Explícita*, o que é particularmente notório a partir sétima tarefa, inclusive.

Conclusões

Tal como referem Vale e Pimentel (2005), apesar de tarefas envolvendo a exploração de padrões como as da intervenção de ensino poderem dar significado à introdução de conceitos algébricos elementares, podem gerar alguma dificuldade sobretudo se os alunos não estiverem familiarizados em trabalhar com padrões.

Nos padrões figurativos de crescimento, verificou-se que os grupos geralmente completavam as tabelas, nas perguntas de generalização próxima, com base na análise das figuras apresentadas — primeiros termos das sequências, e uma vez organizados os dados nas tabelas, para descobrirem a regra ou lei de formação das sequências, geralmente abandonavam as figuras e ficavam-se por abordagens numéricas. O facto de não seguirem geralmente uma abordagem figurativa poderá dever-se à falta de hábito e à eventual dificuldade no raciocínio visual. Embora existam autores (*e.g.*, Alonso *et al.*, 1993) a referir que no caso das propriedades numéricas não estarem bem aprendidas, surgem dificuldades com as abordagens numéricas, no presente estudo os alunos optaram geralmente por ela, chegando a maioria dos grupos à regra ou lei de formação das sequências em linguagem algébrica, embora com alguma dificuldade e frequentemente usando um raciocínio indutivo.

Em termos gerais, nos padrões figurativos, nas questões de generalização próxima os grupos utilizaram as estratégias *Contagem* e *Diferença*, enquanto nas questões de generalização distante optaram geralmente pela estratégia *Explícita*, verificando-se nas últimas tarefas algumas ocorrências da estratégia *Tentativa-e-erro*. Uma conclusão evidente destes resultados é o facto de os alunos mudarem geralmente de estratégia consoante se tratava de uma questão de generalização próxima ou distante e que a estratégia *Explícita* ocorreu sobretudo nas generalizações distantes. Além disso, nestas questões, o raciocínio dos alunos evoluiu geralmente para uma regra de carácter geral, permitindo indicar de imediato um termo, dada a respetiva ordem, e vice-versa. Nas questões de generalização próxima, relativas aos padrões figurativos, em termos gerais, os alunos recorreram algumas vezes à estratégia *Contagem*.

Nos padrões lineares, os alunos utilizaram essencialmente generalizações algébricas construtivas, considerando os termos da expressão algébrica como representando as partes da figura que não se sobrepõem (as expressões surgem com “adições”). Também se verificou que os alunos não optaram geralmente pela estratégia *Objeto Inteiro*, tendo esta sido utilizada em momentos de discussão, ainda que raramente. Alguns grupos, em certas situações, ficaram-se pelo nível de generalização algébrica contextual descritivo e utilizaram uma linguagem orientada para explicar a generalização com referências ao contexto. Em geral, apesar das dificuldades, os alunos utilizando a linguagem algébrica para descrever a generalização, progrediram para o nível de generalização algébrica simbólica.

Na atividade dos alunos, procurou-se que a representação simbólica da generalização surgisse naturalmente e, para tal, as tabelas ajudaram a formalizar a análise e o trabalho realizado com as primeiras figuras apresentadas do padrão. Deste modo, as expressões faziam sentido por estarem associadas a contagens de objetos nas figuras que eles próprios contaram.

Em geral, é reconhecida nos alunos a dificuldade em exprimir as suas ideias e pensamentos, em discernir o essencial do acessório, tal como se verificou, por vezes, em algumas das respostas e na elaboração dos relatórios das tarefas.

Reconhecendo-se a possibilidade de utilização de abordagens de natureza diversa na resolução do mesmo problema, como estratégias numéricas, figurativas ou a combinação de ambas (Rivera & Becker, 2008), no presente estudo a maioria dos alunos na exploração das tarefas optou por transformar os problemas em sequências numéricas e trabalhar exclusivamente a partir dessas sequências, baseando os seus raciocínios em relações numéricas, descurando, em muitos casos, as propriedades figurativas na descoberta da regra ou lei de formação da sequência, tal como é referido por Vale e Pimentel (2005). Talvez isso se deva à sua preferência pelas propriedades numéricas em detrimento das propriedades figurativas, ao seu trabalho habitual nas aulas de Matemática, à falta de hábito na exploração de raciocínios figurativos e à resistência em desligarem-se da Aritmética aquando da resolução de problemas.

Na generalização de padrões, de um modo geral, os alunos compreenderam o uso da letra como símbolo para representar diversos números (ordens dos termos) e usaram-na para os representar, ou seja, usaram a letra como instrumento de generalização e como variável. Por outro lado, apesar de algumas dificuldades na compreensão da linguagem algébrica, evidenciadas pelos seus erros e dificuldades no seu uso, identificaram e analisaram expressões algébricas equivalentes resultantes da generalização do mesmo padrão por manipulação, outros por substituição da letra e alguns pela decomposição e análise das propriedades das figuras (termos). Deste modo, os alunos desenvolvem o sentido de símbolo e uma compreensão mais abstrata da letra (Kaput, 1999; Vale & Pimentel, 2009).

Nas situações onde era necessário construir uma relação funcional, relacionando a ordem do termo (variável independente) com o termo (variável dependente), em algumas tarefas, os alunos revelaram dificuldades em construir simbolicamente essa relação (generalização), talvez por serem confrontados com dois valores desconhecidos (o termo e a respetiva ordem) a variar em simultâneo (Alonso *et al.*, 1993). Estas dificuldades na escrita da expressão algébrica da generalização de uma sequência e das discussões que tiveram lugar nas aulas indiciam que grande parte dos alunos sentiu muita dificuldade na transição do concreto para o abstrato.

Observou-se que os alunos tinham sido pouco ou nada incentivados durante os anos anteriores na escrita matemática. Não estavam habituados a ter de explicar, tanto verbalmente como por escrito, as suas estratégias e procedimentos matemáticos e por que escolheram essas estratégias e procedimentos. Além disso, os alunos estão "formatados" num ensino-aprendizagem-avaliação tradicionais, privilegiando-se, essencialmente, os procedimentos e as rotinas, o que também não contribuiu para melhores desempenhos nos aspetos referidos.

Referências

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S., Ortiz, M., Riviere, V., & Veiga, C. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra*. Madrid: Editorial Sintesis.

Alvarenga, D. L. (2006). A exploração de padrões como parte da experiência matemática de alunos do 2º ciclo. (Dissertação de mestrado, Universidade do Minho). Lisboa: APM.

Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. (Tese de Doutoramento não publicada). Universidade do Minho, Braga.

Becker, J. & Rivera, F. (2006). Sixth graders figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, *2*, 95–101.

Bezuszka, S. J. & Kenney, M. J. (2008). The three R's: recursive thinking, recursion, and recursive formulas. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics — Seventieth Yearbook* (pp. 81–97). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Chua, B. L. & Hoyles, C. (2011). Secondary school students' perception of best help generalising strategies. National Institute of Education Nanyang Technological University, London Knowledge Lab University of London [Acedido em 10 de abril de 2011, de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/3/CERME7_WG3_Chua.pdf]

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new Algebra with understanding. University of Massachusetts–Dartmouth [Acedido em 13 de maio de 2010, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf]

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231–258.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Educational Research Journal*, *18*(3), 3–28.

Lins, R., & Gimenez, J. (1997). *Perspetivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas, São Paulo: Papirus Editora.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano. Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade de Lisboa, Lisboa.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (tradução portuguesa do original de 2000).

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, *105*, 83–86.

Pereira, M. S. (2011). *Contributo da resolução de problemas de padrão para a aprendizagem da Álgebra no 7.º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga. (Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt)

Pereira, M. & Saraiva, M. J. (2010). A escrita simbólica de uma generalização. *Educação e Matemática*, *107*, 28–35.

Ponte, J. P. (2009). Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professores. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.), *Patterns: Multiple Perspectives and contexts in Mathematics Education* (pp. 169–175). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Ponte, J., Branco, N. & Matos, A. (2009a). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J., Matos, A. & Branco, N. (2009b). *Sequências e Funções*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1–19.

Ramalho, G. (2002). *Resultados do estudo internacional PISA 2000: Segundo Relatório Nacional*. Lisboa: Ministério da Educação e Gabinete de Avaliação Educacional.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 65–82.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297–328.

Rodrigues, M. (2010). O papel da particularização no processo de demonstrar. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Orgs.), *Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (CD-ROM, pp. 330–340). Aveiro: Associação de Professores de Matemática.

Santos, M., & Oliveira, H. (2008). Generalização de Padrões: um estudo no 5º ano de escolaridade. In R. González, B. Alfonso, M. Machín & L. Nieto (Eds.), *Investigación en educación Matemática XII* (pp. 461–464). Badajoz: Sociedad Espanõla de Investigación en Educación Matemática.

Silva, M. & Domingos, A. (2010). Abordagens teóricas da construção do conhecimento matemático e suas implicações escolares. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Orgs.), *Atas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (CD-ROM, pp. 641–658). Aveiro: Associação de Professores de Matemática.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147–164.

Vale, I. & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática*, *85*, 14–20.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática — Propostas Curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Yin, R. K. (2009). *Case Study Research: Design and Methods* (Fourth Edition). Thousand Oaks: Sage Publications.

Resumo. Neste artigo apresentam-se alguns dos principais resultados de um trabalho de investigação que teve por principal propósito descrever e compreender as estratégias de generalização na exploração de padrões, dos alunos de uma turma do 7.º ano de escolaridade. Para tal, o estudo de natureza qualitativa, centrou-se numa intervenção de ensino, e os dados foram obtidos através da observação do trabalho dos alunos e das suas produções escritas.

Em termos de resultados, de entre as várias estratégias de generalização adotadas pelos alunos, salientou-se a prevalência da estratégia *Explícita*, seguida das estratégias *Diferença* e *Contagem*, respetivamente.

Palavras-chave: Pensamento algébrico; Exploração de padrões; Alunos do 7.º ano de escolaridade.

Abstract. In this article we present some of the main results of a research work which main aim was both describing and understanding the main strategies of generalization in the exploitation of the students patterns of a seventh grade class. For that, the study of qualitative nature, focused in a teaching intervention and the data were obtained through the observation of the students work, as well as their written productions.

In terms of results, among the different strategies adopted by students, it was really noted, the prevalence of the *Explicit* strategy, followed by the strategies *Difference* and *Count*, respectively.

Keywords: Algebraic thinking; Patterns exploitation; Seventh grade students.

■ ■ ■

MANUEL DE SOUSA PEREIRA
Agrupamento de Escolas de Celorico de Basto
cab.mspereira@gmail.com

(Recebido em julho de 2012, aceite para publicação em março de 2013)