O Cálculo Mental na Resolução de Problemas de Subtração

Cristina Morais
Externato da Luz

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa

Neste artigo é apresentado parte de um estudo mais amplo realizado, pela primeira autora, no âmbito de uma dissertação de mestrado, que teve como objetivo a compreensão do tipo de estratégias de cálculo mental utilizadas por alunos do 1.º ano de escolaridade, aquando da resolução de problemas de adição e subtração, do modo como estas evoluíam, bem como a influência dos significados das operações na estratégia de cálculo mental utilizada (Morais, 2011). No estudo analisaram-se as estratégias de três alunos na resolução de problemas de adição e subtração, contudo, neste artigo, apenas são analisadas as estratégias de resolução de problemas de subtração de um dos alunos, o André.

Sentido de Número

Numa sociedade cada vez mais dependente da tecnologia onde os computadores e calculadoras parecem estar à disposição de qualquer um, estamos constantemente rodeados de informação sob diferentes formas: gráficos, tabelas, percentagens, números decimais, números representados sob a forma de fração, entre muitos outros. Para lidar com todas estas representações, sendo capazes de as compreender, analisar e até mesmo para agir na sociedade atual, é essencial que tenhamos desenvolvido um bom sentido de número (Albergaria & Ponte, 2008; Castro & Rodrigues, 2008; McIntosh, Reys & Reys,1992).

Este sentido de número, embora de difícil definição, uma vez que inclui vários domínios da Matemática, é caracterizado por McIntosh *et al.* (1992) como:

> a compreensão geral dos números e das operações, em paralelo com a capacidade e inclinação para utilizar este conhecimento de modo flexível de forma a fazer julgamentos matemáticos e a desenvolver estratégias eficazes para lidar com os números e as operações (p. 3).

Assim, o sentido de número, para além de se constituir como o conhecimento que cada um possui sobre os números e operações, relaciona-se também com a aptidão e a escolha de cada um na utilização desse conhecimento de modo ágil, crítico e no desenvolvimento de estratégias cada vez mais eficientes de cálculo. Deste modo, o sentido de número é algo pessoal, uma vez que se constitui a partir das ideias sobre os números que um indivíduo tem e do modo como essas ideias foram estabelecidas (Cebola, 2002; McIntosh *et al.*, 1992).

Para além de ser pessoal, o sentido de número é também evolutivo, pois tem início antes da entrada na escola e desenvolve-se de modo gradual, ao longo de toda a vida e não apenas ao longo da escolaridade (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Castro & Rodrigues, 2008; McIntosh *et al.*, 1992; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Reys e Yang (1998) acrescentam que o sentido de número não é uma entidade finita, pois não é algo que os alunos têm ou não têm, é sim um processo que se desenvolve e amadurece com a experiência e o conhecimento.

Esta ideia está também presente no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), onde os conhecimentos com que os alunos entram no 1.º ciclo se constituem como uma base importante para a aprendizagem com vista ao desenvolvimento do sentido de número. Este faz parte de três ideias-chave a serem estudadas no tema Números e Operações, juntamente com a compreensão dos números e operações e com o desenvolvimento da fluência no cálculo.

McIntosh *et al.* (1992) referem ainda a importância do desenvolvimento do sentido de número em contraste com a atenção excessiva dada aos procedimentos mecanizados, como os que são utilizados nos algoritmos usuais, desprovidos de verdadeiro sentido de número.

Cálculo mental

A operacionalização flexível do conhecimento dos números e suas relações, característica do sentido de número, reflete-se no desenvolvimento de estratégias úteis e eficazes, próprias do cálculo mental, utilizado no nosso dia-a-dia, quer na nossa vida profissional quer enquanto cidadãos (Brocardo & Serrazina, 2008; Buys, 2008; Castro & Rodrigues, 2008; Thompson, 2009).

Deste modo, a importância do cálculo mental para o desenvolvimento do sentido de número é sublinhada por diversos autores (ver, por exemplo, Buys, 2008; Sowder, 1992), uma vez que "encoraja a procura de processos mais fáceis baseados nas propriedades dos números e das operações" (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 59).

Noteboom, Bokhove & Nelissen (2008) definem cálculo mental como "um cálculo pensado (não mecânico) sobre representações mentais dos números. Envolve o uso de factos, de propriedades dos números e das operações e o modo como estes se relacionam." (p. 90).

Buys (2008) descreve cálculo mental como "o cálculo hábil e flexível baseado nas relações numéricas conhecidas e nas características dos números" (p. 121), acrescentando que se trata de "um movimento rápido e flexível no mundo dos números" (p. 122), mundo esse que resulta do seu próprio sentido de número. Caracteriza-o ainda como: a) o trabalho com números e não com dígitos, uma vez que os números são vistos como um todo, mantendo o seu valor; b) a utilização de propriedades de cálculo elementares e de relações numéricas; c) apoiado num bom conhecimento dos números e num profundo conhecimento de factos numéricos básicos com números até 20 e até 100; e d) podendo ser utilizadas notas intermédias de acordo com a situação, mas, principalmente, calculando mentalmente.

Relativamente à utilização de registos intermédios no cálculo mental, também Noteboom, Bokhove & Nelissen (2008) referem que calcular mentalmente "Não é o mesmo que fazer os cálculos na cabeça mas sim com a cabeça e registar determinados passos, se necessário. Neste sentido, não deve ser visto como o oposto ao cálculo escrito." (p. 90).

Beishuizen (2009) foca a atenção não para um contraste entre cálculo mental e cálculo escrito, mas sim para as distinções entre os diferentes tipos de estratégias e procedimentos. Verschaffel, Greer e De Corte (2007) referem que "não é a presença ou ausência de papel e lápis, mas sim a natureza das entidades matemáticas e as ações que são cruciais na distinção entre cálculo mental e algoritmos (escritos)" (p. 566).

Em Portugal, em 2005, iniciou-se o projeto "Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares" (DSN) que procurou compreender e aprofundar o conhecimento sobre o modo como as crianças desenvolvem o sentido de número, tendo sido construídas, experimentadas e avaliadas várias tarefas propostas a alunos entre os 5 e os 12 anos. Embora este projeto não incidisse, em particular, no estudo do desenvolvimento do cálculo mental, ao serem analisadas as estratégias utilizadas por alunos no 1.º ciclo na resolução de problemas, foram identificadas, entre outras, dificuldades na utilização de estratégias flexíveis de cálculo mental. As estratégias utilizadas consistiam em contagens um a um ou, a um nível formal, na utilização do algoritmo (Serrazina & Ferreira, 2005).

Os professores que participaram neste estudo começaram a valorizar o cálculo mental e, nos dados recolhidos, foi possível compreender como os alunos eram capazes de utilizar de modo flexível diferentes estratégias de cálculo com números até 100 (Brocardo & Serrazina, 2008).

Estratégias de cálculo

As estratégias de cálculo utilizadas pelas crianças para a adição e subtração, dependem e evoluem a partir das estratégias utilizadas nestas operações com números menores que 20 (Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter & Fennema, 1997).

Relativamente à subtração, Thompson (2009) apresenta diferentes níveis de estratégias, contudo, o autor afirma que a sequência entre os níveis identificados não é clara:

i) contagem dos que sobram (*count out*)[1]: para calcular, por exemplo, $7-4$, o aluno levanta 7 dedos, baixa 4 e conta os restantes;

ii) contagem para trás a partir de um número (*count back from*): para o mesmo exemplo, o aluno conta quatro números para trás a partir de 7, dizendo algo como "Sete… seis, cinco, quatro, três", e para não se perder utiliza os dedos ou outro tipo de suporte;

iii) contagem para trás até (*count back to*): o aluno faz uma contagem decrescente, a partir de 7, até chegar ao 4, utilizando os dedos ou outro tipo de suporte para saber quantos números disse;

iv) contagem até (*count up*): a partir do 4, o aluno conta até 7, recorrendo de novo aos dedos ou a outro tipo de suporte;

v) utilização de factos numéricos de subtração e cálculo com base em factos numéricos, à semelhança das estratégias já descritas para a adição.

Incluída no conjunto de estratégias onde são utilizados factos numéricos, entendidos como aqueles que são apropriados pelos alunos após a sua verificação e compreensão, e cujo questionamento já não se coloca (Ribeiro, Valério & Gomes, 2009), Thompson (1999) e Treffers (2008) destacam a importância da estratégia de saltos através do 10 (*bridging through ten*[2] ou *jumping via ten*[3]). Neste tipo de estratégia, ao efetuar uma subtração, à primeira parcela é subtraída uma parte da segunda parcela, de modo a obter 10, sendo depois subtraída a parte restante, por exemplo: $12-5=$; $12-2=10$; $10-3=7$.

As estratégias mais evoluídas para o cálculo de subtrações no domínio dos números até 20 são caracterizadas pela utilização de factos numéricos básicos e o seu domínio é fundamental para uma evolução da utilização de estratégias cada vez mais eficientes (Baroody, 2006; Beishuizen & Anghileri, 1998; Fosnot & Dolk, 2001; Sowder, 1992).

No domínio dos números superiores a 20, são apresentadas por Beishuizen (1993, 1999) duas categorias de estratégias, que denomina por N10 e 1010 (ver Quadro 1). Na categoria das estratégias N10, à primeira parcela é subtraído um número múltiplo de 10 (Beishuizen, 1993, 2009). Nesta categoria, distingue-se um nível mais complexo, a estratégia N10C, onde à primeira parcela é subtraído um número aproximado da segunda parcela, correspondente a um múltiplo de 10, de modo a facilitar o cálculo. Obtido o resultado, este é depois compensado (Beishuizen, 1993; Beishuizen e Anghileri, 1998).

Posteriormente, a mesma autora apresenta outro tipo de estratégia, ainda do tipo N10, identificada como A10 (*adding on*)[4], onde à primeira parcela, é subtraído um nú-

Quadro 1 — Estratégias de cálculo mental para a subtração, com números entre 20 e 100 (adaptado de Beishuizen, 1993, 2009; Beishuizen e Anghileri, 1998)

Estratégias		**Exemplo** $74-38=$
N10	N10	$74-30=44$, $44-8=36$
	N10C	$74-40=34$, $34+2=36$
	A10	$74-4=70$, $70-34=36$
1010	1010	$70-30=40$, $4-8=-4$, $40-4=36$
	10S	$70-30=40$, $40+4=44$, $44-8=36$

mero correspondente a uma parte da segunda parcela, de modo a que seja obtido um múltiplo de 10, sendo depois subtraída a outra parte (Beishuizen, 2001).

Na categoria das estratégias 1010, os números são decompostos nas suas ordens, estas são subtraídas e o resultado é obtido através da recomposição do número. Uma variante desta estratégia é a denominada por 10S, onde os números são inicialmente divididos nas suas ordens e estas são subtraídas sequencialmente (Beishuizen, 1993, 2001, 2009).

Resolução de problemas

Nos primeiros anos, o contexto fornecido na resolução de problemas é fundamental, uma vez que se constitui como uma base concreta para o cálculo (Treffers, 2008) e como suporte ao pensamento dos alunos mais novos (ME, 2007). Deste modo, e tratando-se este de um estudo realizado nos primeiros anos de escolaridade, considerou-se importante analisar o desenvolvimento das estratégias de cálculo mental através da resolução de problemas.

A importância da resolução de problemas na aprendizagem da Matemática está presente no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), onde se constituiu como uma das três capacidades transversais a todo o programa. Os problemas de adição e subtração assumem assim um papel central nos primeiros anos de escolaridade. Quando se referem problemas de adição e subtração não se trata apenas de problemas de adicionar ou subtrair quantidades. Cada uma destas operações pode ter diferentes significados (ver Quadro 2), isto é, o contexto dos problemas assume grande importância, particularmente para os alunos dos primeiros anos, uma vez que irá suportar o seu pensamento matemático (Fosnot & Dolk, 2001; ME, 2007). Para a adição e subtração existem diferentes situações em que as operações estão presentes, aspeto que o professor deverá considerar ao planificar o trabalho a desenvolver com os seus alunos (Ponte & Serrazina, 2000).

Quadro 2 — Diferentes significados das operações de adição e subtração (adaptado de Ponte e Serrazina, 2000; ME, 2007)

Adição	*Combinar:* duas ou mais quantidades são transformadas noutra quantidade.
	Acrescentar: uma quantidade é aumentada.
Subtração	*Retirar:* a uma quantidade é retirada outra.
	Comparar: são comparadas duas quantidades, pretendendo-se encontrar a diferença entre as quantidades ou ver quanto é que uma é maior ou menor que outra.
	Completar: é calculado quanto se deverá juntar a uma quantidade para se obter um determinado valor.

Tal como Fosnot e Dolk (2001) referem, é importante salientar que apesar do professor planear um determinado contexto, com um significado da adição ou subtração presente, não significa que os alunos o irão interpretar desse modo. Os autores acrescentam que "é provável que um determinado contexto afete os modelos e estratégias utilizados pelas crianças" (p. 90). Também Fuson (1992) salienta que deverá ser feita uma distinção entre o tipo de problema e a operação necessária para descobrir o resultado desconhecido.

Opções metodológicas

Como já foi referido, neste estudo procurou compreender-se que tipo de estratégias de cálculo mental são utilizadas na resolução de problemas de adição e subtração, de que modo evoluem essas estratégias e compreender de que modo é que a natureza do problema influencia a estratégia de cálculo mental utilizada, ou seja, qual a influência do significado da operação presente no problema na resolução do mesmo.

Tendo em conta o objetivo do estudo, seguiu-se uma metodologia de natureza qualitativa com carácter interpretativo e design de estudo de caso. Foram elaboradas três cadeias de problemas: as duas primeiras cadeias foram resolvidas por todos os alunos de uma turma de 1.º ano de escolaridade, de uma escola de ensino particular, onde a primeira autora era a professora, tendo sido selecionados para um estudo aprofundado três alunos; a terceira cadeia de problemas foi resolvida individualmente apenas pelos alunos do estudo no início do ano letivo seguinte (2010/2011).

Neste artigo utiliza-se o termo "cadeia" para designar o conjunto de problemas com os diferentes significados de adição e subtração que foram resolvidos pelos alunos. São assim identificadas por terem sido construídas de modo a contemplar os diferentes significados que a adição e subtração poderão assumir, constantes no Quadro 2, e os números nelas envolvidos terem sido criteriosamente selecionados para que progressivamente tivessem uma ordem de grandeza maior, aumentando o grau de dificuldade dos cálculos a efetuar.

A primeira cadeia era constituída por sete problemas, a segunda por oito e a terceira por cinco problemas, perfazendo um total de vinte problemas. As três cadeias foram resolvidas pelos alunos em três momentos distintos. Como mencionado, os problemas das duas primeiras cadeias foram resolvidos a pares[5] por toda a turma, na sala de aula, a primeira entre janeiro e março de 2010, no 1.º ano de escolaridade, e a segunda nos meses de maio e junho de 2010, próximo do final do 1.º ano. Todas as aulas de resolução de problemas seguiram as seguintes etapas: i) apresentação do problema, em que este era lido por um aluno da turma e eram esclarecidas possíveis dúvidas; ii) resolução do problema a pares; iii) apresentação das estratégias de resolução mais significativas para a discussão em grande grupo e iv) síntese e identificação das estratégias de cálculo mais eficientes.

Para melhor compreender as estratégias usadas por cada aluno, considerou-se de extrema importância a existência de um momento de resolução individual dos problemas.

Neste momento procurou-se também perceber a existência de uma possível influência do trabalho realizado a pares, na escolha e utilização de estratégias de resolução de cada aluno. Assim, o terceiro momento de recolha de dados foi realizado fora da sala de aula e de modo individual, em Outubro do ano letivo de 2010/2011, quando os alunos se encontravam no 2.º ano de escolaridade.

Os dados foram recolhidos com recurso ao registo áudio e vídeo, à observação participante e aos registos realizados pelos alunos.

Para a análise e categorização das estratégias de resolução, foram seguidos os diferentes tipos de estratégias de cálculo enumerados por Thompson (1999, 2009) e Treffers (2008) para cálculos com números até 20 e as estratégias de cálculo mental identificadas por Beishuizen (1993, 1997, 2001, 2009) e Beishuizen e Anghileri (1998) para cálculos com números superiores a 20.

Neste artigo, apresenta-se o caso de um aluno, o André, e as estratégias utilizadas na resolução de problemas das três cadeias. Para esta análise foram selecionados os problemas de subtração considerados mais relevantes e identificadas as estratégias de resolução utilizadas pelo aluno. Os problemas são apresentados segundo a ordem temporal com que foram resolvidos.

André e a resolução dos problemas

André, com 6 anos, tem alguma dificuldade em exprimir-se oralmente, faz longas pausas no seu discurso e parece distrair-se, acabando por perder o seu raciocínio. No início do 1.º ano, André dominava a leitura e a escrita de números até cem e, no cálculo, tinha alguma dificuldade em adições e subtrações com números de um algarismo, embora por vezes fosse capaz de recorrer a alguns factos numéricos do seu domínio, como o dobro de 2, 3 ou 5.

André é muito brincalhão, com grande gosto em aprender, muito persistente nas suas ideias quando confiante, mas inseguro perante situações em que sente dificuldade, no entanto, gosta de as superar sozinho.

Resolução de problemas da primeira cadeia

O problema proposto com o significado de retirar, designado por "*Uma ida ao teatro*", tinha o seguinte enunciado: "A Mafalda foi ao teatro. Sentou-se numa fila que tinha 15 lugares e contou que havia 7 lugares ocupados. Quantos lugares estavam vazios?". André compreendeu que cálculo poderia fazer para conseguir resolver o problema:

André — Ah, então é 15 menos 7… é só pôr o resultado.

O aluno sugeriu à sua colega, identificada por Cátia, como poderiam fazer:

André — Oh Cátia, já sei uma maneira muito rápida!

Cátia — Qual?

André — Oh… apaga. Já sei uma maneira. É… olha, púnhamos, olha assim… 15 cruzes.

(…)

André — Oh Cátia, pomos 15 cruzes e depois de menos. Com tracinhos pomos de menos. Percebes?

A professora, ao aproximar-se do par pediu que André explicasse como estava a resolver o problema:

André — Eu estava a tentar fazer: punha 15 cruzes e depois dava os saltos.

Professora — Essas 15 cruzes o que é que representam?

André — Quer dizer os lugares…

(…)

André — E vou dar os saltinhos… 15, 14, 13, 12, 11…

Professora — Quantos saltinhos é que vais dar?

André — Sete.

André olhou para a reta numérica afixada na sala de aula e contou sete saltos de um a um, por ordem decrescente, apontando cada um com o lápis. Assim, obteve o resultado 8, utilizando uma estratégia de contagem para trás a partir de 15. Terá depois registado no seu caderno um salto de −3 e outro de −5, talvez para dar saltos diferentes de 1 (Figura 1).

Relativamente ao primeiro salto, de −3, não existem evidências que permitam compreender qual o erro cometido pelo aluno. Poderá ter sido um engano devido a uma distração, ou poderá ter contado os números entre 15 e 13, incluindo 15, contando "15, 14, 13", a que fez corresponder um salto de −3.

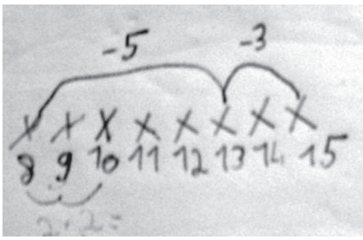


Figura 1 — Resolução do problema "Uma ida ao teatro"

Outro dos problemas de subtração da primeira cadeia tinha o significado de completar, identificado por "*As leituras da Marta*": "A Marta está a ler um livro. Já leu 16 páginas e o livro tem 28. Quantas páginas lhe faltam ler?".

André e a colega na resolução deste problema, aqui designada por Madalena, consideraram-no de fácil resolução. Madalena identificou o cálculo a efetuar e André sugeriu como o podiam fazer.

Madalena — Sei que temos de saber quanto é do 16 para o 28.

(…)

André — Olha, qual é a maneira que tu queres fazer? Olha, eu acho que já sei uma.

Madalena — Diz lá, para ver se eu concordo.

André — (…) Começamos no 16. Depois 16 mais 2…

Apesar da compreensão inicial do problema e de um possível modo de resolução, o par acabou por afastar-se da sua estratégia inicial e tentou resolvê-lo através de uma estratégia aditiva do tipo 1010 (28 + 16), pois tratava-se de uma estratégia utilizada por uma colega, aluna participante deste estudo, e que André queria muito utilizar.

A professora conversou com os alunos sobre o significado desse cálculo:

André — Então, ela já leu 28 e faltam 16.

Madalena — Não.

Professora — Ela já leu 28? Assim já teria lido o livro todo! O livro todo tem 28.

André — Já leu 16 e faltam 28.

Professora — Não, 28 são as páginas do livro. Se faltassem 28 ela ainda não tinha lido nada! Ela já leu 16.

André — Ela já leu 16, então já não é 28…

Professora — Já não lhe faltam 28 não… Porque ela já leu, dessas 28, ela já leu 16.

André — 28 menos 16.

Professora — Boa.

Madalena — Ah, 28 menos 16!

O aluno sugeriu que resolvessem através da linha numérica onde começou por traçar o número 16, contudo, ambos começaram a efetuar saltos de subtração, tentando retirar 28 a 16 (16 – 28).

Professora — Então ela já leu 16 páginas e vão-lhe tirar páginas?

André — Ai, faltam 28.

(…)

André — A Marta já leu 16 páginas e falta 28.

Professora — (…) ela já leu 16, não lhe faltam 28! O que diz no problema é que o livro tem 28 páginas, então quanto é que ainda lhe falta ler…

André — Então é do 28 até ao 16.

André retornou à linha numérica e, a partir de 28, efetuou saltos de – 1. À medida que ia dando um salto, registava na linha numérica o valor em que ficava e em cima registava quantos saltos já tinha dado, mas os saltos dados na linha numérica não estavam alinhados com o registo do número de saltos já efetuados (Figura 2). Por este motivo, o aluno não sabia quantos saltos já tinha dado. A professora ajudou-o assinalando cada número na linha numérica com uma marca, para André poder contar corretamente o número de saltos dados.

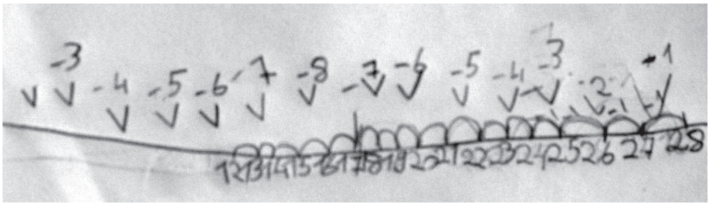


Figura 2 — Resolução do problema "As leituras da Marta"

Nos dois problemas da primeira cadeia, aqui analisados, André recorreu sempre a estratégias subtrativas, usando uma estratégia de contagem para trás a partir de um número quer no primeiro problema com o significado de retirar, quer no segundo com o significado de completar.

Resolução de problemas da segunda cadeia

Um dos problemas de subtração com o significado de retirar desta cadeia, designado por "*Viagem de autocarro*", tinha o seguinte enunciado "No Largo da Luz entraram 49 pessoas num autocarro, inicialmente sem passageiros. O autocarro seguiu para o Colombo, e quando lá chegou saíram 26 pessoas. Quantos passageiros seguiram viagem?".

André, embora inseguro, reconheceu a subtração presente no problema:

André — 49 menos 26? Ó meninas, podem-me dizer se é 49 menos 26? [dirigindo-se a outro par] Ai, eu não sei…

Matilde — Vamos fazer da maneira da Cátia…

André — Ah como é que sabes… não sabemos…

Matilde, o seu par na resolução deste problema, ao sugerir a "maneira da Cátia", referia-se a uma estratégia do tipo 1010, já utilizada por aquela aluna na resolução de um dos problemas da primeira cadeia.

André acabou por calcular 49 – 26 através de uma estratégia subtrativa do tipo 1010. É importante referir que foi a primeira vez que o aluno utilizou este tipo de estratégia ao resolver uma subtração.

O aluno liderou o trabalho, efetuando sem dificuldade o cálculo. À medida que ia registando no seu caderno os resultados das subtrações (Figura 3), ajudava Matilde a copiar para o seu caderno, que parece não ter compreendido o raciocínio envolvido nesta estratégia. Ao fazê-lo, André evidencia a sua compreensão desta estratégia:

André — Agora põe… Vá, também tens que pensar pela cabeça! 40 menos 20 igual a 20.

Matilde — Han? Ponho 9…

André — Não! Põe assim e assim… o 2 com o 4, põe 20.

Matilde — Ponho 20 aqui?

André — Sim.

Matilde — E agora?

André — Pões 9, 6… e põe 3. Depois põe aqui o mais, e põe 23. 23…

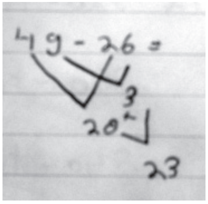


Figura 3 — Resolução do problema "Viagem de autocarro"

O aluno pareceu decompor com facilidade ambas as parcelas nas suas ordens, calculando com rapidez as subtrações.

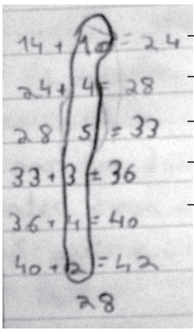
André utilizou uma estratégia de resolução diferente no problema identificado como "*Pai e filho*", com o significado de comparar "O Tomás tem 14 anos e o seu pai tem 42 anos. Quantos anos é o Tomás mais novo?".

André compreendeu com facilidade o enunciado do problema e seguiu uma estratégia de resolução diferente da que o seu colega nesse dia, identificado por Miguel, utilizou, o que revela que André sentiu grande segurança na resolução deste problema.

André pareceu seguir uma estratégia A10, no entanto, a aproximação não foi feita a múltiplos de 10. O aluno foi adicionando números cujo resultado já era do seu conhecimento e também juntou valores que selecionou aleatoriamente (Figura 4).

Quando explicou os cálculos que efetuou, o seu colega Miguel perguntou-lhe porque não tinha adicionado determinados números, de modo a obter um múltiplo de 10. André encolhia os ombros, dizendo "porque eu queria".

A partir do trabalho do aluno, a professora questionou o aluno sobre o modo como este efetuou as adições:



→ "Fiz 14 mais 10 igual a 24"

→ "Eu sabia que 24 mais 4 era 28 porque 4 mais 4 eu já sabia…"

→ "Fiz pelo dedos" [a partir de 28].

→ "Porque 3 mais 3 é seis"

→ "Porque 6 mais 4 é 10 e como era 36 tinha de ser 40"

Figura 4. Resolução do problema "Pai e filho"

Para juntar todos os valores que tinha adicionado a 14 até obter 42, André foi também recorrendo a factos numéricos e à contagem pelos dedos.

Professora — E depois como é que juntaste isto tudo por aqui fora?

André — Fiz 10 mais 4, 14. Mais 5, 19.

Professora — Como é que sabias que 14 mais 5 era 19?

André — Porque 4 mais 5 é 9.

Professora — Ok, já vais no 19, e depois mais 3…

André — 22…

Professora — Como é que sabias?

(…)

André — Contei pelos dedos.

Professora — E depois, mais 4… Fizeste isso assim, seguidinho?

André — Fiz. 26…

Professora — Fizeste como?

André — Fiz pelos dedos. E 26 mais 2, 28.

À medida que André ia explicando como calculou, tanto a professora como o seu par, Miguel, sugeriram o cálculo que poderia ter efetuado de modo a aproximar o resultado de um múltiplo de 10, para facilitar o cálculo.

Outro problema desta cadeia, ao qual foi dado o nome de "*Que azar!*", também com o significado de retirar, tinha o seguinte enunciado "A Leonor e o Simão estão a jogar ao Jogo da Glória. A Leonor foi até à casa número 82. Nesta casa ela leu 'Que azar! Anda 36 casas para trás.' Em que casa está agora?".

André identificou de imediato a subtração presente e o par decidiu utilizar uma estratégia subtrativa do tipo 1010:

André — Muito fácil! É 82 menos 36.

Guilherme — Podemos fazer da maneira da Cátia.

André — Pois.

André calculou 80-30, decompondo 30 em três grupos de 10, que foi retirando a 80. Levantou três dedos, um de cada vez, à medida que retirou uma dezena a 80. Para resolver 2 – 6 ambos os alunos levantaram um dedo por cada número que iam contando por ordem decrescente, a partir de 2, no entanto, Guilherme, par de André, levanta um dedo ao dizer o número 2, por isso afirma que o resultado é – 3. Como o aluno foi mais rápido a contar do que André, este acaba por copiar esse resultado para o seu caderno.

Quando a professora se aproximou do par, questionou-os sobre este cálculo e é perceptível a dificuldade que André sentiu ao tentar resolvê-lo:

Professora — 2 menos 6 é – 3?

Guilherme — Sim!

Professora — Ao 2 eu consigo tirar 2.

André — Mas, ele contou com o zero!

André julga que o colega está errado ao contar com o número zero, na sua contagem. Para ajudar, a professora traçou uma linha numérica no caderno de Guilherme, onde registou os saltos, a partir de 2, um a um, até retirar 6.

Professora — Olha aqui, menos 1, 1. Menos outro, zero, menos outro, –1. –2… Vamos ver quantos já temos. 1, 2, 3, 4. 5… 6… [traça os últimos dois saltos]

Guilherme — Ah, é -4.

André — É –4?

Professora — Então vejam lá, ao 2 eu consigo tirar 2, mas eu quero é tirar 6, quantos é que ainda faltam tirar? Dos 6 já tirei 2, quantos é que ainda faltam tirar?

André — Ah!

Os alunos pareceram ter compreendido que o resultado de 2 – 6 era –4 e André copiou a linha numérica para o seu caderno (Figura 5). De seguida, parece bastante confuso quanto ao cálculo a efetuar. Guilherme ficou em dúvida se o resultado final (50 – 4) seria 47 ou 46, e acaba por responder que era 46 e André, de novo, copia o resultado para o seu caderno.

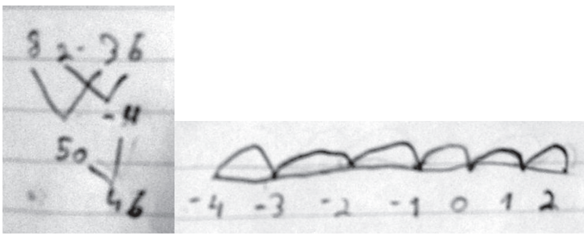


Figura 5 — Resolução do problema "Que azar!"

Inicialmente, André parece compreender a estratégia escolhida para a resolução do problema, no entanto, ficou bastante inseguro perante o cálculo 2 – 6 e perante a recomposição do resultado final.

É importante salientar que apesar de André ter utilizado este tipo de estratégia no primeiro problema analisado desta cadeia, o facto de agora se deparar com uma diferença parcial constituída por um número negativo, poderá ter sido um obstáculo para André.

O último problema desta cadeia em análise, designado por "*A caderneta das Winx*", tinha o significado de completar "A Sandra tem uma caderneta das Winx. Viu que toda a caderneta tinha 124 cromos e disse 'Ainda me faltam 47 cromos para ter a caderneta completa.' Quantos cromos tem a Sandra?".

Após alguma dificuldade inicial em compreender o problema, em que o seu colega, Miguel, o ajudou, André decide utilizar uma estratégia aditiva do tipo A10, onde a partir de 47 foi adicionando valores até alcançar 124 (Figura 6).

À medida que registou os cálculos no caderno, percebe-se na gravação vídeo que André colocava a mão esquerda debaixo da mesa e, quando a retirava, anotava algo no seu caderno, o que parece indicar que talvez tenha feito alguns dos cálculos recorrendo à contagem pelos dedos.

André — 54… 54 mais 10… 50 mais 20… é 70… 74. 30… mais 24. É 74, 75, 76, 77. [conta pelos dedos]

Miguel — Ya [sic], eu disse-te.

André — Mas eu não fiz pela reta.

Miguel — Eu sei, mas a reta era mais rápida.

André — Não, por acaso até não era.

Quando a professora se aproximou do par, André referiu que tinha aproximado os resultados a "números redondinhos":

André — Eu fiz com números redondinhos.

Professora — Ah, pois é! Explica lá como é que fizeste.

André — Eu fiz 47 mais 3, 50. (…) Depois 50… é que como eu achava que aquilo ia demorar tirei logo o 20.

Professora — Tiraste?

André — Não, juntei… fiz 50 mais 20 igual a 70. 70 mais 30 igual a 100.

André, reconhecendo que de 50 para 124 era uma diferença grande, decidiu adicionar 20, mais do que habitualmente juntava. Na adição seguinte, deu igualmente um salto maior, de +30. Deste modo, André tornou esta estratégia mais eficiente.

Para adicionar todos os valores que foi juntando a 47, utilizou uma estratégia do tipo 1010.

Professora — E depois como calculaste isto tudo?

André — Depois eu fiz assim 30 mais 24, dá 50… Mas o 20 mais 3 eu não fiz, que eu já sabia que era 23.

Professora — Então 30 mais este 24…

André — Que está aqui.

André calculou 30+24 e 54+20 utilizando a estratégia do tipo 1010, até obter 74. Por fim, como seria apenas adicionar 3, André disse que já sabia que o resultado de 74+3 seria 77.

André parece ter utilizado a estratégia do tipo 1010 sem ter analisado os números em questão, pois para adicionar 30 a 24 ou 20 a 54 talvez o conseguisse fazer de outro modo.

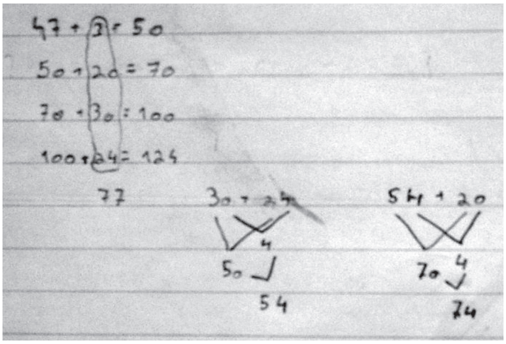


Figura 6 — Resolução do problema "A caderneta das Winx"

Nos quatro problemas analisados da segunda cadeia, André reconhece a operação de subtração em "*Viagem de autocarro*" e "*Que azar!*", ambos com o significado de retirar. Em ambos, André usa uma estratégia subtrativa do tipo 1010, contudo, em "Que azar!", o facto de se tratar de uma subtração com empréstimo[6], perante a parcela parcial constituída por um número negativo, André revela dificuldade em compreender o cálculo.

Nos problemas "*Pai e filho*" e "*A caderneta das Winx*", com os significados de comparar e completar, respetivamente, André recorre à operação de adição, usando estratégias aditivas do tipo A10, inicialmente em "*Pai e filho*" sem aproximação dos resultados intermédios a múltiplos de 10 e depois, em "*A caderneta das Winx*", já com aproximação a múltiplos de 10.

Resolução de problemas da terceira cadeia

Tal como já foi referido, as resoluções de todos os problemas desta cadeia foram realizadas individualmente.

O problema, identificado como "*Parar ou Avançar*", com o significado de comparar tinha o seguinte enunciado "O Miguel e a Cláudia jogaram o "Parar ou Avançar". No final, a Cláudia teve 157 pontos e o Miguel teve 43 pontos a menos. Quantos pontos teve o Miguel?".

André começa por resolver o problema utilizando uma estratégia subtrativa do tipo 1010 para calcular 157 − 43 (Figura 7). Começou por subtrair as dezenas, depois as unidades e no fim subtraiu 10 a 100, em vez de adicionar 10 ao 100.

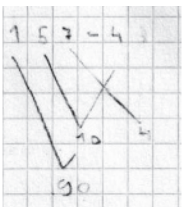


Figura 7 — Resolução inicial do problema "Parar ou Avançar"

Quando terminou, observou o cálculo durante alguns instantes e apagou-o.

Professora — Estás a apagar?

André — É que eu acho que isto está mal. É porque… Estava-me a dar… Não sei, estava-me a dar um resultado que eu acho que estava errado.

Professora — Porque é que achaste que estava errado?

André — Porque, eu fiz 157 menos 43… Quando eu digo 50 é um bocado… é mais do que 40… Eu acho que estava mal porque como do 40 para 50 é 10, no problema estava a sair o 90. Se vamos tirar 50 e depois… É que eu não sei explicar muito bem.

Embora de modo um pouco confuso, é possível perceber que André foi capaz de rever os dados e o resultado obtido revelando um sentido crítico perante o resultado, relacionando-o com os dados em questão. André procurou explicar que se 50 é maior que 40, por isso ao calcular 157–43, não poderia obter um resultado menor que 100.

O aluno tenta resolver o problema novamente, recorrendo agora a uma estratégia aditiva do tipo A10. O aluno aproximou 43 de um valor de referência, o 50, tentando depois aproximá-lo de 157.

Calculou a soma dos valores que foi adicionando a 43, sem qualquer registo (Figura 8) e disse inseguro:

André — Agora deu 114, não sei porquê… Se juntar isto, 114.

Professora — Como é que juntaste?

(…)

André — Fiz 50… Este 5 [50] para este 5 [de 57] é 100. Depois este 7 e este 7 [de 57] é 14. Então é 114.

Professora — E estás em dúvida?

André — É que agora acho que sim… porque se nós estamos a tirar… Eu já percebi que estamos a tirar.

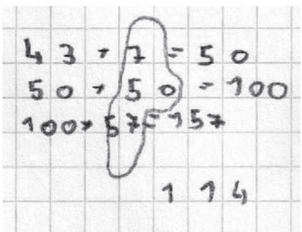


Figura 8 — Resolução do problema "Parar ou Avançar"

André reconhece neste problema uma situação subtrativa, pois para além da sua resolução inicial ter sido através de uma estratégia subtrativa, depois de o tornar a resolver utilizando uma estratégia aditiva, refere "porque nós estamos a tirar".

Outro problema com o significado de completar, identificado como "*Concurso na livraria*", tinha o seguinte enunciado: "A Leonor foi a uma livraria que estava a fazer um concurso: o cliente n.º 250 a entrar na loja recebia uma coleção de livros à sua escolha! A Leonor foi a cliente n.º 135. Quantos clientes faltam entrar para o prémio ser atribuído?".

André compreendeu com facilidade o enunciado do problema e resolveu-o através de uma estratégia aditiva do tipo A10 (Figura 9).

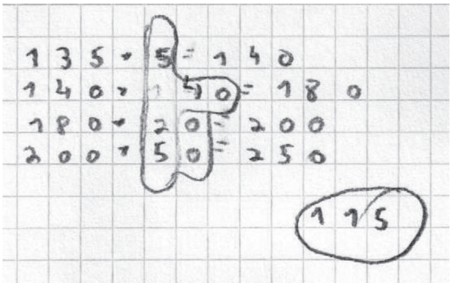


Figura 9 — Resolução do problema "Concurso na livraria"

Foi com rapidez que efetuou as adições, levantando os dedos para calcular 180 + 20. Como já tinha feito em resoluções anteriores (consultar Morais, 2011), levantou um dedo por cada dezena adicionada, à medida que ia dizendo "190, 200". Nos restantes cálculos, não recorreu a esta contagem. Talvez tenha sentido necessidade de o fazer nesta adição por se tratar da alteração do número de centenas.

Ao adicionar todos os valores intermédios, reparou que colocara 140 em vez de 40 e apagou o algarismo da ordem das centenas.

Inicialmente, André rodeou apenas os algarismos da esquerda dos números cuja soma queria calcular, a professora perguntou-lhe se o tinha feito por algum motivo específico, pensando que o aluno o tivesse feito para adicionar os números como se de unidades se tratassem. Mas André parece tê-lo feito por distração, apagando e rodeando todos os números. De seguida, explicou como calculou o resultado final do problema:

André — Acho que é 205.

Professora — Como é que fizeste?

André — Foi assim 50 mais 40, 90, porque 40 mais 40 é 80. 90 mais 20, 200.

Professora — 90 mais 20 é 200? Porquê?

André — Ah, não. É 110 acho eu.

Professora — Como é que fizeste agora?

André — Eu fiz 90 mais 10 é 100, e mais outros 10 é 110. E 110 mais 5 é 115.

André recorre novamente a uma estratégia aditiva do tipo A10, o que parece indicar a sua preferência por este tipo de estratégia. É importante realçar a agilidade que André revela na utilização deste tipo de estratégia, sendo mais criterioso na escolha dos números a adicionar ao número inicial, tendo o cuidado de aproximar os resultados intermédios a números de referência; bem como a confiança que demonstra na resolução destes problemas.

Nos dois problemas da terceira cadeia analisados, com os significados de comparar e completar, André recorre à operação de adição, usando, mais uma vez, estratégias aditivas do tipo A10, aproximando os resultados intermédios a múltiplos de 10. É importante referir que em "*Parar ou Avançar*", André recorre inicialmente a uma estratégia subtrativa do tipo 1010, contudo, abandona-a por sentir dificuldade em utilizá-la no cálculo com números representados por diferente número de algarismos.

Conclusões

Para melhor se compreender a possível relação entre o significado da subtração presente em cada problema e a estratégia utilizada na sua resolução, procurou-se identificar também qual a operação utilizada na resolução do problema.

No Quadro 3 apresenta-se qual a operação a que André recorreu na resolução de cada problema e quais as estratégias utilizadas na resolução dos problemas de subtração anteriormente apresentados.

Analisando o quadro, não é possível identificar uma unanimidade na operação utilizada em todos os problemas com o mesmo significado, o que sugere, tal como Fuson (1992) refere, "que há uma importante distinção a fazer entre o tipo de problema e a operação (de adição ou subtração) necessária para descobrir a quantidade desconhecida" (p. 245). Tal como Fosnot e Dolk (2001) referem, apesar do professor ter um determinado significado da operação em mente aquando da planificação dos problemas que propõe aos seus alunos, tal não significa que estes o compreendam do mesmo modo. No entanto, é possível perceber-se que o aluno reconhece e utiliza a subtração nos problemas com o significado de retirar, o que parece sugerir uma possível relação entre este significado da operação e a sua utilização.

Analisando as estratégias utilizadas ao longo de cada cadeia, identifica-se que, na resolução dos problemas da primeira cadeia, André recorreu a estratégias elementares, assentes em contagens de um em um, recorrendo aos dedos ou à linha numérica. Parece reconhecer a operação da subtração presente em cada problema, independentemente do seu significado, pois recorre a estratégias subtrativas (ver Morais, 2011).

Nas cadeias seguintes, as estratégias que utiliza são mais complexas. Na resolução do problema "*Viagem de autocarro*", com o significado de retirar, recorre a uma estratégia subtrativa do tipo 1010. Apesar de neste artigo não se terem apresentado todos os problemas, é importante realçar que a escolha deste tipo de estratégia foi influenciada pelo seu trabalho com uma colega, noutro problema do estudo, de adição (ver Morais, 2011).

O aluno voltou a utilizar este tipo de estratégia no problema "*Que azar!*", contudo, o cálculo a efetuar tratava-se de uma subtração com empréstimo, o que pode justificar

Quadro 3 — Operações e estratégias de cálculo utilizadas por André na resolução de problemas de subtração das três cadeias

Significado	**Cadeia**	**Problema**	**Operação utilizada na resolução do problema**	**Estratégia utilizada na resolução do problema**
Retirar	1	"*Uma ida ao teatro*"	Subtração	Contagem para trás a partir de um número
	2	"*Viagem de autocarro*"	Subtração	Estratégia subtrativa 1010
	2	"*Que azar!*"	Subtração	Estratégia subtrativa 1010 que o aluno parece não ter compreendido
Comparar	2	"*Pai e filho*"	Adição	Estratégia aditiva A10 (sem aproximação a números de referência)
	3	"*Parar ou Avançar*"	Adição (subtração inicial)	Estratégia aditiva A10 (tentativa inicial com estratégia subtrativa 1010)
Completar	1	"*As leituras da Marta*"	Subtração	Contagem para trás a partir de um número
	2	"*A caderneta das Winx*"	Adição	Estratégia aditiva A10 (e estratégia aditiva 1010 para adicionar valores intermédios)
	3	"*Concurso na livraria*"	Adição	Estratégia aditiva A10

a dificuldade que o aluno sentiu na resolução deste problema. O resultado da subtração 2−6 não foi imediato para o aluno, ficando a dúvida se este terá de facto compreendido o cálculo. Este tipo de dificuldade está associado à utilização de estratégias do tipo 1010 na subtração (como referido, por exemplo, Beishuizen, 2009; Fuson *et al.*, 1997; Thompson, 2000; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Reconhecendo que não é possível afirmar que André domina ou não os números negativos, pois foi analisado apenas um problema, é interessante comparar que, num estudo apresentado por Macintyre e Forrester (2003), alunos do 7.º ano revelaram as mesmas dificuldades que André, aluno do 1.º ano, no cálculo de subtrações com empréstimo, com número de dois algarismos, cometendo os erros geralmente associados à utilização de estratégias subtrativas do tipo 1010.

Este tipo de estratégia foi também a que André selecionou inicialmente para resolver o problema com o significado de comparar "*Parar ou Avançar*". O facto de se tratar de uma subtração cujas parcelas tinham diferente número de algarismos, trouxe alguma dificuldade a André.

Esta fragilidade na utilização da estratégia subtrativa do tipo 1010 no cálculo de diferenças de número representados com diferente número de algarismos, conduzindo a uma recomposição incorreta do resultado final, evidencia a fraqueza que Beishuizen (2001) associa a este tipo de estratégia, nomeadamente na perda do sentido de número durante o procedimento de cálculo. No entanto, no problema "*Parar ou Avançar*", André ultrapassa esta dificuldade revelando grande sentido crítico e uma boa estimação do resultado, tendo optado depois por seguir uma estratégia aditiva do tipo A10.

André utilizou este tipo de estratégia nos restantes problemas. A preferência por este tipo de estratégia poderá dever-se à dificuldade que o aluno parece revelar em situações de subtração com empréstimo e em subtrações com parcelas de diferente número de algarismos.

É possível identificar-se uma evolução na utilização da estratégia aditiva do tipo A10, pois inicialmente André utiliza-a sem qualquer preocupação em aproximar as somas intermédias a números de referência, selecionando valores de modo aleatório ou cujo resultado fosse do seu domínio, como em "*Pai e filho*". Contudo, e reconhecendo a importância de aproximar os cálculos a um número de referência, André começou a demonstrar uma escolha mais cuidada dos números a adicionar, como se pode observar em "*A caderneta das Winx*", "*Parar ou Avançar*" ou "*Concurso na livraria*".

De um modo geral, André recorreu a dois tipos de estratégias na resolução dos problemas de subtração: estratégias subtrativas do tipo 1010 e estratégias aditivas do tipo A10. As primeiras foram utilizadas com maior frequência na resolução dos problemas com o significado de retirar. Os restantes problemas, com os significados de comparar e completar, foram geralmente resolvidos por André através de estratégias aditivas do tipo A10. Estes resultados estão de acordo com as conclusões do estudo apresentado por Cooper, Heirdsfield e Irons (1995), onde alunos de 2.º e 3.º ano recorreram, principalmente, a estratégias subtrativas na resolução de problemas com o significado de retirar e a estratégias aditivas em problemas com o significado de completar (também em Heirdsfield & Cooper, 1996).

Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema e Empson (1998) e De Corte e Verschaffel (1987) apontam as estratégias aditivas do tipo A10 como das mais utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de subtração (também em Serrazina, 1994), nomeadamente nos que envolvem o significado de completar, tal como é referido por Heirdsfield e Cooper (1996).

Parece-nos ser ainda possível relacionar o tipo de estratégia utilizada com a operação identificada na resolução dos diferentes tipos de problemas. Analisando o Quadro 3, é possível verificar que André recorreu a estratégias subtrativas em problemas onde pareceu ter reconhecido a presença da subtração. Mesmo no problema "*Parar ou Avançar*", apesar de ter utilizado uma estratégia aditiva do tipo A10, reconheceu a subtração como a operação presente no problema e começou por resolver o problema através de uma estratégia subtrativa do tipo 1010. Nos restantes problemas, onde recorre à adição, utiliza estratégias aditivas do tipo A10.

As estratégias de resolução dos problemas de subtração utilizadas por André são semelhantes às estratégias utilizadas pelos outros dois alunos também participantes do estudo de Morais (2011). Deste modo, é possível afirmar que os resultados obtidos apontam para diferenças entre o tipo de estratégias utilizadas nos problemas com o significado de retirar e as que são utilizadas nos problemas com os significados de comparar e completar, tal como já foi mencionado.

De realçar que este estudo apresenta evidências de que alunos dos primeiros anos de escolaridade, na resolução de problemas envolvendo subtrações com números constituídos por dois e três dígitos, utilizaram estratégias de cálculo mental geralmente associadas na literatura a alunos mais velhos (ver, por exemplo, Beishuizen, 1993; 2001; Buys, 2001; Cooper, Heirdsfield & Irons, 1995; Thompson & Smith, 1999), o que reflete o desenvolvimento da sua compreensão dos números e operações, fundamental para um bom sentido de número.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Albergaria, I. S. & Ponte, J. P. (2008). Cálculo mental e calculadora. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98–109). Lisboa: SEM-SPCE.

Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics*, *13*(1), 22–31.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(4), 294–323.

Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer & E. C. D. M. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 127–162). Utrecht: Freudenthal Institute.

Beishuizen, M. (2001). Different approaches to mastering mental calculation strategies. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching — Innovative Approaches for the Primary Classroom*, pp. 119–130. Buckingham: Open University Press.

Beishuizen, M. (2009). The empty number line as a new model. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, pp. 157–168. Open University Press.(Reimpressão de 1999)

Beishuizen, M. & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal*, *24*(5), 519–538.

Brocardo, J. & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O Sentido do Número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97–115). Lisboa: Escolar Editora.

Buys, K. (2001). Progressive mathematization: sketch of a learning strand. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching — Innovative Approaches for the Primary Classroom* (pp. 107–118). Buckingham: Open University Press.

Buys, K. (2008). Mental Arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 121–146) Netherlands: Sense Publishers. (Obra original publicada em 2001)

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema E. & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 3–20.

Castro, J. P. & Rodrigues, M. (2008) O sentido de número no início da aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O Sentido do Número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 117–133). Lisboa: Escolar Editora.

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 257–273). Lisboa: SEM-SPCE.

Cooper, T. J., Heirdsfield, A. & Irons, C. J. (1995). Years 2 and 3 children's strategies for mental addition and subtraction. In B. Atweh & S. Flavel (Eds.) *Proceedings of 18th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 195–202). Darwin: Mathematics Education Group of Australasia.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 363–381.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work — Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction*. Portsmouth NH: Heinemann.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243–275). New York: Macmillan Publishing Company.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 130–162.

Heirdsfield, A. M. & Cooper, T. J. (1996). The "Ups" and "Downs" of subtraction: Young children's additive and subtractive mental strategies for solutions of subtraction word problems and algorithmic exercises. In P. Clarkson (Ed.), *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 261–268). Melbourne: Deakin University Press.

Macintyre, T. & Forrester, R. (2003). Strategies for mental calculation. In J. Williams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *23*(2), 49–54.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2–8. British Columbia: Canada.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Morais, C. (2011). O cálculo mental na resolução de problemas: Um estudo no 1.º ano de escolaridade. *Colecção Teses*. Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original publicado em inglês em 2000)

Noteboom, A., Bokhove, J. & Nelissen, J. (2008). Glossary Part I. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 89–91) Netherlands: Sense Publishers. (Obra original publicada em 2001)

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Reys, R. E., & Yang, D.-C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(2), 225–237.

Ribeiro, D., Valério, N. & Gomes, J. T. (2009). *Cálculo Mental*. Brochura — Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos. Escola Superior de Educação de Lisboa.

Serrazina, L. (1994). Aprendizagem da subtracção — Uma revisão de literatura. *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 73–89). Lisboa: APM.

Serrazina, L. & Ferreira, E. (2005). Competência de cálculo? Sim! E também… colaborando a distância. In *Desenvolvendo o sentido de número: Perspectivas e exigências curriculares* (Vol. 1, pp. 29–39). Lisboa: APM.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371–389). New York: Macmillan Publishing Company.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 1. *Mathematics in School*, *28*(5), 2–5.

Thompson, I. (2000). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 2. *Mathematics in School*, *29*(1), 24–26.

Thompson, I. (2009). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary schools*, pp. 145–156. Open University Press. (Reimpressão de 1999)

Thompson, I. & Smith, F. (1999). *Mental calculation strategies for addition and subtraction of 2-digit numbers* (Report for the Nuffield Foundation), Department of Education, University of Newcastle upon Tyne.

Treffers, A. (2008). Grade 1 (and 2) — Calculation up to 20. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 43–60) Netherlands: Sense Publishers. (Obra original publicada em 2001)

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557–628). Reston, VA: NCTM.

Resumo. Neste artigo será apresentado parte de um estudo, feito pela primeira autora no âmbito de uma dissertação de mestrado, que tem como objetivo compreender que tipo de estratégias de cálculo mental são utilizadas, por alunos do 1.º ano do 1.º ciclo do ensino básico, na resolução de problemas de adição e subtração, procurando compreender de que modo o significado da operação envolvida no problema influencia ou não a estratégia de cálculo mental utilizada.

O estudo foi realizado seguindo uma metodologia de natureza qualitativa de carácter interpretativo, tendo sido realizados três estudos de caso. O trabalho de campo foi realizado numa turma do 1.º ano de escolaridade, tendo a primeira autora desempenhado os papéis de professora e de investigadora. Aos alunos da turma foram propostas duas cadeias de problemas, resolvidas a pares. Posteriormente, já no início do 2.º ano de escolaridade, os três alunos participantes do estudo resolveram individualmente uma terceira cadeia de problemas.

Neste artigo, são apresentadas e discutidas as resoluções de um dos alunos do estudo, nas três cadeias de problemas de subtração, procurando-se evidenciar aspetos mais significativos relativamente ao tipo de estratégias de cálculo mental utilizadas e o modo como estas foram ou não influenciadas pelo significado presente nos problemas.

Palavras-chave: sentido de número, cálculo mental, subtração, resolução de problemas, estratégias de cálculo mental.

Abstract. This article refers to a part of a study made by the first author, as part of a dissertation, that had the main purpose to understand which mental calculation strategies are used by first grade pupils in addition and subtraction problem solving, in order to understand how the addition and subtraction situations, presented in the problem, influenced the strategy of mental calculation used in its resolution.

Considering the purpose of the study, a qualitative methodology was conducted and three case studies were held. The study fieldwork was conducted in a first grade class and the first author was the teacher and the researcher. The class pupils solved two problem chains and all problems were solved in pairs. Later on, at the beginning of the second grade, the three studied pupils solved a third problem chain individually.

In this article, it will be presented and discussed the mental computation strategies used by one of the studied pupils in the subtraction problems of the three problem chains, seeking to highlight the most significant aspects related to the mental calculation strategies used and how these were influenced by the subtraction situation problem.

Keywords: number sense, mental calculation, subtraction, problem solving, mental calculation strategies.

CRISTINA MORAIS
Externato da Luz
morais.cristina@gmail.com

LURDES SERRAZINA
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

(Recebido em junho de 2012, aceite para publicação em outubro de 2012)