

A exploração da covariação estatística por alunos do 10.º ano com o *TinkerPlots*¹

Ana Henriques

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Patrícia Antunes

Instituto Vaz Serra, Cernache do Bonjardim

Introdução

A covariação é amplamente utilizada na resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento e, por ser inerente a numerosos fenómenos quotidianos, faz parte dos currículos de muitos países, surgindo no panorama nacional nos Programas de Matemática do Ensino Secundário (Ministério da Educação, 2001a, 2001b). Este conceito relaciona-se com o raciocínio covariacional (ou raciocínio sobre covariação), reconhecido como um aspeto fundamental do raciocínio estatístico, que envolve processos como a formulação de hipóteses sobre a relação entre duas variáveis, a representação gráfica de dados bivariados que evidenciem ou facilitem a identificação de relações e a justificação verbal sobre a covariação (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

A investigação que se tem debruçado sobre o desenvolvimento do raciocínio dos alunos tem evidenciado as suas inúmeras incompreensões em relação ao conceito de covariação (Estepa & Sánchez-Cobo, 2003) e dificuldades em fazer julgamentos sobre este conceito a partir de representações gráficas comuns, como por exemplo, o diagrama de dispersão (Estepa, 2008; Konold, 2002). Neste contexto, diversos autores (Ben-Zvi, 2004; Fitzallen, 2012) defendem que a utilização de abordagens gráficas robustas (mesmo que informais), facilitadas pelo uso apropriado de tecnologia específica, como o *TinkerPlots*, no ensino e aprendizagem da Estatística, pode ajudar os alunos a compreender conceitos e a desenvolver o seu raciocínio estatístico, nomeadamente em relação à covariação. No entanto, esta problemática necessita de ser aprofundada pois os resultados da investigação ainda são insuficientes para informar os professores sobre os aspetos a considerar na implementação de experiências de ensino que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio covariacional dos seus alunos, tendo por base o uso deste *software*. Neste contexto, apresentamos os resultados de um estudo que procura analisar como é que os alunos do 10.º ano exploram relações entre variáveis e estabelecem a existência de covariação, quando utilizam o *TinkerPlots* e de que modo o uso deste *software* pode contribuir para o desenvolvimento do seu raciocínio covariacional.

Começamos por abordar, no quadro teórico, diversas temáticas relacionadas com o raciocínio covariacional que permitem enquadrar e fundamentar o estudo (orientações curriculares, representações estatísticas, tecnologia e dificuldades dos alunos). Em seguida, descrevemos a metodologia adotada e, depois dos resultados empíricos referentes ao trabalho de quatro alunos na exploração de uma tarefa proposta, apresentamos as conclusões e implicações para o ensino.

Raciocínio covariacional

Covariação, num sentido mais alargado, é uma correspondência entre variáveis cujos valores envolvem alguma forma de associação (Batanero, Estepa & Godino, 1997; Moritz, 2004; Zieffler & Garfield, 2009). No entanto, embora a definição de covariação seja frequentemente incluída na definição de associação, segundo Moritz (2004) a primeira é distinta desta porque o “termo *associação estatística* pode referir-se a associações entre duas variáveis categóricas, usualmente representada em tabelas de dupla entrada, e entre uma variável categórica e uma intervalar” (p. 228, itálico no original). Neste estudo, focamo-nos na covariação estatística, frequentemente designada também por correlação, que se refere à correspondência entre duas variáveis estatísticas numéricas e que é reconhecida como um importante aspeto do raciocínio estatístico (Fitzallen, 2012; Moritz, 2004). Da mesma forma, o raciocínio covariacional a que nos referimos diz respeito ao raciocínio sobre covariação estatística, que é usado para explorar relações entre duas variáveis numéricas, quando se atende à forma como elas variam em relação uma à outra, e que envolve saber como avaliar e interpretar essas relações (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002; Zieffler & Garfield, 2009).

O raciocínio covariacional nas orientações curriculares. O conhecimento sobre a possível existência de relação entre dois acontecimentos e a intensidade com que se relacionam tem sido, desde a pré-história aos nossos dias, um aspeto importante do conhecimento humano, permitindo explicar, controlar e prever os sucessos que ocorrem no dia-a-dia (Crocker, 1981). Mas uma conceção correta da noção de associação estatística (ou covariação, em sentido restrito), reconhecida como necessária para compreender muitos outros conceitos e procedimentos estatísticos, não se adquire de forma espontânea e, por isso, o seu ensino deve otimizar-se. Não é, pois, de estranhar que a capacidade de lidar com dados bivariados e compreender associações entre duas variáveis seja uma componente importante da literacia estatística dos alunos, contemplada nas atuais orientações curriculares nacionais e internacionais para o ensino da Estatística, sobretudo nos níveis secundário e superior.

Em Portugal, o estudo deste tópico é remetido para o secundário, com objetivos de aprendizagem paralelos aos definidos pelas orientações curriculares internacionais (Franklin *et al.*, 2005; NCTM, 2007). Generalizando o estudo de uma única variável, sugere-se uma abordagem gráfica e intuitiva às distribuições bivariadas, dando particular atenção à representação gráfica conhecida por diagrama de dispersão, à interpretação do

coeficiente de correlação como medida do grau de associação linear entre duas variáveis e à ideia de reta de regressão que permite modelar os dados e obter uma estimativa para o valor de uma variável, conhecido o valor da outra (Ministério da Educação, 2001a, 2001b). Este tipo de abordagem pode auxiliar os alunos a identificar a existência de covariação entre duas variáveis e a diferenciar o sentido e a quantificar intuitivamente a sua intensidade, servindo de base ao desenvolvimento posterior da noção formal de covariação. Ainda no âmbito do estudo da covariação, há a destacar a capacidade dos alunos saberem distinguir entre ‘associação’ e ‘causa-efeito’ que, não estando explicitamente referida nos programas portugueses, é salientada nos objetivos de aprendizagem das orientações curriculares internacionais (Franklin *et al.*, 2005), atendendo à dificuldade cognitiva que a mesma encerra.

Além disso, a introdução da tecnologia no ensino da Estatística é encorajada nos diferentes documentos curriculares, não só para alargar o que é ensinado mas também para influenciar o modo como os conceitos estatísticos são aprendidos (Batanero *et al.*, 1997). Neste sentido, referem a possibilidade e a importância do uso de calculadoras gráficas e de *software* educacional específico, para trabalho regular na sala de aula, dado o papel fundamental da visualização para atingir os objetivos definidos para este tópico da Estatística (Franklin *et al.*, 2005; Ministério da Educação, 2001a, 2001b; NCTM, 2007). Complementarmente, estes documentos salientam a necessidade de introduzir os conceitos estatísticos através de situações reais que permitam o uso desses conceitos de modo significativo.

Raciocínio covariacional e representações estatísticas. A construção de gráficos estatísticos para representar dados numéricos bivariados e a sua interpretação são os processos mais frequentemente solicitados aos alunos nas tarefas escolares e os mais investigados no que diz respeito à compreensão da covariação. De facto, a covariação estatística é estabelecida a partir da análise de gráficos de dados bivariados, como o diagrama de dispersão. Esta representação gráfica é a mais usada, fácil e potente para organizar grandes quantidades de informação e visualizar a existência de relação entre dois conjuntos de medições que variam ao longo de escalas numéricas, já que os resumos numéricos de dados não são suficientes para captar todas as características da relação entre duas variáveis (Estepa, 2008).

O diagrama de dispersão permite identificar padrões, tendências ou aglomerações nos dados que informam sobre o tipo e a intensidade da relação entre as duas variáveis. Algumas vezes a maioria dos pontos do diagrama tendem a agrupar-se em torno de uma linha reta cuja pendente (positiva ou negativa) determina a relação (direta ou inversa) entre as duas variáveis. No entanto, há casos em que os pontos podem estar alinhados segundo uma linha curva, altura em que o coeficiente de correlação linear não será uma boa medida da associação entre as variáveis ou podem não evidenciar uma tendência a agrupar-se e então a correlação será baixa ou nula. O diagrama de dispersão também é particularmente útil para evidenciar os valores extremos que, nalguns casos, influenciam significativamente o valor do coeficiente de correlação (*outliers*). No entanto, a interpretação dos diagramas de dispersão tem-se revelado uma tarefa complexa para os alunos, como evidenciado na literatura (Estepa, 2008), uma vez que, embora o diagrama de dispersão

permita ter uma visão completa da natureza da relação existente entre duas variáveis, existe uma grande diversidade destes gráficos que, tendo diferentes configurações da nuvem de pontos, têm o mesmo coeficiente de correlação.

O raciocínio covariacional envolve, com frequência, processos de tradução entre dados numéricos, representações gráficas e afirmações verbais sobre covariação estatística (Moritz, 2004) e pode ser desenvolvido quando os alunos são solicitados a formular hipóteses sobre a relação entre duas variáveis, a recolher dados, a representá-los graficamente ou a analisá-los numericamente e a tirar conclusões sobre a relação. Para adquirir um raciocínio covariacional adequado é fundamental dominar os processos de tradução entre diferentes representações, isto é, entre os dados, as suas representações gráficas, as descrições verbais sobre a covariação e o valor do coeficiente. Moritz (2004) apresenta um modelo de raciocínio desenhado especificamente para a covariação (Figura 1), onde relaciona as várias formas de a representar e os processos envolvidos na tradução entre elas: (i) a geração especulativa de dados, que envolve a construção de uma representação gráfica que ilustre juízos sobre covariação que estão expressos verbalmente, requerendo, da parte dos alunos, a compreensão de covariação e do contexto dos dados; e (ii) os processos denominados por interpretação verbal do gráfico e interpretação verbal dos dados que estão associados, respetivamente, à capacidade de descrever verbalmente um gráfico de dispersão, explicando-o e à leitura e interpolação de valores numéricos representados em tabelas. O uso destes processos conduz a importantes destrezas e capacidades como o uso de modelos matemáticos para o ajuste de dados, a tradução entre expressões algébricas e representações gráficas utilizadas, bem como o juízo sobre a possível existência de relações causais.

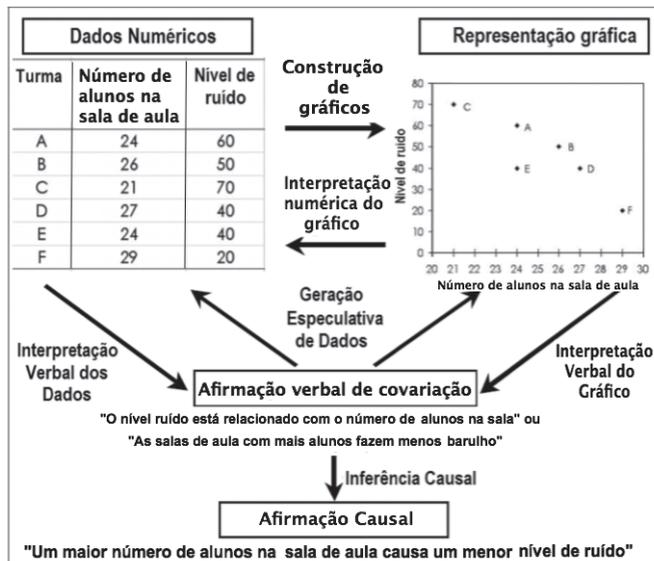


Figura 1 — Formas de representar a covariação estatística e capacidades para as traduzir (Adaptado de Moritz, 2004, p. 230).

Raciocínio covariacional e tecnologia. Apesar do modelo de raciocínio de Moritz (2004) não integrar elementos específicos da tecnologia, os processos descritos podem ser facilitados e suportados pelo seu uso. Com efeito, a disponibilidade tecnológica fornece aos alunos ferramentas poderosas e múltiplas representações que ajudam os alunos a alargar o significado dos conceitos (Batanero & Godino, 1998). Em particular, no que diz respeito ao ensino e aprendizagem da covariação, o uso estratégico de *software* educativo na sala de aula permite apoiar a progressão dos alunos: (i) da leitura de dados específicos para um olhar mais abrangente das diferenças entre dados, percebendo tendências nos dados como um todo; (ii) de descrições qualitativas de tendências de dados para a estimação de retas de regressão através do método dos mínimos quadrados; (iii) de previsões baseadas em dados particulares para interpolação baseada na modelação da tendência; (iv) de uma visão determinística da tendência dos dados para o reconhecimento de variação devido ao acaso nessa tendência; e (v) de um foco na construção de gráficos para a sua interpretação, encorajando os alunos a terem uma visão mais holística do gráfico (Ainley, Pratt & Nardi, 2001; Ben-Zvi & Arcavi, 2001).

A literatura tem evidenciado as potencialidades do uso de *software* gráfico, como o *TinkerPlots* (Konold & Miller, 2005), no desenvolvimento da compreensão de conceitos estatísticos, em particular o de covariação. A utilização deste *software* como instrumento de exploração de dados, aliada à sua natureza dinâmica, permite aos alunos criar as suas próprias representações gráficas, em vez de as selecionar de um conjunto de opções gráficas convencionais já construídas, organizando progressivamente os dados através do uso de operadores básicos. Deste modo, os alunos vão dando pequenos passos, realizando e simultaneamente avaliando alterações às representações motivadas por um objetivo e usam o *software* com um propósito e de forma controlada. Também permite adicionar comentários escritos com facilidade e rapidez, proporcionando oportunidades para conjecturarem as suas próprias descobertas e favorecendo a argumentação na procura da justificação para as afirmações proferidas, reforçando o seu raciocínio estatístico (Ben-Zvi, 2006; Fitzallen, 2012; Watson, 2008). Além disso, embora seja desejável que os alunos recolham os seus próprios dados, enquanto etapa integrante do ciclo investigativo, esta atividade é muito consumidora de tempo, existindo a possibilidade de utilização de bases de dados já integradas no *software* (Konold, 2006).

Para analisar o modo como os alunos raciocinam em ambientes gráficos proporcionados pelas características específicas do *TinkerPlots*, Fitzallen (2006) desenvolve um modelo teórico (apresentado em detalhe na Figura 2) que integra elementos relevantes relativos à construção e interpretação gráfica de outros modelos de raciocínio e pensamento estatísticos (por exemplo, Moritz, 2004; Pfannkuch & Wild, 2004). Esses elementos chave são agrupados em quatro categorias independentes mas relacionadas funcionalmente: a) ser criativo com os dados; b) compreender os dados; c) pensar sobre os dados; e d) conhecimento genérico. Esta última categoria caracteriza distintamente este quadro, reconhecendo que quando se consideram ambientes com tecnologia há conhecimentos/compreensões genéricas que são inerentes a todos os aspetos de análise de dados, representação e interpretação gráfica.

CATEGORIAS		ELEMENTOS CHAVE
<i>Conhecimento genérico</i> Falar a linguagem dos dados e dos gráficos. Reconhecer as características dos dados e dos gráficos. Compreender como usar as características do <i>software</i> e do ambiente tecnológico.	<i>Criatividade com dados</i>	Resumir dados. Construir diferentes formas de gráficos. Descrever dados a partir dos gráficos.
	<i>Compreensão dos dados</i>	Dar significado a dados e a gráficos. Compreender a relação entre tabelas, gráficos e dados. Identificar mensagens a partir dos dados. Responder a questões sobre dados. Reconhecer o uso apropriado de diferentes formas de gráficos.
	<i>Pensar sobre os dados</i>	Formular questões sobre os dados. Reconhecer as limitações dos dados. Interpretar dados. Fazer inferências causais baseadas nos dados. Procurar possíveis causas de variação. Procurar relações entre variáveis nos dados.

Figura 2 — Modelo de raciocínio estatístico dos alunos em ambientes gráficos com tecnologia (Adaptado de Fitzallen, 2006, p. 206).

Estas categorias do modelo podem entrar em jogo de forma isolada ou combinada, dependendo da complexidade das questões que lhes forem colocadas e do que é necessário para responder (Fitzallen, 2006).

Dificuldades dos alunos no raciocínio covariacional. A investigação sobre a compreensão de covariação e o raciocínio covariacional é bastante diversa, permitindo perceber o modo como os alunos adquirem a noção de correlação e evidenciando as dificuldades e a resistência de algumas incompreensões dos alunos relativas a este tópico. Estepa e Batanero (1996), ao analisarem as estratégias usadas por alunos do final do ensino secundário para avaliar a associação estatística em situações representadas por diagramas de dispersão, identificaram diversas concepções erradas, nomeadamente: (i) concepção determinística — os alunos esperam que haja uma correspondência perfeita entre os valores da variável resposta e da variável explicativa, não admitindo exceções na relação entre as variáveis; (ii) concepção local — os alunos formam os seus julgamentos utilizando apenas uma parte dos dados fornecidos e acreditam que é o tipo de associação de todo o conjunto de dados; (iii) concepção causal — os alunos acreditam que a covariação pode ser atribuída a relações causais entre elas. Os mesmos autores ainda consideram a existência de uma concepção unidirecional de associação quando os alunos percebem a covariação apenas quando o sinal é positivo, considerando a associação inversa como independência (Estepa, 2008; Estepa & Batanero, 1995).

As dificuldades descritas, relativas às concepções limitadas dos alunos e suas incompreensões na avaliação de associação (e em particular de correlação), também são evidenciadas

a um nível intuitivo em alunos universitários e tendem a manter-se após o ensino formal, como assinalam Batanero e Godino (1998) ou, mais recentemente, Mugabe, Fernandes e Correia (2012) e Zieffler e Garfield (2009). Estes últimos autores sugerem, ainda, a necessidade de despende algum tempo a desenvolver o raciocínio dos alunos sobre distribuições univariadas para fornecer uma fundação sólida para raciocinarem sobre dados quantitativos bivariados.

No que concerne ao processo de tradução da correlação entre diversas representações (verbal, tabelar, gráfica e numérica) e o seu efeito na estimação do seu valor, os resultados obtidos por Sánchez-Cobo, Estepa e Batanero (2000), com alunos universitários, indicam que esta estimação depende de vários fatores, verificando-se que a mesma é mais precisa a partir do diagrama de dispersão e em situações em que a correlação é mais intensa e que os erros mais frequentes ocorrem na construção do diagrama de dispersão a partir de uma descrição verbal ou quando as tarefas não são familiares aos alunos. Chick (2004) investigou as técnicas usadas por alunos do 7.º ano para representar a associação e concluiu que os alunos podem ser criativos nas suas tentativas para lidar com dados. Estes resultados dão suporte à sugestão de Pfannkuch, Rubick e Yoon (2002) para que os alunos sejam encorajados a criar as suas próprias representações antes de serem introduzidos às convencionais e indicam algumas áreas que precisam de ser abordadas no ensino, de forma explícita: a importância de uma representação como evidência de alguma afirmação sobre dados e a importância de agrupar e ordenar dados enquanto estratégias de compreensão e representação de dados. Nos estudos conduzidos por Moritz (2000, 2004) para analisar a representação e interpretação de covariação, os alunos mais novos também foram capazes de traduzir descrições verbais em representações gráficas e os diagramas de pontos em descrições verbais mas revelaram algumas das dificuldades já referidas por outros autores, como a tendência para se focarem em pontos individuais em vez de procurar uma tendência global nos dados (conceção local) e para considerarem uma das variáveis isoladamente (Ben-Zvi & Arcavi, 2001). Estes autores identificaram, ainda, dificuldades dos alunos em lidar com covariação negativa, sobretudo quando são contraditórias às suas crenças prévias sobre a relação entre duas variáveis, confirmando a sua grande influência nos seus julgamentos de covariação. Este fenómeno, designado “correlação ilusória” (Chapman & Chapman, 1982) tem origem na experiência e no contexto do aluno e é usado frequentemente na interpretação de dados e factos que o rodeiam.

O impacto de tecnologias computacionais no ensino e aprendizagem da Estatística e, em particular, no desenvolvimento do raciocínio covariacional também tem sido foco de investigação que sugere o seu potencial para melhorar as estratégias dos alunos na avaliação da covariação. Por exemplo, Batanero, Estepa e Godino (1997) apresentam os resultados de um projeto de investigação experimental que pretendia investigar os efeitos de um ambiente de ensino usando computadores na compreensão de associação estatística. Os autores identificaram incompreensões no que diz respeito à associação estatística de alunos universitários e concluem que os seus elementos de significado necessitam de ser contextualizados em situações problemáticas adequadas, ajudando os alunos a desenvolver ferramentas conceptuais para resolver problemas estatísticos e para alcançar um

significado mais completo de associação. No seu estudo, Konold (2002) verificou que os alunos do 3.º ciclo não têm dificuldades em fazer julgamentos corretos sobre covariação mas têm problemas em descodificar o modo como essas relações são apresentadas. Concluiu, ainda, que os alunos são capazes de fazer esses julgamentos quando usam o *TinkerPlots*, possivelmente porque este *software* oferece uma variedade de formas gráficas alternativas ao diagrama de dispersão para representar e interpretar covariação.

O estudo

Contexto e participantes. Este estudo é parte de uma investigação de natureza qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) mais alargada que visa compreender o modo como alunos do 10.º ano raciocinam sobre covariação, quando usam *Tinkerplots*. Os alunos participantes neste estudo frequentaram a disciplina de Matemática A, no ano letivo de 2012/13, num estabelecimento particular de ensino básico e secundário, do interior centro do país. A unidade de ensino respeitante ao tópico das distribuições bidimensionais foi lecionada pela professora da turma a que estes alunos pertenciam, no final do 3.º período, num total de 4 horas, tendo por base as orientações curriculares do Programa de Matemática A do Ensino Secundário (Ministério da Educação, 2001a) relativas à aprendizagem de conceitos e procedimentos básicos do diagrama de dispersão e do coeficiente de correlação. A investigadora, segunda autora deste estudo, observou as aulas e participou nas reuniões do departamento de Matemática do referido estabelecimento, a que também pertence, nas quais foram definidos os objetivos para esta unidade de ensino (Tabela 1).

Tabela 1 — Objetivos da unidade de ensino do tópico das distribuições bidimensionais.

Tópico	Subtópico	Objetivos
Distribuições bidimensionais	Diagrama de dispersão	<ul style="list-style-type: none"> • Formular conjecturas sobre dados representados em tabelas. • Construir diagramas de dispersão a partir de dados representados em tabelas. • Ler e interpretar diagramas de dispersão. • Identificar diferentes tipos de tendência existentes nos dados. • Avaliar, de forma intuitiva a partir da análise do diagrama de dispersão, a existência de uma associação linear entre as duas variáveis.
	Correlação	<ul style="list-style-type: none"> • Observar a distribuição dos pontos nos quadrantes do diagrama de dispersão para classificar a correlação entre duas variáveis. • Calcular e interpretar a intensidade e a direção (positiva ou negativa) da correlação entre duas variáveis, relacionando-a com a linearidade/dispersão e com a orientação da nuvem de pontos obtida no diagrama dispersão.

O trabalho realizado em sala de aula consistiu, essencialmente, na realização de exercícios de consolidação de conhecimentos, após a exposição e sistematização dos conteúdos feita pela professora no quadro, em diálogo coletivo com os alunos. Durante as aulas dedicadas ao tema da Estatística, os alunos recorreram à calculadora gráfica na exploração das tarefas propostas.

O *TinkerPlots* é um *software* educacional acessível e de fácil uso que apresenta um ambiente de aprendizagem interativo e dinâmico, ajudando a construir o conhecimento de modo ativo, “fazendo” e “vendendo” estatística e a refletir sobre os fenómenos observados (Konold & Miller, 2005). O ecrã consiste numa página em branco com uma barra de menus no topo e inclui um sistema de cartões para organizar os dados, em que cada cartão contém toda a informação relativa a um caso — as variáveis. Esta informação é automaticamente carregada numa tabela que permite aceder a todos os casos simultaneamente. As representações gráficas são construídas intuitivamente realizando ações simples como “arrastar” e/ou usando um conjunto operadores informais que organizam os dados e atualizam de modo dinâmico as representações. Funções como a média, a mediana e a moda também podem ser visualizadas nos gráficos, permitindo explorar o seu significado. Em duas das aulas de Estatística, a investigadora dinamizou momentos de apresentação das ferramentas básicas do *TinkerPlots* aos alunos, discutindo em grande grupo as potencialidades do *software* na resolução de tarefas (do manual ou dos exames nacionais) que requeriam a construção de diversas representações gráficas e o cálculo de medidas de localização, bem como a sua interpretação.

Tarefa e procedimento. No final da unidade de ensino, quatro alunos — Afonso, Cris, Leo e Margarida (nomes fictícios) — foram entrevistados individualmente, pela investigadora, seguindo os princípios e técnicas propostas por Goldin (2000). Estes alunos não seguem uma lógica de amostragem, uma vez que não se pretende extrapolar os resultados a nenhuma população de estudantes, mas foram escolhidos intencionalmente por demonstrarem empenho, razoável capacidade de expressão escrita e oral e predisposição para participar no estudo.

O protocolo usado na entrevista (em anexo) tem por base uma tarefa que os pretende desafiar a explorarem relações entre variáveis, enquanto interagem com o *TinkerPlots* e cujos conceitos estatísticos envolvidos são conhecidos dos alunos. Enquanto trabalham no computador, os alunos são solicitados a descrever um conjunto de dados, a construir representações gráficas a partir deles, a tirar conclusões e a fazer inferências sobre as relações entre variáveis observadas nos gráficos, permitindo-lhes demonstrar a compreensão sobre covariação que puderam desenvolver ao longo da unidade de ensino e que fornecem, à investigadora, um conjunto rico de dados descritivos sobre o raciocínio dos alunos (Seidman, 2006). Os dados para a tarefa da entrevista já se encontravam introduzidos em cartões do *Tinkerplots* e referem-se aos resultados dos testes de condição física inicial dos alunos de uma turma e incluem a observação das seguintes características dos alunos: peso, altura, resistência, diversos tipos de forças (superior, abdominal e inferior), flexibilidade, velocidade, impulsão vertical, IMC e sexo.

As entrevistas, com a duração aproximada de 30 a 40 minutos, foram registadas em áudio e vídeo e transcritas posteriormente. Além disso, usou-se o *software AutoScreenRecorder 3.1 Pro* para gravar em vídeo as ações que os alunos realizaram com o *TinkerPlots* na exploração da tarefa. Os ficheiros contêm a gravação de todos os movimentos do cursor enquanto os alunos trabalharam no computador, fornecendo um registo cronológico de como acederam às ferramentas do *TinkerPlots* e permitindo a sua articulação com os registos áudio das entrevistas. As transcrições e os ficheiros gravados das entrevistas foram analisados com base no quadro conceptual de Fitzallen (2012) tendo em mente dois objetivos, documentar o raciocínio covariacional do aluno e o suporte fornecido ao mesmo pelo *Tinkerplots*.

Neste artigo focamo-nos no raciocínio covariacional dos quatro alunos, apresentando uma descrição do trabalho por eles realizado, durante a entrevista, estruturado nas quatro categorias respeitantes ao conhecimento genérico, à criatividade com os dados, à compreensão dos dados e ao pensamento sobre dados relativamente à covariação. Suportamos a análise com excertos desse trabalho dos alunos que permitem ilustrar e contrastar uma variedade de aspetos interessantes do seu raciocínio covariacional.

O raciocínio covariacional dos alunos

Conhecimento genérico. Leo e Afonso são capazes de aceder, autonomamente, às ferramentas básicas do *TinkerPlots* para construírem gráficos que permitem verificar as conjeturas que formulam. Arrastar uma janela de gráfico e incluir uma variável num gráfico de pontos são tarefas que estes alunos realizam facilmente, no início da entrevista, por exemplo em relação à altura (Figura 3), ao peso ou à velocidade (Figura 4), evidenciando compreender como se usam as características do *software*.

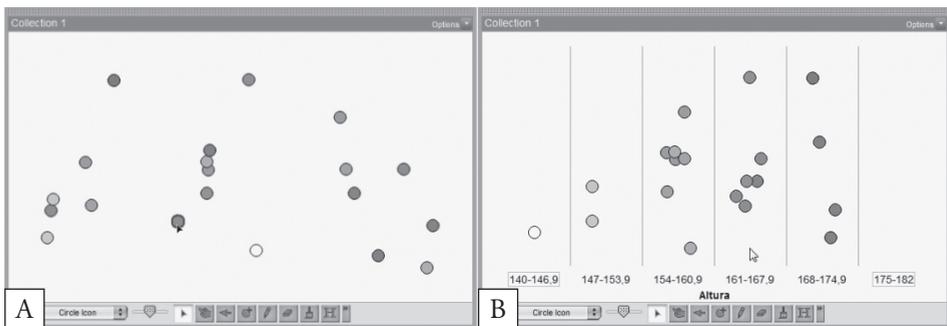


Figura 3 — Gráficos de pontos para a altura sem escala (A) e com escala intervalar (B), Leo.

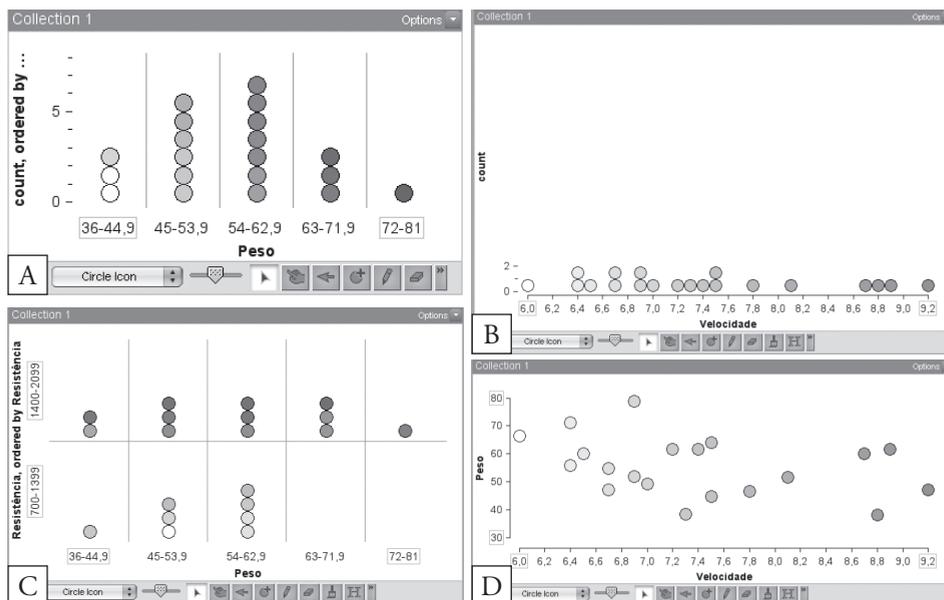


Figura 4 — Gráficos de pontos para o peso (A) e para a velocidade (B) e gráficos com duas variáveis (C e D), Afonso.

Cris e Margarida revelam dificuldades em iniciar a exploração da tarefa por não se lembrarem como se constroem gráficos, como referem: “Não sei como fazer... onde vou buscar o gráfico” (Margarida) e “Como faço? Não sei. Na aula a professora foi à barra, mas não lembro como?” (Cris). Estas alunas precisam do apoio da investigadora, que as orientou na construção das suas representações gráficas iniciais.

Leo inicia a sua exploração arrastando um ponto para a direita para fazer surgir no gráfico uma escala segmentada em intervalos (Figura 3). Esta ação parece ter um cariz procedimental, uma vez que o aluno reconhece que construiu este gráfico sem um propósito, quando afirma “Acho que não [preciso dos intervalos]”. Apesar de se aperceber que o gráfico só com um atributo representado não fornece evidência necessária para confirmar a existência de uma relação entre a altura e o peso, evidenciado no seu comentário “Temos que inserir outra variável... não dá para comparar”, Leo não tenta modificá-lo. Com efeito, o aluno precisa do incentivo da investigadora para alterar a escala do eixo para escala contínua, embora o saiba fazer e de uma explicação de como inserir uma segunda variável no gráfico.

Este comportamento é evidenciado igualmente por Cris e Margarida que, mesmo depois de obterem gráficos com duas variáveis, continuam a usar escalas segmentadas em intervalos (Figura 5 e 6) e só constroem diagramas de dispersão para confirmar a existência de uma possível relação entre as variáveis após sugestão e com apoio da investigadora. No entanto, apesar de não justificarem a utilização de escalas intervalares, estas alunas são

capazes de utilizar outras ferramentas do *software* para modificar os gráficos, reconhecendo as suas características e a sua utilidade para obterem evidência para as suas conjecturas, como afirma Cris a propósito do gráfico da figura 6A: “Assim consigo ver quantos alunos conseguiram atingir acima de 29 cm e a menos, quando fizeram o impulso na vertical com os pés juntos”. Além disso, quando Leo, Cris e Margarida precisam de usar uma linha ou de referir-se a um ponto, em vez de os evidenciar através das ferramentas do *software*, usam frequentemente o dedo e apontam no ecrã (ações assinaladas através de um círculo ou linhas tracejadas nos gráficos das várias figuras apresentadas), acompanhando estas ações por afirmações que as suportam como “Aqui podemos ver que...” (Leo).

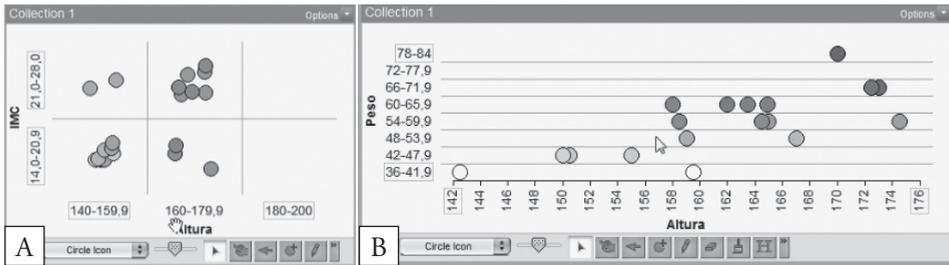


Figura 5 — Gráficos com duas variáveis, Margarida.

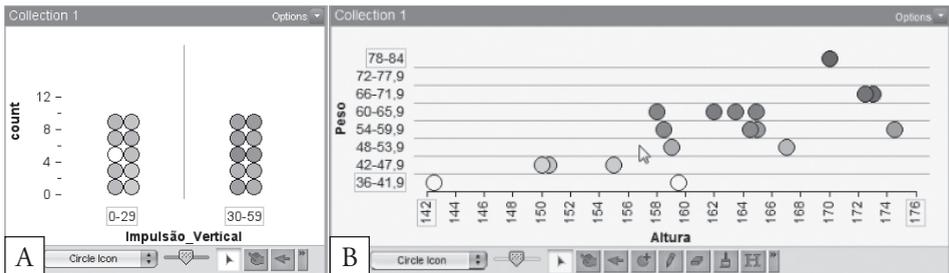


Figura 6 — Gráficos de pontos para a impulsão vertical (A) e gráfico com duas variáveis (B), Cris.

Afonso também inicia a sua exploração criando um gráfico para representar os dados relativos ao peso usando uma escala segmentada em intervalos (Figura 4A), sendo capaz de o modificar, de modo autónomo e intencional, usando diversas ferramentas do *Tinker-Plots* que tem ao seu dispor. Por exemplo, procura organizar os dados empilhando-os e ordenando-os mas, ao contrário dos seus colegas, é capaz de alterar a escala do eixo para uma escala contínua (Figura 4B e 4D) e de inserir uma segunda variável do gráfico (Figura 4C e 4D), revelando familiaridade com o ambiente tecnológico e compreensão das características do *software*.

De um modo geral, todos os alunos evidenciam compreender o significado das cores associadas aos dados, que é uma característica específica dos gráficos deste *software*, quando Margarida reconhece que “os pontos são de cor diferente porque tem a ver com o valor [do atributo] que cada aluno tem” ou quando a propósito dos gráficos que

construíram, Leo e Afonso explicam, respetivamente, que “os tons mais escuros são os alunos mais altos e a bola branca é o aluno mais baixo, que neste caso é o Diogo” e que “as cores visíveis no gráfico mostra a diferença. A bola branca é a menor [velocidade] e a bola verde escura é a maior”. Apesar disso, precisam do incentivo da investigadora, com frequência, para usarem diferentes janelas de gráficos de modo a não perderem a informação e poderem voltar a ela para responderem às questões seguintes e para realizar alterações ao tamanho da janela de modo a identificar mais facilmente a dispersão e comparar relações entre vários atributos, como evidenciado no seguinte diálogo:

Investigadora: Se afastares mais os *pontos* do gráfico, o que verificas? Que conclusões consegues retirar?

Margarida: Neste [gráfico], com mais espaço, os intervalos entre os valores são mais pequenos e mostra que há dois intervalos na altura [145-149,9 e 160-164,9] sem nenhum aluno. E que o intervalo que há mais repetição de alunos é o de 155 cm até 159,9 cm.

Esta necessidade de apoio em relação à utilização do *TinkerPlots* não é de estranhar, dado que é a primeira vez que os alunos interagem com este *software* e, por isso, estão pouco familiarizados com ele. No caso de Cris, as dificuldades identificadas e a dependência da investigadora para a construção de gráficos mantiveram-se até ao final da entrevista.

Todos os alunos compreendem a linguagem usada na tarefa e pela investigadora pois percebem o que lhes é pedido para fazer, não requerendo clarificação de termos ou instruções sobre a aplicação dos recursos base do *TinkerPlots* para criar gráficos. A maior parte das vezes não mostram dificuldade em expressarem-se sobre termos e gráficos estatísticos, dando respostas corretas a questões envolvendo ideias chave, como variável, tendência, associação, relação, linearidade, entre outras. No entanto, ocasionalmente usam linguagem informal ou expressões inapropriadas para descrever os componentes dos gráficos ou a informação representada. Por exemplo, ao referir-se a um ponto no gráfico, Afonso usa a expressão “A bola branca é a menor (...)” e Margarida explica “primeiro troquei as bolas de lugar (...)”. Ao descrever a relação entre duas variáveis representadas num gráfico de dispersão, que Cris designa por “gráfico de nuvens”, Leo também comenta, de modo pouco rigoroso “Conseguimos ver que há uma aproximação entre a altura e a velocidade”, afirmando que “É neutra” quando ela não existe.

Criatividade com dados. Tanto Afonso, de modo autónomo, como os outros alunos, após a explicação da investigadora sobre o modo como se insere a segunda variável no gráfico, criaram diversas representações gráficas para obter evidência sobre a existência de relações entre duas variáveis e suportar as conjeturas formuladas verbalmente. Inicialmente, estas representações criadas por Cris, Margarida e Leo limitam-se a gráficos de covariação com escalas divididas em intervalos, como os da figura 7 ou os das figuras 5 e 6B anteriores, que resumem e organizam dados de dois atributos. Deste modo, a significativa quantidade de gráficos construídos pelos alunos não corresponde a uma grande diversidade no seu tipo. Além disso, só com o incentivo da investigadora é que alteram os eixos, fazendo surgir uma escala contínua nas duas variáveis, passando depois a construir

diagramas de dispersão (Figura 8). No entanto, não recorrem a outras ferramentas/recursos do *TinkerPlots* para facilitar a identificação de relações ou confirmação/justificação das suas conjecturas.

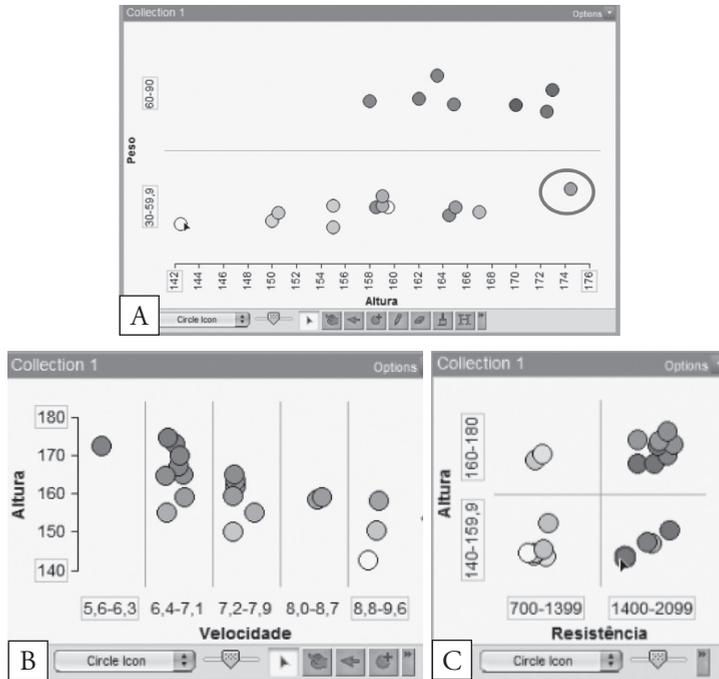


Figura 7 — Gráficos de covariação entre a altura e o peso (A), Leo, e entre a altura e a velocidade (B) e a resistência (C), com escalas intervalares, Margarida.

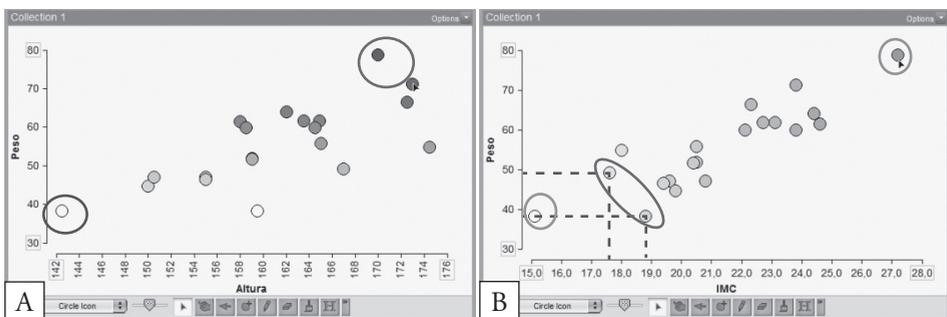


Figura 8 — Gráficos de dispersão representando relações entre diversas variáveis, Leo.

Afonso, por seu lado, dada a facilidade que evidencia na interação com o *software*, experimenta criar representações gráficas diferentes das dos outros colegas, como as da figura 9, com o objetivo de facilitar a obtenção de evidências para as suas conjecturas. No entanto,

dado que as suas representações não são adequadas para permitir estabelecer covariação entre variáveis, o aluno sentiu necessidade de as modificar para confirmar as suas conjeturas, referindo que “Acho que eu posso ainda facilitar mais” quando, de modo autónomo, cria um diagrama de dispersão (Figura 14). O aluno ainda integra nos seus gráficos de dispersão algumas medidas estatísticas e linhas de referência, intencionalmente, para resumir dados e facilitar a identificação de relações, revelando maior criatividade com os dados que os seus colegas.

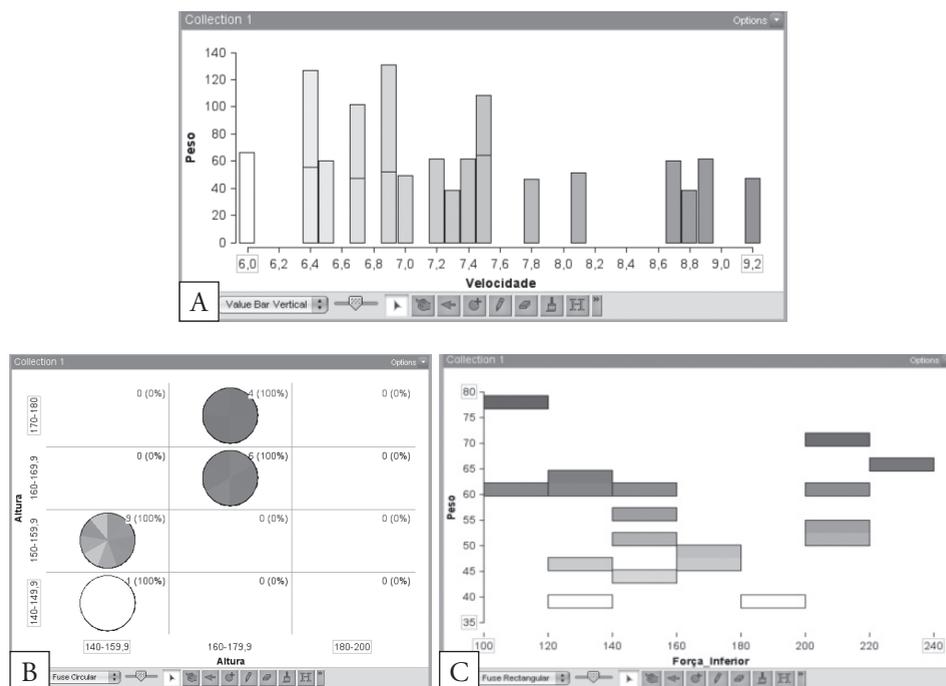


Figura 9 — Gráficos diversos representando relações entre variáveis, Afonso.

A descrição de dados a partir dos diversos gráficos construídos não suscita dificuldades aos alunos, como podemos observar quando Margarida, a propósito do gráfico da figura 5B, afirma:

Há mais alunos nestes dois... neste quadrante que pertence ao intervalo 14,0- 20,9 do IMC e de 140-159,0 da Altura e no outro, no 21,0 até 28,0 do IMC e 160 até 179,9 da Altura. Mas o primeiro tem mais um aluno.

No caso de Cris, a tendência para descrever os dados também é evidente na frase “Marco e Diogo são os que estão aqui no menor [intervalo] e não estão na mesma altura... o primeiro [Diogo] é mais baixo que o outro [Marco]”, a propósito do gráfico da figura 6D, embora se pretendesse uma descrição da relação entre as variáveis.

Compreensão dos dados. Todos os alunos têm facilidade em identificar as variáveis disponibilizadas nos cartões do *TinkerPlots* e atribuem significado aos dados, reconhecendo a sua utilidade “em educação física, para testar a nossa capacidade física” (Cris) ou descrevendo, por exemplo, que o índice de massa corporal (IMC) é obtido através do cálculo do “peso sobre... altura ao quadrado (...). Serve para determinar o excesso de peso” (Leo).

No trabalho inicial com os gráficos, os comentários de Leo e Margarida revelam uma conceção local de associação pois a sua compreensão dos dados é dominada por referência à estrutura e à posição de valores individuais e têm dificuldade em descrever a tendência geral dos dados. Leo descreve os gráficos referindo valores específicos dos dados. O aluno recorre aos cartões do *TinkerPlots* para identificar os alunos representados por esses pontos e obter informação sobre a sua altura e velocidade, revelando compreensão das relações entre dados, cartões e gráficos, essencial para o estabelecimento de eventuais relações: “Conseguimos ver que há uma aproximação entre a altura e a velocidade. Os alunos com mais altura tendem a percorrer esse espaço rapidamente, que é o caso dos alunos Jéssica, Camila, Bruno e Mirian”.

Quando questionado sobre a sua conjectura “[quanto] maior [o] peso, mais altos são os alunos”, o aluno baseia-se no gráfico da figura 8A para afirmar que a sua conjectura não se verifica porque:

Estes dois [os alunos mais leves] não estão em posições iguais. (...) O Marco e o Diogo têm um peso muito próximo. Só tem de diferença zero vírgula um. E ao olhar para os pontos que [os] representam, o Marco tem mais altura do que o Diogo. Está... mais ou menos, no meio... nos dados [valores] da altura. Só o Diogo é que tem altura e peso baixo.

Pelo contrário, quando o aluno se foca nos dois valores extremos do IMC representados no gráfico da figura 8B, que verificam a conjectura, assume a sua universalidade.

As afirmações produzidas por Margarida, a partir das representações gráficas, assumem frequentemente uma natureza descritiva mas nem sempre relacional: “o peso de cada aluno e a altura de cada um”. Também usa dados individuais do gráfico (Figura 7) ao afirmar “Esta pessoa tem aqui muita resistência mas não tem muita altura”. No entanto, posteriormente, a aluna admite que pode haver indivíduos que não verificam a tendência global dos dados pois não refuta a sua conjectura expressa verbalmente por “Maior altura, menor IMC” quando observa: “Não se aplica em todos, porque dos alunos mais altos, três são os que tem mais IMC e altura. Mas há um que tem mais altura, mas o seu IMC é o terceiro mais baixo da lista. Acho que é verdade o que disse”. Esta forma de compreender as exceções na tendência global dos dados, contrariando uma conceção determinística das relações entre variáveis, também foi identificada em Afonso, que afirma: “[Quando há] maior velocidade há menor resistência, exceto este aqui...” e “se o peso aumento, também a altura aumenta... não contabilizando as exceções que vimos”. Deste modo, estes alunos evidenciam terem superado a conceção inicial, aproximando-se de uma conceção global de associação.

Cris não reconhece necessidade de representar duas variáveis no mesmo gráfico para avaliar a existência de relação entre elas, uma vez que a sua análise foca-se em valores individuais. A aluna cria gráficos para diferentes variáveis (Figura 10), organizando-os por sexo e articula a informação que deles retira, referente a dados individuais, para estabelecer a existência de relações e responder a questões sobre dados: “A rapariga com mais impulsão vertical é a mais alta, logo há aqui uma relação. Quanto mais alta, mais o valor da impulsão vertical será”.

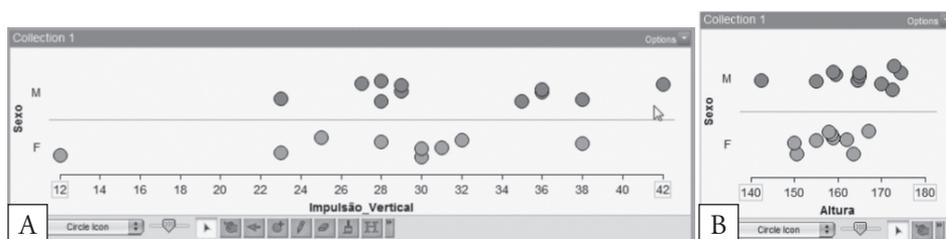


Figura 10 — Gráficos representando a Impulsão Vertical e a Altura, por género, Cris.

Ao identificar na citação anterior a “rapariga”, a aluna também reconhece a relação entre os dados representados no gráfico e os dados nos cartões, sendo capaz de os ler e descrever corretamente a informação neles apresentada.

Na sequência do seu trabalho na procura de evidências para confirmar as suas conjeturas, Leo, Margarida e Afonso reconhecem o uso apropriado de diferentes representações gráficas e mostram compreender o aspeto relacional dos diagramas de dispersão, falando sobre eles em termos de dispersão de dados. Leo, ao construir um gráfico de covariação entre o IMC e a altura (Figura 11C), verifica que os pontos do gráfico se dispersam mais, em comparação com o gráfico do IMC com o peso (Figura 11D). A sua descrição do gráfico inclui “Os pontos marcados (...), IMC e altura, estão afastados uns dos outros”. Desta forma, o aluno começa a estabelecer uma perceção de como a dispersão e a distribuição dos dados é útil e retorna ao gráfico da relação entre o peso e o IMC para concluir que está perante uma relação direta entre estas duas variáveis. Reconhece que alguns pontos se afastam dessa relação mas afirma que “Os pontos estão mais ou menos próximos entre si e se...e se ligar os pontos parecem que estão a subir. (...) Que se aproximam da linha (...) e essa linha está a crescer”.

A partir da análise das quatro representações gráficas que construiu (Figura 11), o aluno identifica mensagens a partir dos dados e explica quais as características dos gráficos que teve em conta para selecionar aquele que, do seu ponto de vista, mostra a relação mais forte entre duas variáveis:

Acho que... [é entre] o peso e o IMC. Ou então, a altura e o peso. À medida que [o valor de] cada variável aumenta, a outra também... no sentido, linear. (...) Porque parece que os pontos estão mais próximos, dando a ideia de uma linha. Neste [diagrama A], estão a crescer mas afastam-se. Neste gráfico [B] os pontos estão muito próximos e parece que formam uma reta que está a diminuir.

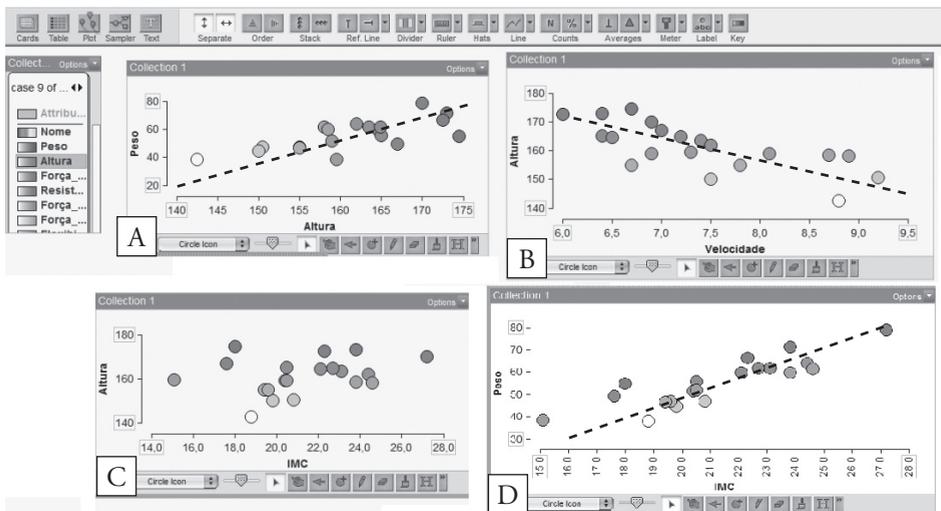


Figura 11 — Diagramas de dispersão representando relações entre diversas variáveis, Leo.

Leo generaliza depois essa ideia, concluindo sobre o sentido da relação, quando afirma “Como está a diminuir... o sentido é negativo, pois tem a ver com o que dizemos nas aulas... sobre a... a ideia das inclinações das retas”. O aluno também interpreta a intensidade e o sinal da covariação através do coeficiente de correlação, relacionando-o com a linearidade/dispersão e com a orientação da nuvem de pontos do gráfico:

Leo: [o coeficiente de correlação] Acho, que é... (pausa). Um grau que mede a direção dos pontos. E está no intervalo de 1 a -1, acho eu. (...) 1, como é um número positivo, associa-se a uma direção mais positiva e o outro é o contrário.

Investigadora: De que forma relacionas isso com o que viste [nos diagramas]?

Leo: Se [os pontos] estão mais juntos [lineares] e estão a crescer, é positiva. Se estão da mesma maneira, mas a decrescer é negativa.

Investigadora: E se forem [pontos] dispersos?

Leo: Não tem relação, nem é positiva, nem negativa.

A partir dos diagramas de dispersão que constrói (Figura 12), Margarida identifica relações entre variáveis e estabelece a sua intensidade com base na dispersão dos dados, embora de forma pouco explícita: “Neste [A] os pontos aproximam-se uns dos outros e se ligar os pontos parece que formam uma reta que está a crescer. Mas neste [B] e neste [C], também está a crescer, mas mais afastado”. Expressa-se também, com dificuldade, sobre o sinal da covariação, concluindo: “Como este [A] cresce, a relação dos dados é positiva. (...) Este, como é contrário do outro [D], é negativa”.

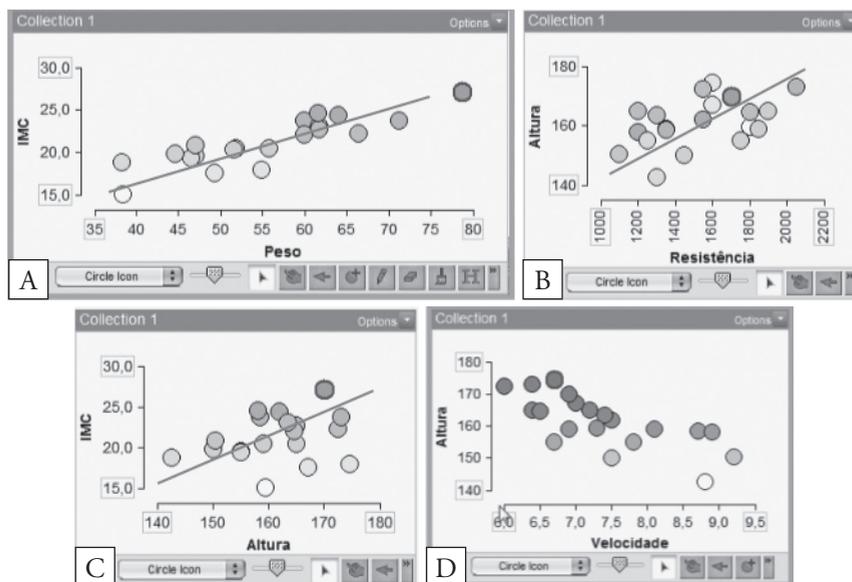


Figura 12 — Diagramas de dispersão representando relações entre diversas variáveis, Margarida.

Afonso é o único que recorre à distribuição dos pontos nos quadrantes do diagrama de dispersão para estabelecer relação entre o peso e a altura (Figura 13), como explica:

Os pontos parecem que estão a subir. (...) Ao marcar os valores médios dos eixos x e y [onde se representa o peso e a altura] e traçar duas retas, aparece um ponto médio, na [sua] interseção... Para os valores do peso maior que a média são os mesmos quando os valores da altura são maiores, apesar de ocorrer quatro exceções no diagrama.

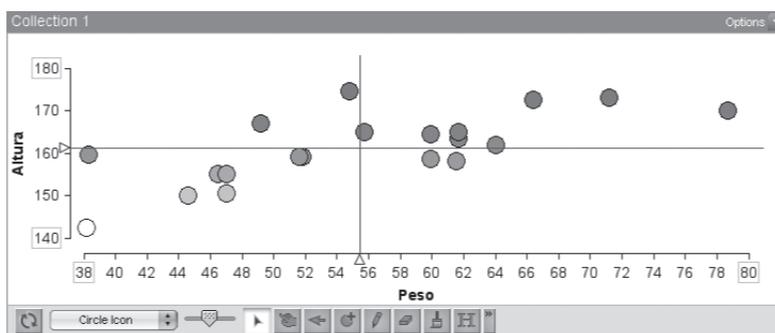


Figura 13 — Diagrama de dispersão com média e linhas de referência marcadas, Afonso.

Apesar de nem sempre usarem os termos corretos, a explicação dos alunos mostra que identificam mensagens a partir dos dados representados nos gráficos, permitindo-lhes tomar decisões sobre a existência de covariação entre variáveis.

As dificuldades de Cris em construir diagramas de dispersão e em compreender a sua adequabilidade para estabelecer relações entre variáveis refletem-se também na sua análise. Com um forte apoio da investigadora, a aluna constrói alguns diagramas de dispersão (Figura 14) mas não é capaz de relacionar a dispersão ou linearidade dos dados com a intensidade e o sinal da covariação, limitando-se a descrever os dados — “Estas duas [A e B] estão a crescer para cima e esta [C] está a crescer para baixo”, justificando que “não entendo como posso ver se a relação é forte entre os dados. Só dá para ver se crescem ou decrescem, sempre da mesma forma”.

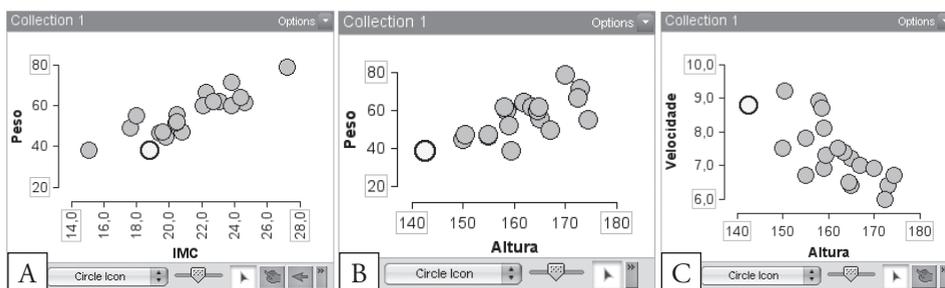


Figura 14 — Diagramas de dispersão representando relações entre diversas variáveis, Cris.

Pensar sobre os dados. Todos os alunos revelam familiaridade com o contexto dos dados registados e são capazes de fazer conexões com a sua natureza, a avaliar pelos seus comentários, de que é exemplo o de Leo: “são usados em educação física, para determinar a condição inicial dos alunos quando começam um exercício físico”. As conjeturas que formulam inicialmente, sobre a relação entre duas variáveis, têm por base o seu conhecimento pessoal e a sua experiência do contexto. A expressão “Se calhar, quanto maior for a altura, será maior o seu peso”, usada por Leo, indicia que o aluno não usa a natureza relacional dos diagramas de dispersão para suportar o seu pensamento, identificando as relações entre dois atributos. Para justificar as expectativas que não foram verificadas universalmente, observando o gráfico, o aluno hesita um pouco mas tenta encontrar possíveis causas que expliquem a maior velocidade de alguns alunos mais baixos: “Hum... não sei. Talvez seja por causa da prática... esse aluno deve fazer mais corridas e aí desenvolver a velocidade”.

Por seu lado, Margarida evoca a constituição física habitual de um indivíduo para tentar justificar a contradição que encontra na sua conjetura, afirmando: “Se tem mais altura, devia ser mais rápido e não é! (...) pelo IMC, não dá ideia de que é gordo. Talvez por ser alto, o peso também ser alto [maior]”. Verifica-se, assim, que por diversas vezes os alunos procuram possíveis causas de variação para justificar porque é que certos dados individuais contradizem a relação conjeturada com base no seu conhecimento sobre o contexto. Isto é igualmente evidente no seguinte diálogo entre a investigadora e Cris:

Cris: Christopher, não sendo o aluno mais alto, consegue atingir uma boa velocidade... Consegue percorrer os 60 metros em pouco tempo, em comparação com os alunos mais altos. (...) Se calhar deve estar habituado a fazer muito exercício físico... Por exemplo deve jogar à bola ou pertencer a um clube de futebol.

Investigadora: Porque afirmas isso?

Cris: Pelo que costumo ver. Os que exercitam os músculos desenvolvem-nos e preparam-nos para se adaptar melhor às condições.

Investigadora: Se olhares para o gráfico do peso, pelo que estás a dizer, à partida ele deveria ser o mais leve. Acontece isso?

Cris: bem, não... Mas... Talvez, o peso não é o peso, em gordura, mas sim o peso dos músculos que desenvolveu... Porque na força abdominal é o que consegue fazer mais abdominais em 30 segundos.

Afonso, quando confrontado com algumas contradições entre dados e o seu conhecimento do contexto, conclui:

Isto não está certo! Quando temos menos peso, não [nos] cansamos tanto e conseguimos correr. E...neste aqui [coloca o cursor sobre o ponto mais claro] não acontece isso! Está errado, o que nos dizem... “Se pesares muito, demoras muito tempo a correr e cansas-te”. (...) Aquilo de maior peso consegue demorar mais tempo ou se tens menos peso consegues correr mais depressa, não é uma coisa para todas as pessoas!

Ao reconhecer que é o seu ‘senso comum’, no qual baseou as suas conjeturas, que “está errado”, o aluno evidencia valorizar a informação que obtém dos gráficos. As explicações e descrições sobre os gráficos, já apresentadas anteriormente, mostram que os alunos os usam de forma efetiva para avaliar a existência de covariação. Deste modo, a interpretação dos dados é parcialmente baseada no conhecimento que os alunos têm do contexto e parcialmente baseada na sua interpretação direta dos gráficos.

A realização de inferências causais baseadas nos dados é pouco evidenciada, surgindo apenas quando Leo e Margarida especulam que os alunos mais altos são mais rápidos, concluindo que “devido ao comprimento da perna e do pé, consegue atingir um desempenho maior” (Leo) e “se consegue atingir uma velocidade rápida, é porque não é um aluno baixo” (Margarida).

Conclusões e implicações

Neste artigo analisámos o raciocínio covariacional de alunos do 10.º ano quando usam o *TinkerPlots* para explorar relações entre variáveis e estabelecer a existência de covariação, na realização de uma tarefa durante uma entrevista. A análise da interação dos alunos com este *software* teve por base o modelo conceptual de Fitzallen (2006) que se mostrou

pertinente para caracterizar o seu desempenho no que diz respeito ao conhecimento genérico, à criatividade com os dados, à compreensão dos dados e ao pensamento sobre dados, relativamente à covariação. Além disso, as questões da tarefa proposta requeriam a representação e a análise exploratória de dados, bem como a realização de inferências baseadas nessas representações (e na variação evidenciada). Esta complexidade da situação apresentada permitiu incorporar todas as categorias do modelo de modo relacionado, tal como a autora sugere.

Frequentemente, as questões sobre dados estão relacionadas com um gráfico específico, não havendo necessidade de criar novas representações. No entanto, resumir os dados de outra forma pode ser útil para fornecer oportunidade aos alunos para construírem gráficos que sejam significativos para eles (Konold & Miller, 2005). Os resultados do estudo mostram que os alunos utilizaram, de modo criativo mas limitado, as ferramentas básicas do *TinkerPlots* para construírem diversas representações gráficas para evidenciar a existência de relações entre duas variáveis e suportar as suas conjeturas formuladas verbalmente. Todos os alunos começaram por criar gráficos de covariação com escalas divididas em intervalos que resumem e organizam dados bivariados mas não os tentaram modificar nem usar outros recursos do *software* para facilitar a interpretação dos dados. A utilização do diagrama de dispersão, que é a representação mais adequada ao estudo da covariação por permitir estabelecer e simultaneamente caracterizar a natureza das relações, apenas surge quando incentivados pela investigadora. Só Afonso escolheu o diagrama de dispersão, de forma autónoma e intencional para ganhar compreensão dos dados bivariados, induzido pela sua experiência escolar e facilidade de interação com o *software*. Este desempenho dos alunos indicia que o desenvolvimento da compreensão de covariação e a avaliação de relações entre variáveis pode ocorrer de forma intuitiva antes da formalização de procedimentos associados a este conceito (Fitzallen, 2012; Moritz, 2004). Além disso, a falta de familiaridade que os alunos evidenciaram com o *TinkerPlots* limitou a sua criatividade, o que não é de estranhar, atendendo a que foi a primeira vez que trabalharam com o *software* e este “precisa de ser aprendido antes de mediar de forma efetiva entre o aprendente e o que é para ser aprendido” (Bakker, 2004, p. 279).

Todos os alunos foram capazes de articular as representações gráficas criadas com os dados disponibilizados nos cartões, aos quais recorreram frequentemente para aceder a informação sobre eles. A apresentação simultânea dos cartões e dos gráficos que o *TinkerPlots* permite, facilitou a articulação entre estas duas formas de representação, apoiando-os na identificação de mensagens a partir dos dados, como já verificado em Fitzallen (2012). Na sua maioria, os alunos também reconheceram o uso apropriado das diferentes representações gráficas construídas e foram capazes de descrever e interpretar os diagramas de dispersão que construíram, focando-se tanto em características individuais como em tendências mais globais dos dados, como descrito por Ben-Zvi e Arcavi (2001). Embora tenham começado por interpretar os gráficos focando-se em alguns dados individuais para avaliar e suportar as suas inferências, numa perspetiva local, quando incentivados, estes alunos conseguiram desenvolver uma perspetiva mais global para descrever a relação entre duas variáveis, evidenciada nos diagramas de dispersão, incluindo

a consideração de dispersão e a identificação de tendências nos dados. No entanto, nenhum dos alunos chegou a referir a variação dos dados de modo a indicar adequadamente covariação.

Os resultados do estudo salientam, ainda, a importância do contexto na interpretação dos dados. Os alunos tiveram facilidade em verbalizar as suas conjeturas sobre a relação entre duas variáveis mas basearam-nas maioritariamente no seu conhecimento e experiência com o contexto dos dados. Apesar do conhecimento do contexto os ter auxiliado a articular o seu raciocínio sobre covariação e a suportar o seu pensamento sobre a relação apresentada nos diagramas de dispersão, quando ela não se ajustava às suas expectativas os alunos valorizaram a informação que obtiveram dos gráficos e usaram-na para validar as suas afirmações e não tanto para explorar relações entre variáveis. Além disso, as possíveis causas de variação que procuraram e as inferências que fizeram baseadas nos dados estão fortemente relacionadas com o seu conhecimento do contexto dos dados. Deste modo, os alunos foram capazes de fazer conexões com o contexto dos dados, foram influenciados por ele e usaram-no, algumas vezes, de modo significativo (Fitzallen & Watson, 2011). No entanto, é preciso que os alunos se distanciem do contexto para procurarem relações entre as variáveis e, nesse sentido, Fitzallen (2012) sugere a necessidade de seleccionar dados a partir de contextos menos familiares aos alunos, desafiando-os a ‘interrogar’ os dados e a tirar conclusões a partir das representações gráficas criadas.

O acesso a *software* estatístico não garante, por si só, uma aprendizagem efetiva, é fundamental o papel ativo do professor no estabelecimento e suporte do desenvolvimento do raciocínio dos alunos (Cobb *et al.*, 2003), focando-se tanto nas representações gráficas construídas, como nas questões a serem exploradas de modo a assegurar que eles desenvolvem compreensão da necessária articulação entre estes aspetos. Os resultados deste estudo podem contribuir para perceber as potencialidades do uso do *TinkerPlots* na promoção do raciocínio covariacional dos alunos, informando os professores sobre quais os aspetos a que devem dar atenção no processo de ensino e aprendizagem da covariação.

Nota

- 1 Este trabalho foi realizado no âmbito do Projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010) financiado por fundos nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia.

Referências

- Ainley, J., Pratt, D., & Nardi, E. (2001). Normalizing: children's activity to construct meanings for trend. *Educational Studies in Mathematics*, 45, 131–146.
- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht, The Netherlands: CD Beta Press.
- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer-based teaching environment. In J. B. Garfield & G. Burrill (Eds.), *Research*

- on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. *Proceedings of the 1996 IASE Round Table Conference* (pp. 191–205). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Batanero, C., & Godino, J. D. (1998). Understanding graphical and numerical representations of statistical association in a computer environment. In L. Pereira-Mendoza, L. Seu Kea, T. Wee Kee & W. Wong (Eds.), *Proceedings of the Fifth Conference on Teaching Statistics (vol. 2)*, pp. 1017–1024. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about data analysis. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 121–145). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ben-Zvi, D. (2006). *Scaffolding students informal inference and argumentation*. Disponível em http://www.researchgate.net/publication/228637727_Scaffolding_students_informal_inference_and_argumentation, acessado em 10 de junho de 2013.
- Ben-Zvi, D., & Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics*, 45, 35–65.
- Chapman, L. J., & Chapman, J. P. (1982). Test results are what you think they are. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 239–248). Cambridge: Cambridge University Press.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamics events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 352–378.
- Chick, H. (2004). *Representing association: Children manipulating data sets*. Presented at ICME-10, Denmark, TSG11: Research and development in the teaching and learning of probability and statistics. Disponível em <http://www.icme-10.dk>, acessado em 18 de setembro de 2012.
- Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2003). Learning about statistical covariation. *Cognition and Instruction*, 21, 1–78.
- Crocker, J. (1981). Judgment of covariation by social perceivers. *Psychological Bulletin*, 90(2) 272–292.
- Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(2), 155–170.
- Estepa, A., & Batanero, C. (1995). Judgments of association in scatterplots. In J. Garfield (Ed.), *Research Papers from the 4th International Conference on Teaching Statistics* (pp. 117–124). Minnesota, MN: The International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics.
- Estepa, A., & Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatterplots: An empirical study of students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 4, 25–41.
- Estepa, A., & Sánchez-Cobo, F. T. (2003). Evaluación de la comprensión de la correlación y regresión a partir de la resolución de problemas. *Statistics Education Research Journal*, 2(1), 54–68.
- Fitzallen, N. (2006). A model of students' statistical thinking and reasoning about graphs in an ICT environment. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Proceedings of 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 203–210). Sydney: MERGA.
- Fitzallen, N. (2012). *Reasoning about covariation with tinkerplots*. (Tese de doutoramento, University of Tasmania, Tasmania).
- Fitzallen, N., & Watson, J. (2011). Graph creation and interpretation: Putting skills and context together. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, & S. Thorton (Eds.), *Proceedings of the Joint Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers and Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 253–260). Sydney: MERGA.

- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education*. GAISE report. American Statistical Association. Disponível em www.amstat.org/education/gaise/, acessado em 12 de janeiro de 2013.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning. Research and teaching practice*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.
- Konold, C. (2002). Alternatives to scatterplots. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town, South Africa. [CDROM] Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Konold, C. (2006). Designing a data analysis tool for learners. In M. Lovett & P. Shah (Eds.), *Thinking with data: The 33rd Annual Carnegie Symposium on Cognition*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Konold, C., & Miller, C., D. (2005). *TinkerPlots: Dynamic data exploration*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- Ministério da Educação (2001a). *Matemática A — 10º ano*. Lisboa: ME, DES.
- Ministério da Educação (2001b). *Matemática B — 10º ano*. Lisboa: ME, DES.
- Moritz, J. B. (2000). Graphical representations of statistical associations by upper primary students. In J. Bana & A. Chapman (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (v. 2, pp. 440–447). Perth: MERGA.
- Moritz, J. B. (2004). Reasoning about covariation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 227–255). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Mugabe, D., Fernandes, J. A., & Correia, P. (2012). Avaliação da associação estatística num diagrama de dispersão por estudantes universitários. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, C. Nunes, *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.403–414). Lisboa: APM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas profissionais para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- Pfannkuch, M., Rubick, A., & Yoon, C. (2002). Statistical thinking and transnumeration. In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch & M. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 567–574). Sydney: MERGA.
- Pfannkuch, M., & Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield, (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 17–46). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sánchez-Cobo, F., Estepa, A., & Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(2), 297–310.
- Seidman, I. (2006). *Interviewing as qualitative research — a guide for researchers in education and the social sciences*. New York, NY: Teachers College Press.
- Zieffler, A. S., & Garfield, J. B. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 7–31.
- Watson, J. (2008). Exploring beginning inference with novice grade 7 students. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 59–82.

Anexo

Collection 1
Options

case 1 of 20
▼

Attribute	Value
<input type="checkbox"/> Nome	Alcino
<input type="checkbox"/> Peso	59.9
<input type="checkbox"/> Altura	164.5
<input type="checkbox"/> Força Superior	27
<input type="checkbox"/> Resistência	1800
<input type="checkbox"/> Força Abdominal	41
<input type="checkbox"/> Força Inferior	200

Dados de resultados dos testes de condição física inicial de uma turma de 9º ano de escolaridade

NOME: identificação do aluno

ATUADA: de cada aluno

RESISTÊNCIA: distância percorrida por cada aluno (em metros), durante 10 minutos

FORÇA SUPERIOR: número de flexões que cada aluno faz em 30 segundos

FORÇA ABDOMINAL: número de abdominais que cada aluno faz em 30 segundos

FORÇA INFERIOR: a distância (em centímetros) sob uma fita métrica no chão, que cada aluno dá um salto tomado de péis juntos e aterrissando com os pés juntos e os braços estendidos para cima, depois de um salto de 10 centímetros, tendo o apoio para frente, sem dobrar os joelhos

VELOCIDADE: duração (em minutos) que cada aluno consegue percorrer 60 metros

IMPELUSO VERTICAL: distância do salto na vertical com péis juntos

IMC: índice de massa corporal

SEXO: Se o aluno é feminino ou masculino

QUESTÕES:

1. Analisa e explica o conjunto de dados resultantes dos testes de condição física. Que informações podes obter a partir deste conjunto de dados?
2. Que coisas interessantes podes descobrir sobre este conjunto de dados?
3. Formula hipótese sobre estes dados.
4. A que evidência podes recorrer para suportar as tuas conjecturas?
5. Pensas que, neste conjunto de dados, seria interessante procurar algumas diferenças entre alunos do sexo masculino e feminino? Porquê?
6. Quem teve um melhor desempenho? Rapazes ou raparigas?
7. Os alunos mais altos tendem a ser os mais pesados e os mais rápidos?
8. Sabes o que é o IMC? Tendo por base esse conhecimento, esperas que os alunos que apresentam índices mais altos sejam também os mais pesados? Explica porquê.

Fechar

TinkerPlots® version 2.1

Resumo. Neste estudo, focamo-nos sobre o raciocínio covariacional estatístico de alunos do 10.º ano. Procuramos analisar como é que os alunos exploram relações entre variáveis e estabelecem a existência de covariação quando utilizam o *TinkerPlots* e de que modo o uso deste *software* pode contribuir para o seu raciocínio covariacional. Os dados foram recolhidos através de entrevistas baseadas na realização de uma tarefa de natureza exploratória, focada na compreensão do conceito de covariação, recorrendo ao *TinkerPlots*. Os resultados mostram que os alunos usam o *software* para construir representações gráficas significativas para eles e que traduzem e suportam o seu raciocínio covariacional. Embora a sua compreensão dos dados seja, por vezes, dominada pela referência a características individuais, a maioria dos alunos também consegue fazer interpretações globais sobre a tendência dos dados evidenciada nos gráficos que criam e usá-las, juntamente com o seu conhecimento do contexto dos dados, para realizar inferências.

Palavras-chave: Raciocínio Estatístico; Covariação; *Tinkerplots*; Diagrama de dispersão; Correlação.

Abstract. This study focuses on the covariational reasoning of grade 10 students. We aim to analyze how they explore relationships between variables and establish covariation when using the *TinkerPlots* and how the use of the *software* contributes to their covariational reasoning. Data were collected by individual interviews in which students carried out an exploratory task focus on the understanding of covariation, using the *TinkerPlots*. The results show that students used the *software* to create a variety of meaningful plots in order to support their covariational reasoning. Although their understanding of the data is often dominated by reference to individual points, most students can also make global interpretations of the trend of the data in their graphs and use them to make inferences, along with their knowledge of the context.

Keywords: Statistical reasoning; Covariation; *Tinkerplots*; Scatterplots; Correlation.

■■■

ANA HENRIQUES

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
achenriques@ie.ul.pt

PATRÍCIA ANTUNES

Instituto Vaz Serra, Cernache do Bonjardim
patricia.antunes@campus.ul.pt

(Recebido em março de 2014; aceite para publicação em junho de 2014)

