Passeios Aleatórios da Carlinha: uma sequência de ensino de probabilidade

Verônica Yumi Kataoka
Universidade Estadual de Santa Cruz

Claudia Borim da Silva
Universidade São Judas

Irene Cazorla
Universidade Estadual de Santa Cruz

Introdução

Para Gal (2005), Borovcnik e Kapadia (2009) a aprendizagem da Probabilidade é essencial tanto para ajudar a preparar os alunos para a vida, uma vez que, eventos aleatórios permeiam os seus cotidianos, como para o entendimento de qualquer procedimento inferencial da Estatística. Nessa mesma linha de raciocínio, Contreras, Batanero, Díaz e Fernandes (2011) argumentam que as razões para a abordagem de conceitos probabilísticos nas escolas são: a utilidade da probabilidade no cotidiano, o seu papel fundamental em outras disciplinas, a necessidade de uma base conceitual estocástica em muitas profissões, bem como o papel importante do raciocínio probabilístico em contextos que envolvem tomadas de decisões.

De fato, no nosso dia a dia existem diversas situações que são de natureza aleatória, como por exemplo, as previsões meteorológicas, o risco de incidência de uma doença, a chance de um time de futebol ganhar um campeonato ou de alguém ganhar um prêmio na loteria.

De acordo com Gal (2005) o aluno que é capaz de ler e interpretar criticamente informações probabilísticas, bem como tomar decisões com base nas mesmas, pode ser considerado letrado em Probabilidade.

Esse mesmo autor propõe um modelo que propicie o desenvolvimento do letramento probabilístico, sendo composto por cinco elementos cognitivos: conceitos probabilísticos (aleatoriedade, independência, variação e também de previsibilidade e incerteza), cálculos probabilísticos (formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos), linguagem (maneiras de falar e representar as probabilidades, observar os termos e as representações utilizadas), contexto (compreensão do papel e dos significados de mensagens probabilísticas em diferentes contextos) e questões críticas (possibilitar ao aluno refletir e questionar criticamente uma estimativa ou uma declaração probabilística); e três elementos disposicionais: postura crítica, crenças e atitudes e também os sentimentos pessoais sobre incerteza e risco.

Dentro da perspectiva do desenvolvimento do letramento probabilístico durante a vida escolar do aluno, vários pesquisadores, como, por exemplo, Coutinho (2001), Batanero e Godino (2002), Lopes (2003), Kataoka, Rodrigues e Oliveira (2007), recomendam que durante o processo de ensino e aprendizagem de conceitos probabilísticos, o professor deve apresentar intuitivamente a noção de acaso e de incerteza, além de trabalhar com atividades que proporcionem aos alunos a realização de experimentos e a observação de eventos.

Nilsson (2013) afirma que o professor ao trabalhar com experimentações aleatórias possibilita aos alunos avaliar o comportamento aleatório do fenômeno em estudo e desafia-os a fazer previsões e verificações de probabilidades. Além disso, segundo Lee, Angotti e Tarr (2010) há um consenso geral de que existe uma carência de pesquisas sobre o raciocínio probabilístico que analisem a capacidade dos alunos para relacionar resultados observados a partir de dados empíricos e resultados esperados com base em um modelo matemático de probabilidade, por conseguinte, de realizar inferências e emitir seus julgamentos acerca desses resultados.

Nesse contexto de experimentação, Batanero e Godino (2002) destacam a importância de se observar o caráter imprevisível de cada resultado isoladamente, percebendo a variabilidade das pequenas amostras, a partir da comparação dos resultados de cada aluno ou da turma toda; bem como estar atento ao fenômeno da convergência, observando os resultados de toda a turma, e posteriormente comparando a confiabilidade de pequenas e grandes amostras. Corroborando com essas ideias, Kaplan, Rogness e Fisher (2014) consideram que, na abordagem do conceito de aleatoriedade, as atividades devem focar o processo e não apenas em um único resultado.

Dentre as atividades envolvendo experimentação, Soto-Andrade (2013) defende a utilização de atividades que envolvam passeios aleatórios, como por exemplo, os "Passeios Aleatórios de Brownie", por considerar que constituem um caminho didático que pode auxiliar o desenvolvimento do pensamento estocástico dos alunos, tanto no que se refere aos aspectos matemáticos, como aos didáticos. Segundo o autor, "Matematicamente, os passeios aleatórios constituem um modelo universal para uma ampla gama de problemas estocásticos" e "Didaticamente, os passeios aleatórios tem a vantagem de ser uma realização concreta e icônica da aleatoriedade" (p. 1).

Soto-Andrade (2013) aplicou as atividades dos "Passeios Aleatórios de Brownie" (PAB) com alunos, tanto na fase escolar, como graduandos, e professores em serviço com diferentes *backgrounds* constatando que, aproximadamente, metade dos participantes inicia a atividade imaginando que todas as esquinas têm a mesma probabilidade e que ao longo do desenvolvimento da atividade, utilizando diversas metáforas, os sujeitos conseguem entender os conceitos probabilísticos envolvidos na atividade, inclusive alunos e professores que não são da área das ciências exatas.

Em consonância com as ideias dos autores supracitados, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para o ensino fundamental I (BRASIL, 1997) recomendam o ensino da Probabilidade desde os anos iniciais, no bloco de conteúdo chamado Tratamento da Informação. No ensino fundamental II (de 11 a 14 anos), uma das metas é fazer com que o aluno represente tabelas e árvore de possibilidades, conte os casos possíveis em situações combinatórias; construa o espaço amostral em várias situações, indicando a probabilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão (BRASIL, 1998). Quanto ao ensino médio (de 15 a 17 anos), o aluno deve compreender que a probabilidade é uma medida de incerteza, estimar probabilidades, e que algumas intuições são incorretas e podem levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance[1] (BRASIL, 2002).

Apesar das orientações curriculares e dos avanços das pesquisas em Educação Estatística, a inserção efetiva tanto do ensino de Probabilidade como de Estatística na escola brasileira ainda enfrenta alguns entraves: a formação de professores, que durante sua formação inicial não estudaram esses conteúdos e/ou os aspectos relacionados à didática; a escassez de materiais didáticos e softwares computacionais, dentre outros (Cazorla, 2006).

Refletindo sobre essas questões, a partir de 2006, um grupo de educadores estatísticos de universidades brasileiras começou a desenvolver sequências de ensino (SE) de Probabilidade e de Estatística, objetivando contribuir com o desenvolvimento dos letramentos probabilístico e estatístico, e do pensamento científico. Essas SE utilizam atividades interdisciplinares, contextualizadas no ambiente escolar, que exploram os aspectos cognitivos da aprendizagem e os relacionados ao desenvolvimento da consciência crítica do uso dos recursos ambientais e do respeito à diversidade. A proposta desse grupo de pesquisa é que essas SE sejam desenvolvidas tanto no ambiente de aprendizagem papel e lápis, como também no ambiente computacional.

Em 2008, esse grupo em conjunto com uma equipe de estatísticos e cientistas da computação e um grupo de professores colaboradores começaram a desenvolver o Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico para a Educação Básica (AVALE–EB). Esse ambiente virtual de aprendizagem, gratuito, atualmente disponibiliza dez sequências de ensino (SE) para auxiliar os professores no ensino de Probabilidade e de Estatística na Educação Básica, nos dois ambientes de aprendizagem. Dentre as SE de Probabilidade, o AVALE-EB disponibiliza os "Passeios Aleatórios da Carlinha" (PAC) proposto por Cazorla, Kataoka e Nagamine (2010).

O objetivo desse artigo é apresentar os aspectos didáticos da PAC, discutindo sua aplicação tanto no ambiente de papel e lápis como no virtual.

AVALE-EB

No período de 2008 a 2010, o projeto de pesquisa Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico — AVALE foi desenvolvido no âmbito da Universidade Estadual de Santa Cruz. Nesse projeto três equipes multidisciplinares construíram e validaram um ambiente virtual com a mesma denominação AVALE. A primeira equipe formada por Estatísticos e Cientistas da Computação (ECC); a segunda, por Educadores Estatísticos

(EE) e a terceira, por Professores Colaboradores (PC) das escolas públicas, trabalhando de forma colaborativa. A equipe ECC foi responsável pelo desenvolvimento computacional do AVALE; a equipe EE, pela definição e formato do conteúdo e da metodologia das sequências de ensino (SE). A implementação nas escolas públicas foi de responsabilidade da equipe dos PC, previamente orientados pela equipe EE.

No final de 2010, o AVALE foi dividido em duas vertentes AVALE para o Ensino Superior que ficou sob responsabilidade da ECC e o AVALE para a Educação Básica — AVALE-EB, que está sendo desenvolvido pela equipe EE, um analista de sistema e PC. Até o momento, o AVALE-EB disponibiliza cinco sequências de ensino (SE) de Estatística (Homem Vitruviano, Perfil da Turma I, Perfil da Turma II, Planeta Água e Planeta Luz), e cinco de Probabilidade (Problema da Agulha do Buffon, Jogo dos Discos, Jogo das Bolas, Problema do macarrão e Passeios Aleatórios da Carlinha), com tutoriais para orientar os professores na aplicação das mesmas com alunos da educação básica, tanto no ambiente papel e lápis como no virtual.

O ambiente de aprendizagem papel e lápis é aquele no qual os alunos trabalham na sala de aula, no laboratório de ciências ou no pátio da escola, coletando seus dados, numa situação físico-experimental, registrando os dados em papel, calculando as estatísticas e construindo os gráficos no papel, calculando-os à mão ou com ajuda da calculadora. Em contraste, o ambiente virtual é propiciado pelo uso do computador, no Laboratório de Informática, em que o aluno entra com seus dados e os analisa com as ferramentas estatísticas disponíveis no AVALE-EB.

A equipe do AVALE-EB entende que no processo de ensino e de aprendizagem de Probabilidade e Estatística o trabalho no ambiente papel e lápis é fundamental para os alunos vivenciarem cada passo dos procedimentos estatísticos. Contudo, o professor deve estar atento ao fato de que, segundo Kataoka e Cazorla (2010), a Estatística é uma ciência que objetiva desvendar padrões subjacentes aos dados e, para tanto, suas técnicas utilizam cálculos complexos e que envolvem grande quantidade de dados. Dessa forma, trabalhar apenas com esse ambiente de aprendizagem pode tornar as atividades cansativas para os alunos, desviando-os do foco principal, que é a interpretação crítica dos resultados. Além disso, a utilização de poucos dados para que os alunos aprendam o algoritmo dos cálculos das medidas estatísticas pode funcionar como estratégia didática, mas essa estratégia impede que os alunos percebam o poder inferencial dessas medidas. Assim, torna-se necessário aumentar a base de dados, o que implica na utilização de recursos computacionais.

Mais especificamente, no contexto da aprendizagem de conceitos probabilísticos, Batanero (2001) alerta que o professor deve usar a experimentação aleatória com cautela, para que não ocorra a extensão indevida da "*Lei dos grandes números*", acreditando-se na existência de uma "*Lei de pequenos números*". O que pode levar o aluno a falsas interpretações sobre a replicabilidade dos experimentos aleatórios, devido à sensibilidade do tamanho da amostra.

De acordo com Mills (2002), diversos pesquisadores têm sugerido o uso de computadores por acreditarem que os alunos podem aumentar sua capacidade de entendimento de conceitos abstratos ou difíceis. Além disso, Chance e Rossman (2006) apontam para a possibilidade de repetir processos aleatórios um grande número de vezes, permitindo a observação do fenômeno de convergência, no caso da Probabilidade, de forma eficiente.

Ainda nesse contexto computacional, Batanero e Díaz (2007) ressaltam que, com a inserção de computadores na escola, foi possível realizar simulações, que podem auxiliar os alunos a resolver problemas simples, já que apenas a abordagem experimental não é suficiente para o ensino de Probabilidade. Segundo as autoras, a simulação está diretamente relacionada a pressupostos de um fenômeno representado por um modelo teórico implementado no computador. Lane e Peres (2006) relatam que as pesquisas mostram que, por meio da experimentação aleatória e de simulações computacionais, obtém-se um maior benefício para o desenvolvimento de uma aprendizagem ativa, permitindo aos alunos a construção do conhecimento. Para Borovcnik e Kapadia (2009), a simulação é uma ótima estratégia e, quando atrelada ao uso da tecnologia, ajuda a reduzir cálculos técnicos e possibilita ao aluno um melhor foco nos conceitos abordados.

Nesse sentido, tanto o ambiente virtual como o ambiente papel e lápis constituem ambientes de aprendizagem e devem ser trabalhados de forma interligada, pois ambos possibilitam aos alunos aprender os conceitos estatísticos e probabilísticos trabalhados nas SE do AVALE-EB.

A página inicial do AVALE-EB (http://avale.iat.educacao.ba.gov.br/) é composta de informações gerais do projeto subdividido em menus e submenus informativos (Figura 1). Na aba sequências de ensino (SE) ficam localizadas todas as sequências disponibilizadas, sendo que para cada SE o usuário poderá ter acesso ao tutorial (Figura 2).

Figura 1 — Tela inicial do AVALE-EB.

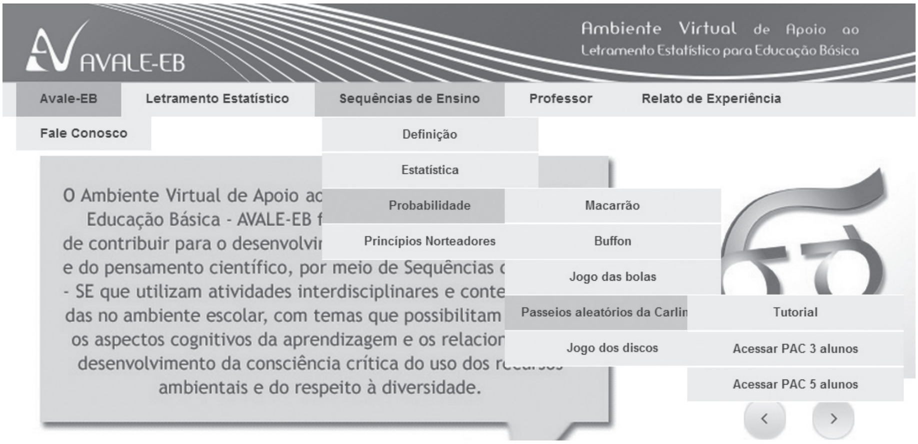

Figura 2 — Acesso a Sequência de Ensino Passeio Aleatório da Carlinha.

O AVALE-EB tem como objetivos:

- Trabalhar sequências de ensino de Probabilidade e de Estatística contextualizadas em situações problema nas quais os alunos têm uma participação ativa nos ambientes de aprendizagem: papel e lápis e virtual;
- Contribuir para o letramento estatístico e probabilístico dos alunos fazendo uso desses conceitos que permitam o desenvolvimento da capacidade crítica da leitura do mundo;
- Contribuir para a formação científica dos alunos e propiciar sua inserção numa sociedade cada vez mais informatizada.

Vale salientar que o termo Sequência de Ensino (SE), no contexto do AVALE-EB, caracteriza-se como um tipo de atividade em que o professor conduz todas as etapas em conjunto com seus alunos, sendo norteadas pelos seguintes princípios: promover o desenvolvimento do pensamento estatístico; propiciar participação ativa dos alunos; reconhecer a natureza das variáveis e o tratamento estatístico e incentivar do uso de recursos tecnológicos.

Apresentação da PAC

A SE “Passeios Aleatórios da Carlinha” (PAC) (Cazorla, Kataoka & Nagamine, 2010) é uma versão adaptada da atividade didática “Passeios Aleatórios da Mônica” (PAM)[2] (Cazorla & Santana, 2006), por utilizar os personagens da turma da Carlinha[3] em lugar dos da Turma da Mônica e por inserir novas tarefas, a fim de adaptá-las aos alunos do ensino fundamental II e médio.

Descrição Geral

Objetiva-se com a PAC: introduzir noções elementares da teoria de probabilidades: eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples; construir tabelas simples e gráficos de barras; discutir as diferenças entre experimento determinístico e aleatório; estimar probabilidades por meio da frequência relativa; calcular a probabilidade laplaciana[4] a partir da árvore de possibilidades e analisar padrões observados e esperados.

Essa SE é dividida em quatro sessões totalizando 26 questões. Em cada sessão, as questões devem ser respondidas baseadas numa ação solicitada, sendo que o contexto está associado à seguinte estória:

> A Carlinha e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Carlinha para a casa de Paula, Alex, Fernanda, Felipe e Luiz é de quatro quarteirões, conforme ilustra a Figura 3. A Carlinha costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Paula; terça-feira, Alex; quarta-feira, Fernanda; quinta-feira, Felipe e sexta-feira, Luiz. Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que o acaso escolhesse o amigo a ser visitado pela Carlinha. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Carlinha deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Carlinha deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos.

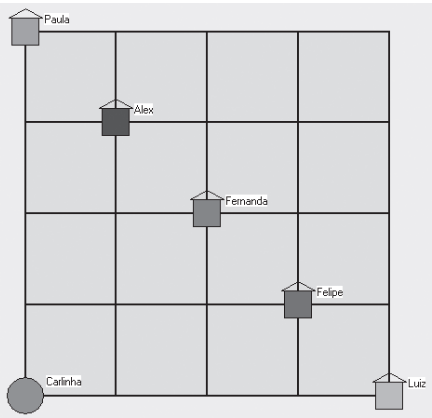

Figura 3 — Estória e Mapa dos "Passeios Aleatórios da Carlinha" (PAC).

Após ler a estória, sem ainda lançar a moeda, os alunos devem responder as perguntas solicitadas nessa primeira sessão. Na segunda sessão, os alunos replicam 32 vezes o experimento aleatório e estimam probabilidades utilizando a frequência relativa; na terceira sessão eles constroem a árvore de possibilidades e calculam a probabilidade laplaciana e na quarta sessão comparam os valores obtidos com as duas formas de atribuir probabilidades e realizam simulações. Existe uma pergunta chave que se repete nas três primeiras sessões: “Todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados?”, a ideia é verificar se desde o início o aluno tem o entendimento que as chances são diferentes, ou se apenas após a experimentação, ou após o cálculo da probabilidade laplaciana (Figura 4).

Organização da sequência de ensino “Os passeios aleatórios da Carlinha”

Sessão I: Contexto	Sessão II: Experimentação aleatória e a probabilidade frequentista	Sessão III: Modelagem matemática e a probabilidade laplaciana	Sessão IV: Decisão
• Estória e concepções prévias de probabilidade	• Experimentação aleatória • Organização dos resultados e a probabilidade frequentista	• Modelagem matemática a partir da árvore de possibilidades • Organização dos resultados e a probabilidade laplaciana.	• Comparação entre as diversas formas de atribuir probabilidade. • Reflexões no ambiente papel e lápis. • Simulação e reflexões no ambiente virtual.

Pergunta norteadora: Todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados?

Figura 4 — Esquema da atividade “Os Passeios Aleatórios da Carlinha”
(Adaptada de Cazorla, Gusmão & Kataoka, 2011).

Vale destacar que a forma de aplicação da SE com os alunos se aproxima da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), pois, inicialmente os alunos respondem todas as questões de forma autônoma sem o auxílio do professor, permitindo que adquiram novos conhecimentos a partir da lógica interna da atividade (situações adidáticas), e apenas no final são feitas discussões entre os alunos e o professor dos resultados obtidos, bem como a institucionalização dos conceitos (situações didáticas).

Pesquisas relacionadas

Alguns pesquisadores já analisaram esta SE, ainda como PAM, sob várias óticas e somente no ambiente papel e lápis. Por exemplo, Gusmão e Cazorla (2009) analisaram com a utilização da teoria Ontossemiotica (Godino, 2002) os resultados da aplicação da atividade com 29 professores de Matemática. Essas autoras concluíram que a SE era viável para ensinar conceitos básicos de probabilidade, contudo observaram a presença de diversos conflitos semióticos devido, principalmente, ao pouco conhecimento dos professores desses conceitos, sendo que alguns deles estavam vivenciando-os pela primeira vez.

Cazorla, Gusmão e Kataoka (2011) utilizaram a mesma teoria (Ontossemiotica) para analisar outra versão dessa SE aplicada a 28 professores da Educação Básica, em um curso de especialização em Ensino de Ciências e Matemática, e concluíram também que a SE é viável por possibilitar a apropriação de diferentes conceitos probabilísticos, bem como formas diferentes de atribuir probabilidades.

Nagamine, Henriques e Cazorla (2010) avaliaram a PAM utilizando a teoria Antropológica do Didático — TAD (Chevallard, 1992), mais especificamente a vertente praxeológica e perceberam que explicitando a técnica (que é uma maneira de fazer ou realizar uma tarefa) e a tecnologia (que é um discurso racional que tem por objetivo justificar a técnica), foi possível identificar conflitos na solicitação de algumas tarefas, indicando a necessidade de um aperfeiçoamento da SE.

Na pesquisa de Nagamine, Henriques, Utsumi e Cazorla (2011), utilizando também a TAD, "a análise revelou que essa sequência permite destacar uma organização praxeológica completa (Tarefa/Técnica/Tecnologia/Teoria) e inverte a praxeologia praticada pela maioria dos professores, uma vez que parte de uma situação-problema, da qual emergem as concepções intuitivas de probabilidade, a probabilidade frequentista, decorrente da experimentação aleatória, e a probabilidade clássica ou laplaciana, proveniente da modelagem matemática, por meio do diagrama de possibilidades" (p. 1).

Hernandez, Kataoka e Oliveira (2010) aplicaram a PAM a um grupo de 91 alunos do terceiro ano do ensino médio que ainda não tinham vivenciado o tópico de Probabilidade nesse ano escolar. Esses autores analisaram qualitativamente as respostas dos alunos, em que foi possível identificar que os alunos compreenderam as diferenças entre experimento determinístico e aleatório, bem como a probabilidade laplaciana e frequentista, e que a atividade era viável para abordar tópicos de Probabilidade a alunos desse ano escolar.

Vita (2012) adaptou a PAM para a aplicação com alunos deficientes visuais. Denominada "Os Passeios Aleatórios do Jefferson", essa nova versão da SE foi testada com quatro alunos cegos do Ensino de Jovens e Adultos (EJA). Na aplicação a autora buscou identificar a potencialidade deste material didático para a aprendizagem dos referidos alunos em conceitos básicos de Probabilidade abordados sob a ótica do modelo de letramento probabilístico proposto por Gal (2005). Para atender ao objetivo, foi desenvolvida uma maquete tátil composta por: um tabuleiro, duzentos e quarenta fichas em emborrachado EVA nas texturas atoalhado e liso, sete colméias, trezentos brinquedos, um carrinho, duas tampas plásticas e as tarefas. Foram feitas diversas adaptações às tarefas para adequá-las às necessidades dos alunos cegos, como por exemplo, a utilização de artefatos de registro ao invés do lápis e papel, tais como as colméias para o registro, as fichas em EVA com duas texturas diferentes representando a direção — movimento do Jefferson no tabuleiro (norte – atoalhado e leste – liso), os brinquedos para representar cada um dos cinco amigos, duas tampas com duas texturas diferentes, que substituíram a cara e coroa da moeda nos sorteios. Foi feita uma análise instrumental fundamentada na Teoria da Instrumentação

(Rabardel, 1995), utilizando o modelo adaptado das situações de atividades coletivas instrumentadas (S.A.C.I.) tendo como polos: aluno cego (Sujeitos), maquete tátil (Instrumento), conceitos básicos de probabilidade (Objeto matemático) pesquisadores/especialistas (Outros sujeitos). Vita (2012) concluiu que a maquete apresentou potencial para ser utilizada como material didático no ambiente educacional, na aprendizagem de probabilidade, pois possibilitou aos alunos, por exemplo, demonstrar competência e proficiência no experimento aleatório e na construção de pictogramas.

Ferreira (2011) aplicou a PAC com sete alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola pública estadual, tanto no ambiente de aprendizagem papel e lápis como no computacional (com software R) sob a perspectiva do letramento probabilístico de Gal (2005) e do construcionismo de Papert (1980). Esse autor conclui que a SE é viável para a aprendizagem de diversos conceitos probabilísticos nos dois ambientes de aprendizagem, ressaltando que a possibilidade de confronto entre a probabilidade frequentista e a laplaciana, potencializada pelo experimento, bem como pelo uso do software R, proporcionou aos alunos novas reflexões em torno dos conceitos probabilísticos.

A análise dessa SE por diferentes referenciais teóricos nessas pesquisas tem possibilitado o aperfeiçoamento da mesma, por conseguinte, contribuído para o processo de validação nos dois ambientes de aprendizagem, com alunos cegos e videntes do ensino médio, professores, estudantes de graduação e de pós-graduação.

Aplicação da PAC no ambiente papel e lápis

Aspectos Gerais

Recomenda-se que no ambiente papel e lápis os alunos trabalhem em duplas e que o professor avalie a viabilidade de implementar todas as etapas da atividade, tendo em vista que algumas requerem conhecimentos prévios que os alunos poderão não ter vivenciado.

Existem duas formas de aplicar essa SE. A primeira, o professor vai entregando cada sessão separadamente e deixa que os alunos respondam sem nenhuma interferência do mesmo. Nesta modalidade, ao final da atividade o professor, deve promover uma discussão coletiva dos resultados, institucionalizando os conceitos envolvidos. Na segunda, o professor entrega as sessões, deixa que os alunos se manifestem coletivamente a cada questão e logo em seguida faz as intervenções necessárias, institucionalizando os conceitos. A escolha pela modalidade vai depender do nível dos conhecimentos prévios dos alunos.

Esta atividade no ambiente papel e lápis pode ser desenvolvida em três encontros de duas horas aula cada, o primeiro encontro para trabalhar as sessões I e II, o segundo para a III sessão e o terceiro para a IV. Apesar de sabermos que inúmeros fatores podem influenciar no tempo de execução esta estimativa pode servir como uma referência inicial.

Os materiais necessários são: cartaz exemplificando o desenvolvimento da atividade (Figura 3); moedas; uma folha de papel transparência, com a malha pronta para o desenho dos gráficos de barras; canetas coloridas para papel transparência (marcador para CD) e o Caderno de Questões.

Descrição das sessões

Sessão I: a estória (o contexto)

O jogo começa com a entrega da estória e o Mapa (Figura 3). Depois que os alunos lerem a estória, deverão receber o Caderno de Questões dessa sessão (Figura 5).

Lendo apenas a estória, sem jogar a moeda, responda:

1) Qual é a diferença entre a forma antiga da Carlinha visitar seus amigos e a nova forma? ____

2) Quais são os possíveis resultados ao lançar uma moeda? ____________

3) Qual é a chance de sair cara: ______________ e de sair coroa: ________

4) Por que vocês acham isso: ____________________________________

5) Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?

   ( ) Não. Quais são as chances: _______________________________

   ( ) Sim. Qual é a chance: ___________________________________

   Por que vocês acham isso: ___________________________________

Figura 5 — Caderno de Questões da Sessão I.

Com essas questões podem ser discutidos com os alunos os seguintes pontos:

a) Qual é a diferença entre a forma antiga da Carlinha visitar seus amigos e a nova forma? O objetivo deste questionamento é discutir a noção de situação determinística (determinar o amigo a ser visitado segundo um critério previamente estabelecido) e experimento aleatório (jogar a moeda quatro vezes e deixar o acaso determinar o amigo a ser visitado ou caminho a ser percorrido).

b) Qual é a chance de sair cara (C) ou coroa (X)? O objetivo deste questionamento é identificar as concepções dos alunos sobre chance e probabilidade e discutir os termos: probabilidade, provável, aleatório, azar, acaso, casual e chance. Discutir se todos os alunos concordam que a probabilidade de cara — P(C), é igual à probabilidade de coroa — P(X), igual a ½, e explicar o porquê dessa afirmação, argumentando não é porque só existem dois possíveis resultados: Cara e Coroa, e sim, porque são eventos equiprováveis se a moeda for honesta. É importante ressaltar que no caso de eventos equiprováveis a forma de atribuir probabilidades é denominada de laplaciana, no sentido de ser obtida pela relação entre o número de casos favoráveis ao evento dividido pelo número de casos possíveis. Para debater sobre equiprobabilidade o professor pode utilizar o exemplo da germinação das sementes, em que só existem dois resultados possíveis também, germina e não germina, mas isso não significa que a probabilidade é igual a ½.

c) Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados pela Carlinha? A sugestão é que o professor ouça as respostas dos alunos e deixe a discussão para o término de toda atividade, de maneira que o aluno tenha oportunidade de mudar de opinião ao longo da atividade.

Sessão II: a experimentação aleatória

Para Carlinha visitar um amigo, cada dupla de alunos tem que lançar a moeda quatro vezes, que denominamos de experimento. Se sair cara (C), Carlinha andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Cada dupla de alunos deve repetir esse experimento 32 vezes e anotar os resultados no quadro de registros da Figura 6. Por exemplo, se sair a sequência: cara, cara, coroa, cara, anotar na coluna sequência: CCXC e, na coluna do amigo visitado: Alex. Em seguida deve responder as questões dessa sessão (Figura 7).

Repetição	Sequência	Amigo visitado
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13		
14.		
15.		
16.		

Repetição	Sequência	Amigo visitado
17.		
18.		
19.		
20.		
21.		
22.		
23.		
24.		
25.		
26.		
27.		
28.		
29.		
30.		
31.		
32.		

Figura 6 — Quadro de registro dos resultados da experimentação.

6) Quem tem mais chance de ser visitado (a) Fernanda ou Paula? Por que? Existe a chance da Carlinha não visitar algum amigo? ( ) Não ( ) Sim. Por que?
____

7) Após a experimentação responda: Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?

   ( ) Não, porque: _______________________________________

   ( ) Sim, porque: _______________________________________

8) Sistematizem os resultados do quadro da Figura 6 na Tabela 1, chamada de Tabela de Distribuição de Frequência — TDF.

Tabela 1. Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Carlinha

Amigo	Nº de vezes que foi visitado (f)	Frequência relativa (h)	Porcentagem
Paula			
Alex			
Fernanda			
Felipe			
Luiz			
Total	32	1,00	100,00

Em que h = f/32, que representa uma estimativa da probabilidade.

Depois que vocês organizaram os resultados na TDF, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?" Pense na sua resposta considerando a questão 5 da sessão I.

   ( ) Não ( ) Sim. Por quê? __________________________________

9) Vocês estão recebendo um papel de transparência com duas grades para construir gráficos (Figura 8), bem como canetas de transparência. Na grade de cima representem os dados da frequência relativa, constante da Tabela 1. Comparem seus resultados com os dos seus colegas. Esses são iguais? ( ) Sim ( ) Não.
O que vocês acham disso? _________________

Figura 7 — Caderno de Questões da Sessão II.

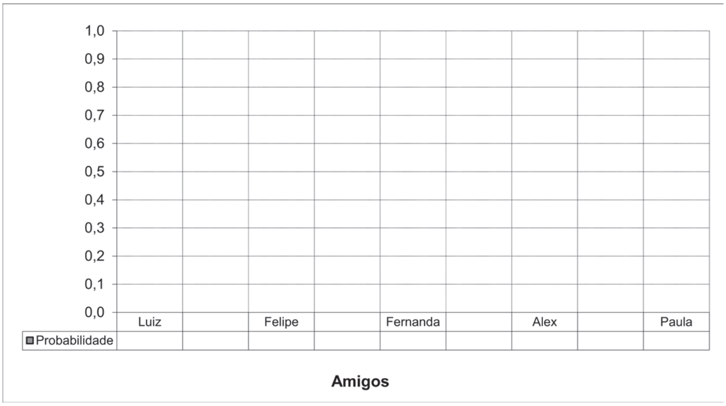

Figura 8 — Malha para registro das frequências relativas e da probabilidade laplaciana.

Nessa fase os alunos devem perceber que cada dupla poderá apresentar um resultado diferente. O professor pode aproveitar para discutir o conceito de amostragem, uma vez que estes resultados são frutos de um experimento, de uma amostra e que cada amostra gera uma estimativa da probabilidade do evento "a visita da Carlinha ao amigo em questão". Essa forma de quantificar a chance ou atribuir probabilidade é denominada de probabilidade frequentista.

Além disso, poderá explorar, também, o padrão das estimativas, isto é, os alunos perceberão que os amigos que estão nas pontas têm menos chances do que os amigos que estão na parte mais central. E, a partir dessa observação instigar os alunos a perceberem que isso é devido ao número de caminhos possíveis. E, assim, o professor pode questionar se existe outra forma de determinar esse número de caminhos, sendo então a próxima etapa da atividade a construção da árvore de possibilidades.

Salienta-se que a pergunta "Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?", é repetida duas vezes nessa sessão. A pergunta após a experimentação tem o intuito de verificar se apenas com os resultados da experimentação, ainda sem estarem organizados na TDF, o aluno já começa a perceber que existem diferenças no número de visitas, e associado a questão se existe chance da Carlinha não visitar algum amigo, verifica-se a influência da experimentação nas concepções dos alunos. Se a mudança ainda não ocorrer, o professor pode avaliar a resposta dos alunos novamente após a organização dos resultados na TDF.

Sessão III: a modelagem matemática (a árvore de possibilidades)

Logo na primeira tarefa dessa sessão os alunos deverão construir a árvore de possibilidades, iniciando a modelagem matemática da situação problema (Figura 9). As respostas das tarefas subsequentes vão depender da construção da árvore, e é por esse motivo que foi feita a opção de indicar o primeiro caminho, para servir como exemplo, sem que fosse necessária a interferência direta do professor, inclusive para os casos em que os alunos não tenham ainda vivenciado ainda na escola esse tipo de representação. Outro ponto importante a ressaltar é que o professor pode solicitar aos alunos que ao invés de construir a árvore, desenhem os caminhos possíveis no próprio cartaz (Figura 3), utilizando canetas coloridas para cada caminho, podendo também ser reproduzidos cinco cartazes para que a determinação do número de caminhos de cada amigo seja feita individualmente.

10) Completem a árvore de possibilidades, indicando a sequência sorteada, o número de caras e o amigo visitado. Observe que cada ramo se desdobra em dois novos ramos (um para cara e outro para coroa) a cada sorteio:

Ponto de partida	Primeiro sorteio	Segundo sorteio	Terceiro sorteio	Quarto sorteio	Sequência sorteada	Nº de caras	Amigo visitado
				C	CCCC	4	Paula
			C	X			
		C					
			X				
	C						
		X					
Carlinha							
		C					
	X						
		X					

11) Quantos caminhos existem ao todo? ________________________________

12) Descubram, se existe, uma relação comum a todos os caminhos que levam a cada um dos amigos: ____

13) Após a construção da árvore de possibilidades, responda: Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados? ( ) Não, porque: ______ ( ) Sim, porque: ____

14) Sistematizando os resultados da árvore de possibilidades, preencham a Tabela 2:

Tabela 2. Distribuição de probabilidade da visita da Carlinha a seus amigos

Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade laplaciana (p)*
Paula			
Alex			
Fernanda			
Felipe			
Luiz			
Total			

(*) efetuar a divisão para expressar na forma decimal. Use apenas 3 casas decimais.

15) No papel transparência, na grade de baixo, representem os dados da probabilidade (p) constante na Tabela 2. Comparem seus resultados com os dos seus colegas. Esses são iguais? ( ) Sim ( ) Não. O que vocês podem concluir? ____

Figura 9 — Caderno de Questões da Sessão III.

Após a resposta às questões da Sessão III, podem ser discutidos com os alunos os seguintes pontos:

a) Quantos caminhos levam Carlinha à casa de seus amigos? Analisando o diagrama de árvore verifica-se que existem 16 caminhos, mutuamente excludentes, ou seja, a Carlinha não pode percorrer, simultaneamente, dois ou mais caminhos. Logo o espaço amostral associado ao experimento aleatório “lançar a moeda quatro vezes” estará formado por Ω = {CCCC, CCCX, CCXC, CCXX, CXCC, CXCX, CXXC, CXXX, XCCC, XCCX, XCXC, XCXX, XXCC, XXCX, XXXC, XXXX}, que são os 16 caminhos possíveis. Como a moeda é honesta, então os 16 caminhos são equiprováveis e, consequentemente, a probabilidade de cada caminho é igual a $\frac{1}{16}$.

b) Existe uma relação comum[5] a todos os caminhos que levam a cada um dos amigos? O fato de que cada caminho tem a mesma probabilidade ($1/16$) não implica que todos os amigos têm a mesma probabilidade de serem visitados pela Carlinha. Como cada caminho tem $1/16$ de probabilidade de ser escolhido, então a probabilidade de Carlinha visitar Paula seria $1/16$ (pois existe apenas um caminho que leva à sua casa), ocorrendo o mesmo com Luiz. Já a probabilidade de Alex ser visitado será $4/16$, pois existem quatro caminhos, o mesmo acontece com a probabilidade de Felipe ser visitado. A Fernanda terá a maior chance de ser visitada, pois, para a casa dela, existem seis caminhos, logo essa probabilidade será $6/16$. Observar com os alunos a simetria da distribuição das probabilidades.

Neste ponto, o professor pode explicar que esta forma de quantificar a chance ou atribuir probabilidade é chamada laplaciana, pois neste caso particular, estamos em um espaço equiprovável, assim calculamos a probabilidade como o número de caminhos favoráveis em relação ao número de caminhos possíveis. Isto não será verdadeiro no caso em que a probabilidade de sair cara não seja $1/2$.

c) Depois de analisar o número de caminhos que levam a Carlinha para a casa de cada amigo, vocês mudariam de opinião na seguinte questão: "Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?". Nessa fase, o professor deve retomar com os alunos a resposta dada no início da SE e checar se eles mantiveram a resposta ou se essa mudou e em que momento da atividade mudaram de opinião. As experiências em sala de aula têm mostrado que, no início, muitos alunos respondem que todos os amigos têm a mesma chance, pois a probabilidade de cara era a mesma de coroa e, neste caso tendem a mudar de opinião ou após a experimentação aleatória ou após a construção da árvore de possibilidades.

Sessão IV: comparando as duas formas de atribuir probabilidades

Nesta sessão os alunos deverão comparar a probabilidade frequentista (determinado pela frequência relativa) com a probabilidade laplaciana e refletir sobre situações de não equiprobabilidade (Figura 10). Salienta-se que as questões 26 e 27 dessa sessão deverão ser desenvolvidas no ambiente virtual, que será discutida na próxima seção.

Após as respostas às questões da Sessão IV podem ser discutidos com os alunos os seguintes pontos:

a) Vocês acham justa a NOVA forma da visita da Carlinha entre os amigos? A forma como a Carlinha escolhe o amigo a ser visitado parece injusta com os amigos que moram nos extremos em relação aos que moram no centro do bairro e isto é devido à regra, pois a Carlinha só anda para o Norte (Cara) ou Leste (Coroa) e assim, o número de caminhos é maior para o amigo que mora no centro do bairro e diminui conforme se afasta em direção dos extremos.

b) Caso vocês achem injusta essa forma, vocês poderiam indicar outra forma de sortear o amigo a ser visitados pela Carlinha? Neste caso, pode-se explorar a distribuição uniforme, onde cada amigo vai ter a mesma probabilidade de ser escolhido: ao invés de sortear o caminho a ser percorrido, sorteia-se diretamente o amigo a ser visitado. Nesta forma de escolher aleatoriamente o amigo a ser visitado, cada um tem a mesma probabilidade de ser escolhido e é igual a $1/5$, ou 20% das vezes.

16) Preencham a Tabela 3 com os resultados da Tabela 1 e 2:

Tabela 3. Quadro comparativo da atribuição de probabilidades

Amigo	Frequência relativa (h)	Probabilidade laplaciana (p)
Paula		
Alex		
Fernanda		
Felipe		
Luiz		
Total		

17) Qual é a diferença entre essas duas formas de atribuir probabilidades? __

18) Analisando os resultados, para vocês, qual dessas duas maneiras de atribuir probabilidades é mais adequada? ( ) frequentista ( ) probabilidade laplaciana, por que?

19) Vocês acham justa a NOVA forma da visita da Carlinha entre os amigos quando comparada com a forma antiga? ( ) Sim ( ) Não, por que?

20) Caso vocês achem injusta essa forma, vocês poderiam indicar outra forma de sortear o amigo a ser visitado pela Carlinha?

21) Usando o mesmo critério do lançamento da moeda o que você faria para que a Fernanda deixasse de ser a única amiga mais visitada?

22) Se utilizássemos uma moeda "viciada", isto é manipulada para que a probabilidade para sair a face cara fosse de 0,6. Quem seria(ão) o(s) amigo(s) mais visitado(s)?

23) Se a probabilidade de sair cara fosse de 0,8. Quem seria(ão) o(s) amigo(s) mais visitado(s)?

24) Se a probabilidade de sair cara fosse de 0,1. Quem seria(ão) o(s) amigo(s) mais visitado(s)?

25) Considerando que estamos simulando o lançamento de uma moeda, como você classificaria as moedas pensadas nas tarefas de 21 a 24? E a moeda pensada nas tarefas anteriores cuja probabilidade de sucesso era de 0,5?

26) Realize uma simulação com 12.000 experimentos, considerando a probabilidade de sair cara igual a 0,5. O que você observa quando compara os resultados desta simulação:
a) Com os resultados dos 32 experimentos (Tabela 1)
b) Com a probabilidade laplaciana (Tabela 2):

27) Experimente agora trocar a probabilidade de sair cara para 0,8? Quais são as suas conclusões? Quem será(ão) o(os) amigo(s) mais visitado(s)?

Figura 10 — Caderno de Questões da Sessão IV.

c) Discussão da não equiprobabilidade (questões 21 a 25) — Os alunos poderão refletir sobre situações de não equiprobabilidade, ainda sem simulação ou qualquer nova experimentação, de como ficaria a distribuição das visitas para probabilidades diferentes de 0,5.

Aplicação da PAC no ambiente virtual

Como dito, no AVALE-EB, dispomos de um ambiente virtual em que o professor pode desenvolver as SE com os alunos num laboratório de informática com acesso à internet. Essa etapa poderá ocorrer em um encontro de 3 horas aula.

Nesse ambiente virtual (http://avale.iat.educacao.ba.gov.br/) os alunos poderão potencializar a análise dos resultados realizando diferentes tipos de comparação entre duplas, entre as probabilidades: laplaciana e frequentista, bem como executando simulações computacionais, como, por exemplo, a replicação do experimento 12.000 vezes com diferentes probabilidades de sair cara (desde 0,1 a 0,9). A simulação é importante para que o aluno observe o fenômeno da convergência, e possa compreender a aproximação da frequência relativa para a probabilidade laplaciana.

Outro ponto importante a ressaltar é que, no ambiente virtual, os alunos poderão comparar seus resultados entre si, em especial, no que se refere aos resultados da Tabela 1 da sessão II.

1ª Etapa — Cadastro do aluno

Cada dupla de alunos deve cadastrar um login e uma senha, e em seguida acessar a atividade com essas informações (Figura 11).

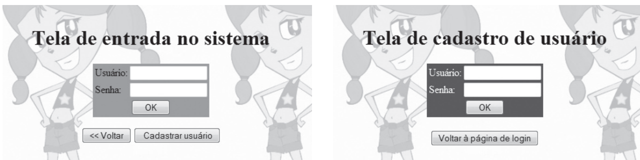

Figura 11 — Telas de cadastro do usuário e entrada.

2ª Etapa — Geração do banco de dados

Os resultados da experimentação aleatória devem ser cadastrados e enviados. Em seguida a dupla poderá acessar o banco de dados da turma completa, já que a geração ocorrerá em tempo real (Figura 12).

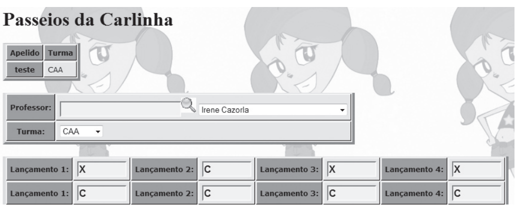

Figura 12 — Fragmento da tela de entrada dos dados.

3ª Etapa — Análise dos resultados

Diferentes resultados podem ser gerados no AVALE, a saber: TDF por dupla e para a turma; gráficos de barras comparando os resultados de duas duplas; tabelas e gráficos de barras comparando a frequência relativa com a probabilidade laplaciana, tanto por dupla, como para a turma completa, bem como para as simulações (Figura 13).

Em especial no caso das simulações, procurando responder as questões 26 e 27 da sessão IV:

26) Realize uma simulação com 12.000 experimentos, considerando a probabilidade de sair cara igual a 0,5. O que você observa quando compara os resultados desta simulação:

a) Com os resultados dos 32 experimentos (Tabela 1);

b) Com a probabilidade laplaciana.

27) Experimente agora trocar a probabilidade de sair cara para 0,8? Quais são as suas conclusões? Quem será(ão) o(os) amigo(s) mais visitado(s)?

Simulacao Dinamica

Amigo	Visitas	f	p	100f	p(%)
Luiz	779	0.065	0.062	6.5	6.2
Felipe	2974	0.248	0.250	24.8	25.0
Fernanda	4562	0.380	0.375	38.0	37.5
Alex	2949	0.246	0.250	24.6	25.0
Paula	736	0.061	0.062	6.1	6.2
Total	12000	1.000	1.000	100.0	100.0

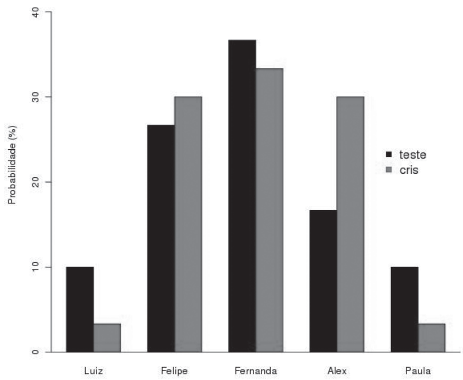

Figura 13 — Exemplos de tabela e gráficos gerados.

Considerações finais

As discussões feitas no ambiente papel e lápis devem ser retomadas também no ambiente virtual, reforçando principalmente a importância dos resultados obtidos via simulação computacional.

É interessante salientar como os próprios alunos percebem o significado de chance, considerada aqui como a probabilidade intuitiva. Ao realizar os experimentos eles percebem que existe a variabilidade amostral e compreendem a estimativa de probabilidade a partir da frequência relativa. Com a árvore de possibilidades, se depararem com a forma laplaciana de atribuir a probabilidade.

Após o percurso muitos alunos pensam então que a forma laplaciana de atribuir probabilidade é determinística, pois essa não varia de dupla para dupla, trazendo à tona os conflitos cognitivos decorrentes da compressão do conceito de probabilidade.

Assim, esta SE traz no seu bojo uma ampla gama de conceitos que o professor pode ir explorando de acordo com o nível escolar dos alunos e mostra também a importância do uso de diversas metodologias na formação de conceitos complexos, como os da teoria de probabilidades.

Nesse sentido, observamos que os passeios aleatórios da Carlinha, assim como os passeios aleatórios do Brownie enriquecem a possibilidade didática de trabalhar com os conceitos básicos de probabilidade e, o fato da Carlinha poder se movimentar apenas para o norte e para o leste, sem poder retornar, conduz a distribuição Binomial.

Além disso, a forma lúdica como a SE pode ser conduzida mostra que os alunos ficam altamente motivados e descontraídos durante a execução do experimento, gostam de trabalhar com a probabilidade expressa em forma de porcentagem, sentem dificuldade de construir os gráficos mesmo utilizando a malha pronta; mas, mesmo assim, todos conseguem cumprir a tarefa e perceber a importância dos conceitos de Probabilidade trabalhados; o que reforça a viabilidade da utilização da mesma no ensino fundamental II e ensino médio, e a importância do professor discutir os conceitos envolvidos.

Notas

1 Salienta-se que neste artigo o termo chance está sendo utilizado de acordo com Watson (2006). Segundo essa autora "muitos documentos curriculares adotam como uma aproximação da probabilidade o termo chance, para distinguir aspectos mais intuitivos e experimentais deste tópico do estudo da probabilidade baseada nos espaços amostrais" (p.128). Entende-se então que a chance seria um palpite, uma intuição do valor provável de ocorrência de um evento, e a probabilidade seria a quantificação da chance já utilizada a linguagem apropriada da Probabilidade, qual seja, por exemplo, espaço amostral, probabilidade clássica ou laplaciana, probabilidade frequentista.

2 A PAM foi adaptada do trabalho de Fernandez e Fernandez (1999), que o propuseram para ensinar a distribuição Binomial para alunos do Ensino Superior.

3 Para respeitar os direitos autorais da Mauricio de Souza Produções, foi feita uma analogia da turma da Mônica para a turma da Carlinha em que: Mônica é a Carlinha; Horácio - Luiz; Cebolinha – Felipe; Magali – Fernanda; Cascão – Alex e Bidu – Paula.

4 Rotulamos probabilidade laplaciana por se tratar de um espaço amostral com eventos (caminhos) equiprováveis, e assim o cálculo de probabilidades se dá a partir da razão número de caminhos favoráveis e número de caminhos possíveis.

5 A intenção desta questão era levar os alunos a perceber a relação entre o número de caras e o amigo a ser visitado. Contudo, a maioria dos estudantes destes níveis de ensino não consegue estabelecer esta relação. Por esta razão, a equipe está reformulando a SE para aplicações futuras.

Referências

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Probabilidad.* Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Online: http://www.ugr.es/~batanero. Acesso em 25 junho de 2014.

Batanero, C., & Godino, J. (2002). *Stochastics and its didactics for teachers: Edumat-Teachers project.* Granada, Universidad de Granada. Online: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.html. Acesso em 25 junho de 2014.

Batanero, C., & Díaz, C. (2007). Probabilidad, Grado de Creencia y Proceso de Aprendizaje. In *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2009). Research and Developments in Probability Education. *International Electronic Journal of Mathematics*, *3*(4), 111–130.

Brasil (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática, 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental 1. Brasília: SEF/MEC.

Brasil (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Especial. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Brasil (2002). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações curriculares nacionais para o Ensino Médio*-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF.

Brousseau, G. (1996). Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In J. Brun (Org.), *Didáctica das matemáticas* (pp. 35–111). Lisboa: Instituto Piaget.

Cazorla, I. M. (2006). Teaching Statistics in Brazil. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [CD-ROM]. Salvador (Bahía), Brazil: International Association for Statistical Education. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Cazorla, I. M., & Santana, E. R. S. S. (2006). *Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio*. Itabuna-BA: Via Litterarum.

Cazorla, I. M., Gusmão, T., & Kataoka, V. Y. (2011). Validação de uma sequência didática de Probabilidade a partir da análise da prática de professores, sob a ótica do Enfoque Ontossemiótico. *Bolema*, *24*(39), 537–560.

Cazorla, I. M, Kataoka, V. Y., & Nagamine, C. M. L. (2010). *Os passeios aleatórios da Carlinha*. Tutorial do AVALE. On line: http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos/download/1622.pdf. Acesso em 25 junho de 2014.

Chance, B., & Rossman, A. (2006). Using simulation to teach and learn Statistics. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [CD-ROM]. Salvador (Bahía), Brazil: International Association for Statistical Education. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73–112.

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., & Fernandes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. In M. Pytalk, T. Rowland & E. Swoboda (Eds). *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Rzeszów (Poland). On line: www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/cerme7/CERME7.pdf. Acesso em 25 junho de 2014.

Coutinho, C. (2001). *Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. Tese de Doutorado, Univ. J. Fourier, Grenoble, France.

Fernandez, D., & Fernandez, D. X. (1999). O prazer de aprender probabilidade através de jogos: descobrindo a distribuição Binomial. In *Conferência Internacional Experiências e Expectativas do ensino de Estatística — Desafios para o século XXI*. Florianópolis, Brazil.

Ferreira, R. S. (2011). *Ensino de probabilidade com o uso do programa estatístico R numa perspectiva construcionista*. Dissertação de Mestrado, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39–63). New York, NY: Springer.

Gusmão, T., & Cazorla, I. M. (2009). Uma análise semiótica dos passeios aleatórios da Mônica: Atividade para ensinar conceitos básicos de probabilidade. In *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Distrito Federal, Taguatinga.

Hernandez T., H. M., Kataoka, V. Y., & Oliveira, M. S. de. (2010). Random walks in teaching probability at the high school. In C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics — ICOTS8*. Ljubljana, Slovenia: International Association for Statistical Education. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Kaplan, J. J., Rogness, N. T., & Fisher, D. G. (2014). Exploiting lexical ambiguity to help students understand the meaning of random. *Statistics Education Research Journal*, *13*(1), 9–24.

Kataoka, V., Rodrigues, A., & Oliveira, M. S. (2007). Utilização do conceito de probabilidade Geométrica com recurso didático no ensino de Estatística. In *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.

Lane, D. M., & Peres, S. C. (2006). Interactive simulations in the teaching of statistics: promise and pitfalls. In A. Rossman, & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [CD ROM]. Salvador (Bahía), Brazil: International Association for Statistical Education. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Lee, H. S., Angotti, R. L., & Tarr, J. E. (2010). Making Comparisons between observed data and expected outcomes: student's informal hypothesis testing with probability simulation tools. *Statistics Education Research Journal*, *9*(1), 68–96.

Lopes, C. (2003). *O Conhecimento Profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Mills, J. (2002). Using computer simulation methods to teach statistics: A review of the literature. *Journal of Statistics Education*, 10(1). Retirado de http://www.amstat.org/publications/jse/v10n1/mills.html.

Nagamine, C. L., Henriques, A., & Cazorla, I. M. (2010). Análise a priori dos Passeios Aleatórios da Mônica. In *X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, Bahia, Brasil.

Nagamine, C. M. L., Henriques, A., & Utsumi, M. (2010). Praxiological Analysis of The random Walks of Mônica. In C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics — ICOTS8*. Ljubljana, Slovenia: International Association for Statistical Education. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Nagamine, C. M. L., Henriques, A., Utsumi, M., & Cazorla, I. M. (2011). Análise Praxeológica dos "Passeios Aleatórios da Mônica". *Bolema*, *24*(39), 451–472.

Nilsson, P. (2013). Challenges in seeing data as useful evidence in making predictions on the probability of a real-world phenomenon. *Statistics Education Research Journal*, *12*(2), 71–83.

Papert, S. (1980). *Midstorms: Children, computers and powerful ideas*. New York, NY: Basic Books. [Trad. como Logo: Computadores e Educação (2ª ed.). São Paulo: Editora Brasiliense].

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les tecnologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Soto-Andrade, J. (2013). Metaphorical random walks: A royal road to stochastic thinking? In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Antalya (Turkey). On line: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG5/WG5_Soto_Andrade.pdf. Acesso em 24 de junho de 2014.

Vita, A. C. (2012). *Análise Instrumental de uma maquete tátil para aprendizagem de Probabilidade por alunos cegos*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Resumo. Este trabalho tem como objetivo discutir as potencialidades didáticas de uma sequência de ensino (SE) de Probabilidade proposta para alunos de Ensino Fundamental II (de 11 a 14 anos) e de Ensino Médio (de 14 a 17 anos). A SE denominada "Passeios Aleatórios da Carlinha" foi proposta pela equipe do Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico para a Educação Básica – AVALE-EB para ser desenvolvida tanto no ambiente de aprendizagem papel e lápis como no ambiente virtual. Essa SE permite trabalhar os conceitos básicos de Probabilidade; construir tabelas simples e gráficos de barras; discutir as diferenças entre situação determinística e experimentação aleatória; estimar probabilidades por meio da frequência relativa; calcular a probabilidade laplaciana a partir da árvore de possibilidades e comparar as duas formas de atribuir probabilidades. Salienta-se que o professor pode explorar esses conceitos de acordo com o nível escolar dos alunos, selecionando apenas parte dos conceitos envolvidos. Além disso, a forma lúdica como a SE pode ser conduzida, mostra que os alunos ficam altamente motivados e descontraídos durante a execução do experimento e todos conseguem perceber a importância dos conceitos de Probabilidade trabalhados, o que reforça a viabilidade da utilização dessa SE no âmbito escolar.

Palavras-chave: Ensino de Probabilidade; Experimentação aleatória; Ambientes de Aprendizagem Papel e Lápis e Virtual.

Abstract. This paper aims to discuss the didactic opportunities of a Probability teaching activity (SE) proposed to secondary (11-14 years) and high school (14-17 years) students. This SE named "Passeios Aleatórios da Carlinha" was developed by team of "Virtual Environment for support in developing statistical literacy for scholar students (AVALE-EB)" to be used in paper and pencil learning environment such as virtual environment. This SE provides to discuss probabilistic basic concepts, construct simple frequency tables and respective bar charts, compare deterministic situation and random experiments, estimate probabilities with relative frequency, compute theoretical probability by using possibilities tree and compare the estimate and theoretical probability. The teacher can explore these concepts in a progressive manner, according to knowledge level of students. Besides, the entertainment way of SE highlights students becomes motivated and relaxed during the activity and everyone can accomplish the task and realize the importance of the concepts of Probability, which enhances the feasibility of this SE in schools.

Keywords: Probability Teaching; Random Experiments; Virtual and Paper/Pencil Learning Environment.

■ ■ ■

VERÔNICA YUMI KATAOKA
Universidade Estadual de Santa Cruz
veronicayumi@terra.com.br

CLAUDIA BORIM DA SILVA
Universidade São Judas
dasilvm@uol.com.br

IRENE CAZORLA
Universidade Estadual de Santa Cruz
icazorla@uol.com.br

(Recebido em março de 2014; aceite para publicação em junho de 2014)